ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

DOI: 10.18721/JPM.11409
УДК 530.12:517.988.38(075.8)

СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Н.Н. Горобей, А.С. Лукьяненко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В рамках релятивистской квантовой механики предложена формулировка для бесспиновых частиц, которая сохраняет формальное равноправие пространственных и временной координат такой частицы благодаря введению вспомогательного параметра эволюции. Предлагаемая модификация теории дает пространственно-временную картину элементарных процессов, происходящих в конечных областях пространства Минковского в форме амплитуд рассеяния. Для определения указанного параметра введено дополнительное условие – наличие экстремума фазы амплитуды рассеяния. Вероятностная интерпретация амплитуды рассеяния включает ограничение меры интегрирования в пространстве Минковского трехмерной поверхностью, задаваемой условиями эксперимента. Показано, что нерелятивистский предел модифицированной теории совпадает с теорией Шрёдингера, в том числе для динамической модели стационарной задачи рассеяния в форме движения волновых пакетов.

Ключевые слова: пространство Минковского, бесспиновая частица, волновой пакет, собственное время, амплитуда рассеяния

Ссылка при цитировании: Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С. Собственное время в релятивистской квантовой механике // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 4. С. 95–103. DOI: 10.18721/JPM.11409

INTERNAL TIME IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

N.N. Gorobey, A.S. Lukyanenko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A formulation for spinless particles, that holds true the formal equivalency of spatial and time particle’s coordinates achieved through the introduction of an auxiliary parameter of evolution, has been put forward in terms of relativistic quantum mechanics. The proposed modification of theory gave a space-time picture of elementary processes involved in a finite region of the Minkowsky space in the form of scattering amplitudes. In order to define the evolution parameter, an additional condition was introduced. That was the presence of an extreme of the scattering amplitude phase. The probabilistic interpretation of the scattering amplitude includes a contraction of integration measure in the Minkowsky space on a 3D-surface given by experimental conditions. The nonrelativistic limit of the modified theory was shown to coincide with the Schröedinger theory, including the dynamical model of the stationary scattering problem in terms of wave packets movement.

Keywords: Minkowsky space, spinless particle, wave packet, internal time, scattering amplitude

Citation: N.N. Gorobey, A.S. Lukyanenko, Internal time in relativistic quantum mechanics, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (4) (2018) 95–103. DOI: 10.18721/JPM.11409

Введение

Самым впечатляющим результатом специальной теории относительности является объединение пространства и времени в единое четырехмерное пространство-время – пространство Минковского. В таком случае необходимость выделения времени опять в качестве параметра эволюции для описания динамики частиц было бы определенным шагом назад. Этого можно избежать в классической (неквантовой) релятивистской механике, где допускается описание движения в терминах инвариантного собственного времени, измеряемого часами, связанными с каждой частицей.

В квантовой механике такое описание вызывает затруднения хотя бы потому, что невозможно снабдить элементарную частицу собственными часами. Здесь опять в качестве параметра эволюции используют координатное время пространства Минковского. Так поступают в релятивистской квантовой механике (РКМ), основанной на уравнении Клейна – Гордона (КГ) для бесспиновых частиц и уравнении Дирака для частиц спина 1/2 [1].

В данной работе мы ограничимся рассмотрением бесспиновых заряженных частиц. Асимптотическими (свободными, поскольку взаимодействие выключается) решениями уравнения Клейна – Гордона при $t \to \pm\infty$ являются волны Де Бройля, а решение уравнения КГ во всем пространстве Минковского, в частности в рамках теории возмущений, позволяет определить амплитуды рассеяния этих волн. Ковариантность этой теории рассеяния обеспечена именно благодаря бесконечным пределам временной координаты.

Однако в такой постановке задачи рассеяния имеется существенная неполнота. Асимптотическое состояние в виде волны Де Бройля является идеализацией, подобной понятию материальной точки в классической механике. На самом деле частицы возникают в свободном состоянии (высвобождаются из источника) в ограниченной области пространства-времени и так же детектируются. Для описания этих процессов наиболее подходит понятие источника (стока) Швингера [2]. Возникающее в источнике состояние является «обрезком» волны Де Бройля, или волновым пакетом. Размеры волнового пакета по всем четырем измерениям мы далее будем называть параметрами когерентности. Они определяются пространственными и временными характеристиками элементарного процесса высвобождения частицы из связанного состояния в источнике. Волновой пакет не является решением уравнения КГ, а значит, он будет эволюционировать вплоть до регистрации частицы после рассеяния, в некоторой точке пространства Минковского (редукция волнового пакета). Весь элементарный процесс рассеяния локализован в конечной области этого пространства. Для описания движения волнового пакета в указанном пространстве, нам потребуется собственное время как вспомогательный параметр эволюции.

Использование собственного времени в релятивистской квантовой механике имеет уже длительную историю, которая начинается с работ П. Дирака [3]. Последующее развитие формализма вспомогательного времени связано с именами В.А. Фока [4], Э. Штюкельберга [5], Р. Фейнмана [6], Дж. Швингера [7] и А. Киприанидиса [8], где оно ассоциируется с понятием индефинитной массы. Связь этого вспомогательного параметра с собственным временем частицы установлена в работе [9]. Введение собственного времени в качестве параметра эволюции волнового пакета в пространстве Минковского предложено в работах [10, 11]. Поскольку это время не является наблюдаемым, оно должно быть исключено и выражено через данные рассеяния. Это достигается наложением на амплитуду рассеяния дополнительного условия экстремума ее фазы относительно собственного времени. Здесь мы опираемся на аналогию с классическим принципом наименьшего действия в релятивистской механике, в котором собственное время является независимой динамической переменной [4], а также на замечание Дирака о том, что фаза волновой функции есть квантовый аналог функционала действия [12]. Наложение этого дополнительного условия на собственное время влечет за собой необходимость дополнительного условия нормировки амплитуды рассеяния. Для него вводится мера интегрирования на произвольной 3D-поверхности в пространстве Минковского. Выбор поверхности, а значит и вероятностная интерпретация амплитуды рассеяния, зависит от постановки эксперимента.

Цель данной работы состоит в уточнении новой формулировки релятивистской квантовой механики с дополнительным параметром эволюции.

Помимо этого, в качестве обоснования формализма получен нерелятивистский предел этого параметра, который совпадает с пределом в теории Шрёдингера. Дополнительно в этом пределе установлена связь указанного формализма с постановкой задачи рассеяния в терминах движения волновых пакетов в 3D-пространстве (такая задача рассмотрена в работе [13]).

Собственное время в классической и квантовой механике

Начнем рассмотрение с канонической формы действия заряженной частицы во внешнем поле:

$$I = \int_0^S (\theta_\mu p_\mu \dot{x}_\mu - H) d\tau, \tag{1}$$

где точкой обозначена производная по параметру $\tau \in [0, S]$, а

$$H \equiv \theta_\mu (p_\mu - eA_\mu)^2 - mc^2 \tag{2}$$

есть функция Гамильтона.

По повторяющимся греческим индексам $\mu = 0, 1, 2, 3$ предполагается суммирование, а сигнатура геометрии Минковского

$$\theta_\mu = (+1, -1, -1, -1)$$

введена явно.

Следуя В.А. Фоку [4], рассмотрим верхний предел интегрирования S в качестве независимой динамической переменной, которая находится из принципа наименьшего действия после решения уравнений движения заряда в пространстве Минковского между заданными граничными точками

$$x_\mu(0) = x_{0\mu}, x_\mu(S) = x_{1\mu}.$$

Например, в отсутствие внешнего поля находим:

$$S = \pm \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{2mc}, \tag{3}$$

где

$$\Delta x^2 = \theta_\mu (x_{1\mu} - x_{0\mu})^2 \tag{4}$$

есть расстояние между граничными точками в пространстве Минковского. Знаки плюс-минус соответствуют движению заряда вперед и назад во времени τ.

В квантовой механике действию (1) соответствует волновое уравнение типа уравнения Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \hat{H} \psi; \tag{5}$$

оно описывает эволюцию волновой функции $\psi(\tau, x)$ в пространстве Минковского с течением времени $\tau \in [0, S]$.

Здесь

$$\hat{H} \equiv \theta_\mu \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_\mu - eA_\mu(x_\mu) \right]^2 - m^2 c^2 \tag{6}$$

– это оператор Гамильтона.

Стационарные состояния частицы в статическом внешнем поле $A_\mu(x_k)$, как мы полагаем, по-прежнему являются решениями уравнения КГ $\hat{H}\psi = 0$. Сюда же следует отнести и обычную формулировку стационарной задачи рассеяния в терминах асимптотических плоских волн Де Бройля [1].

Здесь мы представим описание элементарных процессов рассеяния, локализованных в конечных областях пространства Минковского. Рассмотрим для этого уравнения задачу, аналогичную граничной задаче в классической механике. Начальное состояние заряда зададим гауссовым волновым пакетом с центром в точке $x_{0\mu}$:

$$\psi_0(x) = A \exp\left[-\frac{(x_\mu - x_{0\mu})^2}{2\sigma_\mu^2} + \frac{i}{\hbar} \theta_\mu p_{0\mu} x_\mu \right]. \tag{7}$$

Это состояние представляет собой «обрезок» волны Де Бройля с 4-импульсом $p_{0\mu}$, локализованный в окрестности начальной точки $x_{0\mu}$. Размер области локализации задается параметрами σ_μ, которые названы выше параметрами когерентности волны Де Бройля. Они определяются тем физическим процессом, который «высвобождает» частицу из связанного состояния в источнике. Заметим, что размеры пакета σ_μ подчиняются преобразованиям Лоренца, так что подразумевается, что система отсчета фиксирована.

Состояние (7) имеет конечную норму с обычной мерой интегрирования в пространстве Минковского:

$$\|\psi\|^2 \equiv \int \prod_\mu dx_\mu \, |\psi|^2 < \infty, \tag{8}$$

и эта норма сохраняется при его эволюции, описываемой уравнением (5).

Мы, однако, не можем рассматривать величину $|\psi(\tau, x_\mu)|^2$ как плотность вероятности обнаружить частицу в окрестности точки x_μ в пространстве Минковского в данный момент времени τ, поскольку само это время не наблюдаемо и его еще следует определить.

Для этого нам потребуется квантовый аналог классического принципа наименьшего действия. Следуя П. Дираку [12], будем рассматривать в качестве квантового действия фазу I волновой функции в ее экспоненциальном представлении:

$$\psi = R \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} I\right). \tag{9}$$

Возьмем значение волновой функции в конечный момент времени $\tau = S$ в некоторой конечной точке $x_{1\mu}$. Для соответствующего модуля R и фазы I волновой функции, из волнового уравнения (5) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial R}{\partial S} = -2\theta_\mu \nabla_\mu R \cdot (\nabla_\mu I - eA_\mu) - R\theta_\mu \nabla_\mu^2 I, \tag{10}$$

$$\frac{\partial I}{\partial S} = -\theta_\mu (\nabla_\mu I - eA_\mu)^2 + m^2c^2 + \hbar^2 \frac{\theta_\mu \nabla_\mu^2 R}{R}. \tag{11}$$

Значение волновой функции в конечной точке $\psi(S, x_{1\mu})$ имеет смысл амплитуды рассеяния частицы из начального состояния (7) в пространстве Минковского в конечное состояние

$$\delta^4(x_\mu - x_{1\mu}),$$

локализованное в конечной точке $x_{1\mu}$ (предварительной, пока не фиксировано собственное время S).

Физически это означает, что в конечной точке «сработал» детектор, например в виде цилиндра Фарадея, который перевел частицу в связанное состояние. Мы полагаем, что этот процесс «связывания» локализован в области пространства Минковского, много меньшей параметров когерентности σ_μ начальной волны Де Бройля. Именно в таком контексте можно говорить о корпускулярно-волновом дуализме в квантовой механике: в источнике рождается волна Де Бройля (она ограничена параметрами когерентности), а детектируется точечная частица.

Теперь подготовлены условия для того, чтобы фиксировать параметр S, и для этого следует ввести дополнительное условие экстремума:

$$\frac{\partial I}{\partial S} = 0, \tag{12}$$

которое в нашей работе [10] названо квантовым принципом наименьшего действия.

После нахождения (предварительной) амплитуды рассеяния $\psi(S, x_{1\mu})$ уравнение (12) определяет собственное время S как функцию кинематических параметров эксперимента: координат источника $x_{0\mu}$ и детектора $x_{1\mu}$, размеров источника σ_μ и начального 4-импульса $p_{0\mu}$. Как будет далее показано, если источник находится далеко от рассеивающего центра, то начальный импульс $p_{0\mu}$ удовлетворяет условию

$$p_{0\mu}^2 = m^2c^2. \tag{13}$$

После подстановки найденного собственного времени в амплитуду $\psi(S, x_{1\mu})$ последняя становится амплитудой рассеяния частицы в заданных экспериментальных условиях.

Однако теперь следует уточнить вероятностную интерпретацию этой амплитуды рассеяния, поскольку при учете дополнительного условия (12) мы не можем утверждать сохранение нормы (8) волновой функции в пространстве Минковского. В работе [11] предложено определять меру интегрирования в пространстве Минковсого в соответствии с поставленной экспериментальной задачей. В общем виде это сводится к ограничению интегрирования некоторой 3D-поверхностью $F(x_\mu)=0$ в пространстве Минковского. Более точно мы определим теперь норму амплитуды рассеяния следующим образом:

$$\|\psi\|_F^2 \equiv \int_{t_0}^{\infty} dt \int \prod_k dx_k \delta(F) |\psi|^2. \tag{14}$$

В этом определении учитывается, что эксперимент проходит после возникновения начального состояния в момент времени t_0. При этом мы имеем дело с частицей, если $p_0 > 0$, и античастицей, если $p_0 < 0$. В следующем параграфе это определение нормы будет обосновано в нерелятивистском пределе.

Завершим этот раздел представлением решения для случая свободного движения волнового пакета. Оно описывается амплитудой

$$\begin{aligned}\psi(S, x_{1\mu}) = A\left(\prod_\mu \sqrt{1 + 2i\hbar\frac{\theta_\mu S}{\sigma_\mu^2}}\right)^{-1} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(\Delta x_\mu - 2Sp_{0\mu})^2}{2(\sigma_\mu^2 + 4i\hbar\theta_\mu S)} + \right. \\ \left. + \frac{i}{\hbar}[\theta_\mu p_{0\mu}\Delta x_\mu - (\theta_\mu p_{0\mu}^2 - m^2c^2)S]\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда получаем квантовое действие:

$$\begin{aligned}I = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\hbar\theta_\mu S}{\sigma_\mu^2} + \frac{\hbar^2(\Delta x_\mu - 2Sp_{0\mu})^2 S\theta_\mu}{\sigma_\mu^4 + 4\hbar^2 S^2} + \\ + \theta_\mu p_{0\mu}\Delta x_\mu - (\theta_\mu p_{0\mu}^2 - m^2c^2)S.\end{aligned} \tag{16}$$

Напомним, что по индексу μ предполагается суммирование. Его классический предел $(\hbar \to 0)$ совпадает с классическим действием (1) в случае свободного движения частицы. Для него из условия экстремума (12) следует условие (13). При разложении квантового действия (16) в ряд по степеням $\hbar$ первая ненулевая поправка имеет второй порядок:

$$I = I_0 + \hbar^2 I_2 + \ldots, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}I_2 = -\left[4(\theta_\mu p_{0\mu}\Delta X_\mu - \theta_\mu p_{0\mu}^2 S)\frac{S^2}{\sigma_\mu^4} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\theta_\mu}{\sigma_\mu^2} - \frac{\theta_\mu \Delta X_\mu^2}{\sigma_\mu^4}\right)S\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Тогда, если выполнено условие (13), то из условия экстремума (12), для квантового действия с указанной точностью получаем:

$$S = \frac{2\sum_\mu \frac{\theta_\mu p_{0\mu}\Delta x_\mu}{\sigma_\mu^4} \pm \sqrt{D}}{6\sum_\mu \frac{\theta_\mu p_{0\mu}^2}{\sigma_\mu^4}}, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}D \equiv 4\left(\sum_\mu \frac{\theta_\mu p_{0\mu}\Delta x_\mu}{\sigma_\mu^4}\right)^2 - \\ - 3\left(\sum_\mu \frac{\theta_\mu p_{0\mu}^2}{\sigma_\mu^4}\right)^2 \left(\sum_\mu \theta_\mu\left(\frac{\Delta x_\mu^2}{\sigma_\mu^4} - \frac{1}{\sigma_\mu^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Выбор знака в выражении (19) теперь определяется знаком p_{00}: следует брать плюс, если $p_{00} > 0$ (частица) и минус, если $p_{00} < 0$ (античастица).

Полученное выражение (19) следует подставить в формулу для исходной волновой функции (15), модуль которой

$$\begin{aligned}R = A\left[\prod_\mu \sqrt{\sigma_\mu^2 + \hbar^2 S^2}\right]^{-1} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(\Delta x_\mu - 2Sp_{0\mu})^2}{2(\sigma_\mu^2 + 4\hbar^2 S^2/\sigma_\mu^2)}\right]\end{aligned} \tag{21}$$

определяет движение волнового пакета в пространстве Минковского. Здесь в показателе экспоненты предполагается суммирование по μ.

Нерелятивистское приближение

Рассмотрим нерелятивистский предел сначала для случая свободного движения волнового пакета. Этот предел реализуется, если начальный 3-импульс частицы мал, т. е.

$$|p_{0k}| << mc. \tag{22}$$

Согласно выражению (21), перемещение центра пакета в 3D-пространстве тогда тоже мало за конечный промежуток времени, а именно

$$\left|\Delta x_k\right| << \Delta x_0. \tag{23}$$

Тогда для достаточно большого промежутка времени, т. е.

$$\Delta x_0 >> \sigma_0, \tag{24}$$

из выражения (19) получаем с высокой точностью:

$$S \cong \frac{\Delta t}{2m}. \tag{25}$$

Таким образом, в этом пределе собственное время частицы совпадает (с точностью до множителя $1/2m$) с координатным временем, как и следовало ожидать.

В этом случае модуль волновой функции (21) имеет вид

$$R \sim A\exp\left[-\frac{(\Delta x_k - \Delta t p_{0k}\,/\,m)^2}{2(\sigma_k^2 + \hbar^2\Delta t^2/m^2\sigma_k^2)}\right], \tag{26}$$

где в показателе экспоненты предполагается суммирование по k.

Именно такой результат дает решение нестационарного уравнения Шрёдингера для движения гауссова волнового пакета.

При наличии внешнего электромагнитного поля, к неравенствам (22) в нерелятивистском приближении следует добавить также следующее:

$$\left|eA_\mu\right| << mc. \tag{27}$$

Переход к нерелятивистскому пределу, так же как и в случае уравнения Клейна – Гордона, осуществим путем выделения в волновой функции быстро осциллирующего множителя [1, 14]:

$$\psi(t, x_k) \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}mc^2t\right)\psi'(t, x_k). \tag{28}$$

Что же касается ее медленно меняющейся части $\psi'(t, x_k)$, покажем, что она удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_k - eA_k\right)^2\psi' + ecA_0\psi'. \tag{29}$$

В рассматриваемом здесь формализме быстро меняющийся множитель возникнет как стационарное значение той части действия I, которая отвечает временнóй координате Δt. Действительно, полностью пренебрегая движением частицы в 3D-пространстве, учитывая неравенства (22), (27) и действие внешнего поля, получим свободное «движение» координатного времени t с «течением» внутреннего времени τ. Это приближение мы назовем ультранерелятивистским.

В данном приближении справедливы все формулы для случая свободного движения волнового пакета, в котором имеется только вклад $\mu = 0$. В частности, формула (19) в этом случае сводится к выражению

$$S \cong \frac{\Delta t}{3m} + \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{3m}\right)^2 - \frac{(\Delta t^2 - \sigma_0^2)}{12m^2}}. \tag{30}$$

При малых значениях Δt оно имеет ненулевой предел, а при $\Delta t >> \sigma_0$ переходит в выражение (25). При бóльших же значениях Δt, в начальном волновом пакете (7) можно перейти к пределу $\sigma_0 \to 0$, в котором он принимает вид

$$\psi_0(x_\mu) = \delta(t - t_0)\psi_0'(t, x_k), \tag{31}$$

где $\psi_0'(t, x_k)$ – начальный волновой пакет в 3D-пространстве.

Напомним, что термин «начальный» здесь применяется по отношению к собственному времени τ. Тогда решение уравнения (5) в рассматриваемом ультранерелятивистском пределе принимает вид

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2mc^2}{i\pi\hbar t}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}mc^2t\right). \tag{32}$$

Осталось найти к данному решению нерелятивистские поправки, учитывающие (медленное) движение частицы и действие внешнего поля.

Для этого обратимся к уравнениям (10) и (11). Если считать, что условие экстремума (12) удовлетворено и выражение для собственного времени имеет вид (25), то в уравнении (11) можно извлечь квадратный корень:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \sqrt{Z} + e\varphi, \tag{33}$$

где

$$Z = m^2c^4 + c^2(\nabla_k - eA_k)^2 + \hbar^2c^2 \frac{\theta_\mu \nabla_\mu^2 R}{R}. \quad (34)$$

В искомом нерелятивистском пределе квадратный корень аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\partial I}{\partial t} \cong mc^2 + \frac{1}{2m}(\nabla_k - eA_k)^2 + e\varphi - \hbar^2 \frac{\Delta R}{R}, \quad (35)$$

где была отброшена также вторая производная

$$\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}. \quad (36)$$

Обратимся теперь к уравнению (10). Нулевая составляющая первого слагаемого в его правой части ($\mu = 0$), согласно формуле (35), может быть аппроксимирована произведением

$$-2m\frac{\partial R}{\partial t}. \quad (37)$$

Если пренебречь также нулевой составляющей во втором слагаемом и разделить на $2m$ обе части уравнения, то уравнение принимает вид

$$\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial R}{\partial S} + \frac{\partial R}{\partial t}\right) = \frac{1}{m}(\nabla_k I - eA_k)\nabla_k R + \frac{1}{2m} R\nabla_k(\nabla_k I - eA_k). \quad (38)$$

Выражение в скобках в левой части уравнения (38) равно полной частной производной R по времени. В таком виде уравнения (35) и (37) эквивалентны уравнению Шрёдингера (29) для медленно меняющейся со временем волновой функции $\psi'(t, x_k)$, если положить

$$I = mc^2t + I'$$

(I' – ее фаза):

$$\psi' = R \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} I'\right). \quad (39)$$

Тем самым установлен нерелятивистский предел для волнового уравнения (5) в рамках рассматриваемой теории.

Осталось уточнить вероятностную интерпретацию амплитуды $\psi(x_\mu)$ в нерелятивистском пределе. Здесь можно рассмотреть две возможности. Первая – обычная, когда время t рассматривается как классический параметр эволюции при больших значениях Δt :

$$\Delta t \equiv T >> \sigma_0. \quad (40)$$

Для рассмотрения этой возможности представим себе следующий эксперимент: через промежуток времени T после рождения частицы включаются детекторы во всем пространстве. До этого, с момента рождения t_0 (σ_0 в этом случае можно считать равным нулю), частица двигалась в заданном потенциальном поле в отсутствие наблюдателя. Такому эксперименту соответствует определенный выбор поверхности интегрирования в выражении (14):

$$F \equiv \Delta t - T = 0. \quad (41)$$

В этом случае снимается интегрирование по времени в (14) и волновая функция $\psi'(t, x_k)$, будучи решением уравнения Шрёдингера (29), приобретает обычную интерпретацию плотности распределения вероятности в 3D-пространстве.

Другая возможность интерпретации более соответствует стандартному эксперименту по рассеянию частиц на статической мишени. Мишень обычно помещают в центр вакуумной камеры, а детекторы (цилиндры Фарадея) располагаются на поверхности сферического экрана. Картина дифракции получается в результате фиксации результатов элементарных актов рассеяния за большой промежуток времени наблюдения. Если ρ – радиус экрана с центром в мишени, то поверхность интегрирования в (14) есть 3D-сфера:

$$F \equiv \sqrt{x_k^2} - \rho = 0. \quad (42)$$

Таким образом в (14) снимается интегрирование по радиальной переменной в 3D-пространстве, но сохраняется интегрирование по времени. Это можно считать удачным вариантом: элементарный акт рассеяния частицы завершается лишь при прохождении через детектор всего пакета. Такой вариант соответствует динамической интерпретации стационарной задачи рассеяния в терминах движения волновых пакетов, рассмотренной в работе [13]. На практике происходит также усреднение элементарных актов рассеяния по времени экспозиции.

Заключение

Рассмотренная в данной работе формулировка релятивистской квантовой механики с максимально возможной детализацией описывает пространственно-временные характеристики элементарных процессов, которые локализованы в конечных областях пространства Минковского. Это описание включает в себя и характеристики начального состояния – параметры когерентности σ_μ, которые тем самым являются наблюдаемыми величинами. Введение дополнительного параметра эволюции для сохранения равноправия пространственных и временной координат пространства Минковского требует наложения дополнительного условия – с тем, чтобы исключить этот параметр как ненаблюдаемую величину, а также дополнительно определить вероятностную меру.

Выбор такой меры определяется условиями эксперимента. С учетом этих дополнительных условий, решения уравнения (5) приобретают физический смысл амплитуд рассеяния. Предложенный формализм следует рассматривать как дополнение к стационарной теории рассеяния асимптотических волн Де Бройля, основанной на уравнении Клейна – Гордона, в котором учитываются конечные пространственно-временные характеристики элементарных процессов рассеяния. Одним из обоснований предложенной теории является то обстоятельство, что амплитуды рассеяния, вместе с их вероятностной интерпретацией, имеют правильный нерелятивистский предел.

Рассмотренная в настоящем исследовании формулировка релятивистской квантовой механики для бесспиновых частиц может быть обобщена на случай частиц со спином.

Благодарность

Авторы благодарят доктора физико-математических наук А.В. Гольцева за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д.** Релятивистская квантовая теория. В 2-х тт. Пер. с англ. Т. 1. Релятивистская квантовая механика. М.: Наука, 1978. 295 с.

2. **Швингер Ю.** Частицы, источники, поля. В 2-х тт. Пер. с англ. Т. 1. Общий курс теории элементарных частиц и квантовой теории поля. М.: Мир, 1973. 502 с.

3. **Dirac P.A.M.** On the theory of quantum mechanics // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A . 1926. Vol. 112. No. 762. Pp. 661–677.

4. **Фок В.А.** Собственное время в классической и квантовой механике // Изв. АН СССР. 1937. № 4–5. С. 551–568.

5. **Stueckelberg E.C.G.** Remark of the creation of pairs of particles in the theory of relativity // Helv. Phys. Acta. 1941. Vol. 14. No. 7. Pp. 588–594.

6. **Feynman R.P.** Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. No. 3. Pp. 440–456.

7. **Schwinger J.** On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. No. 5. Pp. 664–679.

8. **Kyprianidis A.** Scalar time parametrization of relativistic quantum mechanics: The covariant Schrödinger formalism // Phys. Reports. 1987. Vol. 155. No. 1. Pp. 1–27.

9. **Aparicio J.P., Gaioli F.H., Alvarez G.E.T.** Interpretation of the evolution parameter of Feynman parametrization of the Dirac equation // arXiv: 9502015v1 [quant-ph] 16 Fev1995.

10. **Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С.** Квантовый принцип наименьшего действия в релятивистской квантовой механике // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2008. № 6 (70). С. 7–10.

11. **Gorobey N., Lukyanenko A., Lukyanenko I.** Quantum action principle in relativistic mechanics (II) //arXiv:1010.3824v1[quant-ph], 2010.

12. **Дирак П.** Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 479 с.

13. **Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.** Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, 199 с.

14. **Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.** Курс теоретической физики. В 2-х тт. Т. 2. Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. Изд. 2-е. М.: Наука, 1971. 936 с.

Статья поступила в редакцию 03.03.2018, принята к публикации 13.09.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОРОБЕЙ Наталья Николаевна – *доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.gorobey@mail.ru

ЛУКЬЯНЕНКО Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, профессор анкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alex.lukyan@rambler.ru

REFERENCES

[1] **J.D. Bjorken, S.D. Drell,** Relativistic quantum theory, Vol. I. Relativistic quantum mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964.

[2] **J. Schwinger,** Particles, sources, and fields, Vol. I. Addison-Wesley PC, London, Amsterdam, 1973.

[3] **P.A.M. Dirac,** On the theory of quantum mechanics, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. 112 (762) (1926) 661–677.

[4] **V. Fock,** Die Eigenzeit in der Klassischen und in der Quantenmechanik, Sow. Phys. 12 (1937) 404–425.

[5] **E.C.G. Stueckelberg,** Remark of the creation of pairs of particles in the theory of relativity, Helv. Phys. Acta. 14 (7) (1941) 588–594.

[6] **R.P. Feynman,** Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction, Phys. Rev. 80 (3) (1950) 440–456.

[7] **J. Schwinger,** On gauge invariance and vacuum polarization, Phys. Rev. 82 (5) (1951) 664–679.

[8] **A. Kyprianidis,** Scalar time parametrization of relativistic quantum mechanics: The covariant Schrödinger formalism, Phys. Reports. 155 (1) (1987) 1–27.

[9] **J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, G.E.T. Alvarez,** Interpretation of the evolution parameter of Feynman parametrization of the Dirac equation, arXiv: 9502015v1 [quant-ph] 16 Fev1995.

[10] **N.N. Gorobey, A.S. Luk'yanenko,** The least action principle in relativistic quantum mechanics, St. Petersburg Polytechnical University Journal. (6(70)) (2008) 7–10.

[11] **N. Gorobey, A. Lukyanenko, I. Lukyanenko,** Quantum action principle in relativistic mechanics (II), arXiv:1010.3824v1[quant-ph], 2010.

[12] **P. Dirac,** The principles of quantum mechanics, 4th Ed, Oxford at the Clarendon Press, 1958.

[13] **L.D. Faddeev, O.A. Yakubovskii,** Lectures on quantum mechanics for mathematics students, Transl. by H. McFaden, Student Mathematical Library 47. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xii, 2009.

[14] **V.G. Levich, Yu.A. Vdovin, V.A. Myamlin,** Kurs teoreticheskoy fiziki. T. 2. [A course of lectures on theoretical physics. Vol. 2], Nauka, Moscow, 1971.

Received 03.03.2018, accepted 13.09.2018.

THE AUTHORS

GOROBEY Nataliya N.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.gorobey@mail.ru

LUKYANENKO Alexander S.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alex.lukyan@rambler.ru