

DOI: 10.18721/JPM.111115

УДК 539.3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНОЙ СИЛЫ ОСЕВОГО СОУДАРЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ И НЕДЕФОРМИРУЕМОГО УДАРНИКА

**А.К. Беляев<sup>1,2,3</sup>, А.О. Шурпатов<sup>2</sup>, Ч.-Ч. Ма<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

<sup>4</sup>Национальный университет Тайваня, г. Тайбэй, Тайвань

Рассматривается задача об осевом соударении упругого стержня и абсолютно твердого ударника. Для решения данной задачи применен полуаналитический метод и метод конечных элементов. Решение полуаналитическим методом основано на применении теории Герца квазистатического контакта и численного интегрирования дифференциальных уравнений динамики. В рамках применения метода конечных элементов определено необходимое число степеней свободы и выполнено численное моделирование. Найдено время контактного взаимодействия, а также получена зависимость контактной силы от времени контакта. Проведено исследование волновых процессов, возникающих в стержне. Выполнено сравнение полученных результатов с данными натурных экспериментов. Выявлена обратная зависимость между массой ударника и погрешностями обоих методов. Сравнение с натурным экспериментом подтверждает применимость обоих методов к решению данной задачи.

**Ключевые слова:** осевое соударение; контактная сила; метод конечных элементов

**Ссылка при цитировании:** Беляев А.К., Шурпатов А.О., Ма Ч.-Ч. Определение контактной силы осевого соударения упругого стержня и недеформируемого ударника // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 1. С. 157 – 166. DOI: 10.18721/JPM.111115

## DETERMINING THE CONTACT FORCE OF AN AXIAL COLLISION OF AN ELASTIC ROD WITH A RIGID IMPACTOR

**A.K. Belyaev<sup>1,2,3</sup>, A.O. Shurpatov<sup>2</sup>, Ch.-Ch. Ma<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russian Federation;

<sup>2</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

<sup>3</sup>St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation;

<sup>4</sup>National Taiwan University, Taipei, Taiwan

The problem of axial impact of a rigid body on elastic rod is considered. The Semi-Analytical Method (SEM) and Finite Element Method (FEM) are applied to

handle the problem. The SEM of solving the problem implies the quasi-static Hertz theory and numerical integration of obtained differential equations. The number of necessary degrees of freedom of the FEM solution is determined and numerical simulation is carried out. The time of contact interaction and dependence of the contact force on the contact time are calculated. The longitudinal wave propagation in the rod is investigated. The obtained results are compared with the data from natural experiments. An inverse dependence between impacting mass and the accuracy of both methods is discussed. The results of comparison confirm the appropriateness of both methods for solving the problem.

**Key words:** axial collision; contact force; finite element method

**Citation:** A.K. Belyaev, A.O. Shurpatov, Ch.-Ch. Ma, Determining the contact force of an axial collision of an elastic rod with a rigid impactor, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (1) (2018) 157 – 166. DOI: 10.18721/JPM.11115

### Введение

Задачи динамики и устойчивости тонких стержней при продольном ударе стержня требуют знания формы и амплитуды силы в зоне контакта [1–3]. Данная работа посвящена определению контактной силы при осевом соударении стержня и ударника с помощью трех принципиально разных подходов: полуаналитического метода (математическое моделирование), метода конечных элементов и эксперимента. Отдельный интерес представляет сравнение результатов, полученных в рамках данных подходов, которое позволяет судить о корректности каждого подхода и возможности их дальнейшего применения.

### Постановка задачи

Рассматривается упругий стержень длиной  $l$ , на одном из концов которого выполняется условие заделки (для всех точек сечения запрещены перемещения и повороты). К свободному концу стержня в начальный момент времени со скоростью  $V_0$  подлетает ударник массой  $m$ , в результате чего в системе возникает контактное взаимодействие

(рис. 1). Силы тяжести стержня и ударника во внимание не принимаются.

В общем случае сила упругого контактного взаимодействия возникает в результате взаимных колебаний сталкивающихся тел и может быть определена из анализа их совместных динамических деформаций.

Целями исследования являются нахождение времени контактного взаимодействия стержня и ударника, построение зависимости возникающей контактной силы от времени и экспериментальная верификация расчетов.

### Полуаналитический метод

**Описание математической модели.** Условием контакта тел является совпадение координат точек их контакта [4]:

$$v_0 t - \alpha - y_1 - y_2 = 0,$$

где  $\alpha$  – линейное сближение тел за счет контактных деформаций;  $y_1, y_2$  – динамические перемещения точек контакта обоих тел, вызванные контактной силой  $P(t)$  без учета местных деформаций;  $v_0$  – начальная скорость ударника.

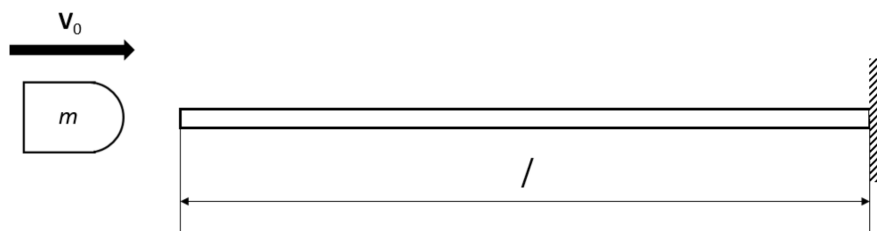


Рис. 1. Схема к постановке задачи (общий случай):  $l$  – длина упругого стержня;  $m$  – масса недеформируемого ударника,  $V_0$  – вектор его начальной скорости

Ввиду малости контактной зоны мы пренебрегаем ее массой. Тогда мы получаем право воспользоваться квазистатической контактной теорией Герца, согласно которой контактная сила  $P$  связана с величиной  $\alpha$  следующей зависимостью [5]:

$$P(\alpha) = k\alpha^{3/2},$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от параметров контактирующих тел.

В случае рассматриваемой модели он имеет вид [6]:

$$k = \frac{2}{3(1 - \mu^2)} E\sqrt{R},$$

где  $E$ ,  $\mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно (предполагается одинаковый материал для стержня и ударника);  $R$  – радиус сферического профиля ударника.

Перемещения  $y_1$  и  $y_2$  можно выразить через контактную силу, используя реакцию каждого из соударяющихся тел на единичный импульс [7]:

$$y_1 = \int_0^t P(\theta)Y^{(1)}(t - \theta)d\theta,$$

$$y_2 = \int_0^t P(\theta)Y^{(2)}(t - \theta)d\theta,$$

где  $Y^{(1)}$ ,  $Y^{(2)}$  – реакции на единичный импульс стержня и ударника соответственно;  $t$  – текущее время,  $\theta$  – переменная интегрирования; момент соприкосновения тел принят за начало отсчета.

Подставляя данные выражения в условие контакта, получаем интегральное уравнение, определяющее контактную силу:

$$\int_0^t P(\theta)Y(t - \theta)d\theta + [P(t) / k]^{2/3} = v_0 t,$$

где  $Y(t) = Y^{(1)}(t) + Y^{(2)}(t)$ .

Поскольку интегральный член данного уравнения зависит от значений контактной силы во все моменты времени  $\theta$ , предшествующие рассматриваемому, то при достаточно малом шаге интегрирования по времени  $\Delta t$  можно пренебречь изменением силы в интегральной сумме за интервал

$$t - \Delta t \leq \theta \leq t.$$

С учетом вышеизложенного, выражение для определения контактной силы можно записать в следующем виде [8]:

$$P(t) = k[v_0 t - \int_0^{t-\Delta t} P(\theta)Y(t - \theta)d\theta - P(t - \Delta t) \int_0^{\Delta t} Y(\theta)d\theta]^{3/2}.$$

Таким образом, используя малый шаг  $\Delta t$  с помощью численного интегрирования, мы шаг за шагом вычисляем зависимость контактной силы от времени. При этом для исследуемой системы реакция стержня на единичный импульс выглядит следующим образом [9]:

при  $0 < t < \frac{2l}{a}$

$$Y^{(1)}(t) = l^2 / [(2EFa)(at / l)^2];$$

при  $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$

$$Y^{(1)}(t) = l^2 / \{(2EFa)[8 - (4 - at / l)^2]\};$$

при  $\frac{4l}{a} < t < \frac{6l}{a}$

$$Y^{(1)}(t) = l^2 / \{(2EFa)[8 + (at / l - 4)^2]\}$$

и т. д.,

где  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость звука в материале стержня.

Поскольку волновые процессы, происходящие в ударнике, в рамках данной модели не рассматриваются, реакция на единичное воздействие для него определяется следующим выражением [10]:

$$Y^{(2)}(t) = \frac{t^3}{6m},$$

где  $m$  – масса ударника.

Суть полуаналитического метода сводится к численному интегрированию полученного выше уравнения для вычисления контактной силы [11].

**Результаты математического моделирования.** Вычисление зависимости контактной силы от времени с помощью по-

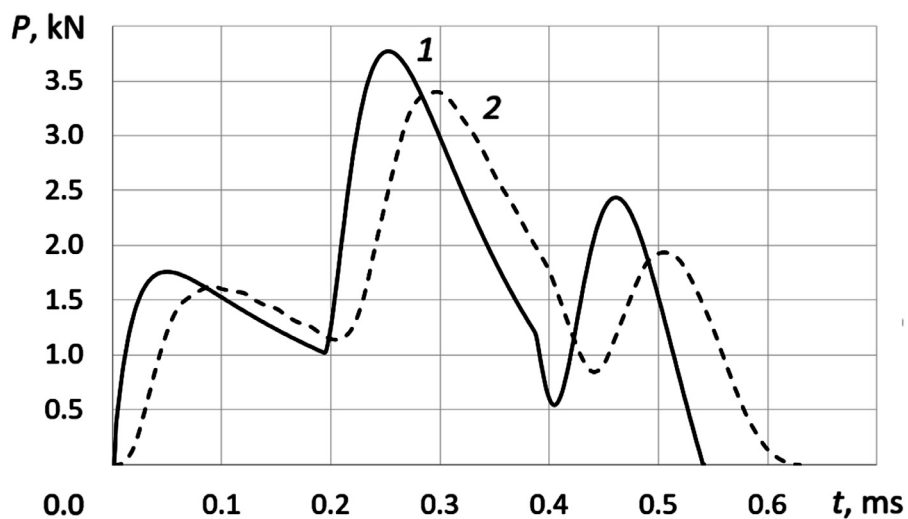


Рис. 2. Зависимости контактной силы от времени, полученные полуаналитическим методом (кривая 1) и методом конечных элементов (кривая 2); значения исходных параметров приведены в табл. 1

Таблица 1

Исходные расчетные и экспериментальные параметры системы

Элемент системы, материал	Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение	
				Модель	Эксперимент
Стержень	Длина	$l$	м	0,500	0,301
	Площадь поперечного сечения	$S$	м <sup>2</sup>	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$3,14 \cdot 10^{-6}$
Ударник	Масса	$M$	кг	0,5	0,13 – 8,46
	Радиус сферического профиля	$R$	м	0,01	1,58 – 6,36
	Начальная скорость	$V_0$	м/с	1,0	0,3225
Сталь	Модуль Юнга	$E$	Н/м <sup>2</sup>	$2,1 \cdot 10^{11}$	$7,342 \cdot 10^{10}$
	Коэффициент Пуассона	$\mu$	—	0,30	0,34
	Плотность	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	7800,0	2696,6

Примечание: приведены исходные расчетные параметры для обеих моделей, которые по результатам расчета признаны наиболее удобными для сравнения.

луаналитического метода выполнялось для систем с различными параметрами. В результате данных вычислений контактная сила представляет гладкую функцию времени, которая в зависимости от параметров имеет от одного до трех максимумов.

Пример результата вычисления контактной силы с тремя максимумами приведен на рис. 2 (кривая 1) и получен при исходных параметрах системы, представленных в табл. 1.

Материалом стержня и сферического профиля ударника считалась сталь с характеристиками, приведенными также в табл. 1.

Корректность полученных результатов была проверена путем конечно-элементного моделирования системы с идентичными параметрами (см. табл. 1).

#### Конечно-элементная модель

**Описание модели.** После исследования сходимости метода конечных элементов была выбрана модель, представленная на рис. 3. Она включает в себя примерно 300 тыс. узлов и обладает примерно 1 млн. степеней свободы. Поскольку в данной задаче проводится исследование не только контактного взаимодействия стержня с ударником, но и волновых процессов, возникающих в самом стержне [12], было принято решение отказаться от использования сгущения сетки в зоне контакта. Таким образом, в процессе конечно-элементного моделирования была использована однородная сетка.

Постановка задачи в данной модели выглядит следующим образом.

Стержень изготовлен из линейно-упругого материала (как уже отмечено выше для общей модели), параметры которого приведены в табл. 1. На одном из его торцов выполняется условие заделки, то есть для всех узлов запрещены как перемещения, так и повороты. Противоположный торец стержня свободен (общая модель). В данной задаче сделано допущение об отсутствии силы тяжести, поэтому в начальный момент времени отсутствует какое-либо искривление стержня, исходно стержень неподвижен. В отличие от стержня, ударник состоит из двух материалов. Его передняя часть изготовлена из того же материала, что и стержень (упругая), а задняя — из абсолютно твердого. Такое строение ударника было выбрано по двум причинам. Во-первых, для корректного сравнения результатов с таковыми для полуаналитического метода необходимо, чтобы материалы в зоне контакта были идентичными [5]. Во-вторых, данная конструкция ударника позволяет минимизировать влияние волновых процессов в самом ударнике на применяемую модель исследований [3]. Волновые процессы в абсолютно твердом теле невозможны, что позволяет исследовать лишь волновые процессы, возникающие непосредственно в упругом стержне.

Для узлов абсолютно твердой части ударника разрешено перемещение только вдоль оси стержня, все остальные перемещения и повороты запрещены. В начальный момент времени все узлы ударника имеют скорость, направленную вдоль оси к свободному торцу стержня.

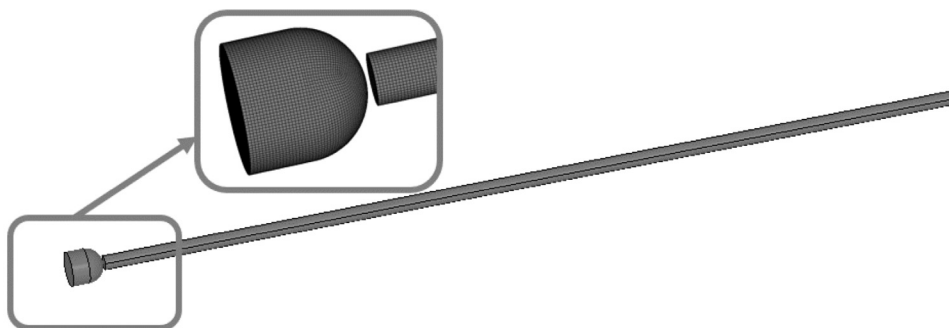


Рис. 3. Схематичное представление конечно-элементной модели (дополнительно показана увеличенная область контакта стержня с ударником)

Как уже было отмечено в начале данной статьи, одной из целей исследования являлось определение зависимости контактной силы от времени удара.

**Результаты конечно-элементного моделирования.** Моделирование данной задачи указанным методом производилось при различных параметрах как стержня, так и ударника. Наиболее интересные результаты были получены для варианта исходных параметров, идентичных таковым для полуаналитического метода моделирования (см. табл. 1).

Полученная зависимость контактной силы от времени представлена на рис. 2 (кривая 2).

В зависимости от входных параметров количество максимумов временной функции контактной силы может изменяться от одного до трех. Как видно из полученных результатов, в данном случае график имеет три локальных максимума.

Анализ различных результатов, полученных в ходе моделирования при разных исходных данных, говорит о том, что зависимость контактной силы от времени при ударе представляет собой довольно сложную функцию и не может быть представлена в виде таких простых функций, как, например, функция Хевисайда. В частности, при исследованиях динамической потери

устойчивости стержня следует учитывать возможные виды функции силы, прикладываемой к торцу стержня.

К одному из преимуществ конечно-элементного метода перед полуаналитическим можно отнести возможность определения множества параметров в любой момент времени (например, значений перемещений, деформаций, напряжений и т. п.). Данная возможность позволяет более детально исследовать возникающие в стержне при ударе волновые процессы, которые в конечном итоге и определяют вид контактной силы. В частности, на рис. 4 представлена временная зависимость продольного перемещения точек поперечного сечения, удаленного от начала стержня на половину его длины.

Видно, что происходит суперпозиция волн, распространяющихся в стержне. Метод также позволяет сравнивать поведение различных точек стержня с результатами натуральных экспериментов.

#### Сравнение результатов, полученных двумя методами

Поскольку в основе указанных методов лежат разные идеи и допущения, сравнительный анализ результатов моделирования представляет особый интерес. На рис. 2 приведено такое сравнение для временных

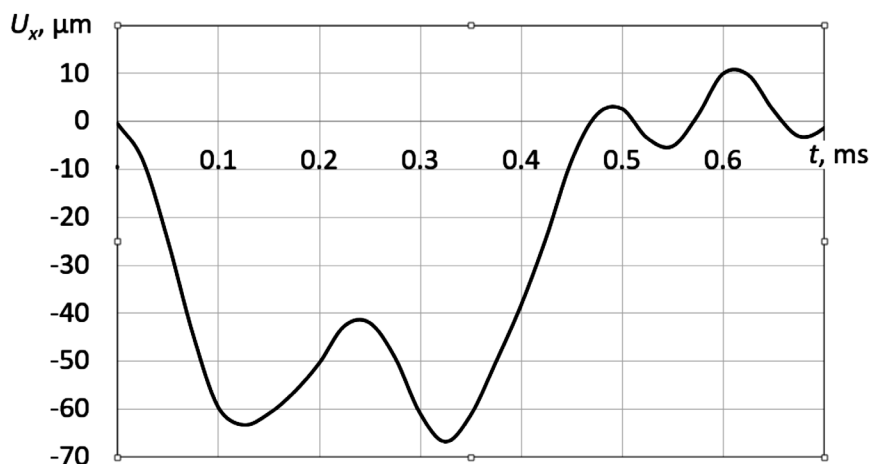


Рис. 4. Временная зависимость продольного перемещения поперечного сечения стержня; сечение удалено от начала стержня на половину его длины (результат получен методом конечно-элементного моделирования)





зависимостей контактных сил, полученных полуаналитическим и конечно-элементным методами.

При сравнении полученных графиков можно отметить идеальное качественное совпадение их вида. Если же проводить количественное сравнение расчетных результатов, то значения времени контакта отличаются на 11 %, а значения локальных экстремумов функций – на 9 %. На основании данных моделирования можно сделать заключение о хорошем совпадении результатов, полученных обоими методами, а также о корректном определении контактной силы и времени контактного взаимодействия.

Если более детально сравнивать полученные зависимости, можно заметить небольшие осцилляции на кривой, полученной конечно-элементным методом, которые отсутствуют на графике полуаналитического метода. Данные колебания можно объяснить влиянием краевых эффектов, которые не учитывает полуаналитический метод.

#### Сравнение результатов натурального эксперимента с данными двух расчетных методов

Натурные эксперименты служат цели ве-

рификации полуаналитического и конечно-элементного методов.

В рамках натурального эксперимента, проведенного в Национальном Тайваньском университете, был использован цилиндр радиусом 10,0 мм и длиной 30,1 мм, изготовленный из материала, параметры которого приведены в табл. 1.

На одном из концов цилиндра было выполнено условие заделки, а ко второму свободному концу в начальный момент времени подлетал стальной ударник со скоростью 0,3225 м/с (ударник имел форму шара). К свободному концу стержня была приклеена пьезоэлектрическая пленка толщиной 28 мкм и размером 7 × 3 мм, которая служила пьезодатчиком. Принцип измерения времени контактного взаимодействия цилиндра с ударником строился на пьезоэлектрическом эффекте; это время измерялось в зависимости от массы ударника (табл. 2).

Сравнение результатов конечно-элементного моделирования и полуаналитического вычисления с данными натуральных экспериментов представлено также в табл. 2.

Как видно из представленных результатов, для метода конечных элементов

Таблица 2

#### Сравнение экспериментальных результатов с данными, полученными двумя расчетными методами

Значение параметра ударника		Время контактного взаимодействия, мкс			Погрешность метода, %	
Диаметр, м	Масса, г	Натурный эксперимент	МКЭ	ПАМ	МКЭ	ПАМ
3,16	0,13	36,42	31,20	15,32	14,33	57,93
4,75	0,44	46,83	60,75	23,63	29,72	49,54
5,56	0,71	52,26	78,09	27,90	49,42	46,61
6,34	1,04	60,05	81,61	31,71	35,90	47,19
9,51	3,51	84,96	106,21	47,94	25,01	43,57
12,73	8,46	111,10	121,71	64,82	9,54	41,66

Сокращения: МКЭ – метод конечных элементов, ПАМ – полуаналитический метод (математическое моделирование).

наибольшая погрешность наблюдается при промежуточных значениях массы ударника. При наименьшей и наибольшей из выбранных масс погрешность минимальна.

Для полуаналитического метода наблюдается снижение погрешности при увеличении массы ударника. Таким образом, при минимальных значениях массы ударника наблюдается наибольшее расхождение между результатами работы полуаналитического метода и результатами, полученными в ходе натурального эксперимента и конечно-элементного моделирования. Но при увеличении массы ударника данное расхождение уменьшается.

### Выводы

В данной работе использовано два принципиально разных метода (конечно-элементный и полуаналитический) для исследования динамического процесса удара по идеально упругому стержню в продольном направлении. В частности, найдены контактная сила и время взаи-

модействия. Изучены также волновые процессы, происходящие в стержне при ударе.

Полученные результаты взаимно подтвердили друг друга, и возникла естественная необходимость провести натурный эксперимент для верификации обоих методов. Кроме того, аппроксимация данных графиков дает возможность использовать такие функции для решения связанных задач. В частности, при исследовании динамической потери устойчивости стержня, применение аппроксимированных функций позволит говорить о корректном сравнении моделирования с экспериментальными результатами, поскольку ударное взаимодействие легче осуществить, чем, например, ступенчатые воздействия. Последние чрезвычайно популярны в различных модельных задачах, однако их реализация в натуральных экспериментах пока не представляется возможной.

Исследование проведено в рамках российско-тайваньского гранта РФФИ, № 16-51-52025 МНТ\_а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.** Биения в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 112–125.
2. **Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.** Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2016. № 1. С. 77–94.
3. **Беляев А.К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Шурпатов А.О.** Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2017. № 3. С. 506–515.
4. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
5. **Hertz Н.Р.** Über die Berührung fester elastischer Körper // Journ. Reine Angew. Math. (Jour de Crelle). 1881. Vol. 92. Pp. 156–171.
6. **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
7. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
8. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград: Политехника, 1990. 272 с.
9. **Александров Е.В., Соколинский В.Б.** Прикладная теория и расчеты ударных систем. М.: Наука, 1969. 200 с.
10. **Пановко Я.Г.** Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 224 с.
11. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.: Объединение научно-технических издательств (ОНТИ), 1935. 674 с.
12. **Sears J.E.** On longitudinal impact of metal rods. Part 2 // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1912. Vol. 21. Pp. 49 – 106.
13. **Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И.** Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 тт. М.: Машгиз, 1956 – 1959. Т. 3. Инерционные нагрузки: Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Устойчивость. М.: Машгиз, 1959. 1118 с.

*Статья поступила в редакцию 16.12.2016, принята к публикации 13.11.2017.*



## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БЕЛЯЕВ Александр Константинович** – доктор физико-математических наук, временно исполняющий обязанности директора Института проблем машиноведения РАН, профессор кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61.  
vice.ipme@gmail.com

**ШУРПАТОВ Анатолий Олегович** – аспирант кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Россия, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
a.shurpatov@gmail.com

**МА Чин-Чин** – доктор технических наук, профессор Национального университета Тайваня, г. Тайбэй, Тайвань.

No. 1, Section 4, Roosevelt Rd, Da'an District, Taipei City, Тайвань 10617  
ccma@ntu.edu.tw

## REFERENCES

- [1] **A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik**, Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod, *Mechanics of Solids*. 50 (4) (2015) 451–462.
- [2] **A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik**, Parametric resonances in the problem of longitudinal impact on a thin rod, *Vestnik St. Petersburg University*. 3 (1) (2016) 53–67.
- [3] **A.K. Belyaev, Ch.-Ch. Ma, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik, A.O. Shurpatov**, Dynamics of rod under axial impact by a body, *Vestnik St. Petersburg University*. 4 (3) (2017) 310–317.
- [4] **V.L. Biderman**, *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [The theory of mechanical vibrations], Vysshaya shkola, Moscow, 1980.
- [5] **H.R. Hertz**, Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journ. Reine Angew. Math. (Jour de Crelle)*. 92 (1881) 156–171.
- [6] **A.I. Lur'e**, *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity], Nauka, Moscow, 1970.
- [7] **S.P. Timoshenko**, *Kolebaniya v inzhenernom delye* [Vibrations in engineering], Nauka, Moscow, 1967.
- [8] **Ya.G. Panovko**, *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock], Politekhnik, Leningrad, 1990.
- [9] **E.V. Aleksandrov, V.B. Sokolinskiy**, *Prikladnaya teoriya i raschyoty udarnykh system* [Applied theory and calculations of shock systems], Nauka, Moscow, 1969.
- [10] **Ya.G. Panovko**, *Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to mechanical shock theory], Nauka, Moscow, 1977.
- [11] **A. Lyav**, *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity], ONTI, Moscow, 1935.
- [12] **J.E. Sears**, On longitudinal impact of metal rods. Part 2, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 21 (1912) 49 – 106.
- [13] **S.D. Ponomarev, V.L. Biderman, K.K. Likharev, et al.**, *Raschyoty na prochnost v mashinostroyenii*, v 3 tt., Mashgiz, Moscow, 1956 – 1959. Т. 3. Inertsionnyye nagruzki: Kolebaniya i udarnyye nagruzki. Vynoslivost, Ustoychivost [Strength calculations in mechanical engineering in 3 Vols, Vol. 3: Inertial loads: Vibrations and shock loads, Endurance, Resistance], Mashgiz, Moscow, 1959.

Received 16.12.2016, accepted 13.11.2017.

## THE AUTHORS

**BELYAEV Alexander K.**

*Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS*  
61 Bolshoi Ave. V.Is., St. Petersburg, 199178, Russian Federation  
vice.ipme@gmail.com

**SHURPATOV Anatoliy O.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

a.shurpatov@gmail.com

**MA Chin-Chin**

*National Taiwan University*

No. 1, Section 4, Roosevelt Rd, Da'an District, Taipei City, 10617, Taiwan

ccma@ntu.edu.tw