



DOI: 10.18721/JPM.10312

УДК 519.6:533.6.011

ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ С КВАЗИОДНОМЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИЕЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РАСЧЕТАХ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Е.В. Колесник, Е.М. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Изложен ряд схем второго порядка аппроксимации, разработанных для расчета газодинамических течений на неструктурированных сетках. Конвективные потоки на гранях контрольных объемов вычислены по схеме Роу. Для повышения порядка точности использован MUSCL-подход с применением различных квазиодномерных схем реконструкции газодинамических переменных и ограничителей, которые делают решение монотонным. Сопоставительный анализ работоспособности рассмотренных схем проведен на двух задачах о течении невязкого газа, а именно трансзвукового обтекания крылового профиля NACA-0012 и сверхзвукового течения в канале с центральным клином. Выполнена оценка гладкости решений, полученных по разным схемам, диссипативность схем и устойчивость процесса вычислений.

Ключевые слова: сжимаемое течение; численное моделирование; MUSCL-подход; неструктурированная сетка; квазиодномерная реконструкция

Ссылка при цитировании: Колесник Е.В., Смирнов Е. М. Тестирование различных схем с квазиодномерной реконструкцией газодинамических переменных при расчетах на неструктурированных сетках // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 3. С. 123–139. DOI: 10.18721/JPM.10312

TESTING OF VARIOUS SCHEMES WITH QUASI-ONE-DIMENSIONAL RECONSTRUCTION OF GASDYNAMIC VARIABLES IN THE CASE OF UNSTRUCTURED-GRID CALCULATIONS

E.V. Kolesnik, E.M. Smirnov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

Several schemes of the second-order approximation worked out in the literature for unstructured-grid-based computations of gasdynamic flows are described. The convective fluxes on the control-volume's faces are evaluated using the Roe's approximate Riemann solver. The MUSCL approach with the use of various quasi-one-dimensional schemes of reconstruction of gasdynamic variables and limiters making the solution monotonic is applied in order to improve the approximation accuracy. Comparative analysis of the working capacity of the schemes under consideration has been carried out through solving two problems of inviscid gas flow. Namely, the transonic NACA-0012 airfoil flow and the superperersonic flow in the duct with the central ramp were computed. The smoothness of solution, obtained with different schemes, dissipativity features of the schemes and computational process stability were evaluated.

Key words: compressible flow; numerical simulation; MUSCL approach; unstructured grid; quasi-one-dimensional reconstruction

Citation: E.V. Kolesnik, E.M. Smirnov, Testing of various schemes with quasi-one-dimensional

reconstruction of gasdynamic variables in the case of unstructured-grid calculations, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10 (3) (2017) 123–139. DOI: 10.18721/JPM.10312

Введение

Сверхзвуковые течения могут содержать газодинамические разрывы, что существенно осложняет их численное моделирование. Привлекательная для практики схема аппроксимации конвективных потоков должна обеспечивать возможность достаточно точного разрешения газодинамических разрывов на небольшом числе внутренних точек при отсутствии осцилляций поля течения в окрестности разрывов. В работе С.К. Годунова [1] была предложена схема с использованием точного решения задачи Римана о распаде разрыва, исходно обладающая указанными свойствами. Эта схема получила широкое распространение и стала основой для развития многих других схем, где применяются различные приближенные методы решения задачи Римана [2]. Среди таких методов особо широко используется схема Рунге [3].

Схема Годунова и основанные на ней схемы данного типа, в своем первоначальном варианте, являются методами первого порядка точности. Для уточнения решения как в области разрывов, так и в областях гладкого изменения газодинамических переменных, применяются схемы повышенного порядка точности, разработка которых началась с работ В.П. Колгана [4] и продолжается до настоящего времени. Основываясь на принципе минимальных значений производной, В.П. Колган, чтобы повысить порядок точности, предложил формировать линейное распределение переменных внутри каждой расчетной ячейки (контрольного объема) и использовать полученные значения на грани при решении задачи о распаде разрыва. В развитие этой идеи возник обобщенный подход, согласно которому повышение порядка точности схемы достигается путем замены постоянного распределения газодинамических величин в каждой расчетной ячейке линейным [5, 6] или параболическим [7]. При этом потоки вычисляются с использованием уточненных (реконструирован-

ных) значений переменных на гранях ячейки. В литературе данный способ известен как MUSCL-подход (MUSCL – Monotonic Upstream-Centered Scheme). При реализации схем повышенного порядка аппроксимации требуется, однако, решить проблему подавления нефизических осцилляций, возникающих в численном решении (как правило) в окрестности ударных волн. Для этого в процедуру построения кусочно-полиномиальных распределений вводятся специальные функции-ограничители (limiters), которые модифицируют наклоны распределений переменных в ячейках.

Концептуально, большинство методов контроля осцилляций основано на анализе одномерного скалярного уравнения переноса. Для решения этого уравнения разработана надежная теория неосциллирующих схем. В работе [1] впервые было введено понятие монотонных схем, т. е. таких, которые не приводят к возникновению осцилляций в численном решении. При этом было показано, что такие схемы могут быть только первого порядка точности. На практике используется более широкий класс схем, приводящих, как и монотонные схемы, к неосциллирующим решениям.

А. Хартен в работе [8] ввел понятие полной вариации, которое характеризует меру «негладкости» решения, и рассмотрел класс TVD-схем (Total Variation Diminishing), для которых выполняется условие невозрастания полной вариации любого физически допустимого решения. Выполнение этого условия приводит к классу схем, сохраняющих монотонность. Недостаток TVD-схем заключается в том, что применение ограничителей вносит значительную численную вязкость и порядок точности схемы уменьшается до первого на каждом экстремуме решения.

В работе [9] предложены схемы на основе LED-принципа (LED – Local Extremum Diminishing) [10], согласно которому возникший локальный максимум не должен увеличиваться; примером является SLIP-схема, где использование мягкого ограничи-

теля позволяет повысить порядок точности на гладких экстремумах [11]. Существуют схемы повышенного порядка точности, не использующие ограничители, например схемы ENO [12] и WENO [13]. Здесь подавление осцилляций достигается за счет использования «плавающего» шаблона в окрестности рассматриваемой ячейки, и они сохраняют базовый порядок точности на гладких экстремумах решения.

При решении многомерных задач с использованием структурированных (регулярных) сеток, схемы повышенного порядка, разработанные для одномерного случая, можно обобщить путем применения квазиодномерного подхода вдоль каждого координатного направления. Такой подход успешно применяется и получил широкое распространение [14 – 19].

В случае неструктурированных сеток выделяются два основных направления в конструировании схем повышенного порядка точности с применением ограничителей.

Одно из них связано с применением квазиодномерных вычислений при локальном выделении для каждой грани некоего подходящего направления (аналогичного координатному направлению, исходно присутствующему в структурированной сетке). Данный подход называют квазиодномерным (в англоязычной литературе используются термины *one-dimensional*, *face-based*, *multislope*). Его реализация имеет свои особенности в каждом из двух основных подходов к построению контрольных объемов: вокруг узла расчетной сетки (*vertex-based arrangement*) или же непосредственно формируемых элементами (ячейками) исходной сетки (*cell-centered arrangement*) [20, 21].

Другое направление охватывает подходы, исходно предназначенные для многомерного случая. В них значение единого для расчетной ячейки скалярного ограничителя вычисляется с использованием информации из всех соседних ячеек (в англоязычной литературе используются термины *multidimensional*, *scalar*, *monoslope*). Вычисленное значение ограничителя применяется при реконструкции переменных для всех граней, в отличие от квазиодномерно-

го подхода, при котором для каждой грани вычисляется индивидуальное значение ограничителя.

В работе А. Джемесона [11], где предлагается SLIP-схема для структурированных сеток, дается и ее обобщение на случай неструктурированных сеток в рамках квазиодномерного подхода. Однако это обобщение ограничено только случаем сеток, состоящих из треугольных элементов, причем лишь в рамках «вершинно-центрированного» подхода (*vertex-based*). В работе [22] для такого же случая предложено обобщение TVD-схемы и показано, что эффективность работы ограничителя сильно зависит от расчетной сетки, а в некоторых случаях вообще не удастся устранить осцилляции.

При использовании квазиодномерного подхода в случае неструктурированных сеток, состоящих из произвольных элементов, для каждой грани восстанавливаются значения переменных в нескольких точках вдоль направления, пересекающего грань контрольного объема. Эти значения используются для вычисления ограничителя для данной грани. Впервые такой подход был предложен в работе [23].

Существуют различные варианты восстановления точек. Наиболее простыми и, благодаря этому, часто используемыми являются способы, предложенные в работах [23, 24]. Некоторые методы требуют более сложных вычислений, например алгоритм, предложенный в работе [25]. В работе [26] предложен метод, позволяющий учесть неравномерность сетки, а в работе [27] алгоритм восстановления точек учитывает скошенность элементов сетки. Во всех этих работах для восстановления точек используется значение градиента, вычисленное в центрах контрольных объемов.

Для некоторых методов не требуется значение градиента при восстановлении точек [28 – 30], однако в этом случае алгоритм реконструкции требует большого объема вычислений, особенно при решении трехмерных задач.

Существуют обобщения ENO- и WENO-схем на случай неструктурированных сеток [31 – 34]. Однако повышенная сложность

алгоритма реконструкции для этих схем приводит при их реализации к сильному росту вычислительных затрат.

Практика последних десятилетий позволяет заключить, что в случае неструктурированных сеток использование схем второго порядка точности, основанных на линейной реконструкции с применением ограничителей, является в большинстве случаев разумным компромиссом. Последний обеспечивает, с одной стороны, умеренную сложность и затратность вычислительного алгоритма, а с другой – достаточное качество численного решения широкого круга газодинамических задач (не включающих, однако, задачи аэроакустики, требующие для своего решения схем более высокого порядка точности [21]). Но даже в случае аппроксимации второго порядка различные подходы к квазиодномерной реконструкции переменных, включающей применение того или иного ограничителя, формируют большое разнообразие численных схем. В связи с этим возникает потребность в проведении сопоставительных тестовых расчетов, направленных на выявление достоинств и недостатков конкретных формулировок.

В настоящей работе представлены результаты расчетов данной направленности с применением различных схем, разработанных для расчетов газодинамических течений на неструктурированных сетках в рамках квазиодномерного подхода к реконструкции переменных. Расчеты выполнены с использованием гидрогазодинамического кода внутреннего пользования. Для вычисления конвективных потоков на гранях контрольных объемов применялась схема Роу.

Численный метод

Общая формулировка метода конечных объемов. Запишем балансовые соотношения для динамики невязкого сжимаемого газа в конечно-объемной формулировке. При этом для поиска стационарных решений будем использовать метод установления по псевдовремени τ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} d\Omega + \sum_M \int_{S_m} \mathbf{F} dS = 0, \quad (1)$$

где Ω – контрольный объем, M – число граней контрольного объема, S_m – площадь текущей грани, $m = \overline{1, M}$,

$$\mathbf{w} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho H]$$

– вектор консервативных переменных (ρ – плотность; H – энтальпия; u, v, w – компоненты вектора скорости),

$$\mathbf{F} = [\rho V_n, \rho u V_n + p n_x, \rho v V_n + p n_y, \rho w V_n + p n_z, \rho H V_n]$$

– вектор потоков (V_n – нормальная составляющая скорости; p – давление; n_x, n_y, n_z – компоненты нормали к грани).

Схема Роу. Изложение указанной схемы первого порядка точности представим в предположении равномерности расчетной сетки. Величина потока \mathbf{F}_f на грани контрольного объема складывается из основной части $\langle \mathbf{F} \rangle$ и диссипативной \mathbf{D} :

$$\mathbf{F}_f = \langle \mathbf{F} \rangle - \mathbf{D}. \quad (2)$$

Основная часть потоков вычисляется с использованием значений \mathbf{w}^R и \mathbf{w}^L консервативных переменных в центрах ячеек («правой» и «левой»), прилегающих к грани:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{w}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{w}^L)). \quad (3)$$

Диссипация вычисляется по схеме Роу [3]:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{w}^R, \mathbf{w}^L) \right| (\mathbf{w}^R - \mathbf{w}^L). \quad (4)$$

Матрица Якоби $\tilde{\mathbf{A}} = (\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{w})$ на грани вычисляется по значениям переменных, полученным путем осреднения по Роу значений переменных в центрах прилегающих ячеек:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho^R \rho^L}, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = (\sqrt{\rho^R} \mathbf{V}^R + \sqrt{\rho^L} \mathbf{V}^L) / (\sqrt{\rho^R} + \sqrt{\rho^L}), \quad (6)$$

$$\tilde{H} = (\sqrt{\rho^R} H^R + \sqrt{\rho^L} H^L) / (\sqrt{\rho^R} + \sqrt{\rho^L}). \quad (7)$$

Модуль Якобиана вычисляется как произведение

$$\left| \tilde{\mathbf{A}} \right| = \mathbf{R} \left| \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right| \mathbf{L},$$

где $\left| \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right|$ – диагональная матрица, составленная из модулей собственных значений матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$; \mathbf{R} – матрица, составленная из

правых собственных векторов как столбцов; L – обратная ей матрица.

Для предотвращения возникновения ударных волн разрежения абсолютные значения собственных чисел модифицируются следующим образом [35]:

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} |\tilde{\lambda}|, & \text{если } |\tilde{\lambda}| > \varepsilon; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{|\tilde{\lambda}|^2}{\varepsilon} + \varepsilon \right), & \text{если } |\tilde{\lambda}| < \varepsilon, \end{cases} \quad (8)$$

где ε – положительный порог, пропорциональный скорости звука.

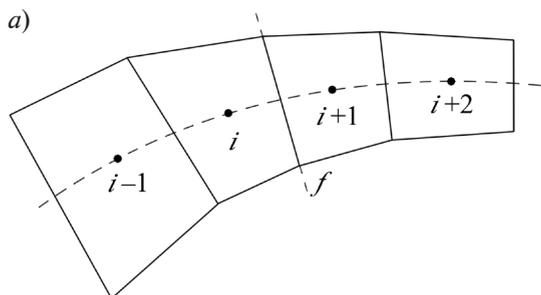
Реконструкция решения и ограничителя.

Для повышения порядка точности с использованием MUSCL-подхода, кусочно-постоянное распределение переменных заменяется кусочно-полиномиальным, в частности кусочно-линейным в случае схемы второго порядка точности. Перед вычислением потока на грани проводится процедура реконструкции, которая позволяет вычислить «левые» и «правые» значения консервативных переменных $w_f^{L/R}$ на грани, в соответствии с распределением переменных в контрольном объеме. Соответственно, потоки на грани вычисляются с использованием этих значений.

Рассмотрим сначала процедуру линейной реконструкции решения для случая структурированных сеток (рис. 1, а).

Для TVD-схем [8] значения переменных слева и справа на грани f вычисляются в соответствии с линейной односторонней экстраполяцией [36]:

$$u_f^L = u_i + \frac{1}{2} \psi(r_i)(u_i - u_{i-1}), \quad (9)$$



$$u_f^R = u_{i+1} - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{1}{r_{i+1}} \right) (u_{i+2} - u_{i+1}), \quad (10)$$

где u – любая из реконструируемых переменных; $\psi(r)$ – ограничитель, введенный для контроля осцилляций (в случае $\psi = 0$ схема переходит в схему первого порядка точности).

Ограничитель вычисляется как функция отношения двух разностей:

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}. \quad (11)$$

В работе [37] получены условия, которым должна подчиняться функция ограничителя ψ , с тем чтобы для схемы выполнялось условие невозрастания полной вариации (TVD-условие):

$$\psi(r) = 0 \text{ при } r < 0, \quad (12)$$

$$0 < \left(\frac{\psi(r)}{r}, \psi(r) \right) < 2. \quad (13)$$

В представленных ниже расчетах использовались ограничители minmod, van Leer и van Albada (см. таблицу):

$$\psi_{MM}(r) = \max[0, \min(1, r)], \quad (14)$$

$$\psi_{VL}(r) = \frac{|r| + r}{r + 1}, \quad (15)$$

$$\psi_{VA}(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}. \quad (16)$$

В работе [9] на основе LED-концепции была предложена SLIP-схема, согласно которой значения переменных слева и справа на грани f вычисляются по следующим формулам:

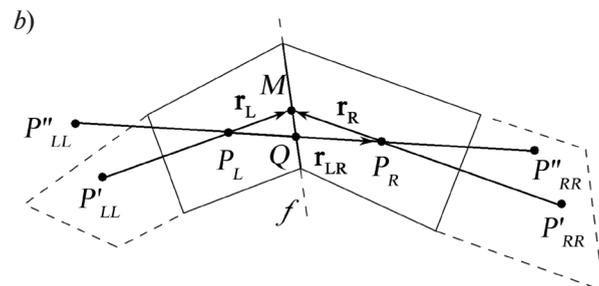


Рис. 1. Реконструкция решения в случаях структурированной (а) и неструктурированной (б) сеток; f – грань; P , Q , M – обозначения точек; r – радиус-векторы

$$u_f^L = u_i + \frac{1}{2} D(\Delta_{i-1/2}, \Delta_{i+3/2}) \times \left(\frac{\Delta_{i-1/2} + \Delta_{i+3/2}}{2} \right), \quad (17)$$

$$u_f^R = u_{i+1} - \frac{1}{2} D(\Delta_{i-1/2}, \Delta_{i+3/2}) \times \left(\frac{\Delta_{i-1/2} + \Delta_{i+3/2}}{2} \right), \quad (18)$$

где $\Delta_{i-1/2} = u_i - u_{i-1}$, $\Delta_{i+3/2} = u_{i+2} - u_{i+1}$.

Функция $D(u, v)$ – это ограничитель, введенный в работе [11]:

$$D(u, v) = 1 - \left| \frac{u - v}{\max(|u| + |v|, \varepsilon \Delta x^r)} \right|^q, \quad (19)$$

где $r = 3/2$, $q \geq 2$; Δx – характерный размер контрольного объема; ε – положительный порог, позволяющий ослабить действие ограничителя на гладких экстремумах.

Отметим, что значения на грани, оцениваемые по формулам (17) и (18), не соответствуют какому-либо полиномиальному распределению переменных в ячейке; в этом состоит отличие SLIP-схемы от MUSCL-подхода.

В случае неструктурированных сеток при использовании квазиодномерного подхода для построения ограничителей требуется восстановить значения переменных в двух виртуальных точках, одна из которых

расположена слева, а другая – справа от грани (точки P_{LL} и P_{RR} на рис. 1, *b*): они будут дополнять известные значения в ближайших к грани точках P_L и P_R .

Заметим, что в явном виде значения переменных в виртуальных точках P_{LL} и P_{RR} не нужны, необходимо определить только разности

$$\Delta^- = u^L - u^{LL}, \quad \Delta^+ = u^{RR} - u^R,$$

где верхними индексами LL и RR обозначены значения переменной в восстановленных точках P_{LL} и P_{RR} .

Если Δ^- и Δ^+ определены, то при введении разности $\Delta = u^R - u^L$ TVD-схема (см. формулы (20), (21)) и SLIP-схема (см. формулы (22), (23)) записываются в следующем виде:

$$u_f^L = u^L + \frac{1}{2} \psi \left(\frac{\Delta}{\Delta^-} \right) \Delta^-, \quad (20)$$

$$u_f^R = u^R - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{\Delta}{\Delta^+} \right) \Delta^+, \quad (21)$$

$$u_f^L = u^L + \frac{1}{2} D(\Delta^+, \Delta^-) \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}, \quad (22)$$

$$u_f^R = u^R - \frac{1}{2} D(\Delta^+, \Delta^-) \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}. \quad (23)$$

В представленных ниже расчетах использовались два варианта восстановления точек, которые были предложены в работах [23] и [24] (далее они именуются как мето-

Таблица

Использованные методы и схемы расчета с обозначениями

Наименование	Источник/конкретизация	Формула	Обозначение
Способ восстановления точек	Bruner – Walters [23]	(24), (25)	BW
	Darwish – Moukalled [24]	(26), (27)	DM
	Структурированная сетка		STR
Схема вычисления потока (схема Роу)	Без пересчета	(28), (30)	R1
	С пересчетом	(29), (30)	R2
Ограничитель	Minmod [38]	(14)	MM
	van Leer [39]	(15)	VL
	van Albada [40]	(16)	VA
	Jameson [11]	(19)	J

Примечания. Первые три ограничителя используются при реконструкции переменных по TVD-схеме (см. формулы (9), (10), (20), (21)), ограничитель Jameson используется в сочетании со SLIP-схемой (см. формулы (17), (18), (22), (23)).

ды BW и DM соответственно).

Согласно методу BW,

$$\Delta^- = 2(\nabla u)_L \cdot \mathbf{r}_L, \quad (24)$$

$$\Delta^+ = -2(\nabla u)_R \cdot \mathbf{r}_R. \quad (25)$$

Согласно методу DM,

$$\Delta^- = 2(\nabla u)_L \cdot \mathbf{r}_{LR} - \Delta, \quad (26)$$

$$\Delta^+ = 2(\nabla u)_R \cdot \mathbf{r}_{LR} - \Delta. \quad (27)$$

В случае метода DM восстановленные значения (точки P''_{LL} и P''_{RR} на рис. 1, *b*) находятся на прямой, соединяющей центры контрольных объемов; реконструированные значения переменных определяются в точке Q на этой прямой.

Для метода BW восстановленные значения (точки P'_{LL} и P'_{RR} на рис. 1, *b*) располагаются на прямых, соединяющих центр грани и центры левого и правого контрольных объемов, а реконструированные значения определяются в центре грани – точке M .

Варианты реализации схемы Роу второго порядка точности

Для построения схем второго порядка точности вычисляются реконструированные и ограниченные значения переменных \mathbf{w}_f^L и \mathbf{w}_f^R , при этом в случае неравномерных сеток используется описанный выше алгоритм для равномерных сеток, что обычно приемлемо для сеток умеренной неравномерности. Здесь следует отметить, что при восстановлении виртуальных точек по методу BW неравномерность сетки учитывается непосредственно.

Возможны два варианта расчета основной части потоков. В первом из них, исходящем из формулировки SLIP-схемы [9], для случая равномерных сеток используется формула (3), а в случае неравномерных сеток она заменяется выражением, определяющим процедуру линейной интерполяции значений в центрах контрольных объемов, прилегающих к грани:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{F}(\mathbf{w}^L) + \beta(\mathbf{F}(\mathbf{w}^R) - \mathbf{F}(\mathbf{w}^L)), \quad (28)$$

где $\beta = \Delta_L / (\Delta_L + \Delta_R)$ ($\Delta_{L/R}$ – расстояние от центра контрольного объема, расположен-

ного слева (L) либо справа (R) от грани до ее центра).

Во втором варианте основная часть потоков вычисляются с использованием реконструированных значений переменных на грани, что является общеупотребительным для TVD-схем [14, 15]:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = 0,5(\mathbf{F}(\mathbf{w}_f^L) + \mathbf{F}(\mathbf{w}_f^R)). \quad (29)$$

Диссипативная часть потока на грани для обоих вариантов расчета основной части вычисляется с использованием реконструированных значений переменных:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{w}_f^R, \mathbf{w}_f^L) \right| (\mathbf{w}_f^R - \mathbf{w}_f^L). \quad (30)$$

Итак, для проведения представленных ниже тестовых расчетов было реализовано два варианта схемы Роу номинально второго порядка точности: в первом из них, обозначенном как R1 (схема без пересчета), вычисления проведены по формулам (28), (30), во втором варианте (схема с пересчетом), обозначенном как R2, используются формулы (29), (30).

В формулах (17), (18), определяющих варианты процедуры восстановления значений переменных в виртуальных точках, используется значение градиента консервативных переменных в центрах контрольных объемов.

В настоящей работе для расчета градиента произвольной скалярной величины используется формула метода Грина – Гаусса:

$$(\nabla \phi)_C = \frac{1}{V} \sum_f \phi_f \mathbf{S}_f, \quad (31)$$

где \mathbf{S}_f – вектор площади грани; ϕ_f – значение переменной в центре текущей грани, которое оценивается посредством линейной интерполяции значений из центров контрольных объемов.

Результаты расчетов и их обсуждение

Для тестовых вычислений использовался код SINF [41], исходно оперирующий со структурированными сетками (разработан на кафедре гидроаэродинамики, горения и теплообмена СПбПУ). В рамках этого конечно-объемного кода были реализованы описанные выше методы повы-

шения порядка точности схемы Роу, которые можно непосредственно перенести на случай их использования в коде, оперирующем неструктурированными сетками. Реконструированные значения вычисляются с использованием TVD-схемы (см. формулы (20), (21)) и SLIP-схемы (см. формулы (22), (23)); восстановление точек проводится с помощью методов BW и DM (см. формулы (24), (25) и (26), (27) соответственно).

Расчеты проводились по неявной схеме метода установления (в приращениях) с дискретизацией стабилизирующего оператора по схеме расщепления матрицы коэффициентов первого порядка.

Тестирование рассматриваемых схем проведено на двумерных задачах о течениях невязкого газа, а именно – на задаче трансзвукового обтекания крылового профиля NASA-0012 и сверхзвукового течения в канале с центральным клином.

Трансзвуковое обтекание крылового профиля NASA-0012. Рассматривается трансзвуковое невязкое обтекание указанного профиля потоком, с числом Маха на бесконечности $M_\infty = 0,8$, под углом атаки $\alpha_\infty = 1,25^\circ$. Эта задача широко используется в литературе для оценки работоспособности различных численных схем [11, 42 – 46]. Для указанных условий реализуется течение, при котором на верхней стороне профиля «садится» относительно сильный скачок уплотнения, а на нижней – слабый (см. рис. 2, а).

Тестовые расчеты проведены для области, внешней границей которой служила окружность радиуса R ; последний в 100 раз превышал линейный масштаб L_s ; при этом хорда профиля составляла $1,018 L_s$. Эталонное решение было получено по алгоритму, исходно предполагающему структурированность сетки. Конкретнее, использовалась SLIP-схема (17), (18) с параметрами ограничителя Jameson (19), имеющими значения $q = 3$, $\varepsilon = 0$. Сеточная сходимость исследовалась посредством проведения расчетов на трех O -сетках, симметричных относительно хорды профиля; размеры сеток составляли 42×161 , 84×321 и 168×641 узлов.

На рис. 2, а показано распределение ко-

эффициента давления, полученное на трех сетках, и приведены значения коэффициентов подъемной силы и сопротивления. По мере измельчения сетки коэффициент подъемной силы увеличивается, а коэффициент сопротивления уменьшается. Сетка, содержащая 84×321 узлов, обеспечивает решение, практически сошедшее по сетке, поскольку отличие от данных, полученных на сетке 168×641 узлов, составляет всего 1,0 % для коэффициента подъемной силы и 3,8 % для коэффициента сопротивления. Полученные значения C_L и C_D хорошо согласуются с результатами работы [43], где расчеты по CUSP-схеме второго порядка точности на сетке 168×641 узлов дали значения $C_L = 0,3569$, $C_D = 0,02224$, а также с данными других авторов [47]. Поскольку решения на сетках 84×321 и 168×641 узлов практически не отличаются, решение на сетке 168×641 можно считать эталонным. Изолинии числа Маха для эталонного решения показаны на рис. 2, б.

Сопоставительные расчеты по различным схемам второго порядка точности проведены на сетке 42×161 . Выбор такой (достаточно грубой) сетки обусловлен тем, что в этом случае наиболее ярко заметны различия в решениях по разным схемам. Основное внимание было уделено тестированию схем, пригодных для применения на неструктурированных сетках. С целью более полного анализа проводились также расчеты по схемам, исходно предполагающим структурированность сетки и не требующим применения процедуры восстановления значений переменных в точках сеточного шаблона.

Результаты сопоставительных расчетов представлены на рис. 3 и 4, где приведены распределения коэффициента давления и изолинии числа Маха для разных схем. Распределения коэффициента давления были получены в окрестности скачка на верхней стороне профиля (рис. 3, а, с, е) и около передней кромки профиля (рис. 3, б, д, ф). Полученные распределения сравнивались с эталонным решением.

Восстановление точек по методу BW приводит к возникновению осцилляций в численном решении около скачка, причем

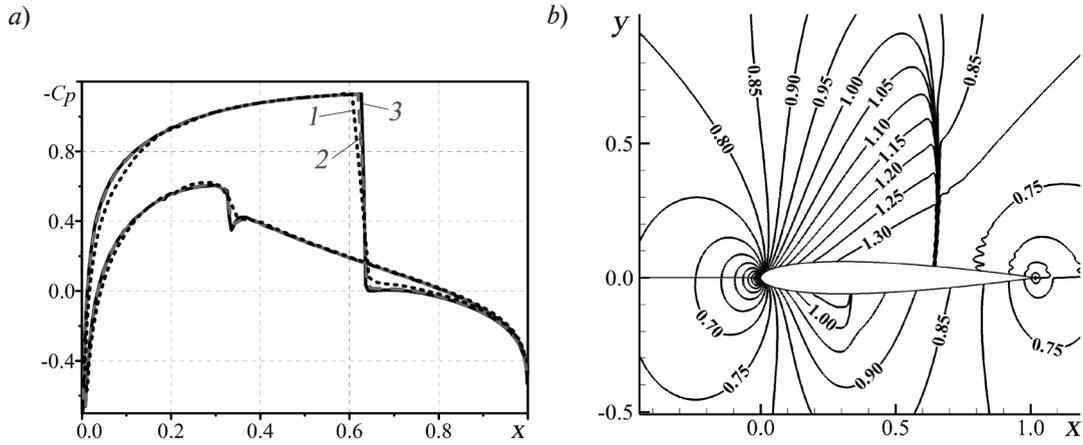


Рис. 2. Распределения коэффициента давления для трех сеток (a) и изолинии числа Маха для эталонного решения (b).

Коэффициенты сопротивления и подъемной силы для сетки 42×161 узлов были соответственно $C_D = 0,02903$, $C_L = 0,3329$ (кривая 1), для сетки 84×321 – $C_D = 0,02296$, $C_L = 0,3501$ (2), для сетки 168×641 – $C_D = 0,02212$, $C_L = 0,3537$ (3)

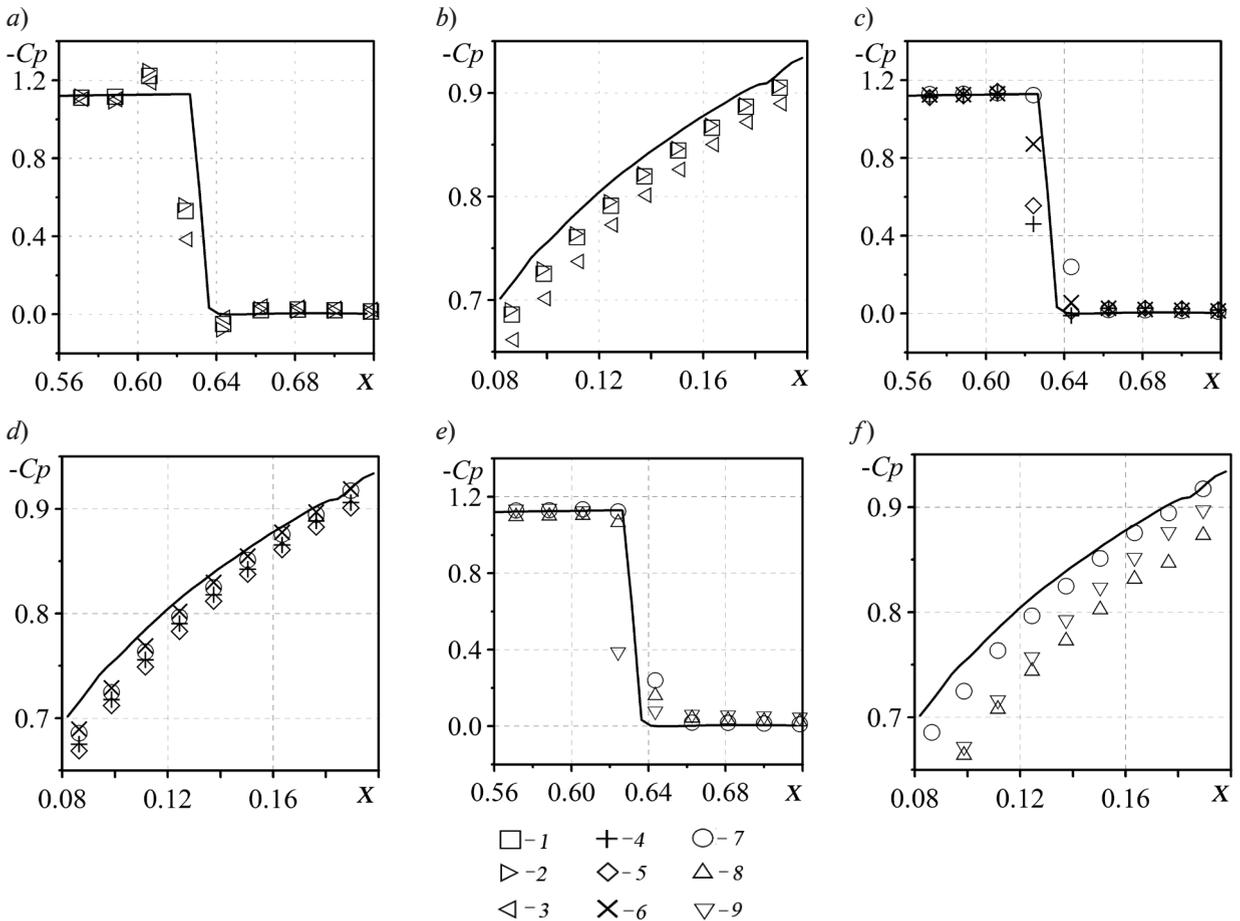


Рис. 3. Распределения коэффициента давления, рассчитанные по схемам R1/BW/J (1), R1/BW/VL (2), R1/BW/MM (3), R1/STR/VL (4), R1/DM/VL (5), R2/STR/VL (6), R2/DM/VL (7), R2/DM/MM (8), R2/DM/J (9); распределения получены в окрестности скачка на верхней стороне профиля (a, c, e) и около передней кромки профиля (b, d, f)

как при использовании TVD-схем, так и при использовании SLIP-схемы (рис. 3, *a*). Для некоторых вариантов, например R2/BR/VL, R2/BR/VA, возникающие осцилляции оказались настолько сильными, что это привело к неустойчивости схемы и невозможности получить сошедшее решение.

Расчеты, проведенные по схеме для структурированной сетки и по схеме для неструктурированной сетки, использующей процедуру восстановления точек по методу DM, дали решения, которые практически не отличаются в области скачка; при этом вдали от скачка (около передней кромки) решение на структурированной сетке лежит ближе к эталонному (рис. 3, *d*).

Анализ результатов, полученных по схеме для неструктурированной сетки при разных подходах к расчету основной составляющей потоков показывает, что в случае TVD-схем использование схемы с пересчетом (R2) приводит к более гладкому решению, по сравнению со случаем схемы без пересчета (R1); это отчетливо видно по изолиниям числа Маха (рис. 4). Вместе с тем, осцилляциям около скачка не наблюдается в обоих случаях (рис. 3, *c*). Кроме того, применение схемы с пересчетом приводит к менее диссипативной схеме: решение около передней кромки лежит ближе

к эталонному, по сравнению со схемой без пересчета. Особым образом ведет себя SLIP-схема: при расчете основной составляющей потоков по схеме с пересчетом она оказывается неустойчивой.

Выбор TVD-ограничителя существенно влияет на диссипативность схемы, в частности, использование ограничителя minmod приводит к более диссипативной схеме, чем ограничителя van Leer. При этом решение около скачка отличается незначительно (рис. 3, *e*). Данные вычислений по SLIP-схеме, с расчетом основной составляющей потоков по схеме без пересчета, позволяют заключить, что SLIP-схема сравнима по диссипативности с TVD-схемой, где применяется схема с пересчетом и ограничитель minmod (рис. 3, *f*).

Сверхзвуковое течение в канале с центральным клином. Рассмотрим вслед за работой [44] двумерное невязкое сверхзвуковое течение в канале с центральным клином, тангенс угла α которого составляет $1/3$. В канал входит сверхзвуковой поток с числом Маха $M_{in} = 3,0$, на выходе поток является также сверхзвуковым.

Эталонное решение, как и в случае задачи обтекания профиля, было найдено в результате вычислений на структурированных сетках с использованием SLIP-схемы. Для исследования сеточной сходимости ис-

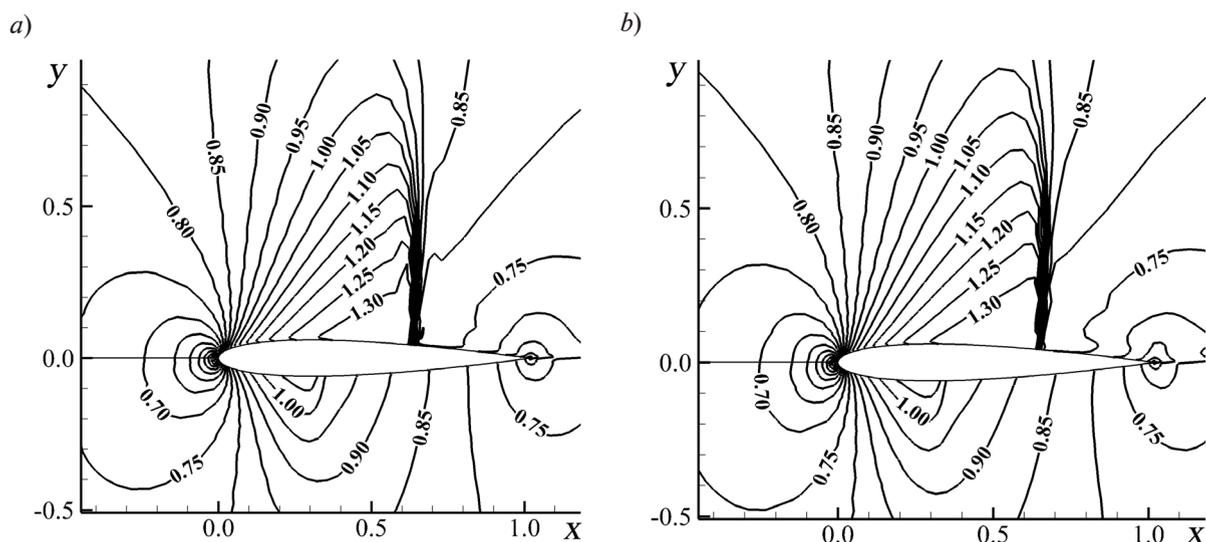


Рис. 4. Изолинии числа Маха рассчитанные по схемам R1/DM/VL (*a*) и R2/DM/VL (*b*) (см. обозначения в таблице)

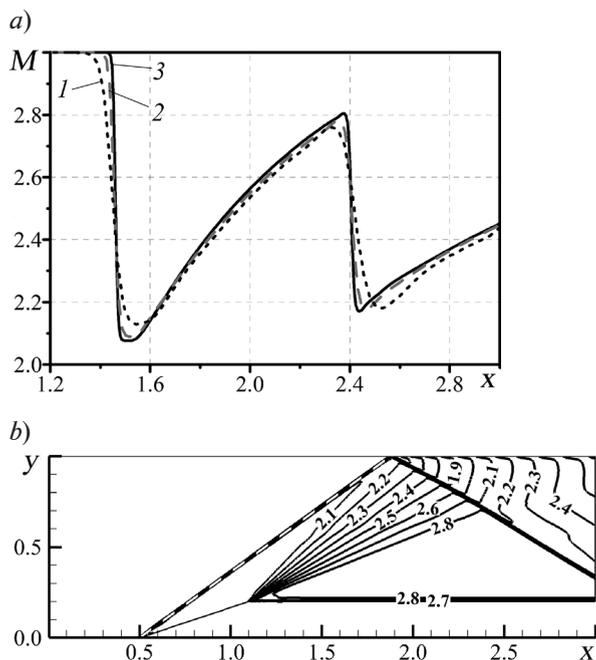


Рис. 5. Изменение числа Маха вдоль линии $y = 0,7$ для трех сеток (a) и изолинии числа Маха для эталонного решения (b)
В расчетах использованы сетки 41×121 узлов (1), 81×239 (2) и 161×477 (3)

пользовали три сетки: 41×121 , 81×239 и 161×477 узлов.

На рис. 5, a для трех сеток приведены распределения числа Маха вдоль линии $y = 0,7$. Решение, полученное на сетке 81×239 узлов, практически не отличается от такового на сетке 161×477 узлов; это

позволяет считать второе из этих решений эталонным.

Изолинии числа Маха для эталонного решения представлены на рис. 5, b, где также нанесена штриховая линия, определяющая положение косога скачка, согласно хорошо известному аналитическому решению.

Сопоставительные расчеты по различным схемам проводились с использованием сетки 41×121 узлов. Их результаты приведены на рис. 6 и 7, где для разных вычислительных схем представлены распределения числа Маха вдоль линии $y = 0,7$ и изолинии числа Маха в расчетной области.

Как и для задачи обтекания профиля $NACA-0012$, при расчете течения в канале с клином восстановление точек по методу BW приводит к возникновению осцилляций в численном решении около скачка. Однако, в отличие от предыдущей задачи, сошедшееся решение удалось получить в том числе и для схем $R2/BR/VL$, $R2/BR/VA$.

Расчеты, проведенные по схеме для неструктурированной сетки, приводят к решению, хорошо совпадающему с таковым по схеме для структурированной, если в первом случае используется процедура восстановления точек по методу DM (на рисунках результаты не приведены).

Аналогично задаче обтекания профиля, в случае TVD -формулировок использова-

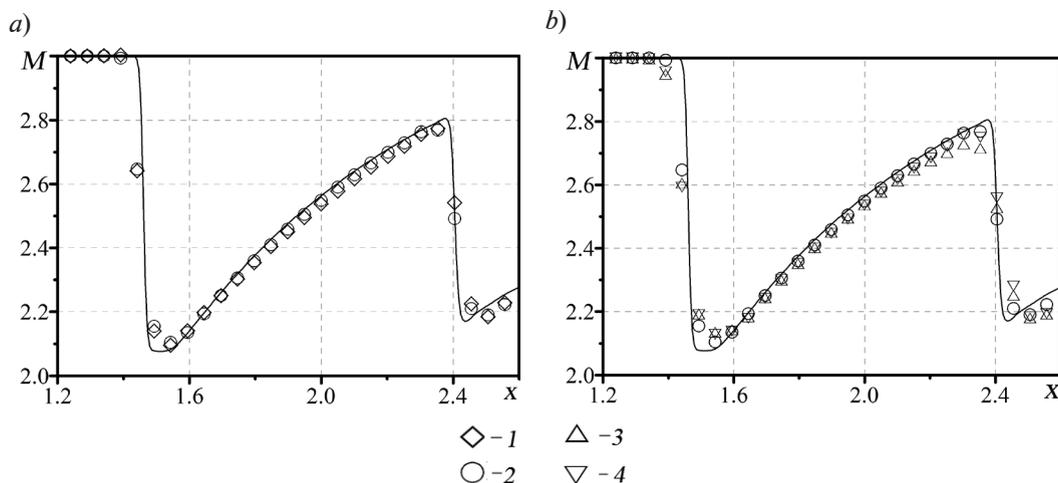


Рис. 6. Распределения числа Маха вдоль линии $y = 0,7$, рассчитанные по схемам $R1/DM/VL$ (1), $R2/DM/VL$ (2), $R2/DM/MM$ (3), $R2/DM/J$ (4)

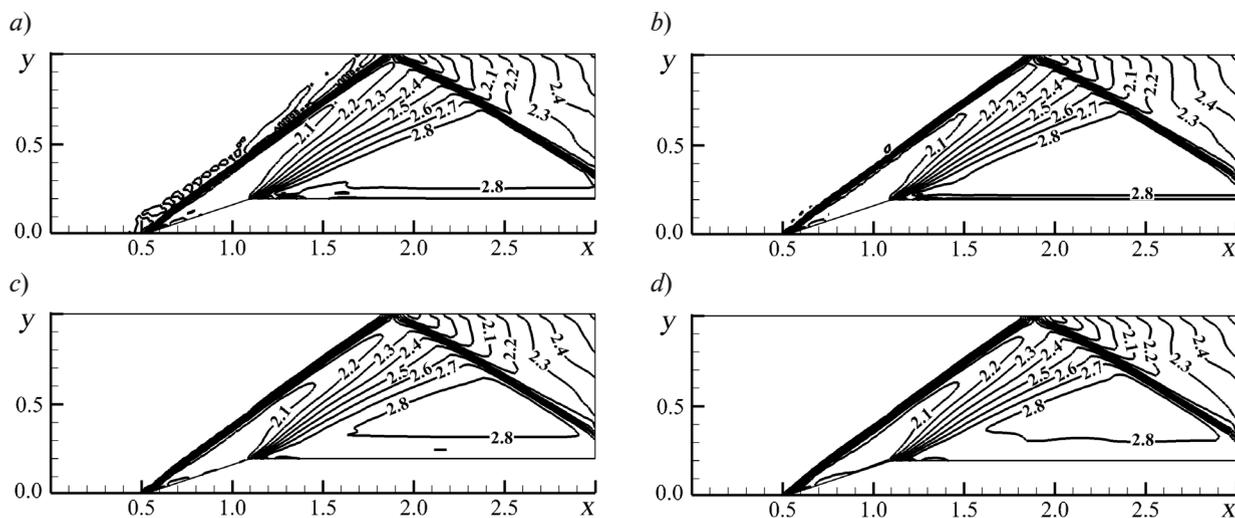


Рис. 7. Поля чисел Маха, рассчитанные с использованием разных схем: R1/DM/VL (a), R2/DM/VL (b), R2/DM/MM (c) и R1/DM/J (d)

ние схемы с пересчетом приводит к более гладкому решению, чем применение таковой без пересчета (см. рис. 7, a, b), и, кроме того, приводит к менее диссипативной схеме: решение вдали от скачка лежит ближе к эталонному. Как и ранее, SLIP-схема при расчете основной составляющей потоков по схеме с пересчетом оказалась неустойчивой.

Ограничитель *minmod* более диссипативен, по сравнению с ограничителем *van Leer*. Это проявляется как в области гладкого решения (см. рис. 7, b, c), так и около скачков (см. рис. 6, b). Такое заключение не противоречит представленным в литературе расчетным данным (см., например, работу [27]). Результаты наших расчетов с использованием ограничителя *van Albada* показали, что по диссипативным свойствам он находится между ограничителями *minmod* и *van Leer* (результаты не приводятся).

Заключение

Выполнена обширная серия тестовых расчетов с применением различных схем повышенного (второго) порядка точности, разработанных и опубликованных различными исследователями для расчета газодинамических течений на неструктурированных сетках в рамках квазиодномерного подхода к реконструкции переменных на

гранях контрольных объемов с применением монотонизирующих ограничителей. Для вычисления потоков на гранях контрольных объемов применялась схема *Roe*.

Предложенный в работе [23] метод восстановления значений переменных в виртуальных точках, необходимых для реализации схем повышенного порядка (метод *BW*), приводит к возникновению осциллирующей в области скачков уплотнения. В случае «искривленных» сеток данный способ восстановления может приводить к неустойчивости вычислений. Большей устойчивостью обладают вычисления, если для восстановления используется метод *DM* [24]. В случае «искривленных» сеток указанный метод вносит дополнительную диссипацию.

На гладкость решения существенно влияет способ расчета основной составляющей конвективного потока: для получения более гладкого решения основную составляющую потоков, так же, как и численную диссипацию, необходимо рассчитывать с использованием реконструированных значений (по схеме с пересчетом). Кроме того, такой способ расчета основной составляющей конвективного потока приводит к менее диссипативной схеме. В целом, однако, выбор ограничителя влияет на диссипативность схемы сильнее, чем способ расчета основной части потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // Математический сборник. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
2. **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 724 p.
3. **Roe P.L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 43. No. 2. Pp. 357–372.
4. **Колган В.П.** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
5. **Колган В.П.** Конечно-разностная схема для расчета разрывных решений нестационарной газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 9–14.
6. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 32. No. 1. Pp. 101–136.
7. **Colella P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) for gasdynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 54. No. 1. Pp. 174–201.
8. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. Vol. 49. No. 3. Pp. 357–393.
9. **Jameson A.** Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows // AIAA Paper. 1993. No. 93-3359.
10. **Boris J., Book D.L.** Flux corrected transport, 1 SHASTA, a fluid transport algorithm that works // J. Comput. Phys. 1973. Vol. 11. No. 1. Pp. 38–69.
11. **Jameson A.** Positive schemes and shock modeling for compressible flow // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1995. Vol. 20. No. 8-9. Pp. 743–776.
12. **Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.** Uniformly high order essentially nonoscillatory schemes. III // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71. No. 2. Pp. 231–303.
13. **Liu X.-D., Osher S., Chan T.** Weighted essentially nonoscillatory scheme // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 115. No. 1. Pp. 202–212.
14. **Yee H.C.** A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods // von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series. 1989-04 (NASA TM-101088). 1989 (<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19890016281>).
15. **Hirsch C.** Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2. Computational methods for inviscid and viscous flows. New York: John Wiley & Sons, 1990. 691 p.
16. **Егоров И.В., Иванов Д.В.** Применение полностью неявных монотонных схем для моделирования плоских внутренних течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 12. С. 91–107.
17. **Волков К.Н.** Разностные схемы расчета потоков повышенной разрешающей способности и их применение для решения задач газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 146–167.
18. **Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В.** Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 7. С. 39–55.
19. **Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Стручков А.В.** Пакет программ ЛОГОС. Методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. С. 583–583.
20. **Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В.** Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
21. **Бахвалов П.А., Козубская Т.К.** Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трехмерной неструктурированной сетки // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 79–95.
22. **Cabello J., Morgan K., Lohner R.** A comparison of higher order schemes used in a finite volume solver for unstructured grids // AIAA Paper. 1994. No. 94-2293.
23. **Bruner C., Walters R.** Parallelization of the Euler equations on unstructured grids // AIAA Paper. 1997. No. 97-1894.
24. **Darwish M., Moukalled F.** TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. Vol. 46. No. 4. Pp. 599–611.
25. **Li L.-X., Liao H.-S., Qi L.-J.** An improved r -factor algorithm for TVD schemes // Int. J. Heat Mass Transf. 2008. Vol. 51. No. 3-4. Pp. 610–617.
26. **Hou J., Simons F., Hinkelmann R.** Improved total variation diminishing schemes for advection simulation on arbitrary grids // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2012. Vol. 70. No. 3. Pp. 359–382.
27. **Denner F., van Wachem G.M.B.** TVD differencing on three-dimensional unstructured meshes with monotonicity-preserving correction of

mesh skewness // J. Comput. Phys. 2015. Vol. 229. Pp. 466–479.

28. **Buffard T., Clain S.** Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2010. Vol. 229. No. 10. Pp. 3745–3776.

29. **Бахвалов П.А., Козубская Т.К.** Экономичная формулировка схем с квазиодномерной реконструкцией переменных // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 89. 16 с.

30. **Le Touze C., Murrone A., Guillard H.** Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2015. Vol. 284. Pp. 389–418.

31. **Abgrall R.** On essentially nonoscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 114. No. 1. Pp. 45–58.

32. **Friedrich O.** Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids // J. Comp. Phys. 1998. Vol. 144. No. 1. Pp. 194–212.

33. **Hu C.Q., Shu C.W.** Weighted essentially nonoscillatory schemes on triangular meshes // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 150. No. 1. Pp. 97–127.

34. **Tsoutsanis P., Titarev V.A., Drikakis D.** WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // J. Comput. Phys. 2011. Vol. 230. No. 4. Pp. 1585–1601.

35. **Harten A., Hyman J.M.** Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. Vol. 50. No. 2. Pp. 235–269.

36. **Spekreijse S.P.** Multigrid solution of monotone second order discretizations of hypersonic conservations laws // Math. Comput. 1987. Vol. 49. No. 179. Pp. 135–155.

37. **Sweby P.K.** High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21. No. 5. Pp. 995–1011.

38. **Roe P.L.** Characteristic based schemes for

the Euler equations // Ann. Rev. Fluid Mech. 1986. Vol. 18. No. 1. Pp. 337–365.

39. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // J. Comput. Phys. 1974. Vol. 14. No. 4. Pp. 361–370.

40. **Van Albada G.D., Van Leer B., Roberts W.W.** A comparative study of computational methods in cosmic gasdynamics // Astron. Astrophysics. 1982. Vol. 108. No. 1. Pp. 76–84.

41. **Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.** Метод конечных объемов в приложениях к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2004. № 2 (36). С. 70–81.

42. **Jawahar P., Kamath H.** A high resolution procedure for Euler and Navier – Stokes computations on unstructured grids // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 164. No. 1. Pp. 165–203.

43. **Николаев М.А.** Сочетание CUSP схемы с методом масштабирования сжимаемости при расчете трансзвуковых течений в областях сложной геометрии // Труды XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МЭИ, 2001. Том 1. С. 108–111.

44. **Michalak K., Ollivier-Gooch C.** Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations // Proceedings of the AIAA Forty-Sixth Aerospace Sciences Meeting. 2008.

45. **Michalak K., Ollivier-Gooch C.** Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations // J. Comput. Phys. 2009. Vol. 228. No. 3. Pp. 8693–8711.

46. **Park J.S., Yoon S.H., Kim C.** Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids // J. Comput. Phys. 2010. Vol. 229. No. 3. Pp. 788–812.

47. **Swanson R., Radespiel R., Turkel E.** Comparison of several dissipation algorithms for central difference schemes // AIAA Paper 97-1945. 1997. Pp. 580–598.

Статья поступила в редакцию 16.05.2017, принята к публикации 25.05.2017.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОЛЕСНИК Елизавета Владимировна – инженер кафедры гидроаэродинамики, горения и теплообмена Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
kolesnik_ev@mail.ru

СМИРНОВ Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой гидроаэродинамики, горения и теплообмена Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
smirnov_em@spbstu.ru

REFERENCES

- [1] **S.K. Godunov**, Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy gidromekhaniki [A difference method of numerical calculations of discontinuous solutions in hydromechanics], Math. Sbornik. 47 (3) (1959) 271–306.
- [2] **E.F. Toro**, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2009.
- [3] **P.L. Roe**, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, J. Comput. Phys. 43 (2) (1981) 357–372.
- [4] **V.P. Kolgan**, Primeneniye printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnykh k postroyeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [Application of the principle of minimum values of derivatives to the construction of finite-difference schemes for discontinuous gasdynamic flow computations], Uchenyye Zap. TSAGI. 3 (6) (1972) 68–77.
- [5] **V.P. Kolgan**, Konechno-raznostnaya skhema dlya rascheta razryvnykh resheniy nestatsionarnoy gazovoy dinamiki [Finite-difference scheme for unsteady discontinuous gasdynamic flow computations], Uchenyye Zap. TSAGI. 6(1) (1975) 9–14.
- [6] **B. van Leer**, Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method, J. Comput. Phys. 32 (1) (1979) 101–136.
- [7] **P. Colella, P.R. Woodward**, The piecewise parabolic method (PPM) for gasdynamical simulations, J. Comput. Phys. 54 (1) (1984) 174–201.
- [8] **A. Harten**, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 49 (3) (1983) 357–393.
- [9] **A. Jameson**, Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow, AIAA Paper. 1993. No. 93-3359.
- [10] **J. Boris, D.L. Book**, Flux corrected transport, 1 SHASTA, a fluid transport algorithm that work, J. Comput. Phys. 11 (1) (1973) 38–69.
- [11] **A. Jameson**, Positive schemes and shock modeling for compressible flow, Intern. J. Num. Meth. Fluids. 20 (8-9) (1995) 743–776.
- [12] **A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. Chakravarthy**, Uniformly high order essentially nonoscillatory schemes, III, J. Comput. Phys. 71 (2) (1987) 231–303.
- [13] **X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan**, Weighted essentially nonoscillatory scheme, J. Comput. Phys. 115 (1) (1994) 202–212.
- [14] **H.C. Yee**, A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series, 1989-04 (NASA TM-101088). (1989). (<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19890016281>)
- [15] **C. Hirsch**, Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2, Computational methods for inviscid and viscous flows, N.Y., John Wiley & Sons, 1990.
- [16] **I.V. Egorov, D.V. Ivanov**, Primeneniye polnostyu neyavnykh monotonykh skhem dlya modelirovaniya ploskikh vnutrennikh techeniy [The application of completely implicit monotone scheme for plane internal flow simulations], Zh. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz. 36 (12) (1996) 91–107.
- [17] **K.N. Volkov**, Raznostnyye skhemy rascheta potokov povyshennoy razreshayushchey sposobnosti i ikh primeneniye dlya resheniya zadach gazovoy dinamiki [High resolution difference scheme for flux calculation and their applications for gasdynamic problems], Vychislitelnyye Metody i Programirovaniye. 6 (1) (2005) 146–167.
- [18] **A.N. Kudryavtsev, T.V. Poplavskaya, D.V. Khotyanovskiy**, Primeneniye skhem vysokogo poryadkatohnosti pri modelirovanii nestatsionarnykh sverkhzvukovykh techeniy [Application of high-order accuracy schemes to numerical simulation of unsteady supersonic flows], Matematicheskoye Modelirovaniye. 19 (7) (2007) 39–55.
- [19] **R.V. Zhalnin, E.A. Veselova, Yu.N. Deryugin, et al.**, Paket programm LOGOS. Metodika povyshennogo poryadka tochnosti na blochno-strukturirovannykh setkakh s ispolzovaniyem rekonstruktsii tipa WENO [Software package LOGOS. The high order of accuracy method on block-structured meshes with WENO reconstruction], Sovremennyye Problemy Nauki i Obrazovaniya. (6) (2012) 583–583.
- [20] **R.N. Volkov, Yu. N. Deryugin, V.N. Emelyanov, et al.**, Raznostnyye skhemy v zadachakh gazovoy dinamiki na nestukturirovannykh setkakh [High-resolution difference schemes for gasdynamic problems on unstructured meshes], Moscow, Fizmatlit, 2015.
- [21] **P.A. Bakhvalov, T.K. Kozubskaya**, Skhema s kvaziodnomernoy rekonstruktsiyey peremennykh, opredelennykh v tseentrakh elementov trekhmernoy nestukturirovannoy setki [Cell-centered quasi one-dimensional reconstruction scheme on 3D hybrid meshes], Matem. Model. 28 (3) (2016) 79–95.
- [22] **J. Cabello, K. Morgan, R. Lohner**, A comparison of higher order schemes used in a finite volume solver for unstructured grids, AIAA Paper.

1994. No. 94-2293.

[23] **C. Bruner, R. Walters**, Parallelization of the Euler equations on unstructured grids, AIAA Paper. 1997. No. 97-1894.

[24] **M. Darwish, F. Moukalled**, TVD schemes for unstructured grids, Int. J. Heat Mass Transfer. 46 (4) (2003) 599–611.

[25] **L.-X. Li, H.-S Liao, L.-J Qi**, An improved r -factor algorithm for TVD schemes, Int. J. Heat Mass Transf. 51 (3-4) (2008) 610–617.

[26] **J. Hou, F. Simons, R. Hinkelmann**, Improved total variation diminishing schemes for advection simulation on arbitrary grids, Int. J. Numer. Methods Fluids. 70 (3) (2012) 359–382.

[27] **F. Denner, G.M.B. van Wachem**, TVD differencing on three-dimensional unstructured meshes with monotonicity-preserving correction of mesh skewness, J. Comput. Phys. 229 (2015) 466–479.

[28] **T. Buffard, S. Clain**, Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes, J. Comput. Phys. 229 (10) (2010) 3745–3776.

[29] **P.A. Bakhvalov, T.K. Kozubskaya**, Ekonomichnaya formulirovka skhem s kvaziodnomernoy rekonstruktsiyey peremennykh [Efficient formulation for schemes with quasi-one-dimensional reconstruction of variables], Preprint IPM im. M.V. Keldysha. (89) (2013).

[30] **S. Le Touze, A. Murrone, H. Guillard**, Multislope MUSCL method for general unstructured meshes, J. Comput. Phys. 284 (2015) 389–418.

[31] **R. Abgrall**, On essentially nonoscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation, J. Comput. Phys. 114 (1) (1994) 45–58.

[32] **O. Friedrich**, Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids, J. Comp. Phys. 44 (1) (1998) 194–212.

[33] **C.Q. Hu, C.W. Shu**, Weighted essentially nonoscillatory schemes on triangular meshes, J. Comp. Phys. 150 (1) (1999) 97–127.

[34] **P. Tsoutsanis, V.A. Titarev, D. Drikakis**, WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions, J. Comput. Phys. 230 (4) (2011) 1585–1601.

[35] **A. Harten, J.M. Hyman**, Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 50 (2) (1983) 235–269.

[36] **S.P. Spekreijse**, Multigrid solution of

monotone second order discretizations of hypersonic conservation laws, Math. Comput. 49 (179) (1987) 135–155.

[37] **P.K. Sweby**, High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal. 21 (5) (1984) 995–1011.

[38] **P.L. Roe**, Characteristic based schemes for the Euler equations, Ann. Rev. Fluid Mech. 18 (1) (1986) 337–365.

[39] **B. van Leer**, Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme, J. Comput. Phys. 14 (4) (1974) 361–370.

[40] **G.D. van Albada, B. van Leer, W.W. Roberts**, A comparative study of computational methods in cosmic gasdynamics, Astron. Astrophysics. 108 (1) (1982) 76–84.

[41] **E.M. Smirnov, D.K. Zaytsev**, Finite volume method as applied to hydro- and gas dynamics and heat transfer problems in complex geometry domains, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. No. 2 (36) (2004) 70–81.

[42] **P. Jawahar, H. Kamath**, A high resolution procedure for Euler and Navier–Stokes computations on unstructured grids, J. Comput. Phys. 164 (1) (2000) 165–203.

[43] **M.A. Nikolayev**, Sochetaniye CUSP skhemy s metodom masshtabirovaniya szhimayemosti pri raschete tranzvukovykh techeniy v oblastiakh slozhnoy geometrii [CUSP scheme with methods of scaling the compressibility in calculating transonic flow in complex geometry domains], Trudy XIII Shkoly-seminara molodykh uchenykh i spetsialistov pod rukovodstvom akad. RAN A.I. Leontyeva. Moscow, Izd-vo. MEI. Vol. 1 (2001) 108–111.

[44] **K. Michalak, C. Ollivier-Gooch**, Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the Euler equations, In: Proceedings of the AIAA 46th Aerospace Sciences Meeting (2008).

[45] **K. Michalak, C. Ollivier-Gooch**, Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations, J. Comput. Phys. 228 (3) (2009) 8693–8711.

[46] **J.S. Park, S.H. Yoon, C. Kim**, Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids, J. Comput. Phys. 2010. 229 (3) (2010) 788–812.

[47] **R. Swanson, R. Radespiel, E. Turkel**, Comparison of several dissipation algorithms for central difference schemes, AIAA-Paper 97-1945. (1997) 580–598.

Received 16.05.2017, accepted 25.05.2017.



THE AUTHORS

KOLESNIK Elizaveta V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
kolesnik_ev@mail.ru

SMIRNOV Evgueni M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
smirnov_em@spbstu.ru