



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

DOI: 10.18721/JPM.11405

УДК 532.5.013.13

## **СТРУКТУРА СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ НАГРЕТЫМ ДИСКОМ ПРИ НЕБОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ГРАСГОФА**

**Е.Ф. Храпунов, Ю.С. Чумаков**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлены результаты физического и численного моделирования свободноконвективного потока, формирующегося над нагретым горизонтальным диском при небольших числах Грасгофа. Подробно рассмотрены характеристики области пристенного течения и области восходящего потока. На основании экспериментальных и расчетных данных определены геометрические характеристики потока – температурные и динамические величины толщины. Получено хорошее соответствие между результатами физического эксперимента и численного моделирования. Кроме того, проведено сравнение с опубликованными литературными данными. Получено распределение вертикальной компоненты скорости в пристенном слое. Проанализированы основные характеристики теплообмена – локального и интегрального чисел Нусельта.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, свободноконвективный факел, структура потока, физический эксперимент, численное моделирование

**Ссылка при цитировании:** Храпунов Е.Ф., Чумаков Ю.С. Структура свободноконвективного течения над горизонтальным нагретым диском при небольших числах Грасгофа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 4. С. 47–60. DOI: 10.18721/JPM.11405

## **THE STRUCTURE OF A NATURAL CONVECTIVE FLOW OVER A HORIZONTAL HEATED DISC AT SMALL GRASHOF NUMBERS**

**E.F. Khrapunov, Yu.S. Chumakov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the results of physical and numerical simulation of a natural convective flow formed over a heated horizontal disk with small Grashof numbers have been presented. The characteristics of the near-wall flow region and of the ascending flow one were considered in detail. On the basis of experimental and calculated data, the geometric flow characteristics, namely temperature and dynamic thicknesses, were determined. A good agreement between the experimental results and numerical simulation data was achieved. The results obtained were also compared with published data. The distribution of the vertical velocity component in the near-wall layer was

determined. The analysis of the basic characteristics of heat exchange, namely the local and integral Nusselt numbers, was carried out.

**Keywords:** natural convection, natural convective plume, flow structure, physical experiment, numerical simulation

**Citation:** E.F. Khrapunov, Yu.S. Chumakov, The structure of a natural convective flow over a horizontal heated disc at small Grashof numbers, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (4) (2018) 47–60. DOI: 10.18721/JPM.11405

### Введение

Анализ развития исследований в области свободноконвективного теплообмена показывает, что наибольший успех достигнут при изучении течений вдоль вертикальной поверхности, т. е. когда вектор ускорения свободного падения параллелен основному направлению движения жидкости. Одна из причин данного обстоятельства может быть связана с успешным развитием теории вынужденно конвективного пограничного слоя. Нагрев поверхности способствует возникновению свободной конвекции и, как следствие, на достаточно протяженной вертикальной поверхности формируется свободноконвективный пограничный слой. Основные закономерности развития подобного слоя очень похожи на поведение уже хорошо изученного вынужденно конвективного пограничного слоя. В частности, по аналогии с вынужденной конвекцией, в свободноконвективном пограничном слое можно выделить области ламинарного, переходного и турбулентного режимов течения.

Иначе обстоит дело, когда нагретая поверхность расположена горизонтально или сильно наклонена по отношению к вектору ускорения свободного падения. Свободноконвективный теплообмен в жидкости, наблюдающийся у подобных поверхностей, имеет сложный характер, вследствие взаимодействия отрывного восходящего течения над ее поверхностью и приповерхностного слоя, возникающего под действием благоприятного перепада давлений. Такой перепад, в свою очередь, генерируется этим течением.

Анализ подобного взаимодействия сопряжен с довольно большими трудностями, что, в частности, объясняет появление в литературе различных упрощенных моделей теплообмена. В работах [1, 2], напри-

мер, предлагается рассмотреть две предельные ситуации:

в первом случае нагретая поверхность настолько мала, что ее можно заменить точечным источником тепла, над которым формируется осесимметричная свободноконвективная восходящая струя;

во втором случае поверхность настолько велика, что в пределе можно пренебречь влиянием центральной части поверхности с восходящей струей на теплопередачу. Восходящая струя будет оказывать косвенное влияние на теплопередачу от поверхности, формируя лишь приповерхностное течение, обусловленное эжектирующим действием этой струи.

Таким образом, определение интенсивности теплопередачи от поверхности сводится к решению задачи об обтекании полубесконечной нагретой пластины. В качестве примера можно привести ряд работ [3 – 5], в которых в том или ином приближении решались двумерные уравнения приповерхностного пограничного слоя. Итогом этих работ можно считать получение важных для практики формул расчета интенсивности теплоотдачи от горизонтальной нагретой поверхности (сводная таблица зависимостей представлена в работе [6]).

Рассмотрим первую предельную ситуацию, когда над точечным источником тепла формируется восходящая струя. В этом случае непосредственное влияние поверхности на течение отсутствует, учитывается лишь теплоотдача этой поверхности для задания интенсивности точечного источника тепла. В результате решения задач в подобной постановке получены аналитические и численные решения в автотомельном приближении. В частности, установлено влияние мощности источника тепла на различные характеристики струи; например, показано,

что снижение температуры по высоте подчиняется степенной зависимости, а ширина восходящей струи изменяется как число Грасгофа в степени одна четвертая (число Грасгофа есть определяющий критерий задачи).

Очевидно, что все многообразие задач о свободноконвективном теплообмене жидкости, текущей от нагретой горизонтальной поверхности, невозможно описать только двумя предельными ситуациями. На практике наибольший интерес представляет случай, когда поверхность нельзя заменить точечным источником тепла, но, с другой стороны, она не настолько велика, чтобы считать ее полубесконечной и пренебрегать влиянием восходящей струи на теплообмен. Иными словами, в соответствующих расчетах необходимо учитывать влияние на теплообмен не только восходящей струи в центре диска, но и приповерхностного течения вдоль его поверхности.

При этом следует отметить, что приповерхностный слой развивается вопреки действию архимедовой (выталкивающей) силы, которая направлена не вдоль течения, а перпендикулярно ему, т. е. движение должно быть обусловлено косвенными причинами. В рассматриваемом случае течение возникает под действием отрицательного градиента давления, который индуцируется восходящей струей в центре диска [6].

В настоящей работе исследовано (экспериментально и численно) влияние интенсивности нагрева горизонтального диска на теплообмен и структуру течения над ним в случае небольших чисел Грасгофа.

Анализу результатов численного моделирования течения во многом способствовали данные экспериментального исследования, в частности визуализации потока воздуха над нагретым диском, представленные ранее в работе [7].

#### **Экспериментальный стенд и методы исследования**

Схема экспериментального стенда изображена на рис. 1. Основной элемент стенда — это нагреваемый латунный диск *1* диаметром 190 мм и толщиной 8 мм. Его нижняя поверхность контактирует с нагрее-

вателем *2*. Для улучшения теплового контакта используется специальная паста с высоким коэффициентом теплопроводности, в слой которой помещен спай термопары (на рисунке не показаны) для контроля температуры нижней поверхности диска. Температурным режимом диска управляет контроллер (на рисунке не показан), который включает (выключает) нагреватель в зависимости от соответствия между заданной температурой и температурой, которая фиксируется термопарой.

Таким образом, на нижней поверхности диска обеспечиваются условия, близкие к условиям постоянства температуры, а температура его верхней части определяется условиями сопряженного теплообмена с воздухом.

Основание защитной камеры (см. рис. 1) представляет собой горизонтальную пластину *5* с центральным круглым вырезом, в который вставляется диск *1* с зазором 5 мм. Верхняя часть диска выступает на 6 мм относительно верхней поверхности пластины. Снизу зазор закрыт корпусом теплообменника *2*, который плотно прилегает к нижней поверхности горизонтальной пластины *5* и обеспечивает постоянство ее температуры (16 — 18 °С).

Стенд оснащен координатной системой (на рисунке не показана), с помощью которой можно перемещать зонд (например, датчик температуры) над диском. Перемещение осуществляется с помощью шаговых двигателей, управляемых программно. Точность перемещения в горизонтальной плоскости составляет 0,50 мм, а по вертикальной координате — 0,05 мм.

Особенно тщательно измерялась температура воздуха над нагретым диском. Для получения ее мгновенного значения использовалась вольфрамовая проволочка-датчик диаметром 5 мкм и длиной 2 мм. Такой датчик, благодаря небольшому размеру, обладает почти мгновенным откликом на резкие изменения температуры, что позволяет (в совокупности с соответствующей электронной аппаратурой) существенно расширить частотный диапазон измерений. Процедура измерения температуры в выбранной точке пространства над диском

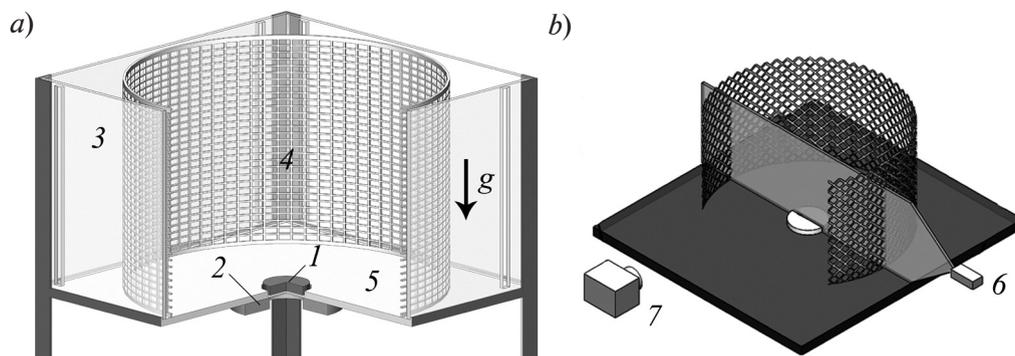


Рис. 1. Схемы экспериментального стенда (а) и визуализации структуры свободноконвективного течения (b):

1 – нагреваемый диск, 2 – элемент теплообменника, 3 – проницаемые стенки камеры, 4 – изолирующая сетка, 5 – горизонтальная пластина, 6 – лазер и оптическая система, 7 – фотокамера;  $g$  – вектор ускорения свободного падения

сводилась к оцифровке непрерывного аналогового сигнала за определенный промежуток времени, который определялся количеством выборок с заданной частотой (3000 выборок с частотой дискретизации 50 Гц). Это позволяло получать практически без искажений цифровой образ временного изменения мгновенной температуры в заданной точке пространства. Вычисление среднего значения температуры и интенсивности пульсаций мгновенной температуры происходило в результате первичной обработки оцифрованного сигнала. Кроме того, сохранялась запись мгновенной температуры для дальнейшего корреляционного и спектрального анализа.

Для получения более полного представления о формирующейся структуре свободноконвективного течения над нагретым диском, кроме точечных измерений температуры, проводились многочисленные фото- и видеосъемки картин исследуемого течения. Визуализация течения осуществлялась по схеме, изображенной на рис. 1, *b*. Пространство, где развивалось течение, предварительно заполнялось дымом; его частички увлекались этим течением, и тем самым его визуализировали.

Для детального анализа структуры течения, выделения отдельных фрагментов потока, использовалась методика оптического ножа. В нашем случае в качестве источника света использовался лазер, луч которого разворачивался в плоскость с помощью

соответствующей оптической системы. Частички дыма, попав в плоскость ножа, ярко светились, визуализируя выделенный фрагмент течения. Последний фиксировался с помощью фото- или видеосъемки.

#### Особенности численной модели

Для численного моделирования использовался программный код ANSYS Fluent, позволяющий решать уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска для сжимаемой среды. На основании экспериментальных данных было сделано предположение о ламинарном режиме течения в выбранном диапазоне значений числа Грасгофа

$$Gr = (0,89 - 9,50) \cdot 10^6$$

трехмерного потока при наличии сопряженного теплообмена между нагреваемым диском и окружающей средой.

Фрагмент расчетной области с покрывающей ее сеткой представлен на рис. 2. Размеры вычислительной области полностью соответствуют размерам экспериментального стенда. Использовалась квазиструктурированная сетка, включающая 1 млн. элементов, со сгущением сеточных линий к предполагаемым границам факела и к нижней поверхности расчетной области.

Параметры воздуха и латуни, использованные при численном моделировании, представлены в таблице.

Из данных таблицы видно, что параме-

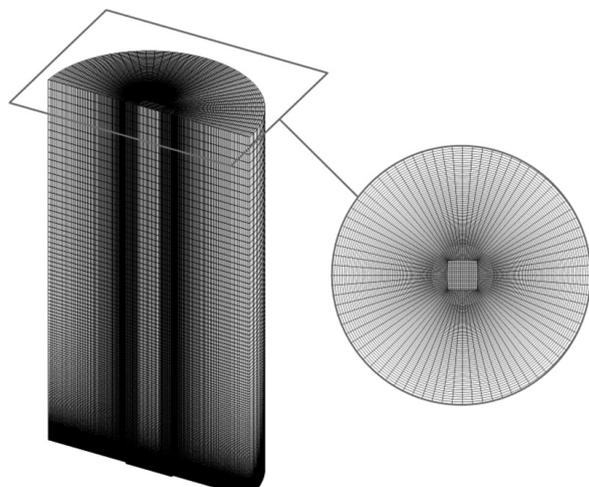


Рис. 2. Пример расчетной сетки в области решения уравнений

тры воздуха, использованные при моделировании, принимались постоянными, поскольку их изменения в рассматриваемом диапазоне температур не представляются существенными.

Граничные условия в расчетах задавались следующим образом. Температура нижней поверхности диска задавалась

и оставлялась постоянной в ходе расчета, температура горизонтальной поверхности расчетной области также считалась постоянной и равной температуре окружающего воздуха (293 К). Температура верхней поверхности диска определялась из условия сопряженного теплообмена с прилегающим к поверхности воздухом. На всех остальных границах (боковой и верхней) задавались условия нулевого избыточного давления. При этом на воздух, затекающий в расчетную область через эти границы, были наложены следующие ограничения: температура воздуха остается постоянной (293 К), а вектор скорости его распространения всегда перпендикулярен соответствующей границе затекания.

Система координат выбиралась таким образом, чтобы радиальная (или продольная) координата  $x$  начиналась от кромки диска и была направлена к его центру, а осевая координата  $y$  была направлена вверх, перпендикулярно поверхности диска. Соответственно, продольную компоненту скорости обозначали через  $u$ , а осевую – через  $v$  (рис. 3).

Вводились безразмерные переменные,

Таблица

Значения параметров, использованных при численном моделировании

Объект	Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Воздух	Удельная теплоемкость	$c_p$	Дж/(кг·К)	1006,43
	Коэффициент теплопроводности	$\lambda$	Вт/(м·К)	0,0242
	Коэффициент теплового расширения	$\beta$	К <sup>-1</sup>	0,00366
	Коэффициент кинематической вязкости	$\nu$	м <sup>2</sup> /с	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Латунь	Плотность	$\rho^{br}$	кг/м <sup>3</sup>	8500
	Удельная теплоемкость	$c_p^{br}$	Дж/(кг·К)	380
	Коэффициент теплопроводности	$\lambda^{br}$	Вт/(м·К)	130

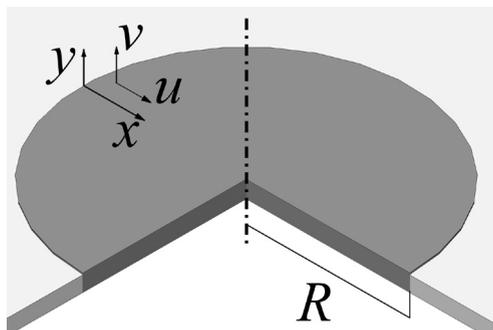


Рис. 3. Система координат  $x, y$ , связанная с поверхностью диска радиусом  $R$ ;  $u, v$  – компоненты скорости воздушного потока

причем в качестве масштаба скорости использовалось отношение  $v / R$  (коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  к радиусу диска  $R$ ):

$$x^* = x / R, \quad y^* = y / R;$$

$$u^* = u \cdot R / \nu, \quad v^* = v \cdot R / \nu;$$

$$\theta = (T - T_a) / (T_w - T_a),$$

где  $T_w, T_a$  – величины температуры верхней поверхности диска и воздуха на внешней границе расчетной области, соответственно.

В качестве граничного условия на нижней поверхности диска задавалась постоянная температура  $T_0$ . В настоящей работе представлены результаты численного моделирования для значений температуры  $T_0$ , равных 303, 313, 333 и 353 К.

### Результаты моделирования и их анализ

Как было отмечено выше, течение, формирующееся над нагретым диском, можно условно разделить на две области: зона приповерхностного слоя и зона восходящей струи. Остановимся сначала на анализе экспериментальных и численных данных, полученных в ходе исследования течения в приповерхностном слое.

На рис. 4, а представлены профили безразмерной температуры  $\theta$ , а на рис. 4, б – профили безразмерной продольной скорости  $u^*$  по нормали к поверхности диска при различных значениях безразмерной продольной координаты  $x^*$  для числа Грасгофа  $Gr = 3,5 \cdot 10^6$ . Здесь и далее чис-

ло Грасгофа определяется следующим образом:

$$Gr = \frac{g\beta(T_0 - T_a)R^3}{\nu^2}, \quad (1)$$

где  $T_0$  – температура нижней поверхности диска, контролируемая в эксперименте и задаваемая в качестве граничного условия при численном моделировании,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения.

Над большей частью диска профили температуры характеризуются резким переходом от температуры поверхности к температуре окружающего воздуха. По мере продвижения к вертикальной оси диска температурный слой, очевидно, утолщается. Изменение продольной скорости по высоте не монотонно, образуется локальный максимум, вертикальная координата которого растет по мере приближения к центру диска. Кроме того, значение максимума скорости также увеличивается по мере продвижения от края диска к центру, примерно до координаты  $x^* = 0,6$ , а затем уменьшается вплоть до нуля, что свидетельствует о перестроении продольного приповерхностного течения в вертикальное восходящее.

На формирование структуры течения вблизи диска большое влияние оказывает осевая составляющая вектора скорости. Отметим, что данные о распределении указанной составляющей в приповерхностном слое практически отсутствуют в известной авторам литературе. Тем не менее, изменение осевой скорости в приповерхностной области может представлять значительный интерес при определении характеристик приповерхностного слоя, а также при выяснении процессов деформации этого слоя по мере его развития. На рис. 4, с представлены профили осевой скорости по нормали к поверхности диска при различных значениях координаты  $x^*$ . На профилях можно заметить ярко выраженные локальные максимумы, причем знак максимального значения изменяется по мере продвижения по продольной координате  $x^*$  от края диска к его центру. В частности, в интервале  $0 \leq x^* \leq 0,4$  оказывается отрицательным не только максимальное значение, но и значе-

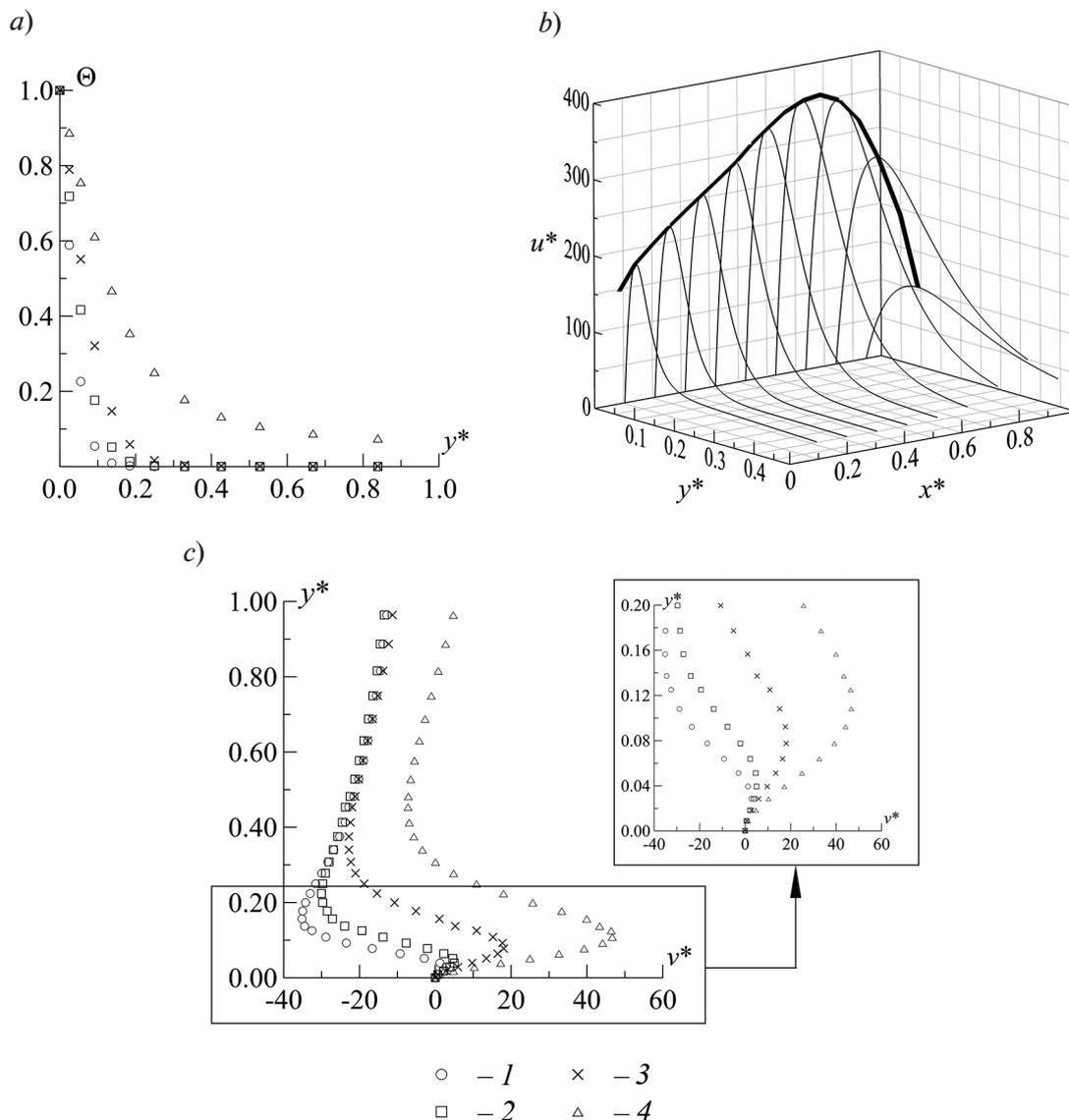


Рис. 4. Экспериментальные (a) и расчетные (b,c) профили безразмерных величин, полученные в результате моделирования течения в приповерхностном слое: температуры поперек этого слоя (a), продольной скорости в нем (b) и осевой скорости поперек этого слоя (c) при различных значениях безразмерной продольной координаты  $x^*$  для числа Грасгофа  $Gr = 3,5 \cdot 10^6$ .  
 Значения  $x^*$ : 0,16 (1), 0,37 (2), 0,58 (3), 0,79 (4)

ние осевой скорости на большом удалении от поверхности диска. Аналогичное поведение характерно для профиля осевой скорости при  $x^* \geq 0,8$ , однако отличие состоит в том, что знак скорости остается положительным. При  $x^* = 0,58$  профиль скорости претерпевает чередование знаков: у поверхности скорость положительная, а выше — отрицательная. Подобное поведение осевой скорости, в совокупности с продольной со-

ставляющей, определяет результирующую ориентацию вектора скорости. Благодаря этой ориентации становится заметным влияние выталкивающей силы (сила Архимеда) на расстоянии порядка  $(0,7 - 0,8)R$  от края диска, а по мере приближения к центру диска (или к оси струи) выталкивающая сила становится определяющим фактором развития течения, т. е. образуются восходящая струя.

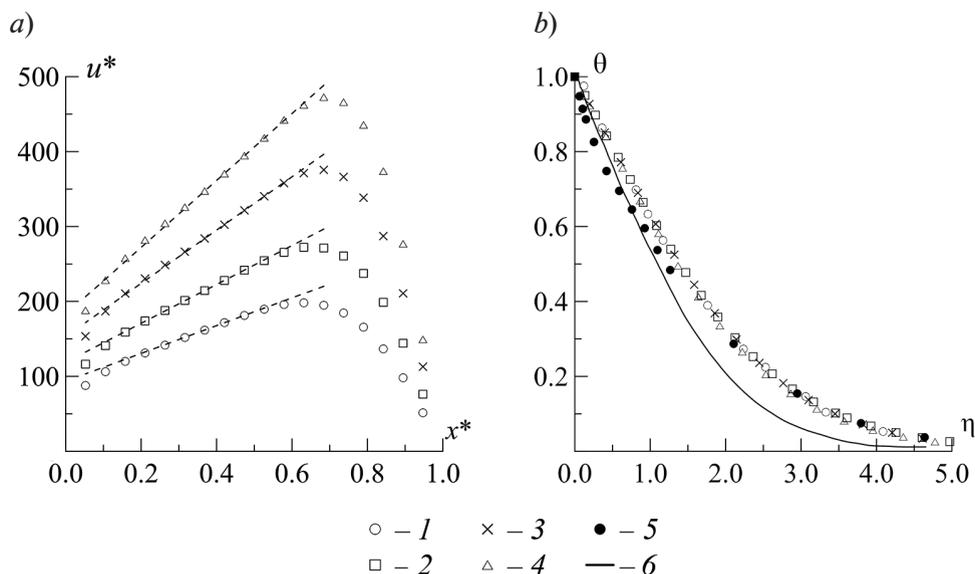


Рис. 5. Расчетные (1–4, для сравнения – данные [5] (6) и экспериментальные (5) распределения безразмерных величин в пристенном слое: максимальной радиальной скорости внутри этого слоя (а), а также автомодельности профилей температуры поперек этого слоя (б).

Расчетные данные получены при различных значениях чисел Грасгофа  $Gr$  ( $10^6$ ): 0,89 (1), 1,80 (2), 3,50 (3), 5,80 (4)

На рис. 5, а представлены зависимости максимальных значений продольной скорости  $u^*$  от координаты  $x^*$  для различных чисел Грасгофа. Для каждого из этих чисел можно выделить интервал значений  $x^*$ , в котором изменение максимума продольной скорости линейно зависит от продольной координаты  $x^*$ . Увеличение числа Грасгофа приводит к росту значений максимальной скорости, а также к увеличению скорости их роста.

Для описания семейства профилей температуры  $\theta$ , изображенных на рис. 4, а, можно воспользоваться автомодельной переменной из работы [4], определяемой соотношением

$$\eta = y^* (x^*)^{-2/5} Gr^{1/5}. \quad (2)$$

Результаты обработки исходных профилей температуры  $\theta$  для различных значений числа Грасгофа представлены на рис. 5, б. На график этого рисунка также нанесены значения при числе Грасгофа  $Gr = 4,8 \cdot 10^6$ , найденные экспериментально в процессе данного исследования. Кроме того, для сравнения приведены данные работы [5].

Для более полной характеристики при-

стенной области необходимо найти толщину последней, т. е. определить, насколько далеко по нормали к диску распространяется действие нагретой поверхности. В случае неизотермических течений принято рассматривать не только динамическую толщину  $\delta_u$ , но и температурную  $\delta_T$ , поскольку они могут различаться. Толщину  $\delta_T$  можно определить, если выбрать минимальное значение температуры, ниже которого влияние нагретой поверхности отсутствует. Если воспользоваться безразмерным соотношением для температуры и принять за искомое значение толщину слоя, равную 5 % от максимальной величины безразмерной температуры, то условие (критерий) определения  $\delta_T$  может быть записано как

$$\delta_T = y^* |_{\theta=0,05}.$$

В литературе можно встретить и другие критерии. Например, в работе [4] предлагается интегральный вариант:

$$\delta_T = \int_0^\infty \theta dy^*.$$

Определение динамической толщины  $\delta_u$  приповерхностного свободноконвектив-

ного слоя представляется более сложной задачей, поскольку продольная (радиальная) скорость при мере удаления от поверхности диска может принимать совершенно разные значения, в зависимости от количества воздуха, эжектируемого в приповерхностный слой. В некоторых работах (см., например, работу [4]) предлагается определять динамическую толщину с помощью интегрального соотношения

$$\delta_u = \int_0^{\infty} (u^*)^2 dy^* .$$

В данной работе предлагается определять динамическую толщину, учитывая принципиальную особенность образования динамического приповерхностного слоя. А именно — это слой, в котором первостепенную роль играет сдвиговое напряжение, возникающее при движении воздуха вдоль неподвижной поверхности диска. Сила трения, в свою очередь, пропорциональна производной от продольной скорости по нормали к поверхности и убывает при удалении от диска. Таким образом, можно использовать эту производную в качестве

критерия границы динамического слоя, выбрав соответствующее предельное значение этой производной, т. е.

$$\delta_u = y^* \Big|_{du^*/dy^*=e} .$$

В данной работе предлагается использовать в качестве числового критерия  $e$  значение производной, равное 10, т. е.  $e = 10$ .

Заметим, что можно дополнительно модифицировать переменную  $y^*$  так, чтобы найденные значения температурной и динамической толщин совпали для различных чисел Грасгофа. В нашем случае, температурные толщины, представленные на рис. 5, *b*, следует заменить одной кривой.

На рис. 6, *a* представлены динамическая и температурная толщины в переменных

$$(x^*; \delta_T \times Gr^{1/5}, \delta_u \times Gr^{1/5}) .$$

Следует отметить, что динамический слой существенно превосходит по толщине тепловой и эта разница заметно растет по мере приближения к центру диска.

Анализ экспериментальных и расчетных данных подтвердил известное предположе-

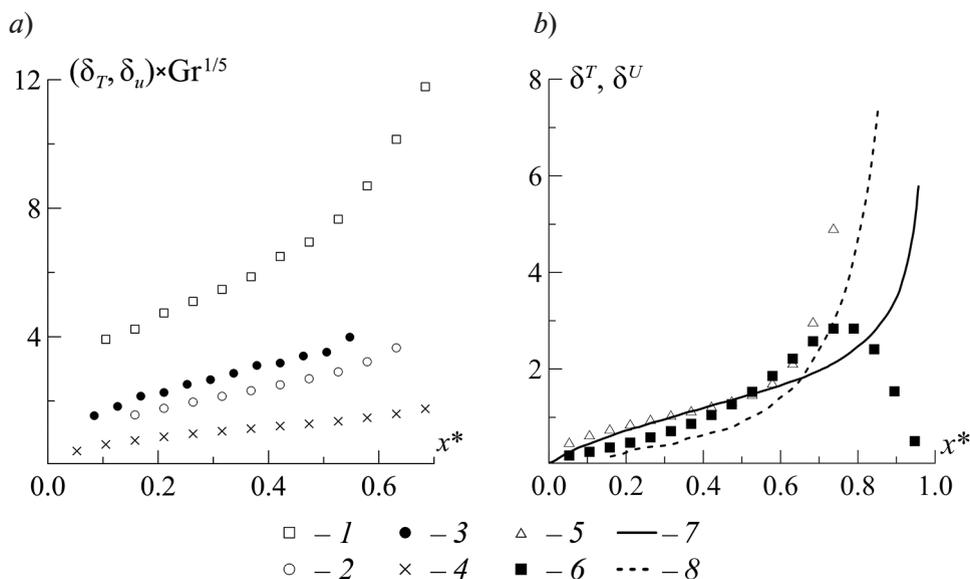


Рис. 6. Сравнение методик определения температурной  $\delta_T$  (2, 3, 5 [4], 7 [4]) и динамической  $\delta_u$  (1, 6 [4], 8 [4]) толщин пристенного слоя (в модифицированных переменных) как функций продольной координаты; методики применялись в настоящей работе (a) и в работе [4] (b) с привлечением экспериментальных данных (3, 5 [4], 6 [4]). Представлены зависимости от  $x^*$  для  $\delta_u \times Gr^{1/5}$  (1),  $\delta_T \times Gr^{1/5}$  (2),  $\delta_T \times Gr^{1/5}$  (3),  $\delta_T \times Gr^{1/5}$  (4),  $\delta_T^{exp[4]}$  (5),  $\delta_u^{exp[4]}$  (6),  $\delta_T^{[4]}$  (7),  $\delta_u^{[4]}$  (8)

ние о существовании в пристенной области тонкого слоя теплопроводности, в котором конвективный перенос тепла практически отсутствует, а его теплопроводный перенос характеризуется линейным профилем температуры [7]. Толщина такого слоя  $\delta_{CT}$  может быть определена, например, как расстояние от поверхности, на котором изменение температуры отличается от линейного распределения на 5 %. Зависимость толщины слоя теплопроводности от продольной координаты также изображена на рис. 6, *a*.

На рис. 6, *b* представлено сравнение толщин температурного и динамического слоев; для определения этих величин были использованы интегральные критерии, предложенные в работе [4]. Температурные толщины хорошо соотносятся друг с другом, тогда как динамические существенно расходятся при значениях  $x^* \geq 0,7$ . По нашим данным, наблюдается уменьшение динамической толщины, что вполне естественно, поскольку по мере приближения к оси восходящего факела продольная (радиальная) компонента вектора скорости стремится к нулю. Причиной резкого роста динамической толщины, полученного в работе [4], может являться применение авторами в расчетах алгоритма «сшивания» решений для приповерхностного слоя и восходящего факела.

Отметим также, что для корректного определения толщин динамического и температурного слоев одного критерия оказывается недостаточно, так как необходимо учитывать характер изменения других свойств течения. Например, при выборе критерия для определения толщины динамического слоя, кроме учета характера изменения продольной скорости на границе слоя, необходимо учитывать также изменение осевой скорости. Очевидно, при приближении к области зарождения восходящей струи, роль осевой скорости будет существенно возрастать, и этот фактор необходимо принимать во внимание наряду с изменением продольной скорости.

В отличие от определения толщины приповерхностного слоя, определению его протяженности в литературе уделяется го-

раздо меньше внимания, и эта задача практически не рассматривается. Тем не менее, в случае представления течения как комбинации приповерхностного слоя с восходящим потоком, необходимо определить их границы в продольном (радиальном) направлении, а для этого необходим выбор подходящего критерия.

В данной работе для выработки такого критерия мы предлагаем использовать наличие участка линейной зависимости максимальной продольной скорости от продольной координаты (см. рис. 5, *c*).

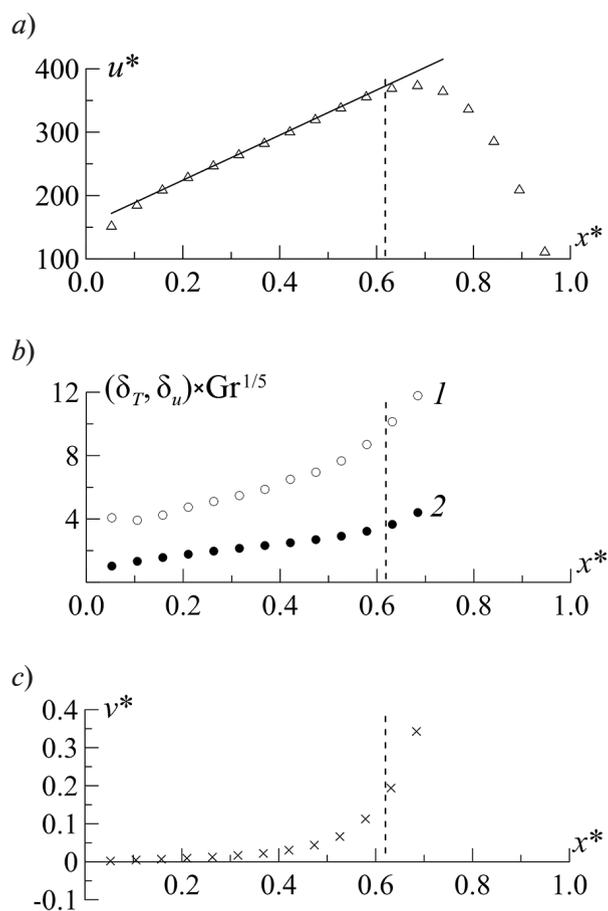


Рис. 7. Изменение безразмерных расчетных характеристик пристенного слоя по всей его протяженности: максимальной осевой скорости (*a*), динамической (*1*) и температурной (*2*) толщины (*b*), максимальной осевой скорости внутри слоя (*c*). Вертикальными пунктирами отмечено значение  $x^* = 0,62$ , при котором наблюдаются отклонения кривых от линейных зависимостей на 1 %

Таким образом, протяженность приповерхностного слоя определяется значением координаты  $x^*$ , при котором отклонение кривой максимальной продольной скорости от линейной зависимости составит, например, 1 %. Тогда для случая  $Gr = 3,5 \cdot 10^6$  (рис. 7, а) границей по продольной координате приповерхностного слоя можно считать значение  $x^* = 0,62$ .

Несомненно, корректность выбора такого подхода должна быть обусловлена не только анализом продольной компоненты скорости, но и соответствующей динамикой изменения других характеристик потока. На рис. 7, б представлены температурная и динамическая толщины приповерхностного слоя. Можно видеть, что координата начала резкого роста толщин и протяженность приповерхностного слоя хорошо соответствуют друг другу. Изменение осевой скорости (рис. 7, в), а именно резкое увеличение, также происходит, начиная со значения координаты  $x^* = 0,62$ .

Для анализа свободноконвективного теплообмена воздуха с горизонтальной нагретой поверхностью диска удобно воспользоваться локальным числом Нуссельта, которое определяется следующим образом:

$$Nu_x = \frac{\alpha R(1-x^*)}{\lambda} = \frac{R(1-x^*)}{(T_a - T_w)} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена, который определяется с использованием предположения о существовании теплопроводного слоя [6].

На рис. 8, а представлено изменение числа Нуссельта вдоль радиуса диска для течения с числом Грасгофа  $Gr = 5,4 \cdot 10^6$ . Локальное число Нуссельта принимает максимальное значение у края диска, после чего монотонно снижается к центру, что хорошо согласуется с нашими экспериментальными данными.

На рис. 8, б представлено распределение интегрального числа Нуссельта, найденного с использованием соотношения

$$Nu = \frac{2\pi R^2}{S} \int_0^1 Nu_{R(1-x^*)} (1-x^*) d(1-x^*),$$

в зависимости от числа Грасгофа.

Подобные данные обычно описывают степенной зависимостью, которая в случае ламинарного режима течения имеет следующий вид (см., например, работу [7]):

$$\overline{Nu} = C \cdot Gr^{0,25},$$

где  $C$  – эмпирическая константа.

В данной работе значение константы определено как  $C = 0,11$ .

Рассмотрим основные закономерности течения в области восходящего факела, например геометрические характеристики

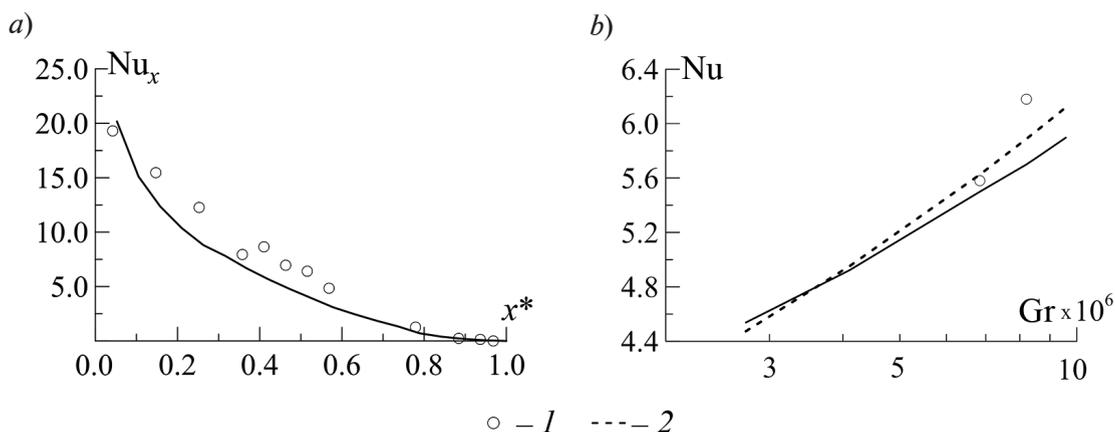


Рис. 8. Распределения локального числа Нуссельта  $Nu_x$  по радиусу диска при  $Gr = 5,4 \cdot 10^6$  (а) и интегрального числа  $Nu$  в зависимости от числа Грасгофа (б). Получены на основе расчетных (сплошные линии) и экспериментальной (1) характеристик теплообмена на верхней поверхности диска; 2 – аппроксимация экспериментальной кривой зависимостью  $0,11 \cdot Gr^{0,25}$  ( $Gr$ )

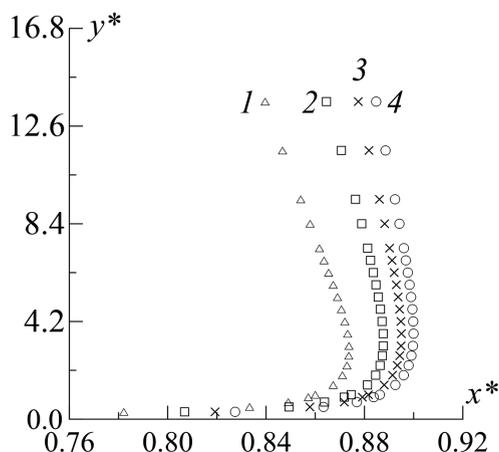


Рис. 9. Безразмерная тепловая толщина восходящего факела при различных значениях числа Грасгофа  $Gr (10^6)$ : 0,89 (1), 1,8 (2), 3,5 (3), 5,8 (4)

факела: температурная толщина, или температурный радиус  $b_T$ . За температурный радиус можно принять значение координаты  $R - x$ , при котором температура составляет половину от ее значения на оси.

На рис. 9 представлено изменение температурного радиуса факела для различных чисел Грасгофа. Можно выделить участок сужения факела (так называемая «шея»

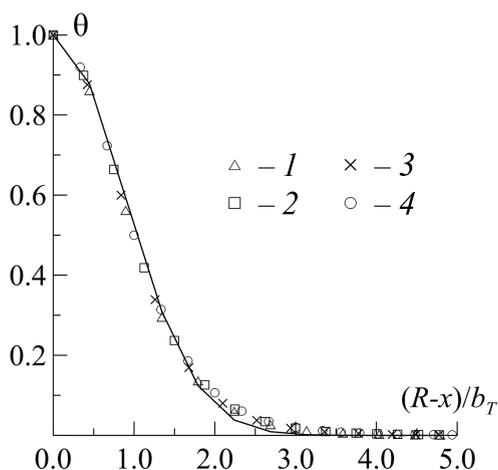


Рис. 10. Автомодельность расчетных профилей температуры в восходящем потоке на высоте  $y^* = 8$  при различных значениях числа Грасгофа  $Gr (10^6)$ : 0,89 (1), 1,8 (2), 3,5 (3), 5,8 (4); сплошной линией показана аппроксимирующая зависимость

[10]), после которого толщина монотонно растет с высотой. При увеличении числа Грасгофа положение шеи остается примерно одинаковым, а толщина факела уменьшается.

В исследованиях [1, 2, 8, 9] отмечалось сходство формы восходящего факела с картинками струйных течений, которое проявляется в подобии профилей температуры и скорости. Так, например, в свободноконвективном факеле максимальное значение температуры наблюдается на оси течения, после чего температура монотонно убывает. Кроме того, для профилей температуры развитого течения наблюдается автомодельность в переменных  $(R - x) / b_T$ ;  $\theta$ , о чем свидетельствуют полученные в результате расчета данные, представленные на рис. 10.

### Заключение

По результатам проведенного экспериментального и численного моделирования свободноконвективного факела при малых числах Грасгофа можно сделать следующие выводы.

1. Все формирующееся течение можно условно разделить на две области: приповерхностного слоя и восходящего течения.

2. Наблюдается автомодельность профилей температуры и скорости на развитых участках обеих областей.

3. В процессе анализа экспериментальных данных и результатов численного моделирования определены динамическая и температурная толщины приповерхностного слоя; при этом введены критерии определения этих толщин. Показано, что итоги данного анализа хорошо согласуются с результатами других авторов. Предложен критерий определения протяженности приповерхностного слоя на основе анализа особенностей изменения максимальной продольной скорости в слое. Показано, что определенная таким образом протяженность не противоречит физическим зависимостям в приповерхностном слое.

4. Анализ поведения осевой компоненты скорости необходим как для создания модели течения в целом, так и для выбора многих критериев, несмотря на то, что



данная компонента не является определяющей в приповерхностном слое. Имеются в виду критерии для определения динамической и температурной толщин, протяженности и т. п.

5. Получены данные о характеристиках теплообмена, а именно о распределении локального числа Нуссельта по поверхности диска, а также о зависимости интегрального числа Нуссельта от числа Грасгофа. Определенная в работе зависимость хорошо согласуется с результатами других авторов.

6. Установлено, что при увеличении числа Грасгофа температурный радиус факела снижается. При этом во всем диапазоне чисел Грасгофа можно выделить общие особенности изменения радиуса по высоте: сужение потока на некотором удалении от поверхности диска (область «шей») и дальнейшее практически линейное увеличение радиуса при увеличении высоты.

Приведенные в работе результаты показывают, что, несмотря на действие выталкивающей силы вдоль всей поверхности диска, возможно формирование стационарного пристенного течения, переходящего в стационарный восходящий поток. При этом возникает естественный вопрос, будет ли представленная картина течения сохраняться при увеличении интенсивности нагрева диска. Из известной нам литературы можно отметить лишь несколько работ [8 – 10], в которых делается предположение о возможном отрыве приповерхностного слоя на достаточно удаленном расстоянии от центра диска. Подтверждение такого предположения может расширить наши представления о процессе теплообмена над нагретым горизонтальным диском.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00130.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jaluria Y.** Natural convection: Heat and mass transfer. Oxford, GB: Pergamon Press, 1980. 326 p.
2. **Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R.L., Sammakia B.** Buoyancy-induced flows and transport. Springer, 1988. 1001 p.
3. **Fujii T.** Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line source and a point heat source // Int. J. Heat Mass Transfer. 1963. Vol. 6. No. 7. Pp. 597–606.
4. **Merkin J.H.** Free convection above a uniformly heated horizontal circular disk // Int. J. Heat Mass Transfer. 1985. Vol. 28. No. 6. Pp. 1157–1163.
5. **Zakerullah Md., Ackroyd J.A.D.** Laminar natural convection boundary layers on horizontal circular discs // J. Appl. Math. Phys. 1979. Vol. 30. No. 3. Pp. 427–435.
6. **Yousef W.W., Tarasuk J.D., McKeen W.J.** Free convection heat transfer from upward-facing isothermal horizontal surfaces // J. Heat Transfer. 1982. Vol. 104. No. 3. Pp. 493–500.
7. **Khrapunov E.F., Potechin I.V., Chumakov Y.S.** Structure of a free convective flow over a horizontal heated surface under conditions of conjugate heat transfer // J. Phys.: Conference Series. 2017. Vol. 891. December. 7 p.
8. **Minh Vuong Pham, Plourde F., Son Doan Kim.** Large-eddy simulation of a pure thermal plume under rotating conditions // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. No. 1. P. 015101.
9. **Plourde F., Minh Vuong Pham, Son Doan Kim, Balachandar S.** Direct numerical simulations of a rapidly expanding thermal plume: Structure and entrainment interaction // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 604. Pp. 99–103.
10. **Lopez J.M., Marques F.** Instability of plumes driven by localized heating // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 736. Pp. 616–640.

*Статья поступила в редакцию 03.09.2018, принята к публикации 23.10.2018.*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ХРАПУНОВ Евгений Федорович** – аспирант Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
hrapunov.evgenii@yandex.ru

**ЧУМАКОВ Юрий Сергеевич** – доктор физико-математических наук, профессор Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
chymakov@yahoo.com

#### REFERENCES

- [1] **Y. Jaluria**, Natural convection: Heat and mass transfer, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [2] **B. Gebhart, Y. Jaluria, R.L. Mahajan, B. Sammakia**, Buoyancy-induced flows and transport, Springer, 1988.
- [3] **T. Fujii**, Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line source and a point heat source, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 6 (7) (1963) 597–606.
- [4] **J.H. Merkin**, Free convection above a uniformly heated horizontal circular disk, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 28 (6) (1985) 1157–1163.
- [5] **Md. Zakerullah, J.A.D. Ackroyd**, Laminar natural convection boundary layers on horizontal circular discs, *J. Appl. Math. Phys.* 30 (3) (1979) 427–435.
- [6] **W.W. Yousef, J.D. Tarasuk, W.J. McKeen**, Free convection heat transfer from upward-facing isothermal horizontal surfaces, *J. Heat Transfer.* 104 (3) (1982) 493–500.
- [7] **E.F. Khrapunov, I.V. Potechin, Y.S. Chumakov**, Structure of a free convective flow over a horizontal heated surface under conditions of conjugate heat transfer, *J. Phys.: Conference Series.* 891 (December) (2017) 1–7.
- [8] **Minh Vuong Pham, F. Plourde, Son Doan Kim**, Large-eddy simulation of a pure thermal plume under rotating conditions, *Phys. Fluids.* 18 (1) (2006) 015101.
- [9] **F. Plourde, Minh Vuong Pham, Son Doan Kim, S. Balachandar**, Direct numerical simulations of a rapidly expanding thermal plume: Structure and entrainment interaction, *J. Fluid Mech.* 604 (2008) 99–103.
- [10] **J.M. Lopez, F. Marques**, Instability of plumes driven by localized heating, *J. Fluid Mech.*, 736 (2013) 616–640.

*Received 03.09.2018, accepted 23.10.2018.*

#### THE AUTHORS

**KHRAPUNOV Evgenii F.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
hrapunov.evgenii@yandex.ru

**CHUMAKOV Yuriy S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
chymakov@yahoo.com