DOI: 10.18721/JPM.11114
УДК 530.12:517.988.38(075.8)

КВАНТОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ В ЗАМКНУТОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Н.Н. Горобей, А.С. Лукьяненко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Энергия замкнутой Вселенной представлена в виде разности двух положительно определенных величин, одна из которых включает энергию материи и энергию гравитационных волн на фоне расширяющейся Вселенной. Вторая величина связана с расширением Вселенной и названа энергией пространства. Суммарная энергия замкнутой Вселенной равна нулю в любой системе отсчета, если выполняются классические уравнения гравитационных связей. В квантовой теории сформулирован принцип минимума плотности энергии материи на пространстве состояний Вселенной при дополнительном условии, что гравитационные связи выполняются в среднем. Определяемые этим принципом состояния Вселенной отличаются степенью возбуждения материи и, согласно гравитационным связям, соответствующим возбуждением пространства. Состояние наименьшего возбуждения предложено рассматривать в качестве Начала Вселенной, а все множество решений — допустимыми физическими состояниями Вселенной в разные моменты космического времени.

Ключевые слова: энергия; время; расширяющаяся Вселенная; гравитационная связь; квантовое состояние; система отсчета

Ссылка при цитировании: Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С. Квантование плотности энергии в замкнутой Вселенной // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 1. С. 147 – 156. DOI: 10.18721/JPM.11114

QUANTIZATION OF THE ENERGY DENSITY IN A CLOSED UNIVERSE

N.N. Gorobey, A.S. Lukyanenko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The energy of a closed universe is represented as a difference of two positive definite quantities, one of which includes the energy of matter and the energy of gravitational waves on the expanding universe background. The second quantity relates to the universe expansion and is called the energy of space. The whole energy of the universe equals zero provided the classical gravitational constraints are taken into account. In quantum theory a principle of the energy density of the matter minimum is formulated in the condition that the quantum gravitational constraints are also fulfilled in average. The states of the universe which satisfy the conditional minimal principle have different degree of the physical degrees of freedom excitation and, according to the gravitational constraints, corresponding excitation of space. The state of minimal excitation is proposed to be taken as the Beginning of the universe, and all the set of solutions, correspondingly, as admitted physical states of the universe at different moments of a cosmic time.

Keywords: energy; time; expanding universe; gravitational constant; quantum state; reference frame

Citation: N.N. Gorobey, A.S. Lukyanenko, Quantization of the energy density in a closed universe, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. PhysicsandMathematics. 11 (1) (2018) 147–156. DOI: 10.18721/JPM.11114

Введение

В основе современной квантовой космологии лежит уравнение Уиллера – де Витта (УдВ) [1, 2], которое можно записать в следующем сжатом виде:

$$\widehat{H}\left|\Psi\right\rangle = 0, \tag{1}$$

где $\widehat{H}$ – гамильтониан Вселенной, заданный в произвольной системе отсчета.

В этой теории реализован ковариантный подход Дирака к квантованию динамических систем со связями [3], в котором физическое состояние системы определяется условиями равенства нулю квантовых связей. В результате квантовое состояние Вселенной не зависит от каких-либо параметров системы отсчета, в том числе от координатного времени (проблема времени в «замороженном» формализме квантовой теории гравитации [4, 5]). В таком случае параметр времени следует искать среди динамических переменных теории. Естественно в качестве таких переменных взять те, которые непосредственно связаны с расширением Вселенной, они заключены в ее масштабном факторе

$$\Omega(x) = [\det g_{ik}(x)]^{1/6},$$

где $g_{ik}(x),\, i,k = 1,2,3,$ – поле метрического тензора 3D-геометрии пространственного сечения Σ.

Такой выбор космического времени является основным при анализе решений уравнений Эйнштейна вблизи космологической сингулярности (где $\Omega(x) \to 0$) [6]. Ниже этому естественному выбору будет дано общее обоснование в рамках Гамильтонова формализма. Время тесно связано с энергией, и решение проблемы времени, следует думать, также связано с определением энергии в замкнутой Вселенной.

Уравнение (1) имеет вид стационарного уравнения Шредингера с нулевым собственным значением энергии. В данной работе равенство нулю энергии Вселенной будет истолковано так, что положительная энергия материи, наполняющей Вселенную (сюда входит и энергия гравитационных волн), полностью компенсируется отрицательной энергией гравитационного поля, связанной с масштабным фактором, которая возникает в случае замкнутого пространства (100%-ый дефект массы). Прежде всего, энергия гравитационного поля в замкнутой Вселенной разделена на две части, имеющие противоположные знаки: часть энергии, которая включает энергию гравитационных волн на фоне расширяющейся Вселенной, и собственно энергия расширения пространства. Предлагаемый подход основан на теореме положительности энергии гравитационного поля, которая первоначально была сформулирована для островного распределения масс с асимптотически плоской геометрией пространства-времени [7, 8]. Гамильтонова формулировка этого результата вместе с новыми комплексными каноническими переменными общей теории относительности (ОТО) предложена в статье [9]. В работе [10] предложено обобщение этой теоремы на случай замкнутой Вселенной. Гамильтониан в этом случае имеет вид линейной комбинации связей ОТО $H_\mu, \mu = 0,1,2,3$ (связи являются плотностями веса +1, их явный вид см. в монографии [11]):

$$H = \int_\Sigma d^3x N^\mu H_\mu. \tag{2}$$

Коэффициенты N^μ называются функциями следования и сдвига и определяют геометрию (3+1)-разбиения пространства-времени на пространство и время. Центральное место в этом рассмотрении занимает тождество Виттена [7, 8], в котором используются вспомогательные биспинорные поля на пространственном сечении Σ.

В случае асимптотически плоской геометрии пространства-времени вспомогательное спинорное поле – решение уравнения Дирака на пространственном сечении входит непосредственно в выражение для энергии гравитационного поля. Оно не имеет физического смысла силового поля, а определяет не менее важный результат действия гравитационного поля – скорость хода времени в каждой точке пространственного сечения Σ [8]. В случае замкнутой Вселенной тождество Виттена дает искомое представление гамильтониана (2) в виде разности двух положительно определенных величин:

$$H = h - D^2, \tag{3}$$

одна из которых, h, совпадает по форме с положительной энергией гравитационного поля в асимптотически плоском пространстве-времени, а вторая, D^2, связана с масштабным фактором $\Omega(x)$ и может быть названа энергией расширения пространства или просто энергией пространства. Представление (3) возникает при использовании специальной параметризации функций следования и сдвига N^{μ} составляющими биспинорного поля Дирака ψ на пространственном сечении Σ [12]. Теперь составляющие биспинора ψ определяют систему отсчета и соответствующую ей геометрию слоения пространства-времени, поэтому мы будем его называть калибровочным спинором. Оба слагаемых в выражении (3) являются квадратичными формами на пространстве биспинорных полей, в частности,

$$h = (\psi, \hat{h}\psi), \tag{4}$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение в пространстве биспинорных полей.

При наличии полей материи, их энергия, пропорциональная тензору энергии-импульса, входит в квадратичную форму (4) также с положительным знаком [7]. Далее будем называть эту величину энергией материи. Согласно уравнениям связей,

$$H_{\mu} \approx 0, \tag{5}$$

гамильтониан (2) равен нулю, а значит и разность энергий материи и пространства в замкнутой Вселенной равна нулю.

Располагая понятием энергии материи в замкнутой Вселенной, значение которой ограничено снизу, можно поставить задачу отыскания ее минимума в квантовой космологии. Эта задача сформулирована в работе [13], где соответствующее основное состояние предложено рассматривать в качестве Начала Вселенной. В данной работе принцип минимума (экстремума) энергии материи и вытекающие из него уравнения сформулируем как основу альтернативного УдВ (1) определения физических состояний Вселенной в квантовой космологии. В обычной квантовой механике стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{h}\left|\Psi\right\rangle = E\left|\Psi\right\rangle \tag{6}$$

возникает естественным образом в задаче на минимум (экстремум) среднего значения энергии (см., например, работу [14]):

$$\left\langle W\right\rangle = \frac{\left\langle\Psi\right|\hat{h}\left|\Psi\right\rangle}{\left\langle\Psi\middle|\Psi\right\rangle} \tag{7}$$

на Гильбертовом пространстве состояний изолированной системы.

Сама эта задача имеет смысл постольку, поскольку оператор энергии $\hat{h}$ ограничен снизу. Замкнутая Вселенная – это идеальная изолированная система, а согласно сформулированному выше утверждению, энергия материи в ней положительно определена. При квантовании квадратичная форма (4) превращается в оператор

$$\hat{h} = (\psi, \hat{\hat{h}}\psi), \tag{8}$$

действующий в пространстве состояний вселенной $\left|\Psi\right\rangle$, где теперь двумя «шляпками» обозначен оператор, действующий в пространстве биспиноров ψ и одновременно в пространстве состояний Вселенной.

Таким образом, задача минимума (экстремума) должна быть сформулирована для функционала

$$\rho = \frac{\left\langle\Psi\right|(\psi, \hat{\hat{h}}\psi)\left|\Psi\right\rangle}{\left\langle\Psi\right|(\psi, \psi)\left|\Psi\right\rangle}. \tag{9}$$

Эта величина имеет размерность плотности энергии, поскольку в нормировочной квадратичной форме (ψ, ψ) в знаменателе предполагается интегрирование по объему Вселенной. Однако в формулировке этого принципа минимума возникнет затруднение, связанное с тем, что физические степени свободы материи (и гравитационных волн) взаимодействуют также с масштабным фактором $\Omega(x)$. Масштабный фактор определяет объем Вселенной, но из состава физических степеней свободы нами исключен. Указанное взаимодействие заключается в том, что оба слагаемых в правой части выражения (3) зависят от всех параметров 3D-геометрии.

Чтобы учесть эту зависимость, достаточно будет дополнить принцип минимума средней плотности энергии добавочными условиями, которые накладываются квантовыми связями на физические состояния Вселенной:

$$\langle \Psi | \widehat{H}_\mu | \Psi \rangle = 0. \quad (10)$$

Заметим, что к гравитационным связям (5) добавятся Гауссовы связи калибровочных теорий, которые лежат в основе стандартной модели материи [15], которые мы обозначим

$$G_a \approx 0, \quad (11)$$

где a – нумерующий индекс.

Это добавление произойдет автоматически, поскольку связи (11) содержатся в тензоре энергии-импульса полей материи. В результате приходим к условному принципу минимума (экстремума) среднего значения энергии материи в замкнутой Вселенной для функционала

$$\frac{\langle \Psi | (\psi, \hat{\hat{h}}\psi) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | (\psi, \psi) | \Psi \rangle} + \int_\Sigma \sqrt{g} d^3x [l^\mu \langle \Psi | \widehat{H}_\mu | \Psi \rangle + A^a \langle \Psi | D_a | \Psi \rangle], \quad (12)$$

где $l_\mu(x), A^a(x)$ – множители Лагранжа.

В следующем разделе даны необходимые определения и явный вид представления (3) гамильтониана замкнутой Вселенной. Из тождества Виттена выведено операторное представление гравитационных связей и дано обоснование выбора масштабного фактора Вселенной в качестве внутреннего (многострелочного) параметра времени в расширяющейся Вселенной. Затем из условного принципа минимума (12) получим систему уравнений, среди которых будет искомое «стационарное» уравнение Шредингера.

Гамильтониан замкнутой Вселенной

Введем спинорные переменные, которые присутствуют в тождестве Виттена и доказательстве теоремы положительности энергии гравитационного поля [7, 8]. Спинорное поле – это пара комплексных чисел $\lambda_A \in C^2, A = 0,1,$ заданных в каждой точке пространственного сечения Σ, имеющее определенные трансформационные свойства при преобразованиях пространственных координат (необходимые определения и обозначения алгебры спиноров содержатся в работе [15]). При использовании спинорных переменных удобно также использовать для описания гравитационного поля комплексные канонические переменные (σ_{iAB}, M^{kCD}), определяемые соотношениями

$$\sigma_{iAB}\sigma_k^{AB} = g_{ik},\ \sigma_{iAB}\sigma^{iCD} = \varepsilon_{(A}{}^{C}\varepsilon_{B)}{}^{D}, \quad (13)$$

$$M^{kCD} \equiv \pi^{kl}\sigma_l{}^{CD}, \quad (14)$$

а также условием эрмитовости спиновых коэффициентов метрики:

$$\sigma^+_{iAB} \equiv 2n_A{}^{C'}n_B{}^{D'}\bar{\sigma}_{iC'D'} = -\sigma_{iAB}, \quad (15)$$

где $\pi^{lm}(x),\ l,m = 1,2,3,$ – канонические импульсы, сопряженные 3D метрическому тензору (они являются тензорной плотностью веса +1); вместе с $g_k(x)$ они образуют вещественные канонические переменные гравитационного поля Арновитта – Дезера – Мизнера (АДМ) (см. работу [11]).Верхней чертой обозначена операция комплексного сопряжения.

Спин-тензоры и $n^{AB'}$, определяемые соотношениями $\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA},\ \varepsilon_{01} = 1$ и

$$n^{AA'}n^B{}_{A'} = \frac{1}{2}\varepsilon^{AB}, \quad (16)$$

представляют собой, соответственно, метрический тензор и произвольный унитарный спин-тензор в пространстве спиноров C^2. Спинорные индексы поднимаются и опускаются с помощью ε_{AB} и приобретают штрих при операции комплексного сопряжения спинора (два штриха аннигилируют).

Из всех канонических скобок Пуассона (СП) для новых переменных, выделим только одно СП-соотношение, относящееся к масштабному фактору Ω Вселенной:

$$\{\ln\Omega^2(x), M(y)\} = \delta^3(x-y), \qquad (17)$$

где $M \equiv M^{kCD}\sigma_{kCD}$.

Масштабный фактор определяет 3D-объем Вселенной:

$$V = \int_\Sigma \Omega^3 d^3x. \qquad (18)$$

Введем в пространстве спинорных полей комплексную связность [17]:

$$A_{kMN} = \Gamma_{kMN}(\sigma) + \frac{i}{\sqrt{2g}} M_{kMN}, \qquad (19)$$

где $\Gamma_{lMN}(\sigma)$ – обычная спиновая связность без кручения, которая подчиняется условию эрмитовости вида (15).

Она определяет ковариантную производную

$$\nabla_k\lambda_A \equiv \partial_k\lambda_A + A_{kA}{}^B\lambda_B \qquad (20)$$

в пространстве спинорных полей.

Нам потребуются также биспиноры Дирака

$$\psi \in C^2 \otimes \bar{C}^2.$$

На пространстве биспинорных полей определим 3D-оператор Дирака

$$\widehat{D}\psi \equiv i\sqrt{2}\begin{pmatrix} n_A{}^{B'}\sigma^k{}_{B'}{}^C\nabla_k\lambda_C \\ n_{A'}{}^B\bar{\sigma}^k{}_B{}^{C'}\bar{\nabla}_k\bar{\mu}_{C'} \end{pmatrix}, \ \psi = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \bar{\mu}_{A'} \end{pmatrix} \quad (21)$$

и введем эрмитово скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int_\Sigma \sqrt{g}d^3x n_{AA'}(\bar{\lambda}_1{}^{A'}\lambda_2{}^A + \mu_1{}^A\bar{\mu}_2{}^{A'}). \quad (22)$$

Оператор Дирака (21) является эрмитовым относительно этого скалярного произведения [12].

Тождество Виттена связывает билинейную форму квадрата оператора Дирака $\widehat{D}^2$ с билинейной формой другого положительно определенного оператора, который (с небольшой модификацией) и будет искомым представлением энергии материи в замкнутой Вселенной.

Пользуясь принятыми здесь обозначениями и опуская для простоты вклад полей материи, это тождество мы можем записать в виде [12]:

$$(\psi_1, \widehat{D}^2\psi_2) - (\psi_1, \widehat{w}\psi_2) = H[\psi_1, \psi_2], \quad (23)$$

где

$$(\psi_1, \widehat{w}\psi_2) \equiv \frac{1}{4}\int_\Sigma \sqrt{g}d^3x g^{ik} n_{AA'} \times \\ \times (\bar{\nabla}_i\bar{\lambda}_1{}^{A'}\nabla_k\lambda_2{}^A + \nabla_i\mu_1{}^A\bar{\nabla}_k\bar{\mu}_2{}^{A'}), \qquad (24)$$

а билинейная форма справа есть линейная комбинация гравитационных связей.

В случае асимптотически плоской геометрии пространства-времени тождество Виттена позволяет выразить энергию островной системы, которая определяется поверхностным интегралом на пространственной бесконечности, через положительно определенную квадратичную форму, которая получается из выражения (24) при $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, где биспинор ψ является решением уравнения Дирака

$$\widehat{D}\psi = 0 \qquad (25)$$

с заданным асимптотическим значением ψ_0.

Заметим, что появление вспомогательной спинорной переменной в ОТО, которая подчиняется дифференциальному уравнению (25), в дополнение к уже имеющимся полям материи, для самого Виттена оказалось сюрпризом [7]. При этом биспинор ψ, как было указано, задает локальные свойства глобально-инерциальной системы отсчета, в которой определена энергия.

В случае замкнутой Вселенной, поверхностный интеграл и обычное определение энергии отсутствуют и физические следствия тождества (23) будут несколько иными. Возьмем теперь произвольное биспинорное поле $\psi \neq 0$ на пространственном сечении Σ и, полагая $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ в тождестве (23), запишем представление гамильтониана замкнутой Вселенной (в системе отсчета, определяемой ψ) в виде разности двух положительно определенных квадратичных форм:

$$H[\psi] = (\psi, \widehat{w}\psi) - (\psi, \widehat{D}^2\psi). \qquad (26)$$

Здесь гамильтониан $H[\psi]$ задан в калибровке [11]:

$$N^0 = \frac{1}{4\sqrt{2}} n_{AA'}(\lambda^A\bar{\lambda}^{A'} + \mu^A\bar{\mu}^{A'}), \qquad (27)$$

$$N^k = -\frac{1}{4}\sigma^k{}_{AB} n^B{}_{A'} (\lambda^A \bar{\lambda}^{A'} + \mu^A \bar{\mu}^{A'}). \quad (28)$$

Тем самым представление (3) доказано. Будучи квадратичным относительно канонических импульсов материи и геометрии пространства-времени, гамильтониан замкнутой Вселенной продуцирует также геометрию конфигурационного пространства ОТО (суперпространства). Из представления гамильтониана (26) видно, что эта геометрия является псевдоримановой в любой системе отсчета.

Теперь предложим физическую трактовку обоих слагаемых в правой части (26). Первое слагаемое отлично от нуля при любом ψ, поскольку оператор Дирака (21) является оператором эллиптического типа на компактном многообразии Σ, так что его спектр дискретен и отделен от нуля. Обратим внимание, что этот оператор содержит только импульс $M \equiv M^{kCD}\sigma_{kCD}$, который, согласно соотношению (17), канонически сопряжен масштабному фактору 3D-геометрии (точнее, величине $\ln(\Omega^2)$). По этой причине данный вклад в гамильтониан мы будем называть энергией расширения 3D-пространства Вселенной. Однако импульс M, пропорциональный Ω и определяющий кинетическую энергию расширения пространства, содержится также во второй квадратичной форме гамильтониана (26). Его вклад можно оттуда «извлечь» ковариантным образом, если ввести полностью симметричные спин-тензоры [12]:

$$\varphi^{MNA} \equiv \sigma^{iMN}\nabla_i\lambda^A + \frac{2}{3}\varepsilon^{A\{M}\sigma^{iN)}{}_P\nabla_i\lambda^P, \quad (29)$$

$$\chi^{MNA} \equiv \sigma^{iMN}\nabla_i\mu^A + \frac{2}{3}\varepsilon^{A\{M}\sigma^{iN)}{}_P\nabla_i\mu^P. \quad (30)$$

Эти спин-тензоры, как нетрудно проверить, не содержат канонического импульса M. Теперь представление гамильтониана замкнутой Вселенной принимает следующий окончательно вид:

$$h[\psi] - \frac{11}{9}(\psi, \widehat{D}^2\psi) = H[\psi], \quad (31)$$

где

$$h[\psi] \equiv (\psi, \hat{h}\psi) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \sqrt{g}\, d^3x n_{AA'} n_{MM'} n_{NN'} \times \quad (32)$$

$$\times (\bar{\varphi}^{A'M'N'}\varphi^{AMN} + \bar{\chi}^{A'M'N'}\chi^{AMN}) + (\psi, \widehat{T}\psi). \quad (32)$$

Здесь «шляпками» обозначены операторы, действующие в пространстве биспинорных полей.

Мы добавили в это выражение для энергии гравитационного поля вклад обычной материи, пропорциональный соответствующему тензору энергии-импульса [7], и все вместе будем трактовать как энергию физических степеней свободы в замкнутой Вселенной. При этом первое слагаемое в равенстве (32) представляет ту часть энергии гравитационного поля, которая включает энергию гравитационных волн на фоне расширяющейся Вселенной.

Заметим, что это выражение для энергии в замкнутой Вселенной совпадает с тем, которое получено для островного распределения масс с асимптотически плоской геометрией пространства-времени, поскольку в этом случае биспинор ψ подчиняется уравнению Дирака (25). Это видно из операторной формы равенства (32):

$$\hat{h} = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{2}{9}\widehat{D}^2 + \widehat{T}, \quad (33)$$

где

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{pmatrix} n_A{}^{A'}\bar{\nabla}_i(\sqrt{g}g^{ik}n_{A'}{}^B\nabla_k\lambda_B) \\ n_{A'}{}^A\nabla_i(\sqrt{g}g^{ik}n_A{}^{B'}\bar{\nabla}_k\bar{\mu}_{B'}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

– оператор Бельтрами – Лапласа в пространстве биспинорных полей.

Первое слагаемое в правой части равенства (33), как и все это выражение, является положительно определенным оператором и представляет собой оператор энергии гравитационного поля в случае асимптотически плоской геометрии пространства-времени.

Само тождество Виттена (23), справедливое для любых ψ_1, ψ_2, ведет к операторному равенству на пространстве биспинорных полей, а именно

$$\hat{h} - \frac{11}{9}\widehat{D}^2 = 0, \quad (35)$$

если выполнены гравитационные связи (5).

Равенство (35) можно явно решить относительно оператора Дирака:

$$\widehat{D} = \pm\sqrt{\frac{9}{11}\widehat{h}}, \qquad (36)$$

где квадратный корень из положительно определенного эрмитова оператора (33) может быть определен также как эрмитов оператор.

Здесь операторы действуют в пространстве биспинорных полей. Поскольку оператор Дирака линеен относительно M, приходим к выводу, что система гравитационных связей решена относительно канонических импульсов, сопряженных динамической переменной $\ln(\Omega^2(x))$.

Это представление гравитационных связей может быть положено в основу нековариантной формы квантовой гравитации с классическим «многострелочным» временем [10], роль которого естественным образом играет переменная $\ln(\Omega^2(x))$ (в каждой точке x пространственного сечения Σ существует своя стрела времени).

Однако операторное уравнение (36) само по себе не описывает эволюции Вселенной, пока не фиксирован конкретный наблюдатель. В квантовой теории это уравнение принимает форму нестационарного уравнения Шрёдингера с единым космическим параметром времени лишь в проекции на произвольный калибровочный спинор $\psi(x)$:

$$(\psi, \widehat{D}\psi) = \pm\left(\psi, \sqrt{\frac{9}{11}\widehat{h}\psi}\right). \qquad (37)$$

Это есть явное нарушение ковариантности, поскольку калибровочный спинор фиксируется произвольным образом. В следующем разделе предложен альтернативный вариант описания квантовой динамики Вселенной без явного нарушения ковариантности. Вместо извлечения квадратного корня в операторном уравнении (35) и введения классического параметра времени, связанного с масштабным фактором $\Omega(x)$ и «спроектированного» на произвольный калибровочный спинор $\psi(x)$, сформулируем квантовую теорию, основанную на принципе минимума (экстремума) энергии материи (12), в которой масштабный фактор квантуется наравне с остальными составляющими 3D-метрики.

Квантование плотности энергии в замкнутой Вселенной

Квантование осуществим стандартным образом – заменой канонических импульсов p операторами вариационного дифференцирования на пространстве состояний Вселенной $|\Psi\rangle$:

$$p(x) \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q(x)}, \qquad (38)$$

где $q(x) \equiv (\sigma_{iAB}(x), \phi(x))$ ($\phi(x)$ – набор полей материи).

Соответственно, операторами в этом пространстве состояний становятся гамильтониан материи $\widehat{h}$, определяемый подстановкой операторов (38) в гамильтониан (31) и выражение(32), и гравитационные связи $\widehat{H}_\mu$. Заметим, что Гауссовы связи (11) с соответствующими множителями Лагранжа уже содержатся во втором слагаемом оператора (32). На этом этапе возникнет затруднение в определении этих операторов, связанное с неоднозначностью упорядочения некоммутирующих операторных множителей. Мы здесь считаем это затруднение техническим и не будем в него углубляться.

После того как определены основные величины, остается выписать уравнения, которые вытекают из условного принципа экстремума (12). Вариационными параметрами являются: волновая функция Вселенной $\Psi[\sigma, \phi]$, калибровочный биспинор $\psi(x)$ и множители Лагранжа $l_\mu(x), A^a(x)$.

Вариация по $|\Psi\rangle$ дает собственно стационарное уравнение Шредингера:

$$\frac{(\psi, \widehat{\widehat{h}}\psi)}{(\psi,\psi)}|\Psi\rangle + \int_\Sigma \sqrt{g}\,d^3x[\tilde{l}^\mu \widehat{H}_\mu |\Psi\rangle + \widetilde{A}^a D_a |\Psi\rangle] = \rho|\Psi\rangle, \qquad (39)$$

где среднее значение двойного оператора энергии $\widehat{\widehat{h}}$ вычисляется в системе отсчета, определяемой калибровочным спинором $\psi(x)$. Оно остается оператором в пространстве состояний Вселенной $|\Psi\rangle$.

Модифицированные множители Лагранжа $\tilde{l}_\mu(x), \widetilde{A}^a(x)$ отличаются от исходных нормировочным множителем

$$\frac{\langle\Psi|(\psi,\psi)|\Psi\rangle}{(\psi,\psi)}. \tag{40}$$

Вариация по $\psi(x)$ дает уравнение для калибровочного спинора:

$$\frac{\langle\Psi|\hat{\hat{h}}\,\Omega^3(x)|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Omega^3(x)|\Psi\rangle}\psi = \rho\psi, \tag{41}$$

где среднее значение $\hat{\hat{h}}$ вычисляется в пространстве состояний Вселенной с весом $\Omega^3(x)$ и является оператором в пространстве биспинорных полей на Σ.

Таким образом, распределение энергии материи, определяемое оператором $\hat{\hat{h}}$, фиксирует систему отсчета, соответствующую данному состоянию Вселенной. Наконец, вариация по множителям Лагранжа l_μ, A_0^a дает уравнения связей (10) плюс дополнительные калибровочные связи

$$\langle\Psi|G_a|\Psi\rangle = 0. \tag{42}$$

Уравнений связей достаточно для определения множителей Лагранжа в равенстве (35), после чего самосогласованная система уравнений (39) и (41) образует «стационарное» уравнение Шрёдингера в квантовой космологии.

Обратим внимание, что при фиксированном $|\Psi\rangle$ оператор, действующий на $\psi(x)$ в левой части равенства (41), так же как и $\widehat{D}^2$, является эллиптическим на компактном многообразии Σ. Его спектр дискретен. Можно предположить, что и спектр собственных значений ρ в этой задаче дискретен, с учетом того, что $|\Psi\rangle$ и $\psi(x)$ находятся самосогласованно.

Таким образом, параметр ρ, который входит в уравнения (39) и (41), нумеруется некоторым набором квантовых чисел. В классической космологии плотность энергии материи в расширяющейся Вселенной уменьшается с течением космического времени, начиная от бесконечного значения. В рассматриваемой здесь квантовой теории решения «стационарного» уравнения Шрёдингера отличаются степенью возбуждения физических степеней свободы материи. Среди них существует состояние минимального возбуждения, которое в работе [13] названо основным состоянием Вселенной в квантовой космологии, и оно предложено там в качестве Начала Вселенной. В этом состоянии плотность энергии материи является максимальной, но конечной.

Теперь возникает необходимость в интерпретации всего набора решений «стационарного» уравнения Шрёдингера. Основное предположение, которое мы делаем относительно спектра допустимых значений ρ, состоит в том, что они и реализуются в квантовой эволюции Вселенной. Это означает, что космическое время следует искать в упомянутом выше наборе квантовых чисел. В этой картине квантовой эволюции Вселенной параметр времени дискретен. Непрерывный характер эволюции с непрерывным временем следует ожидать, как обычно, при больших степенях возбуждения энергии материи. Еще одним элементом формализма является дополнительное поле калибровочного спинора $\psi(x)$, который определяет локальные свойства системы отсчета, сопутствующей распределению материи в данный момент космического времени. Построенная из него функция следования $N^0(x)$, согласно калибровке (27), задает скорость хода стандартных часов, помещенных в каждую точку пространства. Таким образом, вместе с космическим временем фиксируется также система отсчета, к которой это время должно быть отнесено. Здесь нет нарушения ковариантности, поскольку параметры системы отсчета определяются самосогласованно с самим распределением материи в данном кантовом состоянии. Однако последовательное развитие этой интерпретации предполагает знание структуры квантового спектра плотности энергии.

Заключение

В данной работе предложено рассматривать квантовую эволюцию Вселенной в терминах энергетического параметра – средней плотности энергии материи. Основанием нового подхода служит то, что динамическая структура общей теории относительности в случае замкнутой Вселенной допускает определение понятий энергии материи (включая гравитационные волны) и энергии расширения пространства. В любой системе отсчета, задаваемой калибровочным спинором ψ, эти величины являются знакоопределенными квадратичными формами ψ, которые взаимно сокращаются, если выполнены гравитационные связи.

Таким образом, получает обоснование представление о замкнутой Вселенной как об объекте со 100%-м дефектом массы-энергии. В таком случае квантование теории может быть основано на принципе минимума энергии в применении к одной части внутренней энергии Вселенной, а именно – к энергии материи и гравитационных волн.

В результате получена система уравнений, которая для замкнутой Вселенной служит аналогом стационарного уравнения Шредингера в обычной квантовой механике. Система включает уравнение (39), решения которого суть состояния Вселенной $|\Psi\rangle$ с определенным значением средней плотности энергии ρ. Его дополняет уравнение (41) для калибровочного спинора ψ, т. е. системы отсчета, к которой должно быть отнесено физическое состояние $|\Psi\rangle$, а параметром квантования служит значение средней плотности энергии ρ. Уравнения квантовых связей (10) и (42) фиксируют неопределенные множители Лагранжа в уравнении Шредингера (39). В этом формализме нет нарушения ковариантности, поскольку не требуется дополнительных калибровочных условий для фиксации множителей Лагранжа. В отличие от обычной ковариантной формы квантовой теории, основанной на уравнениях Уиллера – де Витта (1), здесь имеются наблюдаемые параметры ρ и $\psi(x)$, которые вместе могут быть связаны с космическим временем и системой отсчета в квантовой космологии. Космическое время в этом формализме является дискретным. Непрерывную эволюцию Вселенной следует ожидать лишь на поздних стадиях, соответствующих высокой степени возбуждения энергии материи.

Благодарности

Авторы благодарят доктора физико-математических наук, профессора В.А. Франке (Санкт-Петербургский государственный университет) и доктора физико-математических наук А.В. Гольцева за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wheeler J.** Superspace and the nature of quantum geometrodynamics // C. DeWitt, J. Wheeler (eds).“Batellerencontress – 1967. Lectures in mathematics and physics”. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1968. Pp. 242–307.
2. **DeWitt C.** The quantization of geometry // L. Witten(ed.). “Gravitation: an introduction to current research”. New York: Wiley, 1962.
3. **Dirac P.A.M.** The principles of quantum mechanics. 4th ed. Oxford: Oxford Univ. Press, 1958. Pp. 35–36.
4. **Isham C.J.** Canonical quantum gravity and the problem of time //arXiv:gr-qc/9210011v1, 1992.
5. **Anderson E.** Problem of time in quantum gravity // arXiv:1206.2403v1 [gr-qc], 2012.
6. **Халатников И.М., Каменщик А.Ю.** Лев Ландау и проблема сингулярностей в космологии // УФН. 2008. Т. 178. № 6. С. 639–647.
7. **Witten E.** A new proof of the positive energy theorem // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 80. No. 3. Pp. 381–402.
8. **Фаддеев Л.Д.** Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна // УФН. 1982. Т. 136. № 3. С. 435–457.
9. **Ashtekar A.** On the Hamiltonian of General Relativity // Physica. A. 1984. Vol. 124. No. 1–3. Pp. 51–59.
10. **Лукьяненко А.С.** Продольные гравитационные поля в общей теории относительности // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289. № 3. С. 579–583.
11. **Misner C., Thorne K. Wheeler J.** Gravitation. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1973. 1279 p.
12. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S.** Three-dimensional volume of a closed universe as a canonical time parameter // Class. Quantum Grav. 1993. Vol. 10. No. 11. Pp. 2329–2335.
13. **Gorobey N., Lukyanenko A.** Ground state of the universe in quantum cosmology // J. Mod. Phys. A. 2016. Vol. 31. No. 02n03. P. 1641014.
14. **Фок В.А.** Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
15. **Фаддеев Л.Д., Славнов А.А.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 240 с.
16. **Пенроуз Р., Риндлер В.** Спиноры и пространство-время. В 2 тт. Т. 1. Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987. 527 с.
17. **Ashtekar A.** New Hamiltonian formulation of General Relativity // Phys. Rev. D. 1987. Vol. D 36. No. 6. Pp. 1587–1602.

Статья поступила в редакцию 23.09.2017, принята к публикации 28.11.2017.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОРОБЕЙ Наталья Николаевна – *доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого,Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.gorobey@mail.ru

ЛУКЬЯНЕНКО Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого,Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alex.lukyan@rambler.ru

REFERENCES

[1] **J. Wheeler,** Superspace and the nature of quantum geometrodynamics, In: C. DeWitt, J. Wheeler (eds), "BatelleRencontress – 1967, Lectures in Mathematics and Physics", Benjamin Inc., New York (1968) 242–307.

[2] **C. DeWitt,** The quantization of geometry, In: L. Witten (ed.), "Gravitation: An Introduction to Current Research", Wiley, New York 1962.

[3] **P.A.M. Dirac,** The principles of quantum mechanics, 4th ed., Oxford Univ. Press, Oxford (1958) 35–36.

[4] **C.J. Isham,** Canonical quantum gravity and the problem of time, arXiv:gr-qc/9210011v1, 1992.

[5] **E. Anderson,** Problem of time in quantum gravity, arXiv:1206.2403v1 [gr-qc], 2012.

[6] **I.M. Khalatnikov, A.Yu. Kamenshchik,** Lev Landau and the problem of singularities in cosmology, Sov. Phys. Usp. 51 (6) (2008) 609–616.

[7] **E. Witten,** A new proof of the positive energy theorem, Commun. Math. Phys. 80 (3) (1981) 381–402.

[8] **L.D. Faddeev,** The energy problem in Einstein's theory, Sov. Phys. Usp. 25(3) (1982) 130–142.

[9] **A. Ashtekar,** On the Hamiltonian of General Relativity, Physica. A. 124 (1–3) (1984) 51–59.

[10] **A. Lukyanenko,** Lengthwise gravitation fields in General Relativity theory, Doklady Akademii Nauk SSSR. 289 (3) (1986) 579–583.

[11] **C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler,** Gravitation, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[12] **N.N. Gorobey, A.S. Lukyanenko,** Three-dimensional volume of a closed universe as a canonical time parameter, Class. Quantum Grav. 10(11) (1993) 2329–2335.

[13] **N. Gorobey, A. Lukyanenko,** Ground state of the universe in quantom cosmology, J. Mod. Phys. A. 31 (02n03) (2016) 1641014.

[14] **V.A. Fock,** Nachala kvantovoy mekhaniki [Quantum mechanics principles], Nauka, Moscow, 1976.

[15] **L.D. Faddeev, A.A. Slavnov,** Vvedeniye v kvantovuyu teoriyu kalibrovochnykh poley [An introduction to gauge field quantum theory], Nauka, Moscow, 1988.

[16] **R. Penrose, W. Rindler,** Spinors and space-time, Vol. 1. Two-spinor calculus and relativistic fields, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[17] **A. Ashtekar,** New Hamiltonian formulation of General Relativity, Phys. Rev. D. D 36 (6) (1987) 1587–1602.

Received 23.09.2017, accepted 28.11.2017.

THE AUTHORS

GOROBEY Nataliya N.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.gorobey@mail.ru

LUKYANENKO Alexander S.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alex.lukyan@rambler.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2018