DOI: 10.18721/JPM.11208
УДК 621.373.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СЕЧЕНИЯ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА ЛАЗЕРА НА УСИЛЕНИЕ ЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.А. Кожевников, В.Е. Привалов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Разработан усовершенствованный метод расчета зависимости усиления излучения лазера от геометрии поперечного сечения его трубки. В связи с этим рассмотрено общее решение уравнения Гельмгольца. Однако точное решение в виде бесконечного ряда неудобно для практических приложений, поскольку создает возможности для ошибок. Потребности промышленного производства лазеров привели исследователей к необходимости заменять бесконечный ряд конечным при соответствующих расчетах. В статье предлагаются меры преодоления проблем, возникающих в таком случае. Нами получено приближенное решение уравнение Гельмгольца, удобное для практических расчетов, и разработан модифицированный метод нахождения коэффициентов разложения. Предлагаемый метод опробован на некоторых формах сечения лазерных трубок, допускающих независимый теоретический расчет. Продемонстрированы преимущества метода перед общепринятым, в частности доказано повышение точности расчетов.

Ключевые слова: лазер; активный элемент; усиление излучения; геометрия сечения трубки

Ссылка при цитировании: Кожевников В.А., Привалов В.Е. Влияние геометрии сечения активного элемента лазера на усиление его излучения // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 84 – 95. DOI: 10.18721/JPM.11208

THE GEOMETRICAL EFFECT OF AN ACTIVE ELEMENT CROSS-SECTION ON THE LASER GAIN

V.A. Kozhevnikov, V.E. Privalov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

An improved method for calculating the dependence of a laser emission gain on the tube cross-section’s geometry has been developed. In this connection the general solution of the Helmholtz equation was considered. But the solution in the form of an infinite series holds the potential for errors. In practice, a researcher has to replace the infinite series by a finite one. Some measures for solving the problems arising in this case were proposed. We have obtained an approximate solution of the Helmholtz equation that is convenient for practice, and a modified method for finding the coefficients of expansion has been developed. The method was tested for some cross-sectional forms that allowed independent theoretical calculation. As a result, the calculations accuracy was demonstrated to improve.

Key words: laser; active element; laser radiation gain; geometry of a tube cross-section

Citation: V.A. Kozhevnikov, V.E. Privalov, The geometrical effect of an active element cross-section on the laser gain, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (2) (2018) 84 – 95. DOI: 10.18721/JPM.11208

Введение

Одна из задач специалистов по лазерам состоит в обеспечении максимальной мощности излучения при фиксированной длине активного элемента (АЭ). Последний в газоразрядных лазерах (ГРЛ) обычно имеет цилиндрическую форму, что связано с технологией стекольного производства. Уже в первые годы лазерной эпохи поиски резервов мощности ГРЛ порождали множество разных задач. Среди них возникал вопрос, является ли цилиндрическая геометрия АЭ оптимальной с точки зрения энергетики. Сначала изучались свойства прямоугольного сечения [1], затем эллиптического [2]. Эксперименты с гелий-неоновым лазером прямоугольного сечения показали соответствие модели его реальным свойствам [3]. Обнадеживающие результаты исследований привели к попыткам обобщения теоретической модели [4, 5]. На базе таких обобщений велись поиски и в наши дни [6, 7].

Следует отметить, что отечественная промышленность, не дожидаясь создания достоверных физических моделей, в 1960-е годы выпускала гелий-неоновые лазеры ОКГ-11 и ОКГ-12 не только с цилиндрическими, но и с прямоугольными, и эллиптическими АЭ. Надежда была на повышение мощности излучения вследствие высших типов колебаний в резонаторе.

Поиски не ограничивались выбором оптимального поперечного сечения АЭ. Более успешно продвигались модели оптимального продольного сечения [8, 9]. Они получили экспериментальное подтверждение и при этом заметный рост мощности лазерного излучения [10]. Однако влияющих на мощность факторов оказалось больше, чем ранее предполагалось. Сегодня обращает на себя внимание и тот факт, что модели не были аналитическими, а расчеты имели приближенный характер. Современный уровень вычислительной техники должен открыть новые подходы и обнаружить неучтенные возможности.

Данная статья начинает новый цикл работ, который позволит (как мы надеемся) глубже проникнуть в природу ГРЛ и найти дополнительные энергетические резервы.

Геометрическая часть коэффициента усиления лазера имеет следующий вид [1] (в этой статье ограничимся постоянным сечением по длине АЭ):

$$k = \frac{1}{S_0}\int_V k_0 \cdot f\, dV; \qquad (1)$$

при этом функция $f(\mathbf{r})$, описывающая пространственное распределение коэффициента усиления среды, удовлетворяет уравнению Гельмгольца в области V:

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \qquad (2)$$

с граничным условием

$$f\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (3)$$

Здесь Г — граница области, в которой ищется решение; S_0 — площадь поперечного сечения трубки; k_0 — усиление на оси системы.

Общее решение уравнения Гельмгольца

Рассмотрим уравнение (2) в цилиндрических координатах (r, ϕ, z), считая из соображений симметрии, что зависимость от координаты z отсутствует. Воспользовавшись методом разделения переменных, получим, что общим решением уравнения при периодичности по полярному углу и ограниченности решения в окрестности $r = 0$ будет набор функций

$$f(r,\phi) = a_{k1} J_k(\lambda r)\cdot\cos(k\phi) + \\ + a_{k2} J_k(\lambda r)\cdot\sin(k\phi),$$

где $J_k(\lambda r)$ — функции Бесселя порядка k; $k = 0, 1, 2, \ldots$ (при $k = 0$ будет одна функция $a_0 J_0(\lambda r)$).

При этом граничному условию (3) при произвольном виде границы Г области V (т. е. при произвольном сечении трубки), вообще говоря, будет удовлетворять ряд из подобных функций, а не какая-либо отдельная функция при некотором фиксированном значении k, т. е. общее решение уравнения (2) при наличии условия (3) будет иметь вид

$$f(r,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\{a_{k1} J_k(\lambda r)\cdot\cos(k\phi) + \\ + a_{k2} J_k(\lambda r)\cdot\sin(k\phi)\}. \qquad (4)$$

Подобный метод решения граничной задачи в виде разложений решения по точным решениям соответствующего дифференциального уравнения, в технической литературе часто называют методом Трефтца [11].

В данной статье мы предлагаем свою модификацию этого метода, которая позволяет получать решения с высокой точностью при относительно небольшой вычислительной сложности.

Приближенное решение уравнения Гельмгольца

При практических вычислениях мы вынуждены заменить бесконечный ряд конечным, взяв определенное количество слагаемых в выражении (4) и получив функцию $f^n(r,\phi)$:

$$f^n(r,\phi)=\sum_{k=0}^{n}\{a_{k1}J_k(\lambda r)\cdot\cos(k\phi)+ + a_{k2}J_k(\lambda r)\cdot\sin(k\phi)\}. \quad (5)$$

Функция (5), так же как и функция (4), точно удовлетворяет уравнению (2) (поскольку каждое слагаемое удовлетворяет этому уравнению), но граничному условию (3) она удовлетворяет уже приближенно.

Обозначим через ζ_k соответствующие функции из выражения (5), т. е.

$$\zeta_k(\lambda r,\phi)=J_k(\lambda r)\cdot\cos(k\phi)$$

или

$$\zeta_k(\lambda r,\phi)=J_k(\lambda r)\cdot\sin(k\phi),$$

и нормируем нашу функцию f (и, соответственно, функцию $f^n(r,\phi)$) на единицу при $r = 0$ (уравнение (2) и граничное условие (3) – однородные).

Поскольку $J_0(0) = 1$, $J_k(0) = 0$ при $k > 0$, то $a_0 = 1$ и

$$f^n(r,\phi)=\zeta_0(\lambda r,\phi)+\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta_k(\lambda r,\phi). \quad (6)$$

Сформулируем теперь, что следует понимать под приближенным выполнением граничного условия (3).

Выберем на границе Г некоторые N точек

$$\xi_1,\xi_2,\ \ldots,\xi_N$$

и потребуем равенства нулю суммы значений функции f^n в этих точках:

$$\sum_{j=1}^{N}f^n(\xi_j)=0,\ \xi_j\in\Gamma.$$

При практических вычислениях последнее равенство, в общем случае, мы сможем удовлетворить тоже только приближенно, поэтому строго сформулировать условие надо так: мы должны подобрать такие значения параметра λ и коэффициентов a_k в равенстве (6), чтобы значение модуля суммы было меньше некоторого заданного, очень малого, значения Δ:

$$\left|\sum_{j=1}^{N}f^n(\xi_j)\right|<\Delta,\ \xi_j\in\Gamma. \quad (7)$$

Перебирать все возможные значения параметра λ и коэффициентов a_k крайне неэффективно, поэтому будем искать их методом приближений.

Первое приближение для параметра λ. В первом приближении наложим на λ такое условие:

$$\sum_{j=1}^{N}\zeta_0(\xi_j)\equiv\sum_{j=1}^{N}J_0(\lambda r_j)=0, \quad (8)$$

где r_j – соответствующее значение полярной координаты r точки ξ_j.

На практике мы можем либо потребовать равенство нулю суммы в условии (8), приближенно с какой-то точностью, либо заменить функцию Бесселя J_0 приближенной, для которой уравнение (8) можно решить точно. Существует, например, вариант интерполировать ее полиномом второй степени (вторая степень удобна, поскольку в этом случае уравнение будет квадратным и легко решаемым; для более высоких степеней появились бы сложности с решением). Интерполяция функции полиномом всего лишь второй степени не должна вызывать сомнений, ибо это только первое приближение для параметра λ, которое будет уточняться в дальнейшем, а неудачный выбор первого приближения может привести только к вычислительной сложности по алгоритму, но не ухудшит итоговой точности. Итак, если $[r_{\min}, r_{\max}]$ – диапазон изменения координаты r для границы Г, то мы можем построить, например, интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени для функции $\zeta_0(r)$ по узлам r_0, r_1, r_2 из диапазона $[r_{\min}, r_{\max}]$ [12]:

$$P(r) = \zeta_0(r_0)\frac{(r-r_1)(r-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + \zeta_0(r_1)\frac{(r-r_0)(r-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + \zeta_0(r_2)\frac{(r-r_0)(r-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)} = ar^2 + br + c,$$

где

$$a = \frac{\zeta_0(r_0)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + \frac{\zeta_0(r_1)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + \frac{\zeta_0(r_2)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)};$$

$$b = -\zeta_0(r_0)\frac{(r_1+r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} - \zeta_0(r_1)\frac{(r_0+r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} - \zeta_0(r_2)\frac{(r_0+r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)};$$

$$c = \frac{\zeta_0(r_0)\cdot r_1\cdot r_2}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + \frac{\zeta_0(r_1)\cdot r_0\cdot r_2}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + \frac{\zeta_0(r_2)\cdot r_0\cdot r_1}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)}.$$

В качестве узлов интерполяции можно взять корни соответствующих полиномов Чебышёва:

$$r_k = \frac{r_{\max}+r_{\min}}{2} + \frac{r_{\max}-r_{\min}}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right),$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n$ и $n = 2$ в нашем случае.

Подставляя это в (9), получаем уравнение относительно параметра λ:

$$\lambda^2 \cdot a\sum_{j=1}^{N} r_j^2 + \lambda\cdot b\sum_{j=1}^{N} r_j + \sum_{j=1}^{N} c = 0, \qquad (9)$$

из которого находим первое приближение для λ как значение соответствующего положительного корня.

Если окажется, что для данного выбора точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ на границе Γ (т. е. соответствующих значений r_j) уравнение (9) не имеет положительных корней, то поскольку, как правило, выбор соответствующих граничных точек в задаче жестко не фиксирован, можно поменять приведенный выше набор точек и повторить алгоритм снова. Если же вдруг набор граничных точек жестко фиксирован по каким-то соображениям или после нескольких смен граничных точек мы все равно не можем получить параметр λ, то в качестве первого приближения для λ можно взять, например, такое значение, что

$$J_0(\lambda r_{mean}) = 0,$$

где r_{mean} – среднее значение r в сечении трубки, т. е. $\lambda = \lambda_1 / r_{mean}$, где $\lambda_1 = 2,4048$ – первый корень функции $J_0(x)$.

В таком случае нужно просто в дальнейшем увеличить интервал, где будут отыскиваться следующие приближения для параметра λ.

Первое приближение для коэффициентов a_k. Из граничного условия (3) следует, что ряд (6)

$$\zeta_0(\lambda r,\phi) + \sum_{k=1}^{n} a_k\zeta_k(\lambda r,\phi)$$

на границе Γ должен быть равен нулю, т. е. на границе Γ должно выполняться равенство

$$-\zeta_0(\lambda r,\phi) = \sum_{k=1}^{n} a_k\zeta_k(\lambda r,\phi);\ (r,\phi)\in\Gamma. \qquad (10)$$

Формулу (10) можно интерпретировать как аппроксимацию функции $-\zeta_0$ на границе Γ линейной комбинацией линейно-независимых функций ζ_k. Однако такую аппроксимацию удобнее сделать через ортонормированные (на границе Γ) функции, поэтому перейдем от набора линейно-независимых функций $\{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\}$ к набору ортонормированных на границе Γ функций $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n\}$ (собственно говоря, мы их и определяем только на границе).

Переход к ортонормированному набору можно осуществить, например, через процесс Грама – Шмидта. При этом скалярное произведение функций на границе Γ естественным образом определяется как

$$\langle\zeta_k,\zeta_s\rangle = \sum_{j=1}^{N}\zeta_k(\lambda r_j,\phi_j)\cdot\zeta_s(\lambda r_j,\phi_j);$$

$$\left\langle \Psi_k, \Psi_s \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \Psi_k(r_j, \phi_j) \cdot \Psi_s(r_j, \phi_j);$$

$$\left\langle \zeta_k, \Psi_s \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \zeta_k(\lambda r_j, \phi_j) \cdot \Psi_s(r_j, \phi_j),$$

а норма произвольной функции Y на границе Г определяется следующим образом:

$$\| Y \| = \sqrt{\left\langle Y, Y \right\rangle}.$$

В процессе Грама – Шмидта вначале строятся ненормированные ортогональные функции $\{\tilde{Y}_k\}$, которые затем нормируются:

$$\Psi_k(r, \varphi) = \tilde{Y}_k(r, \varphi) / \| \tilde{Y}_k \|.$$

Построение выполняется следующим образом. В качестве первой функции $\tilde{Y}_1$ выбирают первую функцию ζ_1. Точнее, значения этой функции $\tilde{Y}_1$ на множестве точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ на границе Г определяются через значения первой функции ζ_1 на этом же множестве точек:

$$\tilde{Y}_1(\xi_j) \equiv \tilde{Y}_1(r_j, \phi_j) = \zeta_1(\lambda r_j, \phi_j), \; j = 1, 2, ..., N;$$

$$\Psi_1(\xi_j) = \tilde{Y}_1(r_j, \phi_j) / \| \tilde{Y}_1 \|.$$

Значения следующих функций находятся последовательно по формулам:

$$\tilde{Y}_i(\xi_j) \equiv \tilde{Y}_i(r_j, \phi_j) =$$
$$= \zeta_i(\lambda r_j, \phi_j) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\left\langle \zeta_i, \tilde{Y}_k \right\rangle}{\left\langle \tilde{Y}_k, \tilde{Y}_k \right\rangle} \tilde{Y}_k(r_j, \phi_j), \quad (11)$$
$$j = 1, 2, ..., N, \; i = 2, ..., n;$$
$$\Psi_i(\xi_j) = \tilde{Y}_i(r_j, \phi_j) / \| \tilde{Y}_i \|.$$

Получившийся набор функций Ψ_i ортонормирован на границе Г, а поэтому любую функцию, в том числе и функцию $-\zeta_0$, можно разложить в ряд (аппроксимировать линейной комбинацией) этих функций:

$$-\zeta_0(\lambda r_j, \phi_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Psi_k(r_j, \phi_j); \quad (12)$$
$$j = 1, 2, ..., N, \; (r_j, \phi_j) \in \Gamma.$$

При этом в силу ортонормированности системы $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n\}$, несложно найти коэффициенты разложения β_k :

$$\beta_k = -\left\langle \zeta_0, \Psi_k \right\rangle = -\sum_{j=1}^{N} \zeta_0(\lambda r_j, \phi_j) \cdot \Psi_k(r_j, \phi_j).$$

Сравнивая уравнения (10) и (12), получаем равенство

$$\beta_1 \Psi_1(r_j, \phi_j) + \beta_2 \Psi_2(r_j, \phi_j) + ... + \beta_n \Psi_n(r_j, \phi_j) =$$
$$= a_1 \zeta_1(\lambda r_j, \phi_j) + a_2 \zeta_2(\lambda r_j, \phi_j) + ... \quad (13)$$
$$... + a_n \zeta_n(\lambda r_j, \phi_j),$$

которое должно выполняться для всех точек $j = 1, 2, ..., N$.

С другой стороны, в силу своего построения, каждая из функций $\Psi_k (k = 1, 2, ..., n)$ является линейной комбинацией функций $\{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\}$. Приравнивая теперь в равенстве (13) коэффициенты при одинаковых функциях $\zeta_k(\lambda r, \phi)$ слева и справа, получаем выражения для коэффициентов a_k. Подставляя первое приближение для λ в эти выражения, получаем первое приближение для коэффициентов a_k.

Эти выражения для коэффициентов a_k весьма громоздки и усложняются с ростом числа n в формуле (6). В Приложении 1 приведены выражения для a_k для случая $n = 5$.

Модифицированный метод нахождения коэффициентов a_k

При численных расчетах полученный набор функций $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n\}$ бывает не точно ортогональным из-за ошибок округления, поскольку процесс Грама – Шмидта является численно неустойчивым [13]. Но этот процесс можно сделать более вычислительно-устойчивым, модифицировав его. Опишем предлагаемую процедуру модификации.

Первые две функции Ψ_1, Ψ_2 находятся так же:

$$\tilde{Y}_1(\xi_j) = \zeta_1(\lambda r_j, \phi_j), \; j = 1, 2, ..., N;$$

$$\Psi_1(\xi_j) = \tilde{Y}_1(r_j, \phi_j) / \| \tilde{Y}_1 \|;$$

$$\tilde{Y}_2(\xi_j) = \zeta_2(\lambda r_j, \phi_j) - \frac{\left\langle \zeta_2, \tilde{Y}_1 \right\rangle}{\left\langle \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_1 \right\rangle} \tilde{Y}_1(r_j, \phi_j),$$

$$j = 1, 2, ..., N;$$

$$\Psi_2(\xi_j) = \tilde{Y}_2(r_j, \phi_j) / \| \tilde{Y}_2 \|.$$

А далее функции находятся следующим образом:

$$\zeta_3^{(1)}(\lambda r_j, \phi_j) = \zeta_3(\lambda r_j, \phi_j) - \frac{\langle \zeta_3, \widetilde{Y}_1 \rangle}{\langle \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_1 \rangle} \widetilde{Y}_1(r_j, \phi_j),$$

$$j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\widetilde{Y}_3(r_j, \phi_j) = \zeta_3^{(1)}(\lambda r_j, \phi_j) -$$

$$- \frac{\langle \zeta_3^{(1)}, \widetilde{Y}_2 \rangle}{\langle \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}_2 \rangle} \widetilde{Y}_2(r_j, \phi_j), \ j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\Psi_3(\xi_j) = \widetilde{Y}_3(r_j, \phi_j) / \| \widetilde{Y}_3 \|$$

и в общем случае $\widetilde{Y}_k$ находятся по такому алгоритму:

$$\zeta_k^{(1)}(\lambda r_j, \phi_j) = \zeta_k(\lambda r_j, \phi_j) -$$

$$- \frac{\langle \zeta_k, \widetilde{Y}_1 \rangle}{\langle \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_1 \rangle} \widetilde{Y}_1(r_j, \phi_j), \ j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\zeta_k^{(2)}(\lambda r_j, \phi_j) = \zeta_k^{(1)}(\lambda r_j, \phi_j) -$$

$$- \frac{\langle \zeta_k^{(1)}, \widetilde{Y}_2 \rangle}{\langle \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}_2 \rangle} \widetilde{Y}_2(r_j, \phi_j), \ \ j = 1, 2, \ldots, N;$$

. . . .;

$$\zeta_k^{(k-2)}(\lambda r_j, \phi_j) = \zeta_k^{(k-3)}(\lambda r_j, \phi_j) -$$

$$- \frac{\langle \zeta_k^{(k-3)}, \widetilde{Y}_{k-2} \rangle}{\langle \widetilde{Y}_{k-2}, \widetilde{Y}_{k-2} \rangle} \widetilde{Y}_{k-2}(r_j, \phi_j), \ \ j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\widetilde{Y}_k(r_j, \phi_j) = \zeta_k^{(k-2)}(\lambda r_j, \phi_j) - \qquad (14)$$

$$- \frac{\langle \zeta_k^{(k-2)}, \widetilde{Y}_{k-1} \rangle}{\langle \widetilde{Y}_{k-1}, \widetilde{Y}_{k-1} \rangle} \widetilde{Y}_{k-1}(r_j, \phi_j), \ \ j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\Psi_k(\xi_j) = \widetilde{Y}_k(r_j, \phi_j) / \| \widetilde{Y}_k \| .$$

Этот модифицированный алгоритм при идеально точных вычислениях эквивалентен описанному выше (т. е. при идеально точных вычислениях функции (14) совпадают с соответствующими функциями (11)). Коэффициенты a_k находятся далее из равенства (13) аналогичным образом. В Приложении 2 приведены в качестве примера выражения для a_k для случая $n = 6$.

Для того чтобы определить, какой метод ортогонализации использовать — обычный или модифицированный — нужно проверить выполнение равенств

$$\langle \Psi_i, \Psi_k \rangle = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Наши расчеты для эллипса при $N = 400$ показывают, что эти равенства для значений i и k уже 5 и 6 выполняются примерно на 14 порядков точнее для модифицированного метода (при использовании 64-разрядных чисел с плавающей точкой).

Последующие приближения и расчет коэффициента усиления

После того, как мы нашли параметр λ и коэффициенты a_k в первых приближениях, мы можем составить по формуле (6) выражение для функции $f^n(r, \phi)$ и найти сумму (7) в первом приближении:

$$\Delta_1 = \left| \sum_{j=1}^{N} f^n(\xi_j) \right|, \ \xi_j \in \Gamma .$$

Затем мы варьируем величину параметра λ — изменяем его на $\delta\lambda$. Для этого нового значения $\lambda + \delta\lambda$, по формулам (11) или (14) строим новую систему ортонормированных функций; для этой новой системы находим новые коэффициенты разложения β_k и затем из равенства (13) находим новые значения коэффициентов a_k. По новым значениям a_k находим сумму (7) — это будет Δ_2. Затем все повторяем снова. Таким образом, перебирая возможные значения λ в окрестности первого приближения, мы в конце концов выберем то значение, при котором сумма (7) достигнет минимального значения. При этом количество точек N на границе можно также изменять (не забывая при этом заново находить первое приближение), пытаясь достигнуть нужной точности.

При этом необходимо отметить следующее. Из теории следует, что решение уравнения (2) с граничным условием (3) существует не при каком-то единственном значении, а при наборе значений λ (так называемом наборе собственных значений задачи). Основной вклад в усиление дает первое собственное значение λ. Если же сильно увеличивать интервал поиска первого приближения λ, то в дальнейшем, на следующих приближениях, мы можем попасть не на первое, а на последующие собственные значения, поскольку приближенное численное значение суммы (7) для следующих собственных значений может оказаться ближе к нулю, чем для первого значения. В связи с этим нужно контролировать зависимость суммы (7) от значения λ, чтобы убедиться, что мы нашли первое собственное значение.

После того, как мы определили параметр λ и коэффициенты a_k с нужной точностью, мы можем определить коэффициент усиления (здесь и далее выбираем длину трубки равной единице):

$$k = \frac{1}{S_0}\iint_S k_0 f^n(r,\phi) r dr d\phi = \frac{1}{S_0}\Big(\iint_S k_0\zeta_0(\lambda r,\phi) r dr d\phi + \sum_{k=1}^{n} a_k \iint_S k_0\zeta_k(\lambda r,\phi) r dr d\phi\Big), \quad (15)$$

где S — поперечное сечение трубки площадью S_0.

Продемонстрируем применение данного метода для сечений разной формы.

Случай прямоугольного сечения трубки

Пусть стороны прямоугольника равны a и b, причем $b \le a$. Выберем начало отсчета полярной системы координат в центре прямоугольника и направим полярную ось (от которой отсчитывается полярный угол ϕ) параллельно большей стороне. Пусть θ — половина меньшего угла между диагоналями, и тогда больший угол между диагоналями равен $\pi - 2\theta$. Очевидно, что $\mathrm{tg}\theta = b / a$. Тогда координаты (r,ϕ) вершин прямоугольника при нашем выборе системы координат будут выражаться как

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \pi - \mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, -\mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Поскольку уравнение прямой в полярных координатах имеет вид

$$r = p / \cos(\phi - \alpha),$$

где p — длина перпендикуляра к прямой из начала координат, α — полярный угол этого перпендикуляра, то из формулы (15) следует, что коэффициент усиления имеет вид

$$k = \frac{1}{ab}\left\{\int_{-\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}^{\mathrm{arctg}\frac{b}{a}} d\phi \int_0^{\frac{a}{2\cos\phi}} r dr k_0 f^n(r,\phi) + \int_{\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}^{\pi-\mathrm{arctg}\frac{b}{a}} d\phi \int_0^{\frac{b}{2\sin\phi}} r dr k_0 f^n(r,\phi) + \int_{\pi-\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}^{\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}} d\phi \int_0^{\frac{-a}{2\cos\phi}} r dr k_0 f^n(r,\phi) + \int_{\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}^{2\pi-\mathrm{arctg}\frac{b}{a}} d\phi \int_0^{\frac{-b}{2\sin\phi}} r dr k_0 f^n(r,\phi)\right\}.$$

При выбранной нами системе координат, очевидно, существует симметрия при замене ϕ на $-\phi$, а это означает, что функция $f^n(r,\phi)$ должна быть четной по ϕ. Аналогично ничего не должно меняться по симметрии при замене ϕ на $\pi + \phi$. Это означает, что в качестве функции $\zeta_k(\lambda r,\phi)$ следует брать выражение

$$\zeta_k(\lambda r,\phi) = J_{2k}(\lambda r)\cdot\cos(2k\phi),$$

т. е. формула (6) примет следующий вид:

$$f^n(r,\phi) = J_0(\lambda r) + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} J_{2k}(\lambda r)\cdot\cos(2k\phi). \quad (16)$$

Результаты расчетов по полученным формулам для прямоугольного сечения трубки при разном отношении сторон a/b ($b = 1$) для $N = 400$ точек на границе приведены в табл. 1. Для квадрата, когда $a/b = 1$,

Таблица 1

Расчетные значения основных параметров системы в зависимости от отношения сторон прямоугольного сечения трубки лазера

a/b	λ	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}
1,00	4,44	0,00	−2,00	0,00	2,00	0,00	−1,93
1,10	4,25	0,19	−1,96	−0,56	1,86	0,92	−1,69
1,25	4,02	0,44	−1,81	−1,23	1,27	1,79	−0,51
1,50	3,78	0,77	−1,41	−1,85	−0,02	1,84	1,41
1,75	3,62	1,02	−0,97	−2,00	−1,06	0,92	2,04
2,00	3,51	1,20	−0,56	−1,87	−1,69	−0,16	1,60
Нормализованное расчетное значение коэффициента усиления лазера k/k_0 = 0,405 (k_0 − коэффициент усиления на оси системы) для всех приведенных значений отношения a/b							

дополнительно существует симметрия при замене ϕ на $\phi+\pi/2$, поэтому отличны от нуля только коэффициенты a_{4k}, что хорошо подтверждается расчетом.

Но для прямоугольника уравнение (2) с граничным условием (3) можно решить точно − в декартовой системе координат. Записав граничное условие (3) в виде

$$f(a/2, y) = f(-a/2, y) = f(x, b/2) = \\ = f(x, -b/2) = 0$$

и снова воспользовавшись методом разделения переменных, получим, что для пространственного распределения усиления $f(x,y)$ в случае трубки с прямоугольным сечением, общим решением уравнения (2), удовлетворяющим условию (3), будет функция

$$f(x, y) = C\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

а для значения параметра λ получаем выражение

$$\lambda_{n,m}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2},\ n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots .$$

Нормируя функцию f на единицу в центре сечения, получим $C = 1$. Для сравнения с результатами расчетов, представленных выше (данные для первого собственного числа λ), удобно взять составляющую, для которой $n = m = 1$. Тогда по формуле (1) можно вычислить коэффициент усиления для случая трубки с прямоугольным сечением:

$$k = \frac{1}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} k_0 \cos\frac{\pi x}{a}dx\cdot\cos\frac{\pi y}{b}dy = \\ = \frac{4}{\pi^2}k_0 = 0,405k_0.$$

Сравнение полученного значения коэффициента с таковым в табл. 1 (нижняя графа), позволяет отметить отличное согласие результатов применения нашего метода (нахождение как коэффициента усиления, так и параметра λ) с точным решением.

Случай круглого сечения трубки

Для указанного сечения также можно получить точное решение. Если выбрать за начало отсчета полярной системы координат центр круга, то искомая функция не будет зависеть от полярного угла ϕ и уравнение (2) после замены аргумента $x = \lambda r$ превратится в уравнение для функции Бесселя нулевого порядка. Его общее решение будет иметь вид

$$f(r, \phi) = f(r) = a_0 J_0(\lambda r).$$

Снова нормируем функцию f на единицу в центре сечения, и тогда получаем, что $f(r) = J_0(\lambda r)$.

Граничное условие (3) для окружности радиуса a дает значение $J_0(\lambda a) = 0$, откуда следует, что произведение λa принимает значения

$$\lambda a = \lambda_1, \lambda_2, \ldots ,$$

где λ_k – k-й корень функции $J_0(x)$.

Если учесть, что основной вклад в пространственное распределение усиления дает первая собственная функция, то $\lambda a = \lambda_1 = 2,4048$. Тогда по формуле (1) получаем следующее выражение для коэффициента усиления:

$$k = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r dr k_0 J_0\left(\frac{\lambda_1}{a} r\right) =$$

$$= \frac{2k_0}{\lambda_1^2} J_1\left(\frac{\lambda_1}{a} r\right)\cdot \frac{\lambda_1}{a} r\Bigg|_0^a = \frac{2k_0}{\lambda_1} J_1(\lambda_1) = 0,432k_0.$$

Для проверки нашего алгоритма мы провели расчеты для круглого сечения трубки по общей формуле (15), которая в этом случае будет иметь вид

$$k = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r dr k_0 f^n(r,\phi).$$

Поскольку снова можно воспользоваться симметрией при замене угла ϕ углом $-\phi$ и углом $\pi + \phi$, в качестве функции $\zeta_k(\lambda r,\phi)$ опять можно взять

$$\zeta_k(\lambda r,\phi) = J_{2k}(\lambda r)\cdot\cos(2k\phi),$$

и для функции $f^n(r,\phi)$ можно воспользоваться формулой (16).

Отметим, что рассмотрение круглого сечения как раз является тем весьма редким случаем, когда первое приближение λ, очевидно, нельзя найти по формуле (9); поэтому выбираем в качестве первого приближения параметр $\lambda = \lambda_1 / a$ (на основании аргументации, изложенной выше в разделе «Первое приближение λ»).

Результаты расчета для $N = 400$ точек на границе дает выполнение равенств

$$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = a_{12} = 0$$

с очень высокой точностью (коэффициенты a_k имеют порядок $10^{-16} - 10^{-21}$); при этом значения параметра λ и коэффициента усиления k также отлично согласуются с теоретическими.

Случай эллиптического сечения трубки

Аналитически точное выражение для коэффициента усиления лазера получить в указанном случае не удается. Используем предлагаемый нами метод.

Выберем за начало отсчета полярной системы координат центр эллипса, а полярную ось направим вдоль его большей полуоси. Пусть c и d – полуоси эллипса ($d \le c$), тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$r = \frac{cd}{\sqrt{c^2\sin^2\phi + d^2\cos^2\phi}}.$$

Тогда по формуле (15) коэффициент усиления будет следовать выражению

$$k = \frac{1}{\pi cd}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{cd}{\sqrt{c^2\sin^2\phi + d^2\cos^2\phi}}} r dr k_0 f^n(r,\phi).$$

Для эллипса опять сохраняется симметрия при замене угла ϕ углом $-\phi$ и $\pi + \phi$, поэтому в качестве функции $\zeta_k(\lambda r,\phi)$ снова нужно взять

Таблица 2

Расчетные значения основных параметров системы в зависимости от отношения полуосей эллиптического сечения трубки лазера

c/d	k/k_0	λ	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}
1,00	0,432	2,41	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$
1,10	0,431	2,30	0,14	$2\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-5}$	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$
1,25	0,430	2,18	0,32	0,01	$2\cdot10^{-4}$	$<10^{-6}$	$<10^{-6}$
1,50	0,424	2,04	0,56	0,04	$2\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-5}$	$<10^{-6}$
1,75	0,416	1,95	0,75	0,08	$4\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$	$<10^{-6}$
2,00	0,408	1,89	0,89	0,13	0,01	$4\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$

Примечания. 1. Значение c/d = 1,00 относится к круглому сечению трубки. 2. Все значения $a_{12} < 10^{-6}$. 3. Количество точек на границе $N = 400$.

$$\zeta_k(\lambda r,\phi) = J_{2k}(\lambda r)\cdot\cos(2k\phi),$$

и для функции $f^n(r,\phi)$ можно воспользоваться формулой (16).

Результаты расчетов для эллиптического сечения трубки лазера при разном отношении полуосей c/d ($d = 1$) для $N = 400$ точек на границе приведены в табл. 2 (там же приведен результат для круглого сечения при $c/d = 1$).

Заключение

В работе предложен усовершенствованный метод расчета коэффициента усиления лазерного излучения в зависимости от геометрии поперечного сечения трубки. Метод позволяет получать более общие и точные результаты по сравнению с имеющимися на настоящий день. В дальнейшем мы планируем использовать этот метод для расчета указанного коэффициента для других форм сечения активного элемента лазера.

Приложение 1

Выражения для коэффициентов a_k при $n = 5$ для классического метода Грама – Шмидта

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{\|\zeta_1\|};\ \varepsilon = \frac{\langle\zeta_2,\Psi_1\rangle}{\|\Psi_1\|^2};\ \gamma_1 = \frac{\langle\zeta_3,\Psi_1\rangle}{\|\Psi_1\|^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{\langle\zeta_3,\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};\delta_1 = \frac{\langle\zeta_4,\Psi_1\rangle}{\|\Psi_1\|^2};\ \delta_2 = \frac{\langle\zeta_4,\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};$$

$$\delta_3 = \frac{\langle\zeta_4,\tilde Y_3\rangle}{\|\tilde Y_3\|^2};\ \omega_1 = \frac{\langle\zeta_5,\Psi_1\rangle}{\|\Psi_1\|^2};\omega_2 = \frac{\langle\zeta_5,\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};$$

$$\omega_3 = \frac{\langle\zeta_5,\tilde Y_3\rangle}{\|\tilde Y_3\|^2};\ \omega_4 = \frac{\langle\zeta_5,\tilde Y_4\rangle}{\|\tilde Y_4\|^2};$$

$$\beta_1 = -\langle\zeta_0,\Psi_1\rangle;\beta_2 = -\langle\zeta_0,\Psi_2\rangle;$$

$$\beta_3 = -\langle\zeta_0,\Psi_3\rangle;\beta_4 = -\langle\zeta_0,\Psi_4\rangle;$$

$$\beta_5 = -\langle\zeta_0,\Psi_5\rangle.$$

Коэффициенты a_k при указанных обозначениях имеют следующий вид:

$$a_5 = \frac{\beta_5}{\|\tilde Y_5\|};a_4 = \frac{\beta_4}{\|\tilde Y_4\|} - \frac{\beta_5\omega_4}{\|\tilde Y_5\|};$$

$$a_3 = \frac{\beta_3}{\|\tilde Y_3\|} - \frac{\beta_4\delta_3}{\|\tilde Y_4\|} + \frac{\beta_5\omega_4\delta_3 - \beta_5\omega_3}{\|\tilde Y_5\|};$$

$$a_2 = \frac{\beta_2}{\|\tilde Y_2\|} - \frac{\beta_3\gamma_2}{\|\tilde Y_3\|} + \frac{-\beta_4\delta_2 + \beta_4\delta_3\gamma_2}{\|\tilde Y_4\|} + (\beta_5\omega_4\delta_2 - \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_2 + \beta_5\omega_3\gamma_2 - \beta_5\omega_2)/\|\tilde Y_5\|;$$

$$a_1 = \beta_1\alpha - \frac{\beta_2\varepsilon\alpha}{\|\tilde Y_2\|} + \frac{-\beta_3\gamma_1\alpha + \beta_3\gamma_2\varepsilon\alpha}{\|\tilde Y_3\|} + (-\beta_4\delta_1\alpha + \beta_4\delta_2\varepsilon\alpha + \beta_4\delta_3\gamma_1\alpha - \beta_4\delta_3\gamma_2\varepsilon\alpha)/\|\tilde Y_4\| + (\beta_5\omega_4\delta_1\alpha - \beta_5\omega_4\delta_2\varepsilon\alpha - \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_1\alpha + \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_2\varepsilon\alpha - \beta_5\omega_3\gamma_2\varepsilon\alpha + \beta_5\omega_3\gamma_1\alpha + \beta_5\omega_2\varepsilon\alpha - \beta_5\omega_1\alpha)/\|\tilde Y_5\|.$$

Приложение 2

Выражения для коэффициентов a_k при $n = 6$ для модифицированного метода Грама – Шмидта

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\langle\zeta_2,\tilde Y_1\rangle}{\|\tilde Y_1\|^2};\gamma_1 = \frac{\langle\zeta_3,\tilde Y_1\rangle}{\|\tilde Y_1\|^2};\gamma_2 = \frac{\langle\zeta_3^{(1)},\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};$$

$$\delta_1 = \frac{\langle\zeta_4,\tilde Y_1\rangle}{\|\tilde Y_1\|^2};\delta_2 = \frac{\langle\zeta_4^{(1)},\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};$$

$$\delta_3 = \frac{\langle\zeta_4^{(2)},\tilde Y_3\rangle}{\|\tilde Y_3\|^2};\omega_1 = \frac{\langle\zeta_5,\tilde Y_1\rangle}{\|\tilde Y_1\|^2};$$

$$\omega_2 = \frac{\langle\zeta_5^{(1)},\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};\omega_3 = \frac{\langle\zeta_5^{(2)},\tilde Y_3\rangle}{\|\tilde Y_3\|^2};$$

$$\omega_4 = \frac{\langle\zeta_5^{(3)},\tilde Y_4\rangle}{\|\tilde Y_4\|^2};\rho_1 = \frac{\langle\zeta_6,\tilde Y_1\rangle}{\|\tilde Y_1\|^2};$$

$$\rho_2 = \frac{\langle\zeta_6^{(1)},\tilde Y_2\rangle}{\|\tilde Y_2\|^2};\rho_3 = \frac{\langle\zeta_6^{(2)},\tilde Y_3\rangle}{\|\tilde Y_3\|^2};$$

$$\rho_4 = \frac{\langle\zeta_6^{(3)},\tilde Y_4\rangle}{\|\tilde Y_4\|^2};\rho_5 = \frac{\langle\zeta_6^{(4)},\tilde Y_5\rangle}{\|\tilde Y_5\|^2};$$

$$\beta_1 = -\langle\zeta_0,\Psi_1\rangle;\beta_2 = -\langle\zeta_0,\Psi_2\rangle;$$

$$\beta_3 = -\langle\zeta_0,\Psi_3\rangle;\beta_4 = -\langle\zeta_0,\Psi_4\rangle;$$

$$\beta_5 = -\langle\zeta_0,\Psi_5\rangle;\beta_6 = -\langle\zeta_0,\Psi_6\rangle.$$

Введенные обозначения аналогичны

приведенным в Приложении 1, но в соответствующих скалярных произведениях теперь присутствуют не только функции $\zeta_k(\lambda r, \phi)$, но и $\zeta_k^{(i)}(\lambda r, \phi)$.

Коэффициенты a_k при указанных обозначениях имеют следующий вид:

$$a_6 = \frac{\beta_6}{\| \widetilde{Y}_6 \|}; a_5 = \frac{\beta_5}{\| \widetilde{Y}_5 \|} - \frac{\beta_6\rho_5}{\| \widetilde{Y}_6 \|};$$

$$a_4 = \frac{\beta_4}{\| \widetilde{Y}_4 \|} - \frac{\beta_5\omega_4}{\| \widetilde{Y}_5 \|} + \frac{-\beta_6\rho_4 + \beta_6\rho_5\omega_4}{\| \widetilde{Y}_6 \|};$$

$$a_3 = \frac{\beta_3}{\| \widetilde{Y}_3 \|} - \frac{\beta_4\delta_3}{\| \widetilde{Y}_4 \|} + \frac{-\beta_5\omega_3 + \beta_5\omega_4\delta_3}{\| \widetilde{Y}_5 \|} + (-\beta_6\rho_3 + \beta_6\rho_4\delta_3 + \beta_6\rho_5\omega_3 - \beta_6\rho_5\omega_4\delta_3)/\| \widetilde{Y}_5 \|;$$

$$a_2 = \frac{\beta_2}{\| \widetilde{Y}_2 \|} - \frac{\beta_3\gamma_2}{\| \widetilde{Y}_3 \|} + \frac{-\beta_4\delta_2 + \beta_4\delta_3\gamma_2}{\| \widetilde{Y}_4 \|} + (-\beta_5\omega_2 + \beta_5\omega_3\gamma_2 + \beta_5\omega_4\delta_2 - \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_2)/\| \widetilde{Y}_5 \| + (-\beta_6\rho_2 + \beta_6\rho_3\gamma_2 + \beta_6\rho_4\delta_2 - \beta_6\rho_4\delta_3\gamma_2 + \beta_6\rho_5\omega_2 - \beta_6\rho_5\omega_3\gamma_2 - \beta_6\rho_5\omega_4\delta_2 + \beta_6\rho_5\omega_4\delta_3\gamma_2)/\| \widetilde{Y}_6 \|;$$

$$a_1 = \frac{\beta_1}{\| \widetilde{Y}_1 \|} - \frac{\beta_2\varepsilon}{\| \widetilde{Y}_2 \|} + \frac{-\beta_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2\varepsilon}{\| \widetilde{Y}_3 \|} + (-\beta_4\delta_1 + \beta_4\delta_2\varepsilon + \beta_4\delta_3\gamma_1 - \beta_4\delta_3\gamma_2\varepsilon)/\| \widetilde{Y}_4 \| + (-\beta_5\omega_1 + \beta_5\omega_2\varepsilon + \beta_5\omega_3\gamma_1 - \beta_5\omega_3\gamma_2\varepsilon + \beta_5\omega_4\delta_1 - \beta_5\omega_4\delta_2\varepsilon - \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_1 + \beta_5\omega_4\delta_3\gamma_2\varepsilon)/\| \widetilde{Y}_5 \| + (-\beta_6\rho_1 + \beta_6\rho_2\varepsilon + \beta_6\rho_3\gamma_1 - \beta_6\rho_3\gamma_2\varepsilon + \beta_6\rho_4\delta_1 - \beta_6\rho_4\delta_2\varepsilon - \beta_6\rho_4\delta_3\gamma_1 + \beta_6\rho_4\delta_3\gamma_2\varepsilon + \beta_6\rho_5\omega_1 - \beta_6\rho_5\omega_2\varepsilon - \beta_6\rho_5\omega_3\gamma_1 + \beta_6\rho_5\omega_3\gamma_2\varepsilon - \beta_6\rho_5\omega_4\delta_1 + \beta_6\rho_5\omega_4\delta_2\varepsilon + \beta_6\rho_5\omega_4\delta_3\gamma_1 - \beta_6\rho_5\omega_4\delta_3\gamma_2\varepsilon)/\| \widetilde{Y}_6 \|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Зависимость мощности излучения He-Ne лазера от геометрии сечения разрядного промежутка // Журнал технической физики. 1968. Т. 37. № 12. С. 2080–2084.

2. **Привалов В.Е., Юдин С.Ф.** Влияние формы сечения разрядного промежутка на усиление активной среды газового лазера // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. № 11. С. 2484–2487.

3. **Привалов В.Е., Ходовой В.А.** Экспериментальное исследование He-Ne лазера с разрядным промежутком прямоугольного сечения // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 37. № 4. С. 797–799.

4. **Привалов В.Е., Юдин С.Ф.** Влияние граничных условий на усиление активной среды газового лазера // Журнал прикладной спектроскопии. 1975. Т. 22. № 1. С. 42–46.

5. **Привалов В.Е., Юдин С.Ф.** Зависимость усиления излучения газового лазера от геометрии сечения разряда // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 45. № 2. С. 340–345.

6. **Привалов В.Е.** Геометрия газового разряда и усиление излучения лазера // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53. № 5. С. 80–90.

7. **Привалов В.Е.** Некоторые перспективы развития газоразрядных лазеров // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 2-2. С. 246–253.

8. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Кольцевой газовый лазер // Успехи физических наук. 1969. Т. 97. Вып. 3. С. 377–402.

9. **Привалов В.Е.** He-Ne лазер с комбинированной разрядной трубкой // Электронная техника. 1971. Сер. 3. Газоразрядные приборы. № 3 (23). С. 29– 31.

10. **Федотов А.А., Черниговский В.В.** К определению мощности излучения He-Ne ОКГ с конусообразной трубкой // Известия ЛЭТИ. 1974. Вып. 140. С. 74–77.

11. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

12. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений (в 2 тт.). Т. 1. М.: Физматлит, 1962, 464 с.

13. **Higham N.J.** Accuracy and stability of numerical algorithms (2nd ed.). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 711 p.

Статья поступила в редакцию 26.02.2018, принята к публикации 20.03.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОЖЕВНИКОВ Вадим Андреевич – *старший преподаватель кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vadim.kozhevnikov@gmail.com

ПРИВАЛОВ Вадим Евгеньевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vaevpriv@yandex.ru

REFERENCES

[1] **V.E. Privalov, S.A. Fridrikhov,** Zavisimost moshchnosti izlucheniya He-Ne lazera ot geometrii secheniya razryadnogo promezhutka [The dependence of the He-Ne laser emission power on the cross-section geometry of a discharge gap], The Russian Journal of Applied Physics. 38 (12) (1968) 2080 – 2084.

[2]**V.E. Privalov, S.F. Yudin,** Influence of the shape of a discharge-gap cross section on the gas-laser gain // Quantum Electronics. 1 (11) (1974) 2484–2487.

[3] **V.E. Privalov, V.A. Khodovoy,** Eksperimentalnoye issledovaniye He-Ne lazera s razryadnym promezhutkom pryamougolnogo secheniya [An experimental investigation of a He-Ne laser with a rectangular cross-section discharge gap], Optics and Spectroscopy. 37 (4) (1974) 797–799.

[4] **V.E. Privalov, S.F. Yudin,** Vliyaniye granichnykh usloviy na usileniye aktivnoy sredy gazovogo lazera [Influence of boundary conditions on the active medium gain of the gas-laser] , J. Appl. Spectr. 22 (1) (1975) 42–46.

[5] **V.E. Privalov, S.F. Yudin,** Zavisimost usileniya izlucheniya gazovogo lazera ot geometrii secheniya razryada [Gas-laser emission gain as a function of discharge cross-section geometry], Optics and Spectroscopy. 45 (2) (1978) 340–345.

[6] **V.E. Privalov,** Gas-discharge geometry and studies in laser emission, Russian Physics Journal. 53 (5) (2010) 80 –90.

[7] **V.E. Privalov,** Some prospects for the development of gas-discharge lasers, Russian Physics Journal. 56 (2-2) (2013) 246–253.

[8] **V.E. Privalov, S.A. Fridrikhov,** The ring gas laser, Soviet Physics, Uspekhi. 12 (3) (1969) 153–167.

[9] **V.E. Privalov,** He-Ne lazer s kombinirovannoy razryadnoy trubkoy [He-Ne laser with a combined discharge tube] Elektronnaya tekhnika, Ser. 3: Gas charge devices. No. 3(23) (1971) 29–31.

[10] **A.A. Fedotov, V.V. Chernigovskiy,** K opredelyeniyu moshchnosty izlucheniya He-Ne OKG s konusoobraznoy trubkoy [About radiation power of He-Ne laser with a conic tube], Izvestiya LETI. (140) (1974) 74–77.

[11] **S.G. Mikhlin,** Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics], Nauka, Moscow, 1970.

[12] **I.S. Berezin, N.P. Zhidkov,** Metody vychisleniy [Calculation methods, in 2 Vols]. Vol. 1, Fizmatlit, Moscow, 1962.

[13] **N.J. Higham,** Accuracy and stability of numerical algorithms (2nd ed.), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

Received 26.02.2018, accepted 20.03.2018.

THE AUTHORS

KOZHEVNIKOV Vadim A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vadim.kozhevnikov@gmail.com

PRIVALOV Vadim E.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vaevpriv@yandex.ru