DOI: 10.18721/JPM.11206
УДК 517.946

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

Настоящая статья посвящена теме исследования решений дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами при старших производных. Кроме самостоятельного математического интереса, это направление весьма актуально для теории зондирования неизвестных сред, составленных из различных веществ. Рассматриваются прямая и обратные задачи, для первой из которых доказана теорема существования и единственность решения. Для обратных задач доказана единственность решения. При выводе формул для решения прямой задачи использовано интегро-дифференциальное уравнение, которое следует из физических законов. Смысл обратных задач состоит в определении точки стыка различных материалов и скоростей распространения волн. Конструктивный характер доказательства позволил нам построить соответствующий численный алгоритм.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; разрывной коэффициент; зондирование неизвестных сред; прямая и обратная задачи

Ссылка при цитировании: Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61 – 72. DOI: 10.18721/JPM.11206

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A WAVE EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

D.S. Anikonov, D.S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

The present article is devoted to the studies in solutions of partial differential equations with discontinuous coefficients for the highest derivatives. This line of investigation is not only of purely academic interest for mathematicians, but plays an important part in the theory of sounding of unknown media composed of various substances. The direct and inverse problems have been considered. The theorem of existence and of the solution-uniqueness was proved for the first of them. For inverse problems, the uniqueness of the solution was proved.

The integro-differential equation, which is a consequence of the physical laws, was used for solving the direct problem in the derivation of formulae. The meaning of the inverse problems lies in determination of a junction point of different materials and a wave velocity. The used nature of the proof allows us to construct an appropriate numerical algorithm.

Key words: differential equation; discontinuous coefficient; sounding of unknown media; direct and inverse problems

Citation: D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, Direct and inverse problems for a wave equation with discontinuous coefficients, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (2) (2018) 61 – 72. DOI: 10.18721/JPM.11206

Введение

В настоящее время область исследования дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами развита пока еще недостаточно. Вместе с тем мы можем указать на ряд работ подобного типа [1 – 12].

В нашей работе в полуплоскости

$$R_2^+ = ((x,t), -\infty < x < \infty, t > 0)$$

рассматривается задача Коши:

$$\alpha(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - \beta(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in R_2^+,\ \alpha(x), \beta(x) > 0,$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\ U_t(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ имеет непрерывную первую производную. Функция $f(x,t)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка при $(x,t) \in \overline{R_2^+}$.

Задача (1), (2) (прямая) состоит в нахождении $U(x,t)$ при заданных функциях $\alpha(x), \beta(x), \varphi(x), \psi(x), f(x,t)$. Ее физический смысл состоит в описании процесса поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня.

При постоянных значениях α и β решение этой задачи хорошо известно и представляется формулой Даламбера. Мы рассматриваем случай разрывных коэффициентов $\alpha(x), \beta(x)$, который соответствует струне или стержню, составленным из различных материалов.

В частном случае, когда $f = 0$, наши результаты для прямой задачи аналогичны выводам, анонсированным в сообщениях [8, 9]. Отметим также работы [10 – 12], содержащие различные обобщения формулы Даламбера. Из указанных ссылок мы используем только работу [10, С. 75 – 77], где задача типа (1), (2) записана в форме интегро-дифференциального уравнения для обобщенного решения в классе кусочно-гладких функций. Что касается обратных задач в этой статье, то пока мы не можем указать на близкие результаты других авторов.

Работа содержит значительное число громоздких вычислений. При этом мы подробно приводим только наиболее принципиальную часть из них, а для других аналогичных действий ограничиваемся указаниями схемы соответствующего анализа.

Обозначения, определения и постановка прямой задачи

В уравнении (1) функции $\alpha(x), \beta(x)$ считаются кусочно-постоянными, т. е.

$$\alpha(x) = \alpha_1,\ \beta(x) = \beta_1,\ \ x < x_0;$$

$$\alpha(x) = \alpha_2,\ \beta(x) = \beta_2,\ \ x \ge x_0,$$

где x_0 – фиксированное число; α_i, β_i, $i = 1, 2$ – положительные числа.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha_i \beta_i},\ \ a_i = \sqrt{\beta_i} / \sqrt{\alpha_i},$$

$$i = 1, 2,\ a(x) = \sqrt{\beta(x)} / \sqrt{\alpha(x)}.$$

Для первых производных произвольной функции $\omega(x,t)$ по x и по t, кроме традиционных обозначений, будет использоваться также запись $\partial_1\omega(x,t)$, $\partial_2\omega(x,t)$. В краткой записи левая часть уравнения (1) обозначается $LU(x,t)$.

В полуплоскости R_2^+ выделим следующие подмножества:

G_1 – область между прямыми $t = 0$ и $x = x_0 - a_1 t$;

G_2 – область между прямыми $t = 0$ и $x = x_0 + a_2 t$;

G_3 – область между прямыми $x = x_0 + a_2 t$ и $x = x_0$;

G_4 – область между прямыми $x = x_0$ и $x = x_0 - a_1 t$;

$$G_0 = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4.$$

На границах между областями G_i, $i = 1, ..., 4$ выпишем условия сопряжения:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \partial_2 U(x,t) = \lim_{x \to x_0 + 0} \partial_2 U(x,t), \quad (3)$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \beta_1 \partial_1 U(x,t) = \lim_{x \to x_0 + 0} \beta_2 \partial_1 U(x,t), \quad (4)$$

$$\{\partial_2 U(x,t) - a_1 \partial_1 U(x,t)\} = 0, \quad x = x_0 - a_1 t, \quad (5)$$

$$\{\partial_2 U(x,t) + a_2 \partial_1 U(x,t)\} = 0, \quad x = x_0 + a_2 t. \quad (6)$$

В условиях (5), (6) и далее фигурные скобки означают скачки функций в граничных точках, когда из предельного значения для $(x,t) \in G_i$ вычитается предельное значение той же функции при $(x,t) \in G_j$, $i > j$. Далее мы покажем, что условия (3) – (6) являются следствием закона Гука и закона сохранения импульса.

Решение задачи (1), (2) ищется в классе функций, непрерывных в $\overline{R_2^+}$ и кусочно-гладких, таких, что $U(x,t)$ имеет в G_0 все частные производные до второго порядка включительно, равномерно непрерывные на пересечении каждой области G_i, $i = 1, ..., 4$, с кругом любого радиуса и с центром в начале координат. Функцию из этого класса назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет уравнению (1) в G_0 и условиям (2) – (6).

Далее в работе используются криволинейные интегралы только второго рода. Для кривой с началом в точке P и концом в точке Q используется обозначение (PQ). Если кривая является границей односвязной ограниченной области, то принята ориентация, когда при перемещении точки по кривой область расположена слева.

Условимся текущие точки областей G_i, $i = 1, ..., 4$, обозначать $M_i = (x,t)$. Выполним следующие построения. Возьмем произвольную точку $M_1 = (x,t) \in G_1$ и, используя текущие переменные (ξ, τ), проведем через M_1 две прямые:

$$\xi - x = a_1(\tau - t),$$

$$\xi - x = -a_1(\tau - t).$$

Первая из них пересекает горизонтальную ось системы координат в точке $A_1 = (0, x - a_1 t)$, а вторая – в точке $B_1 = (0, x + a_1 t)$. Треугольник с вершинами A_1, M_1, B_1 обозначим $G(M_1)$. Аналогично этому, для произвольной точки $M_2 = (x,t) \in G_2$ используем прямые

$$\xi - x = a_2(\tau - t),$$

$$\xi - x = -a_2(\tau - t)$$

и получаем точки

$$A_2 = (0, x - a_2 t), \; B_2 = (0, x + a_2 t)$$

и треугольник $G(M_2)$.

В областях G_3, G_4 построение более сложное. Пусть $M_3 = (x,t) \in G_3$, $X_0 = (x_0, 0)$ (рис. 1). Рассмотрим прямые

$$\xi - x = -a_2(\tau - t),$$

$$\xi - x = a_2(\tau - t).$$

Первая из них пересекает ось Ox в

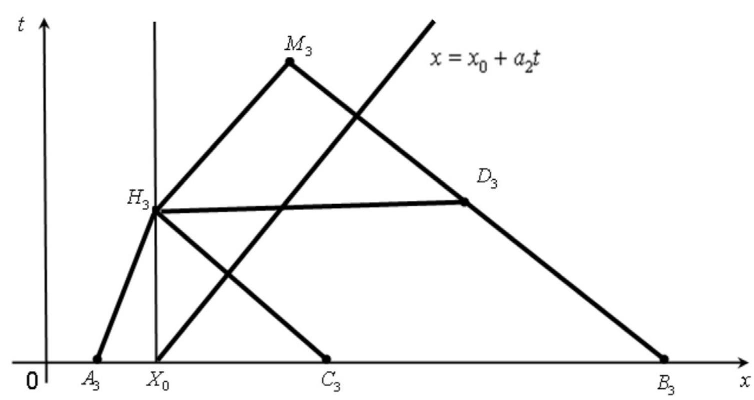

Рис. 1. Иллюстрация к построению функции $U(x, t)$ для произвольной точки $M_3 = (x,t) \in G_3$

точке $B_3 = (0, x + a_2 t)$, а вторая пересекает линию $\xi = x_0$ в точке $H_3 = (x_0, h_3)$, где $h_3 = t - (x - x_0) / a_2$.

Далее через точку H_3 проводим прямую

$$\xi - x_0 = a_1(\tau - h_3),$$

которая пересекает ось Ox в точке $A_3 = (0, x_0 - a_1 h_3)$.

Четырехугольник с вершинами A_3, H_3, M_3, B_3 обозначим через $G(M_3)$. Из точки H_3 проведем горизонтальную прямую, которая пересекает прямую

$$\xi - x = -a_2(\tau - t)$$

в точке $D_3 = (2x - x_0, h_3)$.

Кроме того, проведем прямую

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h_3),$$

которая пересекает ось Ox в точке $C_3 = (0, x_0 + a_2 h_3)$.

Треугольник с вершинами A_3, C_3, H_3 обозначим через $G(H_3)$. В области G_4 для произвольной точки $M_4 = (x, t) \in G_4$ построение вполне аналогично (рис. 2). А именно, используем прямые

$$\xi - x = a_1(\tau - t),$$

$$\xi - x = -a_1(\tau - t),$$

Первая из них пересекает ось Ox в точке $A_4 = (0, x - a_1 t)$, а вторая пересекает линию $\xi = x_0$ в точке $H_4 = (x_0, h_4)$, где $h_4 = t + (x - x_0) / a_1$.

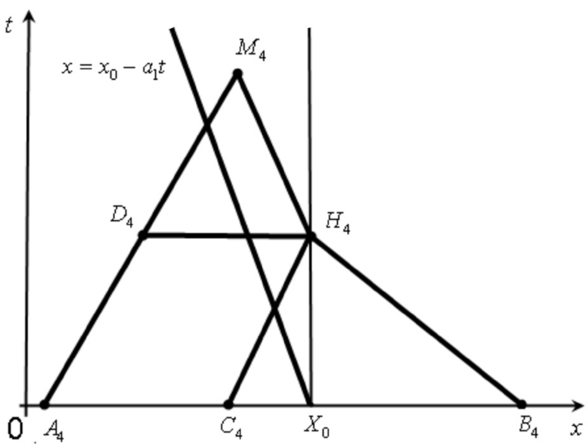

Рис. 2. Иллюстрация к построению функции $U(x,\ t)$ для произвольной точки $M_4 = (x, t) \in G_4$

Далее через точку H_4 проведем прямую

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h_4),$$

которая пересекает ось Ox в точке $B_4 = (0, x_0 + a_2 h_4)$. Четырехугольник с вершинами A_4, M_4, H_4, B_4 обозначим через $G(M_4)$. Дополнительно проведем прямую

$$\xi - x_0 = a_1(\tau - h_4),$$

которая пересекает ось Ox в точке $C_4 = (0, x_0 - a_1 h_4)$. Треугольник с вершинами C_4, H_4, B_4 обозначим через $G(H_4)$.

Существование и единственность решения прямой задачи

Будем обозначать значения функции $U(x,t)$ в G_i через $U_i(x,t)$, $i = 1, \ldots, 4$.

Теорема 1. *При всех сделанных предположениях существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), представленное в виде формул*

$$U_i(M_i) = \frac{U(A_i) + U(B_i)}{2} + \\ + \frac{1}{2\gamma_i} \int_{(A_i B_i)} \alpha_i \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\gamma_i} \int_{G(M_i)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (7)$$

$$i = 1, 2;$$

$$U_3(M_3) = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} U(A_3) + U(B_3) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} U(C_3)\right] + \\ + \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \int_{(A_3 C_3)} \alpha(\xi)\psi(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{(A_3 B_3)} \alpha(\xi)\psi(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \times \right. \\ \left. \times \int_{G(H_3)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_{G(M_3)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau \right]; \quad (8)$$

$$U_4(M_4) = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} U(A_4) + U(B_4) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} U(C_4)\right] + \\ + \frac{1}{2\gamma_1}\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \int_{(A_4 C_4)} \alpha(\xi)\psi(\xi) d\xi + \right. \quad (9)$$

$$+\int\limits_{(A_4B_4)}\alpha(\xi)\psi(\xi)d\xi\Bigg]+\frac{1}{2\gamma_1}\left[\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{G(H_4)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_{G(M_4)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]. \quad (9)$$

Доказательство. Проведем доказательство в три этапа.

1. *Способ получения формул (7) – (9).* Отметим, что в областях G_1 и G_2 решение дается классической формулой Даламбера. Теперь обратим внимание на область G_3. В книге [10, С. 75 – 77] рассматривается задача, совпадающая по смыслу с задачей (1), (2), но при других ограничениях. Именно, вместо уравнения (1) исследуется интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $u(x,t)$:

$$\int\limits_{\partial G}\alpha(\xi)\partial_2 u(\xi,\tau)d\xi+\beta(\xi)\partial_1 u(\xi,\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{G} f(\xi,\tau)d\xi d\tau=0. \quad (10)$$

Кроме того, заданы начальные данные:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). \quad (11)$$

В равенстве (10) G – произвольная ограниченная односвязная область в R_2^+, а ее граница ∂G – кусочно-гладкая кривая класса C^1. Функция $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{R_2^+}$, а ее частные производные $\partial_1 u(x,t)$, $\partial_2 u(x,t)$ кусочно непрерывны с возможными разрывами первого рода на некоторых линиях. При этом допускается наличие разрывов внутри G, а также возможен случай, когда линия разрывов совпадает с частью ∂G, и тогда в качестве производных $\partial_1 u(\xi,\tau)$, $\partial_2 u(\xi,\tau)$ в уравнении (10) берутся их предельные значения изнутри области G. Отметим, что уравнение (10) является следствием законов Гука и сохранения импульса. Соответственно, и выводы, полученные из (10), также являются следствием этих законов.

Возьмем произвольную точку $M_3=(x,t)\in G_3$ и используем уравнение (10) относительно четырехугольника $G(M_3)$ (см. рис. 1). Криволинейные интегралы по линиям $(M_3H_3),(H_3A_3),(A_3B_3),(B_3M_3)$ обозначим соответственно через I_1,I_2,I_3,I_4. Прямыми и несложными вычислениями получаем равенства

$$I_1=\gamma_2(u(H_3)-u(M_3)),$$
$$I_2=\gamma_1(u(A_3)-u(H_3)),$$
$$I_3=\int\limits_{(A_3B_3)}\alpha(\xi)\psi(\xi)d\xi,$$
$$I_4=\gamma_2(u(B_3)-u(M_3)).$$

Кроме того, используем равенство (10) для треугольника $G(H_3)$. Обозначим криволинейные интегралы по линиям $(H_3A_3),(A_3C_3),(C_3H_3)$ соответственно через J_1,J_2,J_3 и, аналогично предыдущему, имеем:

$$J_1=\gamma_1(u(A_3)-u(H_3)),$$
$$J_2=\int\limits_{(A_3C_3)}\alpha(\xi)\psi(\xi)d\xi,$$
$$J_3=\gamma_2(u(C_3)-u(H_3)).$$

Далее используем равенство (10) для $G(M_3)$ и $G(H_3)$ и, учитывая вычисления для I_1, I_2, I_3, I_4, J_1, J_2, J_3, получаем для $u(M_3)$ выражение, совпадающее с правой частью равенства для $U_3(M_3)$. Отождествляя $u(x,t)$ и $U_3(x,t)$, приходим к формуле (8). Рассуждения для $U_4(x,t)$ имеют совершенно аналогичный характер. При этом в равенстве (10) используются четырехугольник $G(M_4)$ и треугольник $G(H_4)$.

2. *Существование решения прямой задачи.* Вычислим пределы $U(x,t)$ при аргументах, стремящихся к точкам на линиях

$$x-x_0=a_2t,\ x-x_0=-a_1t,\ x=x_0.$$

Если использовать выражения для A_i, B_i, C_i, H_i, $i=1,\dots,4$, через (x,t), то легко видеть, что пределы функций $U_i(x,t)$ в указанных точках совпадают, т. е. функция $U(x,t)$, представленная формулами (7) – (9), непрерывна в $\overline{R_2^+}$.

Теперь проверим, что $U_i(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1) в G_i, $i=1,\dots,4$. Отметим, что функции $U_1(x,t)$, $U_2(x,t)$ представлены классической формулой Даламбера, поэтому в проверке не нуждаются. Из этого же факта следует и выполнение условий (2) для $U(x,t)$. Для нас удобно исследовать формулу (8) по частям, а именно –

$$U_3(x,t) = U_{3,\varphi}(x,t) + U_{3,\psi}(x,t) + U_{3,f}(x,t),$$

где

$$U_{3,\varphi}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi(x_0 - a_1h_3) + \varphi(x+a_2t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi(x_0 + a_2h_3)\right],$$

$$h_3 = t - (x-x_0)/a_2, \ (x,t) \in G_3; \quad (12)$$

$$U_{3,\psi}(x,t) = \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\int\limits_{(A_3C_3)}\alpha(\xi)\psi(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(A_3B_3)}\alpha(\xi)\psi(\xi)d\xi\right]; \quad (13)$$

$$U_{3,f}(x,t) = \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\int\limits_{G(H_3)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{G(M_3)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]. \quad (14)$$

Вычислим производные функции $U_{3,\varphi}(x,t)$:

$$\frac{\partial U_{3,\varphi}(x,t)}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\gamma_1 a_1}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi'(x_0 - a_1h_3) + a_2\varphi'(x+a_2t) + \right. \quad (15)$$

$$\left. + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}a_2\varphi'(x_0+a_2h_3)\right],$$

$$\frac{\partial^2 U_{3,\varphi}(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1 a_1^2}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi''(x_0 - a_1h_3) + a_2^2\varphi''(x+a_2t) + \right. \quad (16)$$

$$\left. + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}a_2^2\varphi''(x_0+a_2h_3)\right];$$

$$\frac{\partial U_{3,\varphi}(x,t)}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1 a_1}{(\gamma_1+\gamma_2)a_2}\varphi'(x_0 - a_1h_3) + \varphi'(x+a_2t) - \right. \quad (17)$$

$$\left. - \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi'(x_0+a_2h_3)\right]; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 U_{3,\varphi}(x,t)}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma_1 a_1^2}{(\gamma_1+\gamma_2)a_2^2}\varphi''(x_0 - a_1h_3) + \varphi''(x+a_2t) + \right. \quad (18)$$

$$\left. + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\varphi''(x_0+a_2h_3)\right].$$

Используя равенства (16), (18), запишем:

$$LU_{3,\varphi}(x,t) =$$

$$= \varphi''(x_0 - a_1h_3)\left[\frac{\gamma_1 a_1^2\alpha_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{\gamma_1 a_1^2\beta_2}{(\gamma_1+\gamma_2)a_2^2}\right] +$$

$$+ \varphi''(x+a_2t)\left[\frac{a_2^2\alpha_2}{2} - \frac{\beta_2}{2}\right] +$$

$$+ \varphi''(x_0+a_2h_3)\left[\frac{a_2^2\alpha_2(\gamma_2-\gamma_1)}{2(\gamma_1+\gamma_2)} - \frac{\beta_2(\gamma_2-\gamma_1)}{2(\gamma_1+\gamma_2)}\right].$$

Легко убедиться в том, что в правой части последнего равенства все выражения в квадратных скобках равны нулю, т. е. $LU_{3,\varphi}(x,t) = 0, \ (x,t) \in G_3$.

Далее вычислим частные производные функции $U_{3,\psi}(x,t)$:

$$\frac{\partial U_{3,\psi}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}(\alpha_1 a_1\psi(x_0 - a_1h_3) + \right.$$

$$+ \alpha_2 a_2\psi(x_0+a_2h_3)) + \alpha_1 a_1\psi(x_0 - a_1h_3) + \quad (19)$$

$$\left. + \alpha_2 a_2\psi(x+a_2t)\right];$$

$$\frac{\partial^2 U_{3,\psi}(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}(-\alpha_1 a_1^2\psi'(x_0 - a_1h_3) + \right.$$

$$\left. + \alpha_2 a_2^2\psi'(x_0+a_2h_3))\right] + \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2\gamma_2}\left[-\alpha_1 a_1^2\psi'(x_0 - a_1h_3) + \alpha_2 a_2^2\psi'(x+a_2t)\right];$$

$$\frac{\partial U_{3,\psi}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\times\right.$$
$$\times\left(-\frac{\alpha_1 a_1}{a_2}\psi(x_0-a_1h_3)-\alpha_2\psi(x_0+a_2h_3)\right)- \tag{21}$$
$$\left.-\frac{\alpha_1 a_1}{a_2}\psi(x_0-a_1h_3)+\alpha_2\psi(x+a_2t)\right];$$

$$\frac{\partial^2 U_{3,\psi}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{2\gamma_2}\left[\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\alpha_1\frac{a_1^2}{a_2^2}\psi'(x_0-a_1h_3)+\alpha_2\psi'(x_0+a_2h_3)\right)\right]+ \tag{22}$$
$$+\frac{1}{2\gamma_2}\left[-\alpha_1\frac{a_1^2}{a_2^2}\psi'(x_0-a_1h_3)+\alpha_2\psi'(x+a_2t)\right].$$

Из равенств (20), (22) следует, что $LU_{3,\psi}(x,t)=0$. Теперь исследуем выражение $U_{3,f}(x,t)$. Сначала рассмотрим интеграл $F(x,t)$, который представим в виде суммы двух слагаемых:

$$F(x,t)=F_1(x,t)+F_2(x,t),$$

где $F_1(x,t)$ – интеграл от $f(\xi,\tau)$ по треугольнику с вершинами H_3, M_3, D_3, а $F_2(x,t)$ – интеграл от той же функции по оставшейся части $G(M_3)$. Следовательно,

$$F_1(x,t)=\int_{h_3}^{t}\int_{x-a_2(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{23}$$

$$F_2(x,t)=\int_{t}^{h_3}\int_{x-a_1(h_3-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{24}$$

Вычислим частные производные от $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$:

$$\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}=-\int_{x-a_2(t-h_3)}^{x+a_2(t-h_3)} f(\xi,h_3)\,d\xi+$$
$$+\int_{h_3}^{t}[a_2 f(x+a_2(t-\tau),\tau)+ \tag{25}$$
$$+a_2 f(x-a_2(t-\tau),\tau)]\,d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x,t)}{\partial t^2}=-\int_{x_0}^{2x-x_0}\partial_2 f(\xi,h_3)\,d\xi+2a_2 f(x,t)-$$
$$-a_2 f(2x-x_0,h_3)-a_2 f(x_0,h_3)+$$
$$+\int_{h_3}^{t}a_2^2[\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)- \tag{26}$$
$$-\partial_1 f(x-a_2(t-\tau),\tau)]\,d\tau;$$

$$\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t}=\int_{x_0}^{2x-x_0} f(\xi,h_3)\,d\xi+$$
$$+\int_{0}^{h_3}[a_2 f(x+a_2(t-\tau),\tau)+ \tag{27}$$
$$+a_1 f(x_0-a_1(h_3-\tau),\tau)]\,d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial t^2}=$$
$$=-\int_{x_0}^{2x-x_0}\partial_2 f(\xi,h_3)\,d\xi+a_2 f(2x-x_0,h_3)+$$
$$+a_1 f(x_0,h_3)+\int_{0}^{h_3}[a_2^2\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)-$$
$$-a_1^2\partial_1 f(x-a_1(t-\tau),\tau)]\,d\tau.$$

Из последнего равенства и формулы (26) следует, что

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2}=2a_2 f(x,t)+(a_1-a_2)f(x_0,h_3)+$$
$$+\int_{h_3}^{t}a_2^2[\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)-$$
$$-\partial_1 f(x-a_2(t-\tau),\tau)]\,d\tau+$$
$$+\int_{0}^{h_3}[a_2^2\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)-$$
$$-a_1^2\partial_1 f(x-a_1(h_3-\tau),\tau)]\,d\tau.$$

Аналогичными прямыми вычислениями получаем равенство

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2}=\left[\frac{a_1}{a_2^2}-\frac{1}{a_2}\right]f(x_0,h_3)+$$
$$+\int_{h_3}^{t}[\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)-$$
$$-\partial_1 f(x-a_2(t-\tau),\tau)]\,d\tau+$$
$$+\int_{0}^{h_3}\left[a_2^2\partial_1 f(x+a_2(t-\tau),\tau)-\right.$$

$$-\frac{a_1^2}{a_2^2}\partial_1 f(x-a_1(h_3-\tau),\tau)\Bigg]d\tau.$$

Используя полученные формулы для вторых производных функции $F(x,t)$, убеждаемся в том, что $LF(x,t)=f(x,t)$.

Теперь рассмотрим интеграл $\Phi(x,t)$ от $f(\xi,\tau)$ по треугольнику $G(H_3)$, т. е.

$$\Phi(x,t)=\int\limits_0^{h_3}\int\limits_{x_0-a_1(h_3-\tau)}^{x_0+a_2(h_3-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Вычислим производные от функции $\Phi(x,t)$:

$$\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}=\int\limits_0^{h_3}[a_2 f(x_0+a_2(h_3-\tau),\tau)+ \\ +a_1 f(x_0-a_1(h_3-\tau),\tau)]d\tau; \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}=(a_1+a_2)f(x_0,h_3)+ \\ +\int\limits_0^{h_3}[a_2^2\partial_1 f(x_0+a_2(h_3-\tau),\tau)- \\ -a_1^2\partial_1 f(x_0-a_1(h_3-\tau),\tau)]d\tau;$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}=\left(\frac{a_1}{a_2^2}+\frac{1}{a_2}\right)f(x_0,h_3)+ \\ +\int\limits_0^{h_3}\Bigg[\partial_1 f(x_0+a_2(h_3-\tau),\tau)- \\ -\frac{a_1^2}{a_2^2}\partial_1 f(x_0-a_1(h_3-\tau),\tau)\Bigg]d\tau.$$

Отсюда следует, что $L\Phi(x,t)=0$, $(x,t)\in G_3$.

Объединяя полученные результаты вычислений, приходим к равенству

$$LU_{3,f}(x,t)=f(x,t),\ \ (x,t)\in G_3.$$

Принимая во внимание ранее полученные равенства

$$LU_{3,\varphi}(x,t)=0,\ \ LU_{3,\psi}(x,t)=0,$$

имеем $LU_3(x,t)=f(x,t)$.

Совершенно аналогичным образом получается равенство

$$LU_4(x,t)=f(x,t),\ \ (x,t)\in G_4.$$

К этому же выводу можно прийти путем замены переменной $x'=2x_0-x$ и использованием уже полученных результатов. Тем самым доказано, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в G_0 и условиям (2).

Свойства (3) – (6) нетрудно вывести из полученных равенств для $\partial_1 U(x,t)$, $\partial_2 U(x,t)$. Следовательно, функция $U(x,t)$, представленная формулами (7) – (9), является обобщенным решением задачи (1), (2).

3. *Единственность решения прямой задачи.* Для доказательства указанной единственности возьмем два решения задачи (1), (2) и обозначим их разность $V(x,t)$. Рассмотрим функции

$$v_1(x,t)=\partial_2 V(x,t)+a(x)\partial_1 V(x,t),$$

$$v_2(x,t)=\partial_2 V(x,t)-a(x)\partial_1 V(x,t).$$

Нетрудно проверить, что выполняются следующие равенства:

$$\partial_2 v_1(x,t)-a(x)\partial_1 v_1(x,t)=0, \\ \partial_2 v_2(x,t)+a(x)\partial_1 v_2(x,t)=0, \quad (29) \\ v_i(x,0)=0,\ i=1,2,\ (x,t)\in G_0.$$

Условимся обозначать $v_1(x,t), v_2(x,t)$, $V(x,t)$ для $x<x_0$ через $v_1^-(x,t), v_2^-(x,t)$, $V^-(x,t)$, а для $x\ge x_0$ – через $v_1^+(x,t), v_2^+(x,t)$, $V^+(x,t)$.

Из условий (5), (6) следует непрерывность функций $v_1^+(x,t), v_2^-(x,t)$. Следовательно, из системы (29) имеем

$$v_1^+(x,t)=v_2^-(x,t)=0.$$

Для произвольной точки H на полуоси (x_0,t), $t>0$, выполняются следующие равенства:

$$v_1^+(H)=\partial_2 V^+(H)+a_2\partial_1 V^+(H)=0,$$

$$v_2^-(H)=\partial_2 V^-(H)-a_1\partial_1 V^-(H)=0.$$

Отсюда, с учетом непрерывности $\partial_2 v_2(x,t)$ при $x=x_0$, а также условия (4), следует, что $v_1(x,t), v_2(x,t)$ непрерывны в точке H. Таким образом, приходим к равенствам

$$v_1(x,t)=v_2(x,t)=0,$$

$$\partial_1 V(x,t)=0,\ \partial_2 V(x,t)=0,$$

где $V(x,t)=\mathrm{const}$.

Поэтому в силу условия $V(x,0)=0$ имеем $V(x,t)=0$, $(x,t)\in R_2^+$, что и означает единственность решения прямой задачи.

Теорема 1 доказана.

Постановка обратных задач и их исследование

В работе рассматриваются две обратные задачи.

Задача 1. *Зная решение прямой задачи* $U(x,t)$ *на лучах* (x_1,t), (x_2,t), (x_3,t), $t>0$, *где фиксированные точки* x_i, $i=1,2,3$, *удовлетворяют неравенствам* $x_1<x_0$, $x_2,x_3>x_0$, *определить числа* x_0, a_1, a_2.

Задача 2. *Имея значения* $U(x_i,t)$, $i=2,3$, *при фиксированных точках* $x_2,x_3>x_0$, *найти* x_0, a_2.

Обе задачи относятся к теории зондирования неизвестных сред, когда определяются некоторые их параметры. В данном случае искомыми являются точка стыка различных материалов (x_0) и скорости распространения волн (a_i). Вторая задача отличается от первой меньшим объемом известных данных и, соответственно, меньшим количеством определяемой информации.

Теорема 2. *Каждая из обратных задач 1, 2 имеет не более одного решения, если выполнено условие*

$$\varphi'(x_0)(\beta_1-\beta_2)\neq 0. \qquad (30)$$

Доказательство. Прежде всего проведем анализ производной $\partial_2U(x,t)$ при фиксированном x, $x\neq x_0$, $t>0$. Для определенности будем считать, что $x>x_0$. Тогда луч (x,t), $t>0$, лежит в областях G_2 и G_3, пересекая границу между ними в точке

$$P=(x,\,(x-x_0)/a_2).$$

Анализ $\partial_2U(x,t)$ при $(x,t)\in G_3$ уже выполнен при доказательстве теоремы 1, и его результаты представлены формулами (15), (19), (25), (27).

Теперь проведем аналогичный анализ для $\partial_2U(x,t)$, $(x,t)\in G_2$. Используя равенство (7) для $i=2$, представим $U_2(x,t)$ в виде суммы

$$U_2(x,t)=U_{2,\varphi}(x,t)+U_{2,\psi}(x,t)+U_{2,f}(x,t),$$

где

$$U_{2,\varphi}(x,t)=\frac{\varphi(x-a_2t)+\varphi(x+a_2t)}{2};$$

$$U_{2,\psi}(x,t)=\frac{1}{2\gamma_2}\int\limits_{x-a_2t}^{x+a_2t}\alpha_2\psi(\xi)d\xi;$$

$$U_{2,f}(x,t)=\frac{1}{2\gamma_2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_2(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Вычисляя производные по t от этих функций и переходя к пределу $(x,t)\to P$, получаем:

$$\frac{\partial U_{2,\varphi}(P)}{\partial t}=\frac{a_2}{2}(\varphi'(2x-x_0)-\varphi'(x_0)); \qquad (31)$$

$$\frac{\partial U_{2,\psi}(P)}{\partial t}=\frac{1}{2}(\psi(2x-x_0)+\psi(x_0)); \qquad (32)$$

$$\frac{\partial U_{3,f}(P)}{\partial t}=\frac{a_2}{2\gamma_2}\int\limits_0^{(x-x_0)/a_2}[f(2x-x_0-a_2\tau,\tau)+ \\ +f(x_0+a_2\tau,\tau)]d\tau. \qquad (33)$$

Используя равенства (25), (27), (28), получаем предельное значение $\partial_2U_{3,f}(x,t)$ в точке P:

$$\frac{\partial U_{3,f}(P)}{\partial t}=\frac{a_2}{2\gamma_2}\int\limits_0^{(x-x_0)/a_2}[f(2x-x_0-a_2\tau,\tau)+ \\ +f(x_0+a_2\tau,\tau)]d\tau. \qquad (34)$$

Переходя к пределу $(x,t)\to P$, $(x,t)\in G_3$ в равенствах (15), (19), (25), (27), (28) и сравнивая полученные выражения в правых частях равенств (15) и (31), (19) и (32), (33) и (34), приходим к следующему выводу:

$$\partial_2U_{3,\psi}(P)=\partial_2U_{2,\psi}(P),$$
$$\partial_2U_{3,f}(P)=\partial_2U_{2,f}(P);$$
$$\partial_2U_{3,\varphi}(P)-\partial_2U_{2,\varphi}(P)=$$
$$=\varphi'(x_0)(\beta_2-\beta_1)/(\gamma_2+\gamma_1).$$

Таким образом, слагаемые функции $U(x,t)$, содержащие $\psi(x)$ и $f(x,t)$, имеют непрерывные производные по t. Слагаемое, содержащее функцию $\varphi(x)$, имеет в точке P разрывную производную по t, т. е.

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial t}(P)\right\}=\varphi'(x_0)\frac{\beta_2-\beta_1}{\gamma_2+\gamma_1}. \qquad (35)$$

Совершенно аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что для случая

$x < x_0$ выполняется равенство

$$\left\{\frac{\partial U}{\partial t}(Q)\right\} = \varphi'(x_0)\frac{\beta_1 - \beta_2}{\gamma_2 + \gamma_1}, \qquad (36)$$

где Q есть точка пересечения луча (x, t) $(t > 0)$ и прямой $\xi - x_0 = -a_1\tau$.

Заметим, что, как и в теореме 1, можно использовать замену переменной $x' = 2x_0 - x$ и вывести равенство (36) из равенства (35).

Обозначим через P_2, P_3 точки пересечения прямой $\xi - x_0 = a_2\tau$ и лучей (x_2, t), (x_3, t), $t > 0$. Из свойства (35) следует, что $\partial_2 U(x_2, t)$, $\partial_2 U(x_3, t)$ имеют разрывы только при $(x_2, t) = P_2$, $(x_3, t) = P_3$ соответственно. Таким образом, точки P_2, P_3 по данным задачи определяются однозначно. Следовательно, x_0 и a_2 определяются единственным образом, что означает единственность решения задачи 2.

Используя задание $U(x_1, t)$, $t > 0$, и равенство (36), убеждаемся в том, что $\partial_2 U(x_1, t)$ имеет разрыв только в точке P_1, которая есть пересечение прямой $\xi - x_0 = -a_1\tau$ и луча (x_1, t), $t > 0$. Из единственности определения P_1, x_0 следует единственность определения числа a_1.

Тем самым теорема 2 доказана.

Отметим, что если условие (30) выполнено, то, используя доказательство теоремы 2, легко построить соответствующие алгоритмы.

Замечание. Поскольку в обратных задачах функция $\varphi(x)$ не задана, но требуется выполнение неравенства $\varphi'(x_0) \neq 0$, теорема 2 имеет условный характер. Чтобы придать этой теореме конструктивный вид, достаточно постулировать неоднородность среды $(\beta_1 \neq \beta_2)$ и дополнительно задать функцию $\varphi(x)$.

Заключение

В работе рассмотрено одномерное волновое уравнение, описывающее поперечные колебания неоднородной струны или продольные колебания неоднородного стрежня. Поставлена прямая задача об определении функции колебаний в общем случае, когда начальное состояние, начальная скорость и сила внешнего воздействия известны и достаточно произвольны. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи и для него приведены простые и явные формулы. Дополнительно рассмотрены две обратные задачи о нахождении точки стыка различных материалов и скоростей распространения волн. Доказана теорема единственности решения обратных задач при условии выполнения некоторого неравенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Petrova G., Popov B.** Linear transport equations with discontinuous coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 1999. Vol. 24. No. 9–10. Pp. 1849–1873.

2. **Bouchut F., Jame F.** One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients // Journal Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 32. No. 7. Pp. 891–933.

3. **Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П.** Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений //Лекционные курсы НОЦ. Вып. 16. М.: Изд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. 122 с.

4. **Tadmor E.** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Anal. 1991. Vol. 28. No. 4. Pp. 891–906.

5. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

6. **Гельфанд И.М.** Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. XIV. Вып. 2 (86). С. 87– 158.

7. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.

8. **Ильин В.А.** Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из разной плотности и разной упругости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 4. С. 466–468.

9. **Ильин В.А.** Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 609–611.

10. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

11. **Салехов Г.С.** Обобщение формул Даламбера и Пуассона // Успехи математических наук. 1947. Т. 2. Вып. 4(20). С. 175—182.

12. **Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.** Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 416 с.

Статья поступила в редакцию 20.02.2018, принята к публикации 01.03.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич — *доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.*

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4

anik@math.nsc.ru

КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна — *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.*

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4

dsk@math.nsc.ru

REFERENCES

[1] **G. Petrova, B. Popov,** Linear transport equations with discontinuous coefficients, Communications in Partial Differential Equations. 24 (9—10) (1999) 1849—1873.

[2] **F. Bouchut, F. Jame,** One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients, Journal Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 32 (7) (1998) 891—933.

[3] **A.G. Kulikovskiy, E.I. Sveshnikova, A.P. Chugaynova,** Matematicheskiye metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical methods of studies in discontinuous solutions of systems of nonlinear hyperbolic equations], SEC lecture course, Iss. 16 (2010), MIAN, Moscow.

[4] **E. Tadmor,** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations, SIAM J. Numer. Anal. 28 (4) (1991) 891—906.

[5] **N.N. Kalitkin,** Chislennyye metody [Numerical methods], Nauka, Moscow, 1978.

[6] **I.M. Gel'fand,** Some problems of analysis and differential equations, Uspekhi Mat. Nauk. 14 (2(86)) (1959) 87—158.

[7] **A.F. Filippov,** Differentsialnyye uravneniya s razryvnoy pravoy chastyu [Differential equations with discontinuous right-hand parts], Nauka, Moscow, 1985.

[8] **V.A. Il'in,** A d'Alembert-type formula for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities and elasticities, Doklady Mathematics. 80 (1) (2009) 613—615.

[9] **V.A. Ilin,** A d'Alembert-type formula for transverse oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities, Doklady Mathematics. 80 (1) (2009) 624—626.

[10] **A.N. Tikhonov, A.A. Samarskiy,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Mathematical physics equations], Nauka, Moscow, 1977.

[11] **G.S. Salekhov,** A generation of formulas of d'Alembert and Poisson, Uspekhi Mat. Nauk. 2 (4(20)) (1947) 175—182.

[12] **A.G. Sveshnikov, A.N. Bogolyubov, V.V. Kravtsov,** Lektsii po matematicheskoy fizike [Lectures on mathematical physics], MSU, Moscow, 2004.

Received 20.02.2018, accepted 01.03.2018.

THE AUTHORS

ANIKONOV Dmitriy S.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

anik@math.nsc.ru

KONOVALOVA Dina S.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
dsk@math.nsc.ru