

DOI: 10.18721/JPM.10308

УДК 517.958

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

Д.С. Аниконов<sup>1</sup>, Я.А. Киприянов<sup>2</sup>, Д.С. Коновалова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск, Российская Федерация;

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,  
г. Новосибирск, Российская Федерация

В настоящей работе используется математическая модель процесса колебаний мембраны; модель основана на решении гиперболического дифференциального уравнения второго порядка. Ставится и исследуется новая обратная задача, содержащая два варианта. В первом известны следующие данные: коэффициент, определяющий фазовую скорость; начальные данные задачи Коши; решение задачи Коши на двух заданных плоскостях; производные от решения вдоль направления вектора нормали к этим плоскостям. В работе поставлена задача — локализовать носитель правой части уравнения колебаний. Построен алгоритм, позволяющий найти ограниченную область, содержащую неизвестный носитель. Во втором варианте алгоритм относится к случаю, когда коэффициент, определяющий фазовую скорость, не известен, но известен интервал его возможных значений. Проведен ряд численных экспериментов для иллюстрации предложенной модели.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; уравнение колебаний мембраны; интегральная геометрия; дифференциальное уравнение

**Ссылка при цитировании:** Аниконов Д.С., Киприянов Я.А., Коновалова Д.С. Обратная задача для уравнения колебаний мембраны // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 3. С. 84–94. DOI: 10.18721/JPM.10308

## AN INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MEMBRANE'S VIBRATION

D.S. Anikonov<sup>1</sup>, Ya.A. Kipriyanov<sup>2</sup>, D.S. Konovalova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation;

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

A mathematical model for membrane's vibration process is used in this paper. The model is based on seeking a solution of the second-order hyperbolic differential equation. A new inverse problem is set and investigated in two versions. In the first version the known data are as follows: the coefficient defining a phase velocity, starting data of the Cauchy problem, the Cauchy problem solution on the two given planes, derivatives of the solution along the vector being normal to these planes. The challenge has been in localizing the support of the right-hand side of the equation for vibrations. The algorithm permitting to find the bounded domain containing the unknown support was designed. In the second version the algorithm refers to the

case where the coefficient defining a phase velocity is unknown but an interval of its possible values is known. A series of runs was performed to illustrate the proposed model.

**Key words:** simulation; equation of membrane's vibration; integral geometry; inverse problem

**Citation:** D.S. Anikonov, Ya.A. Kipriyanov, D.S. Konovalova, An inverse problem for the equation of membrane's vibration, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10 (3) (2017) 84–94. DOI: 10.18721/JPM.10308

### Введение, обозначения и постановка задачи

Настоящая работа относится к математическому моделированию физических процессов, в частности рассматриваются колебания однородной неограниченной мембраны при наличии внешней силы. Соответствующее уравнение колебаний имеет вид

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in R^2, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $u(t, x_1, x_2)$  — смещение точки  $(x_1, x_2)$  мембраны в момент времени  $t$  относительно плоскости мембраны;  $f(t, x_1, x_2)$ ,  $f \in C^1((0, \infty) \times R^2)$  — внешняя сила, приложенная к точке  $(x_1, x_2)$  мембраны в момент времени  $t$ ,  $a$  — скорость распространения возмущения, причем  $a \in R$ ,  $a > 0$ .

Пусть заданы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0, x_1, x_2) &= \varphi(x_1, x_2), \\ u_t(0, x_1, x_2) &= \psi(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) \in C^2(R^2), \quad \psi(x_1, x_2) \in C^1(R^2).$$

Уравнение (1) и условия (2) образуют задачу Коши для уравнения колебаний бесконечной мембраны. Хорошо известно, что существует единственное решение этой задачи в виде формулы Пуассона.

Как указано, например, в работе [1, С. 705 – 712], для гиперболических уравнений и систем справедливо следующее свойство. Если правая часть при каждом фиксированном  $t$  финитна по  $x$  и также финитны начальные условия, то и решение задачи Коши оказывается финитным по  $x$  при каждом фиксированном  $t$ . Отметим, что для задачи (1), (2) этот же факт легко следует из формулы Пуассона.

Рассмотрим теперь задачу, обратную задаче (1), (2). Для этого сделаем некоторые

дополнительные предположения. Функция  $f$  предполагается не зависящей от  $t$ , т. е.

$$f(t, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2), \quad f_1 \in C^1(R^2),$$

причем  $f_1$  может принимать лишь неотрицательные значения, а множество точек, в которых функция  $f_1$  положительна, является некоторой ограниченной областью  $G$ . Функции  $\varphi$ ,  $\psi$  предполагаются финитными.

Везде в настоящей работе обозначение  $E$  относится к некоторому прямоугольнику в плоскости  $t = 0$ , со сторонами, параллельными координатным осям  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ . Работа посвящена исследованию следующих двух задач при выполнении сделанных выше предположений.

**Задача 1.** *Имея в качестве исходных данных коэффициент  $a$ , функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $u(t, x_1, 0)$ ,  $u_{x_2}(t, x_1, 0)$ ,  $u(t, 0, x_2)$ ,  $u_{x_1}(t, 0, x_2)$ , найти такой прямоугольник  $E$ , содержащий в себе область  $G$ , чтобы каждая его сторона касалась границы области  $G$ .*

Смысл этой задачи состоит в локализации носителя правой части уравнения (1), что с физической точки зрения означает приближенное определение места воздействия внешней силы на мембрану.

Рассмотрим также более общий случай, когда про коэффициент  $a$  известна только его принадлежность определенному отрезку  $[a_1, a_2]$ . Начальные данные здесь будем считать нулевыми.

**Задача 2.** *Имея в качестве исходных данных интервал  $[a_1, a_2]$  для коэффициента  $a$ , функции  $u(t, x_1, 0)$ ,  $u_{x_2}(t, x_1, 0)$ ,  $u(t, 0, x_2)$ ,  $u_{x_1}(t, 0, x_2)$  и полагая  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ , найти прямоугольник  $E$ , содержащий в себе область  $G$ .*

Отметим, что эта задача аналогична предыдущей, но исследование проводится в условиях большей неопределенности. Подразумевается, что при нахождении ис-

когого прямоугольника  $E$  мы должны стремиться к минимизации его размеров.

### Теоретическое исследование поставленных проблем

Вначале приведем анализ задачи о локализации источника возмущения мембраны в случае, когда скорость распространения волны (коэффициент  $a$ ) известна.

**Теорема 1.** При выполнении всех вышеуказанных предположений существует единственное решение задачи 1.

Доказательство. Произведя замену

$$w_1 = u_t + au_{x_1}, \quad w_2 = -au_{x_2},$$

мы из задачи (1), (2) получим видоизмененную задачу:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - a \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right) = f, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + a \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (3b)$$

$$w_1(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) + a\varphi_{x_1}(x_1, x_2), \quad (4a)$$

$$w_2(0, x_1, x_2) = -a\varphi_{x_2}(x_1, x_2). \quad (4b)$$

Отметим, что при сделанных предположениях функции  $w_1, w_2$  также оказываются финитными по  $x$  при каждом фиксированном  $t$ .

Для того чтобы уменьшить количество переменных в задаче (3), (4) до двух, употребим метод плоских средних, предложенный Р. Курантом [1, С. 705 – 712]. Для этого воспользуемся следующим свойством: интеграл от производной финитной функции по некоторой переменной вдоль числовой оси, соответствующей этой же переменной, равен нулю. Следуя этому методу, проинтегрируем уравнения системы (3) по переменной  $x_1$  от минус бесконечности до плюс бесконечности и введем следующие обозначения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t, x_1, x_2) dx_1 = v_1(t, x_2),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_2(t, x_1, x_2) dx_1 = v_2(t, x_2).$$

Тогда из задачи (3), (4), пользуясь усло-

вием, что функции  $w_1, w_2$  являются финитными и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w_i(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 = 0, \quad i = 1, 2,$$

получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + a \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = g(t, x_2), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + a \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \quad (5b)$$

$$v_1(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) dx_1, \quad (6a)$$

$$v_2(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} -a\varphi_{x_2}(x_1, x_2) dx_1, \quad (6b)$$

где  $g(t, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x_1, x_2) dx_1$ .

Складывая и вычитая уравнения в системе (5) и используя замену

$$z_1 = v_1 + v_2, \quad z_2 = v_1 - v_2,$$

получим задачу в таком виде:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + a \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = g(t, x_2), \quad (7a)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - a \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = g(t, x_2), \quad (7b)$$

$$z_1(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, x_2) - a\varphi_{x_2}(x_1, x_2)] dx_1, \quad (8a)$$

$$z_2(0, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, x_2) + a\varphi_{x_2}(x_1, x_2)] dx_1. \quad (8b)$$

Таким образом, мы свели задачу (1), (2) к задаче для гиперболической системы с двумя независимыми переменными.

Будем рассматривать полученные уравнения вместе с начальными данными по отдельности. Для определенности будем исследовать задачу для уравнения относительно неизвестной переменной  $z_2$ . Заметим, что заданных в постановке задачи дополнительных условий  $u(t, x_1, 0), u_{x_2}(t, x_1, 0)$  достаточно для того, чтобы вычислить  $z_2(t, 0)$ . Действительно, значения  $z_2(t, 0)$ , определяются функциями  $v_1(t, 0), v_2(t, 0)$ , имеющими вид

$$v_1(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(t, x_1, 0) dx_1,$$

$$v_2(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(t, x_1, 0) dx_1.$$

Напомним, что

$$w_1(t, x_1, x_2) = u_t(t, x_1, x_2) + au_{x_1}(t, x_1, x_2),$$

$$w_2(t, x_1, x_2) = -au_{x_2}(t, x_1, x_2),$$

т. е.

$$v_1(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t(t, x_1, 0) + au_{x_1}(t, x_1, 0)) dx_1,$$

$$v_2(t, 0) = - \int_{-\infty}^{\infty} au_{x_2}(t, x_1, 0) dx_1.$$

Таким образом, наличия значений  $u(t, x_1, 0)$ ,  $u_{x_2}(t, x_1, 0)$  достаточно для того, чтобы вычислить  $z_2(t, 0)$ .

В работе [2, С. 95] представлена формула, в которой решение задачи Коши для гиперболической системы с двумя независимыми переменными выражается через данные Коши, и интеграл от правой части вдоль соответствующей характеристики. Применяя эту формулу, мы получим следующее выражение для  $z_2(t, 0)$ :

$$z_2(t, 0) = z_2(0, at) + \int_L g dl, \quad (9)$$

где  $L$  — отрезок (элемент соответствующей характеристики), соединяющий в плоскости  $(t, x_2)$  точки  $(0, at)$  и  $(t, 0)$ ;  $dl$  — элемент длины вдоль отрезка  $L$ .

Рассмотрим правую часть выражения (9). Согласно начальному условию (8b),

$$z_2(0, at) = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, at) + a\varphi_{x_2}(x_1, at)] dx_1.$$

Рассмотрим теперь интеграл в правой части выражения (9). Выразим  $dl$  через  $d\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ :

$$dl = \sqrt{1 + a^2} d\tau.$$

Тогда интеграл в правой части выражения (9) можно записать следующим образом:

$$\int_L g(t, x_2) dl = \sqrt{1 + a^2} \int_0^t g(\tau, a(t - \tau)) d\tau =$$

$$= \sqrt{1 + a^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, x_1, a(t - \tau)) dx_1 d\tau.$$

Сделав еще одну замену переменных,  $a(t - \tau) = \xi$ , перепишем последний интеграл в равенстве выше:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + a^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, x_1, a(t - \tau)) dx_1 d\tau = \\ & = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \int_0^{at} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\xi}{a}, x_1, \xi\right) dx_1 d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, мы преобразовали выражение (9) к виду

$$\begin{aligned} z_2(t, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, at) + a\varphi_{x_2}(x_1, at)] dx_1 + \\ &+ \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \int_0^{at} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\xi}{a}, x_1, \xi\right) dx_1 d\xi. \end{aligned}$$

В последнем равенстве перенесем слагаемое

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, at) + a\varphi_{x_2}(x_1, at)] dx_1$$

в левую часть и воспользуемся предположением о том, что функция  $f$  не зависит от  $t$ :

$$\begin{aligned} z_2(t, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, at) + a\varphi_{x_2}(x_1, at)] dx_1 &= \\ &= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \int_0^{at} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, \xi) dx_1 d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Продельвая выкладки, аналогичные приведенным выше для равенств (7), (8) относительно переменной  $z_1$ , получим следующее равенство, аналогичное (10):

$$\begin{aligned} z_1(t, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x_1, -at) - a\varphi_{x_2}(x_1, -at)] dx_1 &= \\ &= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \int_{-at}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, \xi) dx_1 d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь возможные случаи расположения области  $G$ . Для простоты мы предполагаем, что область  $G$  не пересекает координатные оси.

Пусть область  $G$  расположена в полупло-

скости  $x_2 > 0$ . Рассмотрим уравнение (10). Ранее нами было отмечено, что функция  $z_2(t, 0)$  однозначно определяется данными задачи, поэтому левая часть равенства (10) известна, а правая представляет собой интеграл от функции  $f_1$  по полосе, длина которой (вдоль переменной  $x_1$ ) бесконечна, а ширина равна  $at$ . Заметим, что с увеличением  $t$  будет расти и ширина полосы. Для краткости обозначим правую часть равенства (10) через  $I_2(t)$ . Поскольку область  $G$  расположена в полуплоскости  $x_2 > 0$ , при некотором значении  $t = T_1$  верхняя граница полосы коснется границы области  $G$ . При последующих значениях  $t$ , вплоть до некоторого значения  $t = T_2$ , значение функции  $I_2(t)$  будет возрастать (здесь мы пользуемся предположением о том, что функция  $f_1$  является неотрицательной). При  $t > T_2$  значение функции  $I_2(t)$  будет одним и тем же, равным  $I_2(T_2)$ .

Вернемся к задаче (7), (8). Проведем две характеристические прямые, соответствующие уравнению (7b), через точки  $(T_1, 0)$  и  $(T_2, 0)$ , соответственно. Эти прямые пересекут ось  $x_2$  в двух точках:  $aT_1$  и  $aT_2$ . Следовательно, область  $G$  содержится в полосе

$$\{t = 0, x_1 \in R^1, x_2 \in [aT_1, aT_2]\}.$$

Пусть теперь область  $G$  расположена в полуплоскости  $x_2 < 0$ . Рассмотрим равенство (11). Обозначим его правую часть через  $I_1(t)$ . Заметим, что  $I_1(t)$ , как и  $I_2(t)$ , является интегралом от функции  $f_1$  по полосе бесконечной длины, ширина которой равна  $at$ , только в данном случае при увеличении  $t$  будет меняться нижняя граница полосы, а не верхняя. Определим значения  $t = T_1$ ,  $t = T_2$ ,  $T_2 > T_1$ , при которых нижняя граница полосы касается границы области  $G$ . Проведем две характеристические прямые, соответствующие уравнению (7a), через точки  $(T_1, 0)$  и  $(T_2, 0)$ . Эти прямые пересекут ось  $x_2$  в двух точках:  $-aT_1$  и  $-aT_2$ . Следовательно, область  $G$  содержится в полосе

$$\{t = 0, x_1 \in R^1, x_2 \in [-aT_1, -aT_2]\}.$$

Итак, нами были найдены точки на оси  $x_2$ , соответствующие границам полосы, внутри которой содержится область  $G$ . Обо-

значим найденные значения как  $X_2^1$ ,  $X_2^2$  (пусть для определенности  $X_2^1 < X_2^2$ ).

Вернемся к системе (3) и теперь, вместо интегрирования по переменной  $x_1$ , проинтегрируем уравнения системы (3) по переменной  $x_2$  от минус-бесконечности до плюс-бесконечности. Далее, проводя рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше, получим равенства, аналогичные равенствам (10), (11), правая часть которых будет представлять собой интеграл по полосе, длина которой (на этот раз вдоль переменной  $x_2$ ) бесконечна, а ширина равна  $at$ .

Рассматривая эти уравнения при различных значениях переменной  $t$ , определим значения  $\tilde{T}_1$ ,  $\tilde{T}_2$ , при которых полосы будут касаться области  $G$ . Проведя через точки  $(0, \tilde{T}_1)$ ,  $(0, \tilde{T}_2)$  соответствующие характеристические прямые, получим в плоскости  $(t, x_1)$  некоторые значения  $X_1^1$ ,  $X_1^2$  (пусть  $X_1^1 < X_1^2$ ), при которых эти прямые пересекают ось  $x_1 = 0$ .

Теперь в качестве искомой локализации  $E$  для области  $G$  можно взять прямоугольник

$$\{(x_1, x_2) \in [X_1^1, X_1^2] \times [X_2^1, X_2^2]\}.$$

Из построения ясно, что этот прямоугольник единственный. Тем самым задача локализации решена для случая, когда известен коэффициент  $a$ .

Таким образом, теорема 1 доказана.

Далее проведем теоретическое исследование задачи 2.

**Теорема 2.** Пусть  $a \in [a_1, a_2]$ , где  $a_1, a_2$  — известные положительные вещественные числа,  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ . Тогда в предположениях, принятых для теоремы 1, существует алгоритм, который позволяет определить область  $E$  для задачи 2.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая, когда область  $G$  расположена в квадранте

$$\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Остальные случаи расположения области  $G$  рассматриваются аналогично. Как и при доказательстве теоремы 1, обратимся к равенству (10). Поскольку по условию теоремы  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ , левая часть в этом



равенстве нам по-прежнему известна. Следовательно, рассуждая точно так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно определить значения  $T_1, T_2$ , при которых соответствующие полосы интегрирования будут касаться области  $G$ . Ясно, что при наших предположениях

$$T_1 a_1 \leq T_1 a \leq T_2 a \leq T_2 a_2,$$

т. е. полоса

$$\{t = 0, x_1 \in R^1, x_2 \in [aT_1, aT_2]\},$$

содержащая область  $G$ , содержится в полосе

$$\{t = 0, x_1 \in R^1, x_2 \in [a_1 T_1, a_2 T_2]\}.$$

Продолжим действовать аналогично доказательству теоремы 1, а именно — вернемся к системе (3), проинтегрируем ее уравнения от  $-\infty$  до  $+\infty$  по переменной  $x_2$ ; тогда получим выражение, аналогичное равенству (10), и определим из него значения  $t = \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ , при которых прямые  $x_1 = a\tilde{T}_1, x_2 = a\tilde{T}_2$  будут касаться области  $G$ . Соответствующая полоса

$$\{t = 0, x_1 \in [a\tilde{T}_1, a\tilde{T}_2], x_1 \in R^1\},$$

содержащая  $G$ , находится в множестве

$$\{t = 0, x_1 \in [a_1 \tilde{T}_1, a_2 \tilde{T}_2], x_2 \in R^1\},$$

а пересечение полос

$$\{t = 0, x_1 \in [a_1 \tilde{T}_1, a_2 \tilde{T}_2], x_2 \in R^1\}$$

и

$$\{t = 0, x_1 \in R^1, x_2 \in [a_1 T_1, a_2 T_2]\}$$

является искомым прямоугольником.

Как видно, размеры оболочки  $E$  зависят от интервала  $[a_1, a_2]$ . В частности, если интервалы  $[a_1, a_2]$  стягиваются в точку, т. е.  $a_2 - a_1 \rightarrow 0$ , то соответствующие прямоугольники стремятся к прямоугольнику  $E$ , являющемуся решением задачи 1, размеры которого минимальны.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что доказательства теорем 1 и 2, ввиду их конструктивности, могут рассматриваться как численные алгоритмы, что также подтверждается приведенными ниже численными экспериментами.

**Замечание 1.** С физической точки зрения функция  $f_1(x), x = (x_1, x_2)$  означает приме-

нение силы на участке ее носителя. Возможно, более естественным было бы считать функцию  $f_1(x)$  разрывной. Однако и наш подход, где  $f_1(x)$  — гладкая функция, тоже оправдан с физической точки зрения. Действительно, разрывную функцию можно приближенно заменить гладкой функцией, изменяя ее только в  $\varepsilon$ -окрестности линии ее разрыва. При этом, конечно, производные этой функции могут принимать лишь очень большие значения в упомянутой  $\varepsilon$ -окрестности. Но в нашем алгоритме производные от  $f_1(x)$  не используются и поэтому не влияют на получение искомым оболочек. Вышеизложенное хорошо проиллюстрировано на приведенных в статье численных экспериментах.

**Замечание 2.** Рассмотренная задача соответствует неограниченной мембране, что несколько снижает ее физическое содержание. Однако, если учесть упомянутую финитность функции  $u(t, x)$ , то, задавая  $u(t, x) = 0$  для значений  $x$ , достаточно больших по модулю, мы получаем задачу для мембраны больших размеров с закрепленными краями. Решение указанной задачи совпадает с решением задачи для неограниченной мембраны при  $t \in (0, T^*]$ . Еще отметим, что для простоты формулировки в задачах 1, 2 предполагаются известными определенные функции, однако фактически используются только интегралы от них, т. е. объем необходимой информации несколько меньше, чем утверждают теоремы 1 и 2.

Что касается истории вопроса об исследовании обратных задач для гиперболических уравнений, то она весьма обширна и не может быть представлена сколько-нибудь полно в этой небольшой работе. Укажем только некоторые публикации этого направления [3 — 12]. Также отметим, что существенный вклад в эту теорию принадлежит сибирской школе условно-корректных задач под руководством М.М. Лаврентьева. Часть соответствующих результатов можно найти в монографии [13], где имеется обширная библиография. В вышеуказанных работах преобладали постановки обратных задач о нахождении коэффициентов или правых частей дифференциальных уравнений.

Специфика нашей работы состоит в новом подходе, когда определяется только часть неизвестной информации, но и это позволяет получать новые результаты и способствует улучшению качества ограничений на известные данные. Из последних работ отметим статьи [14 – 16], в которых используются некоторые математические приемы, частично аналогичные нашим.

### Численные эксперименты

Как видно из доказательств теорем 1 и 2, исходная задача сводится к следующей проблеме.

**Задача интегральной геометрии.** *Требуется указать прямоугольник  $E$ , соответствующий решениям задач 1, 2, если известны интегралы от  $f_1(x)$  по полоскам*

$$\{(x_1, x_2) \in [0, at] \times [-\infty, \infty]\},$$

$$\{(x_1, x_2) \in [-at, 0] \times [-\infty, \infty]\},$$

$$\{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty] \times [0, at]\},$$

$$\{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty] \times [-at, 0]\}, t \in [0, \infty).$$

Отметим, что процедура сведения исходной задачи к указанной проблеме интегральной геометрии осуществлялась с помощью однократного дифференцирования, интегрирования и построения определенных линейных комбинаций. Эти действия с точки зрения численных расчетов легко реализуемы. Поэтому в численных экспериментах мы решили ограничиться тестированием задачи интегральной геометрии; эту задачу можно отнести к новой составляющей выполненного исследования.

Напомним, что если коэффициент  $a$  известен, то прямоугольник  $E$ , построенный при доказательстве теоремы 1, имеет стороны, которые параллельны осям координат и касаются области  $G$  (носителя функции  $f_1(x)$ ).

#### Процедура численного эксперимента.

Данный эксперимент проводился следующим образом. Сначала на равномерной сетке (двумерной) с заданным шагом  $h$  вычислялись значения функции  $f(x)$ . Затем на одномерной сетке с тем же шагом численно находились значения функций

$$g(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, x_2) dx_1,$$

$$\tilde{g}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, x_2) dx_2.$$

Далее осуществлялось численное интегрирование функций  $g(x_2)$  и  $\tilde{g}(x_1)$  по соответствующим независимым переменным от нуля до некоторого граничного значения в положительном и отрицательном направлениях.

Стороны прямоугольника  $E$  находились следующим образом. Сначала фиксировалось некоторое положительное число  $\delta > 0$ . Если для некоторого значения  $X_2^1$  на оси  $x_2$  впервые выполнялось условие

$$\left| \int_0^{X_2^1+h} g(x_2) dx_2 - \int_0^{X_2^1} g(x_2) dx_2 \right| > \delta$$

(данное условие означает, что полоса, по которой производится интегрирование функции  $f_1(x)$ , коснулась границы области  $G$ ), то мы считали, что одна сторона прямоугольника  $E$  найдена и ее  $x_2$ -координата равна  $X_2^1$ .

Далее, после нахождения  $X_2^1$ , если для некоторого значения  $X_2^2$  на оси  $x_2$  впервые выполнялось условие

$$\left| \int_0^{X_2^2+h} g(x_2) dx_2 - \int_0^{X_2^2} g(x_2) dx_2 \right| < \delta$$

(данное условие означает, что переменная граница полосы снова коснулась границы области  $G$  и эта область теперь целиком содержится в указанной полосе), то мы считали, что другая сторона прямоугольника  $E$  найдена и ее  $x_2$ -координата равна  $X_2^2$ .

Аналогичным образом находились стороны прямоугольника  $E$ , параллельные оси  $x_1$ . Число  $\delta$  определялось путем численных экспериментов. Физически это число можно интерпретировать как предельную погрешность измерительной аппаратуры.

В приведенных примерах функция  $f_1(x)$  строилась путем свертки некоторой разрывной функции с бесконечно гладкой финитной функцией («шапочкой»)  $\omega_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,

определенной, например, в работе [17, С. 86].

**Конкретизация процедуры.** Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и определим функцию  $\omega_\varepsilon(x)$  равенствами

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \exp(-\varepsilon^2 / (\varepsilon^2 - |x|^2)),$$

$$|x| < \varepsilon; \quad \omega_\varepsilon(x) = 0, \quad |x| \geq \varepsilon,$$

где число  $c_\varepsilon$  выбрано так, чтобы интеграл от  $\omega_\varepsilon(x)$  по кругу  $|x| < \varepsilon$  был равен единице.

Все тесты проводились в квадрате  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ .

Во всех тестах использовались следующие значения параметров:  $h = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,04$ ,  $\delta = 0,001$ . В первых трех тестах предполагалось что  $a = 1$ , а носитель функции  $f_1(x)$  выбирался таким образом, чтобы искомая область  $E$  в идеале представляла собой квадрат с вершинами

$$(2,96, 4,96), (2,96, 7,04),$$

$$(5,04, 7,04), (5,04, 4,96).$$

В тесте 4 мы предположили, что сам параметр  $a$  неизвестен, но известно, что его значение принадлежит интервалу  $[0,9; 1,1]$ .

Носитель функции  $f_1(x)$  был выбран таким образом, чтобы область  $E$  представляла собой прямоугольник с вершинами

$$(2,42, 4,06), (2,42, 8,60),$$

$$(6,16, 8,60), (6,16, 4,06).$$

В действительности, при работе алгоритма полученный прямоугольник  $E$  несколько отличается от точного варианта вследствие погрешностей.

**Тест 1.** Здесь при тестировании мы положили  $f_1(x) = \tilde{f}_1(x) * \omega_\varepsilon(x)$ , где

$$\tilde{f}_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \leq 1; \\ 0, & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 > 1. \end{cases}$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1, *a*. Найденный прямоугольник  $E$  имеет следующие вершины:

$$A_1 = (3,00, 5,00), B_1 = (3,00, 7,01),$$

$$C_1 = (5,01, 7,01), D_1 = (5,01, 5,00).$$

**Тест 2.** При данном тестировании мы считаем, что

$$f_1(x) = (f_2(x_1) * \omega_\varepsilon(x_1))(\tilde{f}_2(x_2) * \omega_\varepsilon(x_2)),$$

где

$$f_2(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [3, 5]; \\ 0, & x_1 \notin [3, 5], \end{cases}$$

$$\tilde{f}_2(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \in [5, 7]; \\ 0, & x_2 \notin [5, 7]. \end{cases}$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1, *b*.

Найденный прямоугольник  $E$  имеет следующие вершины:

$$A_2 = (2,98, 4,98), B_2 = (2,98, 7,03),$$

$$C_2 = (5,03, 7,03), D_2 = (5,03, 4,98).$$

**Тест 3.** В данном тестировании мы положили  $f_1(x) = f_3(x) * \omega_\varepsilon(x)$ , где

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0,25 \leq (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \leq 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1, *c*. Найденный прямоугольник  $E$  имеет следующие вершины:

$$A_3 = (3,00, 5,00), B_3 = (3,00, 7,01),$$

$$C_3 = (5,01, 7,01), D_3 = (5,01, 5,00).$$

Можно заметить, что в тестах 1 и 3 был восстановлен один и тот же прямоугольник  $E$ .

**Тест 4.** В данном тестировании мы взяли  $f_1(x)$  из теста 1. Результаты представлены на рис. 1, *d*. Найденный прямоугольник  $E$  имеет следующие вершины:

$$A_4 = (2,45, 4,09), B_4 = (2,45, 8,56),$$

$$C_4 = (6,12, 8,56), D_4 = (6,12, 4,09).$$

**Замечание 3.** Отметим, что при проведении численного эксперимента в работе мы не встретились с какими-либо затруднениями. Однако, поскольку рассмотренные обратные задачи имеют физический смысл, для полного анализа алгоритмов следует проверить их устойчивость и, возможно, предложить вариант их регуляризации. Кроме того, при проведении численных экспериментов целесообразно использовать исходные данные с погрешностью (шумом). Указанные аспекты могут быть предметом последующего самостоятельного исследования.

**Замечание 4.** Важно подчеркнуть, что в этой работе главным для нас является



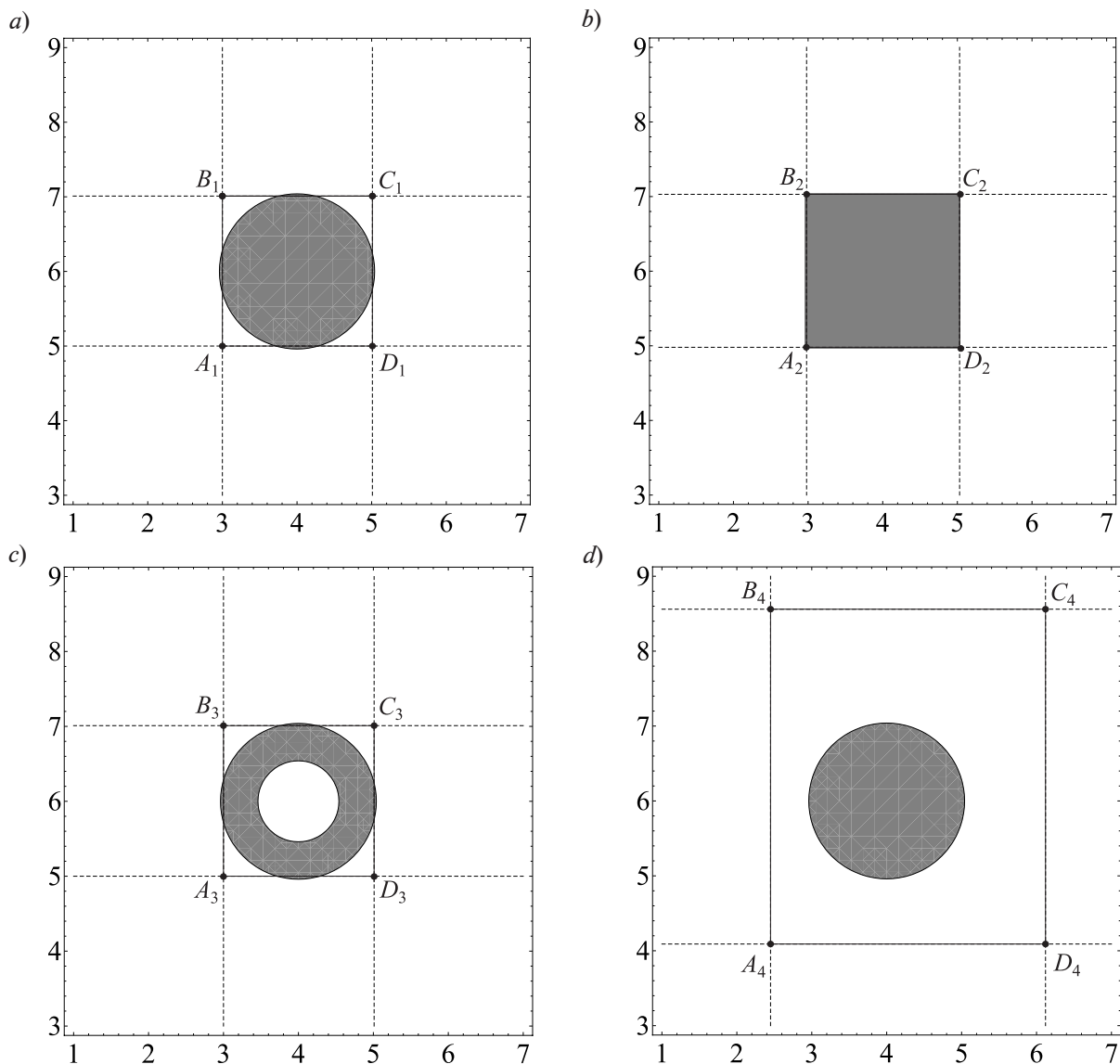


Рис. 1. Результаты численного эксперимента по нахождению прямоугольника  $E$  с помощью тестов 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d)

не полученный результат, а демонстрация нового метода, который, по нашему мнению, имеет определенные перспективы для исследования более общих обратных задач. В частности, представленный здесь метод можно применить к исследованию задач с разрывной правой частью. В соответствующих обратных задачах нужно будет локализовать линию разрыва. Если при этом начальные данные (функции  $\varphi$  и  $\psi$ ) будут гладкими, то их конкретных значений в таких задачах, по-видимому, не потребуется.

### Заключение

В работе рассмотрены задачи приближенного нахождения места приложения внешней силы, вызывающей колебания мембраны. Рассмотрены два варианта постановки задач, для каждого из которых доказана теорема единственности и построен соответствующий алгоритм. Теоретические выводы оказались хорошо согласованными с результатами проведенных численных экспериментов. Полученные результаты дают нам основание рекомендовать построенные алгоритмы для практического применения.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН, номер проекта 0314-2015-001013-01-275, а также при поддерж-

ке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 16-31-00112мол\_а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Петровский И.Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. 3-е изд. М.: Наука, 1961. 401 с.
3. **Denisov A.M.** Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Coursat problem // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1998. Vol. 6. No. 4. Pp. 327–334.
4. **Scheglov A.Yu.** The inverse problem of determination of a nonlinear course in a hyperbolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1998. Vol. 6. No. 6. Pp. 625–644.
5. **Яковлева Ю.О.** Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некротными характеристиками // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1(30). С. 99–106.
6. **Орловский Д.Г.** Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
7. **Щеглов А.Ю.** Приближенное решение обратной коэффициентной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и физика. 2004. № 2. С. 13–19.
8. **Friedman A., Reitich F.** Hyperbolic inverse problem arising in the evolution of combustion aerosol // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1990. Vol. 110. No. 4. Pp. 313–350.
9. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, XII, 2000. 709 p.
10. **Puel J.P., Yamamoto M.** Generic well-posedness in a multidimensional hyperbolic inverse problem // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1997. Vol. 5. No. 1. Pp. 55–83.
11. **Yamamoto M.** Lipschitz stability for a hyperbolic inverse problem by finite local boundary data // Appl. Anal. 2006. Vol. 85. No. 10. Pp. 1219–1243.
12. **Weston V.H., Krueger R.J.** On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation // J. Math. Phys. 1972. Vol. 13. Pp. 1952–1956.
13. **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** Теория операторов и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1999. 912 с.
14. **Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E.** Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data // Eurasian J. Math. Comp. Applications. 2015. Vol. 3. No. 4. Pp. 4–44.
15. **Коновалова Д.С.** Локализация линии разрывов правой части дифференциального уравнения // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 1. С. 62–72.
16. **Kazantsev S.G.** Singular value decomposition for the cone-beam transform in the ball // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. Vol. 23. No. 2. Pp. 173–185.
17. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1981. 512 с.

*Статья поступила в редакцию 29.05.2017, принята к публикации 03.07.2017.*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич** — доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4  
anik@math.nsc.ru

**КИПРИЯНОВ Ярослав Андреевич** — аспирант кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2а.  
yaroslav.kipriyanov@gmail.com

**КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4  
dsk@math.nsc.ru

## REFERENCES

- [1] **R. Kurant**, *Uraveneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations], Moscow, Mir, 1964.
- [2] **I.G. Petrovskiy**, *Leksii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on partial differential equations], 3d ed., Moscow, Nauka, 1961.
- [3] **A.M. Denisov**, Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Coursat problem, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. 6 (4) (1998) 327–334.
- [4] **A.Yu. Scheglov**, The inverse problem of determination of a nonlinear course in a hyperbolic equation, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. 6 (6) (1998) 625–644.
- [5] **Yu.O. Yakovleva**, *Kharakteristicheskaya zadacha dlya sistemy giperbolicheskikh differentsialnykh uravneniy tretyego poryadka obshchego vida s nekratnymi kharakteristikami* [A characteristic problem for a system of the third-order hyperbolic differential equations of a common mode with aliquant characteristics], *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, Ser. fiz.-mat. nauki. No. 1(30) (2013) 99–106.
- [6] **D.G. Orlovskiy**, *Ob odnoy obratnoy zadache dlya differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve* [On an inverse problem for the second-order differential equation in the Banach space], *Differentsialnyye uravneniya*. 25 (6) (1989) 1000–1009.
- [7] **A.Yu. Shcheglov**, *Priblizhennoye resheniye obratnoy koeffitsiyentnoy zadachi dlya kvazilineynogo uravneniya giperbolicheskogo tipa* [An approximate solution of the inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation], *Vestnik MGU. Ser. 15, Vychislitel'naya Matematika i Fizika*. (2) (2004) 13–19.
- [8] **A. Friedman, F. Reitich**, *Hyperbolic inverse problem arising in the evolution of combustion aerosol*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 110 (4) (1990) 313–350.
- [9] **A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin**, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, NY, Marcel Dekker. xii, 2000.
- [10] **J.P. Puel, M. Yamamoto**, Generic well-posedness in a multidimensional hyperbolic inverse problem, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. 5(1) (1997) 55–83.
- [11] **M. Yamamoto**, Lipschitz stability for a hyperbolic inverse problem by finite local boundary data, *Appl. Anal.* 85 (10) (2006) 1219–1243.
- [12] **V.H. Weston, R.J. Krueger**, On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation, *J. Math. Phys.* 13 (1972) 1952–1956.
- [13] **M.M. Lavrentyev, L.Ya. Savelyev**, *Teoriya operatorov i uslovno-korrektnyye zadachi* [The theory of operators and conventionally well-set problems], Novosibirsk, Izdatel'stvo Instituta matematiki SO RAN, 1999.
- [14] **E.Yu. Derevtsov, S.V. Maltseva, I.E. Svetov**, Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data, *Eurasian J. Math. Comp. Applications*. 3 (4) (2015) 4–44.
- [15] **D.S. Konovalova**, *Lokalizatsiya linii razryvov pravoy chasti differentsialnogo uravneniya* [Localization of a line of discontinuities in the right side of a differential equation], *Sib. Zhurn. Industr. Matem.* 19 (1) (2016) 62–72.
- [16] **S.G. Kazantsev**, Singular value decomposition for the cone-beam transform in the ball, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. 23 (2) (2015) 173–185.
- [17] **V.S. Vladimirov**, *Uraveneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], 4-th ed., Moscow, Nauka, 1981.

*Received 29.05.2017, accepted 03.07.2017.*

## THE AUTHORS

**ANIKONOV Dmitriy S.**

*Sobolev Institute of Mathematics*

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation  
anik@math.nsc.ru

**KIPRIYANOV Yaroslav A.**

*Novosibirsk State University*

2a, Pirogov St., Novosibirsk, 630090. Russian Federation  
yaroslav.kipriyanov@gmail.com

**KONOVALOVA Dina S.**

*Sobolev Institute of Mathematics*

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation  
dsk@math.nsc.ru