



НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические
науки

ТОМ 12, №1
2019

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2019

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Алферов Ж.И., академик РАН – председатель;
Боровков А.И., проректор по перспективным проектам;
Варшавович Д.А., академик РАН;
Глухих В.А., академик РАН;
Жуков А.Е., чл.-кор. РАН – зам. председателя;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Индейцев Д.А., чл.-кор. РАН;
Рудской А.И., академик РАН – зам. председателя;
Суриц Р.А., академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – главный редактор;
Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – зам. главного редактора;
Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия – ответственный секретарь;
Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Безпрозванный И.Б., д-р биол. наук, профессор, Юго-Западный медицинский центр
Техасского университета, Даллас, США;
Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Донецкий Д.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, университет штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, США;
Лобода О.С., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия;
Малерб Й.Б., Dr.Sc. (Physics), профессор, университет Претории, ЮАР;
Остряков В.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Привалов В.Е., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Смирнов Е.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Соловьёв А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, Научно-исследовательский центр мезобионаносистем (MBN),
Франкфурт-на-Майне, Германия;
Таганцев А.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, Швейцарский федеральный институт технологий,
Лозанна, Швейцария;
Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Тропп Э.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Хейфец А.С., Ph.D. (Physics), профессор, Австралийский национальный университет,
Канберра, Австралия;
Черепанов А.С., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия.

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

Распространяется по Каталогу стран СНГ, Объединенному каталогу «Пресса России» и по Интернет-каталогу «Пресса по подписке». Подписной индекс **71823**.

Журнал индексируется в базе данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), а также включен в базу данных «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте

<http://www.elibrary.ru>

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства:

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

Тел. редакции (812) 294-22-85.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION



ST. PETERSBURG STATE
POLYTECHNICAL UNIVERSITY
JOURNAL

Physics
and Mathematics

**VOLUME 12, No.1,
2019**

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2019

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS

JOURNAL EDITORIAL COUNCIL

Zh.I. Alferov – full member of RAS, head of the editorial council;
A.I. Borovkov – vice-rector for perspective projects;
V.A. Glukhikh – full member of RAS;
D.A. Indeitsev – corresponding member of RAS;
V.K. Ivanov – Dr. Sci.(phys.-math.), prof.;
A.I. Rudskoy – full member of RAS, deputy head of the editorial council;
R.A. Suris – full member of RAS;
D.A. Varshalovich – full member of RAS;
A.E. Zhukov – corresponding member of RAS, deputy head of the editorial council.

JOURNAL EDITORIAL BOARD

V.K. Ivanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – editor-in-chief;
A.E. Fotiadi – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – deputy editor-in-chief;
V.M. Kapralova – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – executive secretary;
V.I. Antonov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
I.B. Bezprozvanny – Dr. Sci. (biology), prof., The University of Texas Southwestern Medical Center, Dallas, TX, USA;
A.V. Blinov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Cherepanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
D.V. Donetski – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., State University of New York at Stony Brook, NY, USA;
D.A. Firsov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Kheifets – Ph.D., prof., Australian National University, Canberra, Australia;
O.S. Loboda – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
J.B. Malherbe – Dr. Sci. (physics), prof., University of Pretoria, Republic of South Africa;
V.M. Ostryakov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
V.E. Privalov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.M. Smirnov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.V. Solov'yov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., MBN Research Center, Frankfurt am Main, Germany;
A.K. Tagantsev – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland;
I.N. Toptygin – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.A. Tropp – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia.

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is distributed through the CIS countries catalogue, the «Press of Russia» joint catalogue and the «Press by subscription» Internet catalogue. The subscription index is **71823**.

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) and the **Russian Science Citation Index** (RSCI) databases.

© Scientific Electronic Library (<http://www.elibrary.ru>).

No part of this publication may be reproduced without clear reference to the source.

The views of the authors may not represent the views of the Editorial Board.

Address: 195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

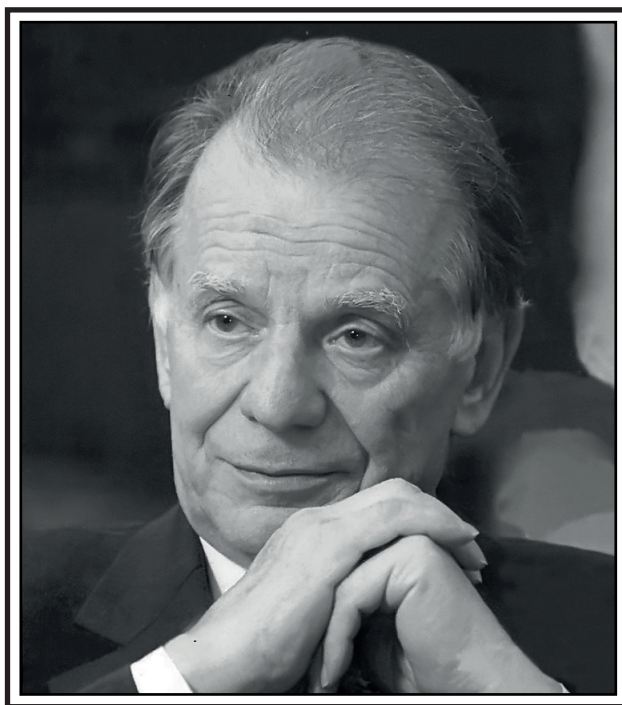
Phone: (812) 294-22-85.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

© Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2019

↑

1 марта 2019 года ушел из жизни Лауреат Нобелевской премии по физике, академик, депутат Государственной думы Жорес Иванович Алфёров



1930 – 2019

Жорес Иванович родился 15 марта 1930 года в г. Витебске в семье коммунистов. Окончил факультет электронной техники Ленинградского электротехнического института. В 1952 году начал научную карьеру.

Вся жизнь Ж.И. Алфёрова как ученого была неразрывно связана с Академией наук с момента прихода в 1953 году на работу в Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе. Он автор более 500 научных работ, в том числе 3 монографий и более 50 изобретений. В 1979 г. Ж.И. Алфёров стал академиком, в 1991 – 2017 гг. был вице-президентом РАН; многие годы он являлся председателем Президиума Санкт-Петербургского научного центра РАН.

С 1988 года научно-педагогическая деятельность академика Ж.И. Алфёрова была связана с нашим университетом. Он был деканом созданного по его инициативе физико-технического факультета, являлся заведующим кафедрой физики и технологии наноструктур. В 2000 году Жорес Иванович был избран почетным доктором нашего вуза. В 2014 – 2018 гг. Ж.И. Алфёров являл-

ся членом наблюдательного совета СПбПУ Петра Великого. Он был также профессором и научным руководителем Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций нашего университета. Кроме того, Ж.И. Алфёров был создателем и ректором Санкт-Петербургского национального исследовательского академического университета Российской академии наук, а также основателем лицея «Физико-техническая школа» при этом университете.

Жорес Иванович Алфёров был поистине подвижником российского физического образования, и все его инициативы и свершения трудно переоценить. В 2002 году Ж.И. Алфёров возглавил в качестве председателя Научно-методический совет (НМС) по физике при Министерстве образования и науки, который был создан на базе Политехнического университета. За более чем десятилетний период активной работы НМС по физике Ж.И. Алфёрову удалось объединить ведущие вузы страны с целью сохранения и развития в России фундаментального физического образования как в средней, так и в высшей школе.

Наш журнал считает своим долгом отметить, что кончина академика Ж.И. Алфёрова — невосполнимая утрата и для нашего издания, поскольку с 2008 года он являлся членом, а с 2014 года — председателем Редакционного совета.

Заслуги академика Ж.И. Алфёрова перед российской и мировой наукой отмечены многочисленными премиями и наградами. Среди них главная международная награда — это Нобелевская премия по физике 2000 года «За основополагающие работы в области информационных и коммуникацион-

ных технологий» и, в частности, «За развитие полупроводниковых гетероструктур для высокоскоростной и оптоэлектроники».

Редакционный совет и редакционная коллегия журнала «Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки» глубоко скорбят по поводу кончины лауреата Нобелевской премии, академика Жореса Ивановича Алфёрова и выражают искренние соболезнования родным и близким этого замечательного Ученого, Педагога и общественного деятеля.

Содержание

Физика конденсированного состояния

Родный П.А., Гарибин Е.А., Веневцев И.Д., Давыдов Ю.И. Проблемы и перспективы применения люминесценции фторида бария	11
Политова Г.А., Карпенков А.Ю., Каминская Т.П., Ганин М.А., Кумар Р., Филимонов А.В. Структура и фазовые превращения высокомагнотриксционного сплава системы самарий-железо со структурой фаз Лавеса.....	28

Математическое моделирование физических процессов

Зайцев Д.К., Смирнов Е.М. Метод расчета турбулентного числа Прандтля для SST-модели турбулентности.....	39
Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Колебания полуограниченной струны, иницированные граничным режимом	50

Приборы и техника физического эксперимента

Онегин М.С., Лямкин В.А., Серебров А.П. Расчет биологической защиты суперисточника ультрахолодных нейтронов для реактора ВВР -М.....	61
Серебров А.П., Лямкин В.А., Коптюхов А.О., Онегин М.С., Прудников Д.В., Самодуров О.Ю. Теплогидравлический расчет низкотемпературной части источника ультрахолодных нейтронов для реактора ВВР-М	73
Савин В.Н., Степанов В.А., Шадрин М.В. Технология измерения геометрических параметров микроинструмента на основе модели зрения человека	87

Физическая электроника

Соловьев К.В., Виноградова М.В. Двухэлектродная реализация электростатической ионной ловушки, интегрируемой в полярных координатах	96
--	----

Физическое материаловедение

Капустин В.В., Пашкевич Д.С., Мухортов Д.А., Петров В.Б., Алексеев Ю.И. Конверсия водяного пара при взаимодействии испаренного раствора фторида водорода с углеродом в режиме фильтрационного горения.....	105
--	-----

Физика атмосферы

Чупин В.А., Долгих Г.И., Гусев Е.С. <i>Регистрация инфразвуковых возмущений тайфунов лазерными деформографами</i>	117
---	-----

Математика

Киселев К.В., Фролов М.Е., Чистякова О.И. <i>Вычислительный эксперимент и верификация реализаций апостериорной оценки для пластин Рейсснера – Миндлина</i>	128
--	-----

Механика

Федотов А.В. <i>Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов</i>	142
Полянский С.В., Беляев А.К. <i>Квазистатический подход к решению задачи термоупругости вращающихся тел</i>	156
Авторский указатель.....	167

Contents

Condensed matter physics

- Rodnyi P.A., Garibin E.A., Venevtsev I.D., Davydov Yu.I.** *The application of barium fluoride luminescence: challenges and prospects* 11
- Politova G.A., Karpenkov A.Yu., Kaminskaya T.P., Ganin M.A., Kumar R., Filimonov A.V.** *High-magnetostriction Laves-phase alloy of the samarium-iron system: the structure and phase transformations* 28

Simulation of physical processes

- Zaitsev D.K., Smirnov E.M.** *Method of calculation of turbulent Prandtl number for the SST turbulence model* 39
- Anikonov D.S., Konovalova D.S.** *Semi-bounded string's vibrations initiated by the boundary regime* 50

Experimental technique and devices

- Onegin M.S., Lyamkin V.A., Serebrov A.P.** *The ultracold neutron supersource at the WWR-M reactor: a biological shielding design* 61
- Serebrov A.P., Lyamkin V.A., Koptukhov A.O., Onegin M.S., Prudnikov D.V., Samodurov O.Yu.** *The low-temperature sub-system of the ultracold neutron supersource at the WWR-M reactor: a heat-hydraulic design study* 73
- Savin V.N., Stepanov V.A., Shadrin M.V.** *Human visual model-based technology: measuring the geometric parameters of microinstrument* 87

Physical electronics

- Solovyev K.V., Vinogradova M.V.** *Two-electrode design for electrostatic ion trap integrable in polar coordinates* 96

Physical materials technology

- Kapustin V.V., Pashkevich D.S., Mukhortov D.A., Petrov V.B., Alexeev Yu.I.** *The water vapor conversion during the interaction between an evaporated hydrogen fluoride solution and carbon in the filtration combustion mode* 105

Atmosphere physics

Chupin V.A., Dolgikh G.I., Gusev E.S. <i>Recording typhoons' infrasonic disturbances by laser strain-meters</i>	117
--	-----

Mathematics

Kiselev K.V., Frolov M.E., Chistiakova O.I. <i>A posteriori error estimate for Reissner – Mindlin plates: verification of implementations and numerical testing</i>	128
--	-----

Mechanics

Fedotov A.V. <i>The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation</i>	142
---	-----

Polyanskiy S.V., Belyaev A.K. <i>A quasistatic approach to the thermoelasticity problem of rotating bodies</i>	156
---	-----

<i>Author index</i>	167
---------------------------	-----

DOI: 10.18721/JPM.12101

УДК 535.37

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ФТОРИДА БАРИЯ

П.А. Родный¹, Е.А. Гарибин², И.Д. Веневцев¹, Ю.И. Давыдов³

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² ЗАО «ИНКРОМ», Санкт-Петербург, Российская Федерация;

³ Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Российская Федерация

Рассмотрена проблема получения кристаллов BaF_2 с преобладающим субнаносекундным компонентом рентгенолюминесценции. Проведен подробный анализ методов подавления медленного компонента указанной люминесценции данного соединения. Показано, что введение ряда примесей приводит к подавлению медленного компонента, однако, как правило, интенсивность субнаносекундного компонента также снижается, при этом ухудшаются прозрачность и радиационная стойкость кристалла. Приведены результаты измерения спектрально-кинетических характеристик кристаллов $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ и $\text{BaF}_2:\text{Sc}$. Показано, что проблему можно решить путем использования нелегированного кристалла BaF_2 в сочетании с фильтром, подавляющим медленный компонент люминесценции.

Ключевые слова: фторид бария, остоно-валентная люминесценция, сверхбыстрый сцинтиллятор, оптический фильтр

Ссылка при цитировании: Родный П.А., Гарибин Е.А., Веневцев И.Д., Давыдов Ю.И. Проблемы и перспективы применения люминесценции фторида бария // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 11–27. DOI: 10.18721/JPM.12101

THE APPLICATION OF BARIUM FLUORIDE LUMINESCENCE: CHALLENGES AND PROSPECTS

P.A. Rodnyi¹, E.A. Garibin², I.D. Venevtsev¹, Yu.I. Davydov³

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

² CJS "INCROM", St. Petersburg, Russian Federation;

³ Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation

The problem of obtaining BaF_2 crystals with a predominant sub-nanosecond luminescence component has been considered. A detailed analysis of methods for suppressing the slow component of the crystal luminescence was carried out. It was shown that the introduction of a number of dopants led to the suppression of the slow component, but, as a rule, the intensity of the sub-nanosecond component decreased, and the transparency and radiation hardness of the crystal also deteriorated. The results of spectral and kinetic measurements of $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ and $\text{BaF}_2:\text{Sc}$ luminescence were presented. It was shown that the solution of the problem could be achieved by using an undoped BaF_2 crystal in combination with a filter suppressing the slow luminescence component.

Keywords: barium fluoride, core-valence luminescence, ultrafast scintillators, optical filters

Citation: P.A. Rodnyi, E.A. Garibin, I.D. Venevtsev, Yu.I. Davydov, The application of

Введение

Фторид бария BaF_2 является предметом обширных исследований в течение нескольких десятилетий, с момента обнаружения в нем в начале восьмидесятых годов прошлого столетия субнаносекундной (0,7 – 0,8 нс) люминесценции, лежащей на границе ультрафиолетовой (УФ) и вакуумной ультрафиолетовой (ВУФ) областей спектра [1,2]. Позднее было показано, что за эту люминесценцию ответственны излучательные электронные переходы между верхней остоной ($5p$, Ba) и валентной ($2p$, F) зонами кристалла [3]. Явление получило название остоно-валентная люминесценция (ОВЛ) [4], или кросс-люминесценция [5]. Малое время спада ОВЛ позволило использовать BaF_2 как быстрый сцинтиллятор и сделало его перспективным для применения в системах медицинской диагностики, ядерно-физических и астрофизических экспериментах. Известной проблемой применения фторида бария является наличие, кроме ОВЛ, широкой полосы люминесценции с максимумом 310 нм. Это излучение, за которое ответственны автолокализованные экситоны (АЛЭ), обладает временем спада $\tau = 630$ нс. Подавлению этого длительного (и часто нежелательного) компонента люминесценции посвящены многочисленные исследования [6 – 9]; этот вопрос будет также рассмотрен в настоящей работе.

Другая проблема связана со спектральным положением полос ОВЛ: два максимума излучения расположены на длинах волн 220 и 196 нм (УФ- и ВУФ-диапазоны). Число фотоприемников в этой области спектра весьма ограничено; для этой цели долгое время использовались солнечно-слепые фотоэлектронные умножители с теллури-цезиевым фотокатодом, что позволяло снизить выходной сигнал от медленной компоненты в 9 раз, однако сигнал от быстрого компонента также уменьшался в 1,84 раза [7].

В настоящее время разработаны солнечно-слепые фотодиоды с временем срабатывания 15 пс и с квантовой эффективностью около 12 % [10]. Недавно для лавинного фотодетектора (ЛФД, *англ.* APD – avalanche photodiode) получена квантовая эффективность 17 % вблизи 220 нм [11].

В последнее время наблюдается возобновление интереса к исследованию характеристик фторида бария, поскольку он рассматривается как рабочий материал нового калориметра, предназначенного для изучения процесса преобразования мюонов в электроны (эксперимент Mu2e, Фермилаб [11, 12]). Предпринимаются шаги по улучшению люминесцентных характеристик фторида бария путем введения примесей, изменения условий роста и отжига кристаллов, использования материала в форме наночастиц, композитов и керамик.

В настоящей работе проведено обобщение и анализ наиболее важных результатов по улучшению люминесцентных и сцинтилляционных характеристик фторида бария и приведены экспериментальные данные для кристаллов $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ и $\text{BaF}_2:\text{Sc}$.

Выбор образцов $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ обусловлен тем, что тулий (Tm) – это одна из лучших примесей среди редкоземельных ионов для подавления медленного компонента люминесценции [5, 6]. Что касается второй примеси, то среди ионов с заполненной внешней оболочкой, в качестве «подавляющей» примеси наименее изучен скандий (Sc).

Подавление медленного компонента люминесценции фторида бария путем введения примесей

Ионы с заполненной внешней оболочкой.

Большое число исследований посвящено «подавлению» нежелательного для быстрых сцинтилляторов медленного компонента люминесценции (полоса 310 нм). Лучшими примесями для этой цели считаются ионы с заполненной внешней электронной оболочкой: La^{3+} , Y^{3+} , Lu^{3+} , Sc^{3+} , Cd^{2+} , поскольку они не дают дополнительных полос излучения. Первые эксперименты показали, что значительное подавление медленной люминесценции всегда сопровождается небольшим снижением ОВЛ [5, 6]. Например, в соединении $\text{BaF}_2:\text{La}(0,2\%)$ медленный компонент уменьшается в 1,72 раза, быстрый – в 1,09 раза [13], а в соединении $\text{BaF}_2:\text{La}(0,5\%)$ – соответственно в 3,6 и 1,6 раза. По данным работы [8], подавление медленного компонента в кристаллическом $\text{BaF}_2:\text{La}$ начинается при содержании лантана свыше 1% (рис. 1). Концентрационная

зависимость интенсивности медленного компонента рентгенолюминесценции (РЛ) в $\text{BaF}_2:\text{Y}$ сходна с таковой для $\text{BaF}_2:\text{La}$. (рис. 1). Недавно был получен кристалл $\text{BaF}_2:\text{Y}$ (1 ат.%), в котором медленный компонент подавлен в 6 раз, а интенсивность ОВЛ такая же, как в чистом BaF_2 [14].

Введение кадмия существенно подавляет медленный компонент РЛ $\text{BaF}_2:\text{Cd}$ (кривая 3 на рис. 1). При содержании кадмия 0,35 мол.% интенсивность указанного компонента составляет менее 10% от таковой для нелегированного кристалла, при этом интенсивность быстрого практически не изменяется. К сожалению, рентгеновское облучение $\text{BaF}_2:\text{Cd}$ приводит к образованию в кристалле ионов Cd^+ , которые порождают полосы поглощения в видимой и УФ-областях спектра [8].

Наличие лутеция (Lu) в BaF_2 снижает интенсивность медленного компонента в 4 раза, однако быстрый также заметно уменьшается [15]. Помимо этого, отмечено ухудшение радиационной стойкости такого кристалла при введении лутеция. По данным работы [6], время спада ОВЛ $\text{BaF}_2:\text{Lu}$ (1,0 мол.%) составляет 0,4 нс; сле-

довательно, небольшой «проигрыш» в интенсивности ОВЛ компенсируется почти двукратным уменьшением постоянной спада люминесценции.

Спектрально-кинетические характеристики кристаллов BaF_2 с содержанием скандия 0,5, 1,0 и 2,0 мол.% были изучены в работе [16], где интенсивность медленного компонента для соединения $\text{BaF}_2:\text{Sc}$ (1,0%) уменьшалась в 2,4 раза.

Поскольку кристалл RbF обладает ОВЛ [4], возникла идея увеличения интенсивности быстрого компонента путем введения фторида рубидия RbF во фторид бария. Эксперимент с кристаллом $\text{BaF}_2:\text{Rb}$ выявил отсутствие ОВЛ и небольшое уменьшение медленного компонента РЛ [17].

Редкоземельные ионы. Большое число исследований посвящено подавлению не желательного для быстрых сцинтилляторов медленной компоненты люминесценции (полоса 310 нм). С этой целью в кристаллы фторида бария вводились примеси трехвалентных редкоземельных (RE^{3+}) ионов. Было установлено, что любая редкоземельная примесь уменьшает интенсивность медленного компонента сцинтилляции

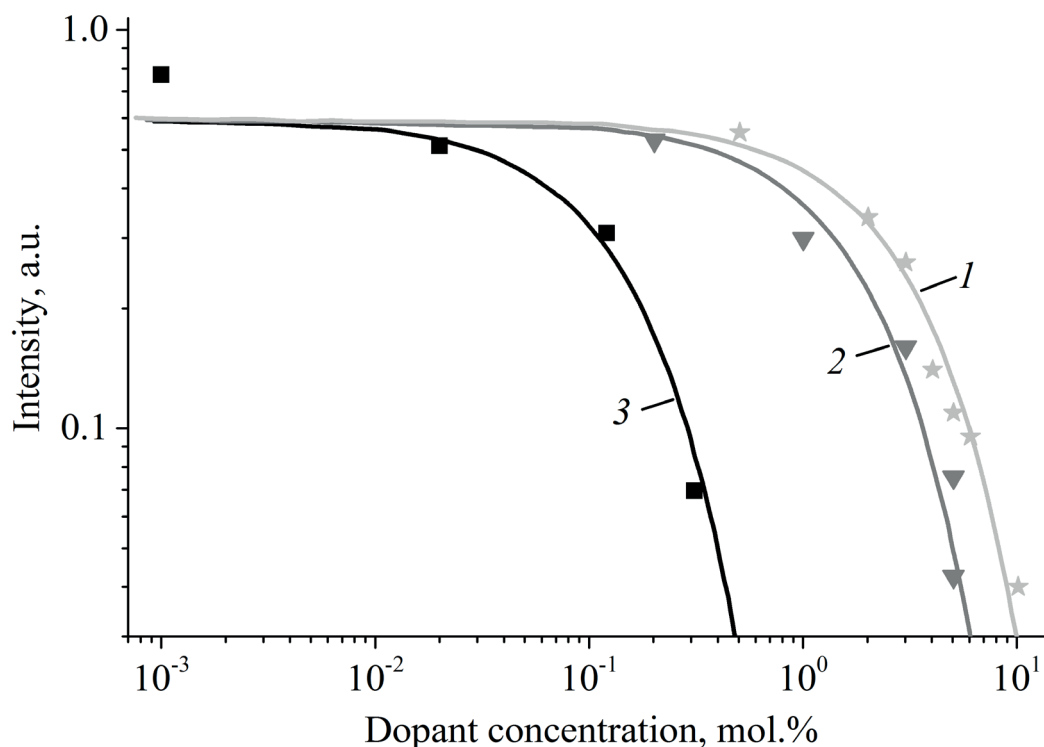


Рис. 1. Концентрационные зависимости интенсивностей медленного компонента рентгенолюминесценции (РЛ) кристаллов $\text{BaF}_2:\text{La}$ (1), $\text{BaF}_2:\text{Y}$ (2) и $\text{BaF}_2:\text{Cd}$ (3) (по данным [8])

[5, 6]. Долгое время считалось, что причиной подавления медленного компонента сцинтилляций ионами RE^{3+} является присутствие межузельных ионов фтора F^- , которые служат зарядовыми компенсаторами трехвалентной примеси. Предполагалось, что поскольку указанные межузельные ионы создают энергетические уровни вблизи потолка валентной зоны кристалла (в запрещенной зоне), они могут захватывать дырки из валентной зоны [8]. Этот захват является конкурирующим процессом между образованием V_k -центров и автолокализованных экситонов, или $(V_k e^-)^*$ -центров, в результате которого интенсивность люминесценции АЛЭ снижается. Несмотря на привлекательность этой модели, она не объясняет подавления медленного компонента в кристаллах BaF_2 , допированных двухвалентными ионами Cd^{2+} , Mg^{2+} и Sr^{2+} [18]. Сравнивая зависимости интенсивностей РЛ в кристаллах $\text{BaF}_2:\text{La}$ и $\text{BaF}_2:\text{K}$, авторы работы [8] пришли к заключению, что межузельные ионы F^- только частично ответственны за эффект подавления. Было показано также, что основной вклад в этот эффект вносит диффузия экситонов к центрам, на которых происходит их безызлучательная аннигиляция [8].

Подавление медленного компонента люминесценции фторида бария термическим тушением

Для устранения медленного компонента можно использовать особое свойство ОВЛ — высокая температурная стабильность ее интенсивности (проверено до 500°C [18]). При этом медленный компонент испытывает существенное уменьшение интенсивности и времени спада РЛ при повышении температуры, начиная от комнатной. Если, например, выбрать рабочую температуру устройства 120°C , то интенсивность медленного компонента будет ниже, чем интенсивность быстрого, а время спада люминесценции АЛЭ составит примерно 40 нс. Такой режим работы сцинтиллятора можно осуществить в отдельном физическом эксперименте, однако он вряд ли подходит для технических устройств. В эксперименте [19] показано, что при 220°C медленный компонент РЛ фторида бария полностью подавлен, а световой выход субнаносекундного компонента составляет 1000 фотонов/МэВ.

Преобразование экситонного излучения в быстрое активаторное свечение

Основная идея этих экспериментов — не подавлять люминесценцию автолокализованных экситонов, а преобразовывать ее в быстрое активаторное свечение. Известно, что наиболее эффективными разрешенными (то есть быстрыми) электронными переходами $5d \rightarrow 4f$ обладают элементы начала ряда лантаноидов: Ce, Pr, Nd. Более тяжелые редкоземельные элементы, как правило, обладают медленной УФ-люминесценцией, за которую ответственны HS(high-spin)-переходы $5d \rightarrow 4f$, запрещенные по спиновому правилу отбора. Кроме того, наличие большого количества $4f$ -уровней в некоторых ионах (Nd, Eu, Tb, Dy) приводит к медленной (нежелательной) люминесценции, обусловленной запрещенными переходами $4f \rightarrow 4f$. Следовательно, наиболее перспективными активаторами фторида бария представляются легкие редкоземельные ионы Ce^{3+} , Pr^{3+} , Nd^{3+} , а также ионы с относительно малым количеством $4f$ -уровней: Gd^{3+} и Tm^{3+} .

Соединение $\text{BaF}_2:\text{Ce}$. Церий служит активатором во многих современных люминофорах и сцинтилляторах, поэтому предполагалось, что введение ионов Ce^{3+} во фторид бария позволит увеличить световой выход кристалла и получить время спада сцинтилляций в несколько десятков наносекунд. Ранние эксперименты показали, что при оптимальной концентрации (около 0,2 мол.%) ионов Ce^{3+} (оптимальна концентрация, при которой максимальна интенсивность люминесценции), световой выход $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ оказался несколько ниже такового у чистого BaF_2 [20, 21]. Было высказано предположение, что если содержание ионов Ce^{3+} в кристалле превышает 0,2 мол.%, то происходит образование цериевых агрегатов [21] либо $(\text{Ce}^{3+}-\text{O}^{2-})$ -центров [21]. В более позднем исследовании [22] было получено небольшое увеличение светового выхода кристалла $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ и показано, что в рекомбинационном процессе принимают участие автолокализованные дырки в виде V_k - и H -центров.

Последующие исследования позволили увеличить световой выход $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ в 2,5 раза, по сравнению с чистым фторидом бария, однако кинетические характеристики РЛ не удалось существенно улучшить [23]. Кристалл $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ демонстрирует необычные свойства: спектр РЛ соответствует излучению ионов Ce^{3+} (полосы 308 и 322 нм),



а кинетика — излучению автолокализованных экситонов (основная постоянная спада — 250 нс). При непосредственном УФ-возбуждении ионов Ce^{3+} , в кристалле BaF_2 регистрируется постоянная спада люминесценции, равная 31 нс [22]). Эта особенность соединения $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ обусловлена наложением полосы поглощения ионов Ce^{3+} на полосу излучения автолокализованных экситонов в области 280 — 300 нм, что приводит к переносу энергии от экситонов к ионам церия ($\text{АЛЭ} \rightarrow \text{Ce}^{3+}$).

Введение в соединение $\text{BaF}_2:\text{Ce}$ примеси лютеция приводит к уменьшению интенсивности двух основных полос излучения Ce^{3+} и к появлению новой широкой полосы РЛ с максимумом при 355 нм [15]. Предполагается, что полоса РЛ на длине волны 355 нм в $\text{BaF}_2:\text{Ce}, \text{Lu}$ связана с межузельными ионами фтора.

Соединение $\text{BaF}_2:\text{Pr}$. Трехвалентный празеодим обладает в различных кристаллах меньшим временем спада (переходы $5d \rightarrow 4f$) и немного меньшей интенсивностью РЛ, по сравнению с таковыми для примеси Ce^{3+} . Кристалл $\text{BaF}_2:\text{Pr}^{3+}$ имеет основную постоянную спада 28 нс, а при содержании Pr^{3+} свыше 1% появляется более быстрый компонент длительностью 7 — 8 нс [24]. Однако полоса излучения $5d \rightarrow 4f$ перекрывается с полосой осовно-валентной люминесценции, и в результате происходит перенос энергии от переходов ОВЛ к ионам Pr^{3+} (ОВЛ не регистрируется). Другой недостаток кристаллов, содержащих ионы Pr^{3+} , — это наличие переходов $f \rightarrow f$, обладающих медленным излучением.

Соединение $\text{BaF}_2:\text{Nd}$. Первые эксперименты показали очень слабую (ниже уровня ОВЛ) ($5d \rightarrow 4f$)-люминесценцию Nd^{3+} в BaF_2 (немного выше интенсивности РЛ в $\text{BaY}_2\text{F}_8:\text{Nd}$) [25]. В дальнейшем на кристаллах более высокого качества было показано, что образцы $\text{BaF}_2:\text{Nd}$ (1%) излучают в УФ-области спектра (175 — 200 нм), с основной постоянной спада в 12 нс [26]. Световыход кристалла оказался всего на 7 % ниже такового для BaF_2 . Добавка лантана улучшает характеристики: кристалл $(\text{La}_{0,9}\text{Ba}_{0,1})\text{F}_{2,9}:\text{Nd}$ обладает узкой (12 нм) полосой люминесценции с максимумом при 175 нм и коротким временем спада $\tau = 6,1$ нс [27].

Соединение $\text{BaF}_2:\text{Tm}$. Интерконфигурационные переходы $5d \rightarrow 4f$ ионов Tm^{3+} в BaF_2 проявляются в виде полосы люминес-

ценции с максимумом 178 нм и временем спада 5 — 6 нс [28]. Интенсивность этой люминесценции ниже, чем интенсивность ОВЛ. При увеличении концентрации Tm^{3+} от 0,1 до 10% интенсивность полосы АЛЭ существенно снижается (как и для других редкоземельных ионов), но выход субнаносекундного компонента при концентрации тулия $C_{\text{Tm}} > 0,1\%$ также уменьшается.

В работе [29] исследована ($5d \rightarrow 4f$)-люминесценция ионов Nd^{3+} , Sm^{3+} , Ho^{3+} , Er^{3+} , Tm^{3+} во фториде бария и других щелочно-земельных фторидах. Показано, что во фторидах экситонный механизм переноса энергии к $5d$ -состояниям этих ионов неэффективен.

Подавление медленного компонента люминесценции фторида бария двойным легированием

Соединение $\text{BaF}_2:\text{Gd}, \text{Ce}$. Идея введения 10% Gd^{3+} во фторид бария с добавлением соактиватора Ce^{3+} была выдвинута в статье [30] для того, чтобы не только подавить медленный компонент излучения, но и улучшить другие характеристики материала. Выращенный кристалл $\text{Ba}_{0,9}\text{Gd}_{0,1}\text{F}_{2,1}$ имел большую плотность, равную $5,11$ г/см³ (4,89 г/см³ для нелегированного BaF_2), и более высокую механическую прочность — 240 кг/мм² (80 кг/мм² для BaF_2). При введении в соединение ионов Ce^{3+} , максимум полосы люминесценции автолокализованных экситонов смещался в длинноволновую область до значения 350 нм. Кристалл $\text{Ba}_{0,9}\text{Gd}_{0,1}\text{F}_{2,1}:\text{Ce}(0,1 \text{ мол.}\%)$ обладал световыходом в 46 % по отношению к чистому фториду бария и постоянной спада люминесценции 30 — 40 нс. Отметим, что характерная для иона Ce^{3+} постоянная спада проявляется в спектре за счет смещения полосы люминесценции в длинноволновую область. Медленный же компонент РЛ в кристалле был практически полностью подавлен. Оптимальная (до начала тушения) концентрация ионов Ce^{3+} в кристалле $\text{Ba}_{0,9}\text{Gd}_{0,1}\text{F}_{2,1}$ составляет 0,2 — 0,3 мол.% [30]. К сожалению, радиационная стойкость кристалла $\text{Ba}_{0,9}\text{Gd}_{0,1}\text{F}_{2,1}:\text{Ce}(0,1 \text{ мол.}\%)$ ниже, чем таковая для чистого фторида бария.

Соединение $\text{BaF}_2:\text{La}, \text{Er}$. Как отмечалось выше, ионы второй половины ряда лантаноидов обладают медленным ($5d \rightarrow 4f$)-излучением, которое осуществляется из HS $5d$ -состояния. В частности, в кристалле $\text{BaF}_2:\text{Er}^{3+}$ доминирует медленное излучение

переходов $5d(\text{HS}) \rightarrow 4f$, которое имеет высокую интенсивность из-за наличия энергетического уровня $^2F_{5/2}$ между $5d$ -состояниями LS (low-spin) и HS (high-spin). Этот уровень способствует безызлучательному переносу энергии к компоненте люминесценции $5d(\text{HS}) \rightarrow 4f$, запрещенной по спиновому правилу отбора. Путем введения 30% LaF_3 во фторид бария (кристалл $\text{BaLaF}_2:\text{Er}^{3+}$) было получено красное смещение $5d$ -полос возбуждения Er^{3+} , и уровень $^2F_{5/2}$ оказался расположенным энергетически выше уровней $5d$ (LS) и $5d$ (HS) [31]. В результате в кристалле, полученном авторами, преобладали переходы $5d(\text{LS}) \rightarrow 4f$, разрешенные по правилам отбора и дающие две полосы излучения в областях 140 – 150 и 152 – 160 нм со временем спада люминесценции 35 нс [31].

Соединение $\text{BaF}_2:\text{La}, \text{Ce}$. Поскольку лантан обычно служит «подавителем» медленного компонента РЛ, а церий – лучшим активатором, то представляло интерес ввести во фторид бария эти ионы совместно. Эксперимент, проведенный в работе [32], показал, что постоянная времени спада в соединении $\text{BaF}_2:\text{La}, \text{Ce}$ составляет 76 нс, медленный компонент существенно подавлен, а световыход ниже чем в чистом фториде бария.

Радиационная стойкость допированных кристаллов фторида бария

Кристаллы, предназначенные для работы в коллайдерах, должны обладать высокой радиационной стойкостью [5], и этому требованию вполне удовлетворяют кристаллы фторида бария высокой степени чистоты [33, 34]. Под действием радиации в кристалле образуются F -центры, дающие широкую полосу оптического поглощения с максимумом при 570 нм. Это поглощение не сказывается на положении и интенсивности полос остоно-валентной люминесценции. Введение примесей (RE^{3+} , Me^{2+} и др.), как правило, снижает радиационную стойкость фторида бария [34]. Кристаллы, допированные La^{3+} , приобретают красную окраску после облучения рентгеновскими лучами, что обусловлено образованием межузельных ионов фтора. Для повышения радиационной стойкости $\text{BaF}_2:\text{La}$ (уменьшения числа межузельных ионов фтора) в кристалл вводят одновалентный металл в той же концентрации, что и концентрация

ионов лантана. Показано, например, что кристалл $\text{BaF}_2:\text{La}(0,3\%)\text{K}(0,3\%)$ обладает более высокой радиационной стойкостью, однако он обладает меньшим подавляющим действием, чем кристалл, не содержащий калия, – $\text{BaF}_2:\text{La}(0,3\%)$ [8]. Кристаллы, содержащие щелочные металлы, после рентгеновского облучения окрашиваются в голубой цвет, что исследователи связывают с образованием F -агрегатов, образующихся ввиду наличия вакансий фтора [8].

В облученном кристалле $\text{BaF}_2:\text{La}$ уровень оптического поглощения вблизи 500 нм выше, чем в чистом фториде бария, однако в УФ-области спектра интенсивность этого поглощения для этих кристаллов становится сравнимой [13]. Радиационная стойкость кристалла BaF_2 (полосы поглощения в области 200 – 800 нм) ухудшается при введении Tm, Nd, Gd, Eu. Следует отметить, что наиболее опасная остаточная примесь, которая подавляет ОВЛ, – это свинец, максимум полосы поглощения которого расположен на длине волны 205 нм [13].

Другие способы снижения интенсивности медленного компонента люминесценции

Применение наночастиц. Известно, что наночастицы имеют высокое отношение поверхность/объем и поэтому обладают свойствами, отличными от таковых для соответствующих монокристаллов [35, 36]. При уменьшении размеров наночастиц возможно увеличение интенсивности люминесценции и уменьшение времени ее спада. Эти эффекты хорошо изучены для экситонов в полупроводниковых наночастицах. Исследование же широкозонных диэлектрических материалов, в которых реализуются экситоны малого радиуса, находится лишь в начальной стадии. Еще одним преимуществом наночастиц над обычными частицами является возможность введения более высоких концентраций активатора для увеличения интенсивности люминесценции.

Особенности люминесценции наночастиц фторида бария размером от 20 до 100 нм изучены в работе [35]. Интенсивность полосы ОВЛ при уменьшении размеров наночастиц от 80 до 30 нм практически не отличается от интенсивности ОВЛ для монокристаллического образца BaF_2 , и только для образцов размером 20 нм она падает в 1,5 раза. Интенсивность лю-



минесценции автолокализованных экситонов падает на порядок при переходе от монокристалла к наночастицам размером 20 нм. Размеры исследуемых наночастиц (20 – 100 нм) существенно превышают длину диффузии остоной дырки (около 1,5 нм), что и объясняет относительную стабильность интенсивности ОВЛ. Интенсивность люминесценции АЛЭ уменьшается, начиная с размеров наночастиц 80 нм. Критический размер наночастиц фторида бария, для которых наблюдается резкий спад интенсивности люминесценции АЛЭ, составляет около 50 нм. Этот размер соизмерим с длиной термализации фотоэлектронов (30 – 100 нм) во фторидах [35].

Наночастицы $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ были получены и исследованы в ряде работ [37, 38]. В работе [37] полученные наночастицы $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ размером 18 ± 3 нм обладали цериевой полосой люминесценции с максимумом при 370 нм; при этом отсутствовали остоно-валентная и экситонная полосы люминесценции. В работе [38] исследованы люминесцентные характеристики наночастиц $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ размером от 1 до 30 нм. Образцы обладали широкой полосой люминесценции с максимумом при 355 нм. Максимальная интенсивность люминесценции достигалась при содержании церия примерно 15 %. Большую, по сравнению с монокристаллами, оптимальную концентрацию ионов Ce^{3+} в нанопорошках авторы объясняют уменьшением числа дефектов (ловушек) с уменьшением размера наночастиц.

Использование композитов. Наночастицы, обладающие хорошими сцинтилляционными свойствами, трудно использовать в качестве радиационных детекторов. Для создания объемных сцинтилляторов используют композиты, состоящие из тяжелых неорганических микро- и наночастиц и сверхбыстрых органических люминофоров. В композитном сцинтилляторе неорганические («тяжелые») частицы эффективно поглощают ионизирующее излучение, при этом часть поглощенной энергии передается контактирующим с частицами органическим молекулам, в которых затем индуцируются наносекундные сцинтилляционные вспышки. В качестве органического связующего выбирают обычно полимер на основе полистирола, активированного сцинтилляторами РРО (2,5-дифенилоксазол) и РОРОР (1,4-бис(5-фенилоксазол-2-ил)бензол), который обладает быстрыми (ме-

нее 2 нс) сцинтилляциями.

Фторид бария имеет низкий показатель преломления $n = 1,478$ на длине волны 500 нм, что удобно для его сочетания с полимерной матрицей. В работе [38] были приготовлены нанокомпозиты $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ с использованием эпоксидных смол. Световых выход композита $\text{BaF}_2\text{:15%Ce}$ был приблизительно в 5 раз выше такового для кристалла $\text{BaF}_2\text{:Ce(2%)}$.

Оксид цинка известен как эффективный сцинтиллятор с субнаносекундным (подобно BaF_2) временем свечения. За его люминесценцию ответственны связанные экситоны [39]. В работе [40] удалось внедрить наночастицы оксида цинка (ZnO) размером 7,5 – 30 нм в пленки фторида бария. Использовался метод радиочастотного магнетронного напыления с последующим термическим отжигом образцов. Считается, что низкий показатель преломления фторида бария, по сравнению с оксидом цинка, у которого $n \approx 2,4$, способствует формированию оптических волноводов в кристалле. Показано, что интенсивность субнаносекундного компонента свечения ZnO в BaF_2 существенно возрастает при повышении температуры отжига от 400 до 800 °C [40].

Создание керамики. В последнее время предпринимаются попытки улучшения кинетических и других характеристик фторида бария путем создания керамики, в том числе нанокерамики [23, 41]. Следует отметить, что керамика обладает рядом преимуществ по сравнению с монокристаллами, в частности высокой механической и термической прочностью.

Оптическая керамика фторида бария была приготовлена методами горячего прессования и горячего формования на установке К-2718 (ЗАО «ИНКРОМ») [23, 41]. Максимальная прозрачность керамик в широком оптическом диапазоне достигалась путем варьирования двух основных параметров: температуры и степени деформации. Для повышения интенсивности быстрого компонента и уменьшения постоянной спада более медленного компонента осуществлялся отжиг керамик в атмосфере газообразного тетрафторида углерода CF_4 , в течение 24 ч при температуре порядка 1180 °C. В результате удалось получить керамику, прозрачность которой находится на уровне прозрачности соответствующего монокристалла в видимой области спектра и немного ниже таковой в коротковолновой области ($\lambda < 250$ нм).

Применение фильтров и других устройств. Субнаносекундное излучение фторида бария может быть выделено соответствующим УФ-фильтром, однако, как правило, фильтр снижает интенсивность излучения. Недавно был разработан специальный коротковолновый фильтр, который подавляет медленный компонент люминесценции фторида бария до 1% [42].

Для того чтобы сделать «быстрое» УФ-излучение фторида бария более приемлемым для фотоэлектронных умножителей, чувствительных в видимой области спектра, используют шифтеры — органические вещества, сдвигающие УФ-излучение в более длинноволновую область. В работе [43] были опробованы дефенилантрацен, перилен и другие шифтеры; их использование приводило к тому, что постоянная времени возрастала до 2,5 — 7 нс, а световыход снижался.

Поскольку время спада быстрого и медленного компонентов отличаются почти на 3 десятичных порядка, имеется возможность разделять эти компоненты на выходе фотоприемника с помощью электронных устройств. Схема такого устройства предложена в работе [44].

Методика эксперимента

Выращивание исследуемых кристаллов осуществлялись методом Степанова — Стокбаргера в ЗАО «ИНКРОМ». Полученные образцы были классифицированы как кристаллы марки ВУФ, т. е. как материалы, обладающие высокой прозрачностью в коротковолновой области спектра. Для спектральных измерений использовались полированные образцы монокристаллов, приготовленных в виде параллелепипедов размером $5 \times 10 \times 15$ мм. Спектры оптического пропускания образцов регистрировались по продольному размеру образца (15 мм) с помощью спектрофотометра ВМР-2. Спектры люминесценции получали при непрерывном рентгеновском возбуждении (40 кВ, 14 мА). Регистрирующая часть установки содержала монохроматор МДР-2 и систему счета фотонов Hamamatsu H8259-01. Измерение кривых термостимулированной люминесценции (ТСЛ) производилось на образцах толщиной 1 мм. Образцы предварительно облучались рентгеновским пучком при температуре 80 К, а затем нагревались со скоростью 0,3 К/мин.

Для измерения кинетики люминесцен-

ции использовался рентгеновский источник со следующими параметрами: 30 кВ, 500 мА, длительность импульсов — 1 нс и частота их следования — 12 кГц [45]. Регистрирующая часть аппарата собрана по стандартной схеме «старт-стоп»; временное разрешение системы — не хуже 50 пс. Измерения спектров и кинетики люминесценции проводились в геометрии «на отражение»: угол между направлением рентгеновского излучения и фотоприемником составлял 90° . Измерения выполнялись при комнатной температуре.

Результаты эксперимента и их обсуждение

Спектры рентгенолюминесценции (РЛ) кристаллов BaF_2 и $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ приведены на рис. 2. В спектрах проявляется интенсивная экситонная полоса с максимумом при 310 нм и полосы остова-валентной люминесценции (ОВЛ) с максимумами на длинах волн 196 и 220 нм; спектры не корректировались на чувствительность установки, поэтому интенсивность полос ОВЛ в действительности выше. За малоинтенсивные полосы с максимумами на 347, 360 и 450 нм (кривые 2 и 3, рис. 2) ответственны электронные переходы $f \rightarrow f$ в ионе тулия Tm^{3+} [28]. Видно, что при содержании тулия 0,5 % интенсивность экситонной полосы снижается в 6 раз, однако интенсивность ОВЛ также слегка убывает. Введение 2,0 % тулия приводит к снижению экситонной полосы в 7 раз, а ОВЛ уменьшается в 1,6 раза. Таким образом, достичь необходимого (более чем в 10 раз) подавления экситонной полосы без существенного уменьшения ОВЛ для кристалла $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ не удается.

На вставке рис. 2 приведены кривые спада РЛ, зарегистрированные на кристаллах BaF_2 и $\text{BaF}_2:\text{Tm}(0,5 \%)$. Видно, что интенсивность медленного компонента РЛ у допированного соединения слегка ниже, чем у чистого фторида бария. Постоянная времени спада медленного компонента для образца с примесью тулия заметно меньше и составляет около 400 нс (тогда как для чистого фторида бария она равна 630 нс). Как следует из спектров и кинетики РЛ, эффект подавления медленного компонента в $\text{BaF}_2:\text{Tm}$ начинается при содержании тулия 0,5 %.

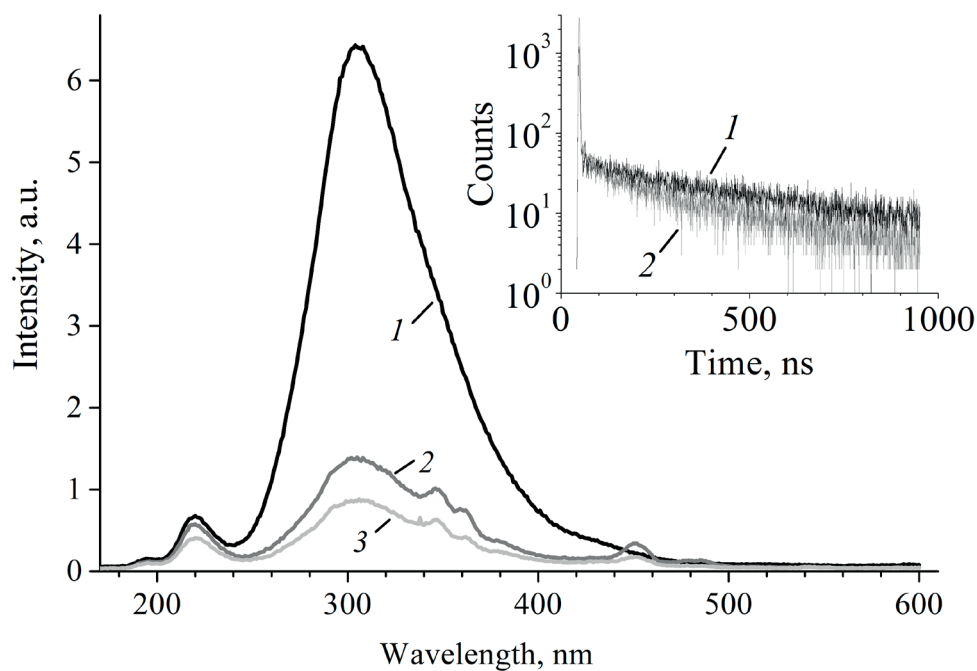


Рис. 2. Спектры и кинетика (на вставке) рентгенолюминесценции кристаллов BaF_2 (1), $\text{BaF}_2\text{:Tm}(0,5 \%)$ (2) и $\text{BaF}_2\text{:Tm}(2,0 \%)$ (3)

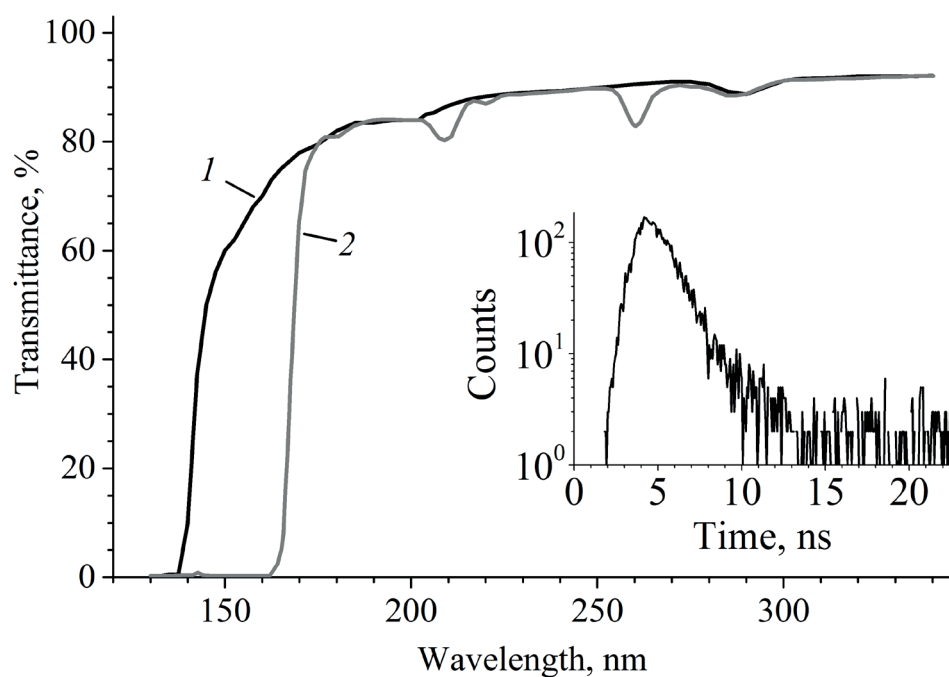


Рис. 3. Спектры оптического пропускания кристаллов BaF_2 (1), $\text{BaF}_2\text{:Tm}(0,5 \%)$ (2); толщина образцов — 5 мм.

На вставке: кинетика РЛ кристалла $\text{BaF}_2\text{:Tm}(0,5 \%)$, измеренная в малом временном окне

Спектры полного оптического пропускания кристаллов приведены на рис. 3. Спектр $\text{BaF}_2:\text{Tm}(0,5 \%)$ содержит минимум при 260 нм, за который ответствен электронный переход $^3H_6 \rightarrow ^5P_2$ в ионе Tm^{3+} , а также минимум неизвестного происхождения на длине волны 208 нм. Кристалл $\text{BaF}_2:\text{Tm}(0,5 \%)$ толщиной 5 мм обладает достаточно высокой (больше 80 %) прозрачностью в области ОВЛ (175 – 260 нм), однако она ниже, чем в чистом фториде бария (см. рис. 1). Следовательно, введение ионов Tm^{3+} во фторид бария BaF_2 ухудшает условия выхода быстрого излучения (ОВЛ) из кристалла, что особенно существенно для образцов большого размера. На вставке рис. 3 приведена в качестве примера кривая кинетики РЛ кристалла $\text{BaF}_2:\text{Tm}(0,5 \%)$, которая измерена в малом временном диапазоне. Время спада быстрого компонента составило $0,8 \pm 0,1$ нс.

Известно, что о радиационной стойкости материала можно судить по интенсивности пиков термостимулированной люминесценции (ТСЛ). На рис. 4 приведены кривые ТСЛ для кристаллов BaF_2 и $\text{BaF}_2:\text{Tm}(1,0 \%)$, измеренные после облучения кристаллов рентгеновскими (40 кВ) квантами в течение

двух минут. Видно, что неактивированный кристалл обладает интенсивным термопиком с максимумом при 114 К. Такие низкотемпературные пики характерны для кристаллов группы флюорита, они отображают процесс делокализации V_k -центров. В кристалле $\text{BaF}_2:\text{Tm}(1,0 \%)$ низкотемпературный пик расположен при 138 К, а в области от 200 до 300 К регистрируются термопики, за которые ответственны V_{KA} -центры и агрегаты из ионов Tm^{2+} и межузельных ионов фтора [46]. Кроме того, в $\text{BaF}_2:\text{Tm}(1,0 \%)$ регистрируется высокотемпературный пик при 453 К, за который ответственны глубокие ловушки. Эти ловушки могут участвовать в послесвечении, ухудшая сцинтилляционные свойства кристалла. Полученные данные показывают, что при введении во фторид бария ионов Tm^{3+} радиационная стойкость кристалла ухудшается; такой же вывод сделан в работе [5].

Введение ионов Sc^{3+} в кристалл BaF_2 приводит к существенному подавлению медленного компонента; соответствующие спектры РЛ имеют вид, подобный приведенному на рис. 2. На рис. 5 приведены спектры полного пропускания BaF_2 и $\text{BaF}_2:\text{Sc}(1,0 \%)$ кристаллов. Для $\text{BaF}_2:\text{Sc}(1,0 \%)$ характерно уменьшение пропускания вблизи 290 нм.

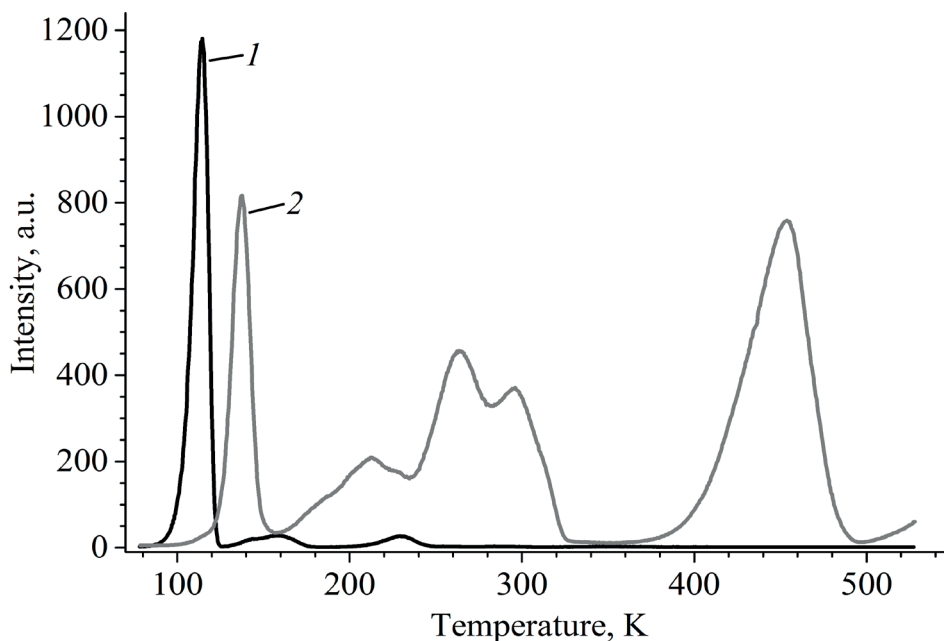


Рис. 4. Кривые термостимулированной люминесценции кристаллов BaF_2 (1), $\text{BaF}_2:\text{Tm}(2,0 \%)$ (2). Скорость нагрева образцов – 0,3 К/мин

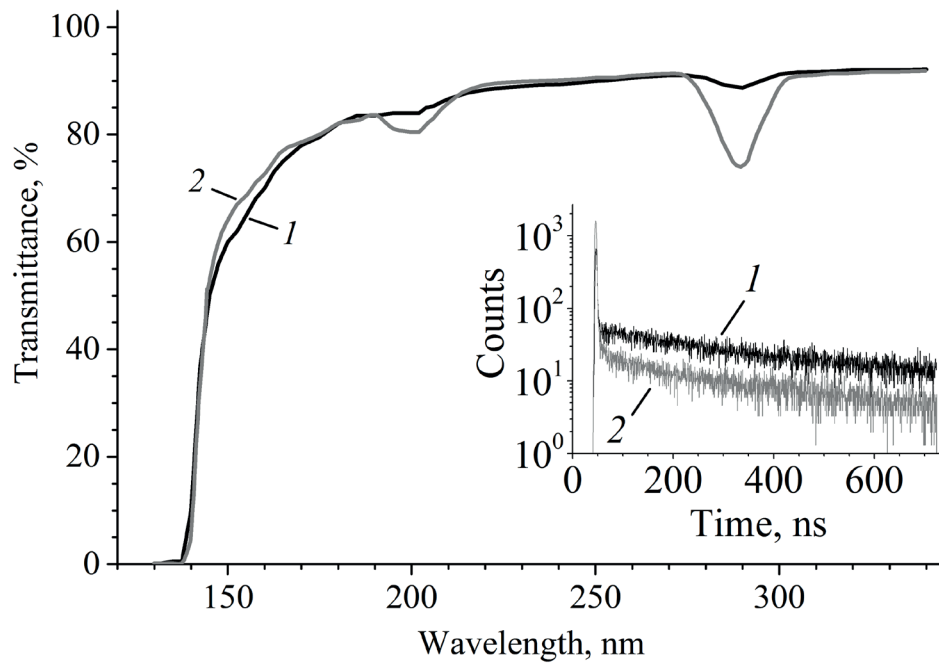


Рис. 5. Спектры оптического пропускания и кинетика РЛ (на вставке) кристаллов BaF_2 (1) и $\text{BaF}_2\text{:Sc}(1,0\%)$ (2); толщина образцов для регистрации спектров – 5 мм

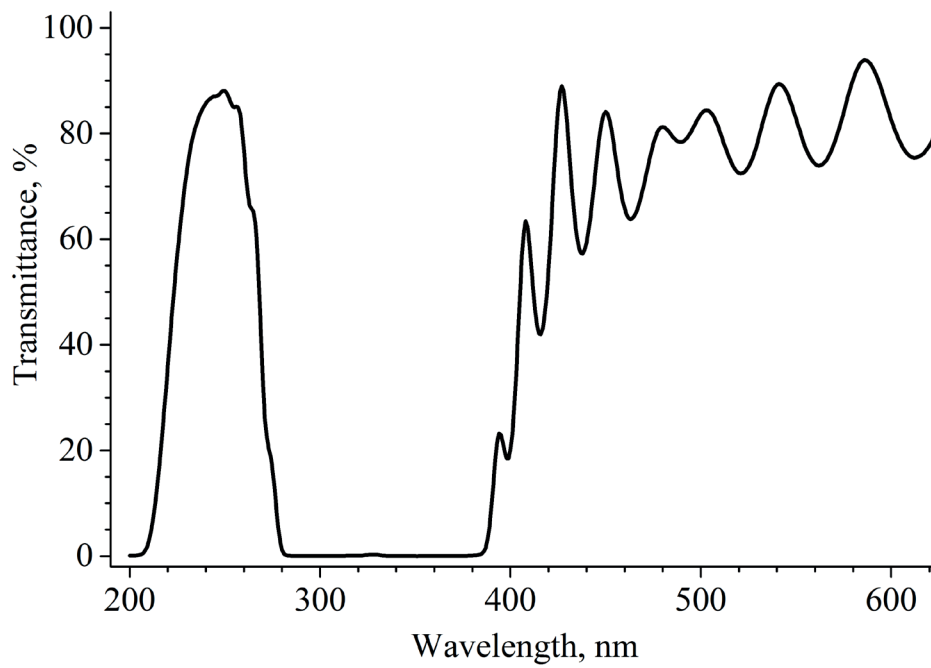


Рис. 6. Спектр оптического пропускания многослойного фильтра, нанесенного на кварцевое стекло

Полоса поглощения 290 нм регистрировалась нами также в кристалле $\text{BaF}_2\text{:Cd}$ (не показана). Интересно отметить, что эта полоса проявляется и при введении в BaF_2 ионов La^{3+} [5] и Y^{3+} [14]. Природа этой полосы остается неизвестной, можно лишь утверждать, что замена бария на ион с заполненной внешней оболочкой приводит к образованию в BaF_2 дефекта, дающего поглощение при 290 нм.

На вставке рис. 5 приведены кривые спада РЛ кристаллов BaF_2 и $\text{BaF}_2\text{:Sc}(1,0\ \%)$. Регистрировалось заметное снижение интегральной интенсивности медленного компонента РЛ в кристалле $\text{BaF}_2\text{:Sc}(1,0\ \%)$, по сравнению с чистым фторидом бария. Постоянная времени спада медленного компонента образца с примесью скандия меньше, чем в чистом BaF_2 , и составляет около 240 нс.

Другой способ подавления медленного компонента люминесценции — использование фильтра, прозрачного в спектральной области ОВЛ и непрозрачного в области экситонного излучения BaF_2 . На рис. 6 приведен спектр пропускания одного из вариантов такого фильтра, полученного методом послойного напыления редкоземельных окислов на кварцевую подложку. Видно, что прозрачность фильтра в области основного максимума ОВЛ (220 нм) составляет 50 %, а вблизи максимума экситонной люминесценции (310 нм) она близка к нулю.

Заключение

В результате проведенных экспериментов и анализа литературных данных мы пришли к заключению, что подавление медленного компонента рентгенолюминесценции фторида бария путем введения примеси следует признать недостаточно эффективным. Введение трехвалентных

ионов приводит к образованию дефектов, в частности межузельных ионов фтора. Для двухвалентных ионов характерно искажение кристаллической структуры. Основные недостатки подавления медленного компонента люминесценции методом введения примесей во фторид бария BaF_2 , следующие:

требуемое уменьшение интенсивности медленного компонента (более чем в 10 раз) сопровождается существенным уменьшением ОВЛ;

прозрачность кристалла, содержащего примеси, обычно ниже, чем у чистого аналога;

радиационная стойкость фторида бария, как правило, ухудшается при введении соответствующих примесей;

достаточно сложно обеспечить равномерное распределение примесей для кристаллов больших размеров (требуемая длина образцов BaF_2 для нового коллайдера — более 20 см).

Исследования наночастиц, композитов на их основе и керамик с целью получения оптимального соотношения интенсивностей быстрого и медленного компонентов люминесценции BaF_2 также пока не привели к положительным результатам.

Установлено, что наиболее эффективным способом подавления медленного компонента люминесценции является использование фильтра, прозрачного в спектральной области ОВЛ и непрозрачного в области экситонного излучения BaF_2 . Такой фильтр может быть нанесен непосредственно на поверхность выходного окна образца BaF_2 .

В дальнейшем планируется сборка и испытание системы, включающей сцинтиллятор BaF_2 с фильтром и твердотельный фотоприемник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Н.Н., Захаров Н.Г., Родный П.А. Спектрально-кинетическое исследование характеристик собственной люминесценции кристаллов типа флюорита // Оптика и спектроскопия 1982. Т. 53. № 1. С. 89–93.
2. Laval M., Moszynski M., Allemand R., Cormoreche E., Guinet P., Odru R., Vacher J. Barium fluoride — inorganic scintillator for subnanosecond timing // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1983. Vol. 206. No. 1–2. Pp. 168–176.
3. Александров Ю.М., Махов В.Н., Родный П.А., Сырейщикова Т.И., Якименко М.Н. Собственная люминесценция BaF_2 при импульсном возбуждении синхротронным излучением // Физика твердого тела. 1984. Т. 26. № 9. С. 265–286.
4. Родный П.А. Остовно-валентные переходы в широкозонных ионных кристаллах // Физика твердого тела. 1992. Т. 34. № 7. С. 1975–1998.
5. Woody C.L., Levy P.W., Kierstead J.A. Slow



- component suppression and radiation damage in doped BaF_2 crystals // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1989. Vol. 36. No. 1. Pp. 536–542.
6. Sobolev B.P., Krivandina E.A., Derenzo S.E., Moses W.W., West A.C. Suppression of BaF_2 slow component of X-ray luminescence in non-stoichiometric $\text{Ba}_{0.9}\text{R}_{0.1}\text{F}_{2.1}$ crystals (R = rare earth element) // *Proceedings of the Material Research Society: Scintillator and Phosphor Materials*; M.J. Weber (Ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1994. Pp. 277–283.
7. Nepomnyashchikh A., Radzhabov E.A., Egranov A.V., Ivashechkin V.F. Luminescence of $\text{BaF}_2\text{--LaF}_3$ // *Radiation Measurements*. 2001. Vol. 33. No. 5. Pp. 759–762.
8. Radzhabov E., Istomin A., Nepomnyashchikh A., Egranov A., Ivashechkin V. Exciton interaction with impurity in barium fluoride crystals // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2005. Vol. 537. No. 1–2. Pp. 71–75.
9. Diehl S., Novotny R.W., Wohlfahrt B., Beck R. Readout concepts for the suppression of the slow component of BaF_2 for the upgrade of the TAPS spectrometer at ELSA // *Journal of Physics: Conference Series*. 2015. Vol. 587. P. 012044.
10. Najeeb Ch.K., Lee J.-H., Chang J., Kang W.-S., Kim J.H. Ultra fast UV-photo detector based on single-walled carbon nanotube/PEDOT-PSS composites // *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*. 2009. Vol. 9. No. 12. Pp. 6928–6933.
11. Hitlin D., Kim J.H., Trevor J., Hennessy J., Hoenk M., Jewell A., Farrell R., McClish M. An APD for the detection of the fast scintillation component of BaF_2 // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2016. Vol. 63. No. 2. Pp. 513–515.
12. Zhu R.-Y. The next generation of crystal detectors // *Journal of Physics: Conference Series*. 2015. Vol. 587. P. 012055.
13. Schotanus P., Dorenbos P., Van Eijk C.W.E., Hollander R.W. Recent developments in scintillator research // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1989. Vol. 36. No. 1. Pp. 132–136.
14. Chen J., Yang F., Zhang L., Zhu R.-Y., Du Y., Wang S., Sun S., Li X. Slow scintillation suppression in yttrium doped BaF_2 crystals // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2018. Vol. 65. No. 8. Pp. 2147–2151.
15. Nesterkina V., Shiran N., Gektin A., Shimamura K., Villora E. The Lu-doping effect on the emission and the coloration of pure and Ce-doped LiLuF_4 crystals // *Radiation Measurements*. 2007. Vol. 42. No. 4–5. Pp. 819–822.
16. Seliverstov D.M., Demidenko A.A., Garibin E.A., Gain S.D., Gusev P.P., Fedorov Yu.I., Kosyanenko S.V., Mironov I.A., Osiko V.V., Rodnyi P.A., Smirnov A.N., Suvorov V.M. New fast scintillators on the base of BaF_2 crystals with increased light yield of 0.9 ns luminescence for TOF PET // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2012. Vol. 695. Pp. 369–372.
17. Dorenbos P., Visser R.W., van Eijk C.W.E., Valbis J., Khaidukov N.M. Photon yields and decay times of cross luminescence in ionic crystals // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1992. Vol. 39. No. 4. Pp. 506–510.
18. Головин А.В., Захаров Н.Г., Родный П.А. Механизм коротковолновой люминесценции фторида бария // *Оптика и спектроскопия*. 1988. Т. 65. № 1. С. 176–180.
19. Biasini M., Cassidy D.B., Deng S.H.M., Tanaka H.K.M., Mills A.P. Jr. Suppression of the slow component of scintillation light in BaF_2 // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2005. Vol. 553. No. 3. Pp. 550–558.
20. Dorenbos P., Visser R., Hollander R.W., Van Eijk C.W.E., Den Hartog H.W. The effects of La^{3+} and Ce^{3+} dopants on the scintillation properties of BaF_2 crystals // *Radiation Effects and Defects in Solids*. 1991. Vol. 119–121. No. 1. Pp. 87–92.
21. Van Eijk C.W.E. Inorganic-scintillator development // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2001. Vol. 460. No. 1. Pp. 1–14.
22. Wojtowicz A.J., Szupryczynski P., Glodo J., Drozdowski W., Wisniewski D. Radioluminescence and recombination processes in $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2000. Vol. 12. No. 17. Pp. 4097–4124.
23. Родный П.А., Гайн С.Д., Миронов И.А., Гарибин Е.А., Демиденко А.А., Селиверстов Д.М., Гусев Ю.И., Федоров П.П., Кузнецов С.В. Спектрально-кинетические характеристики кристаллов и нанокерамик на основе BaF_2 и $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ // *Физика твердого тела*. 2010. Т. 52. № 9. С. 1780–1784.
24. Radzhabov E., Nagirnyi V. Excitation of Pr^{3+} ions in alkaline-earth fluorides // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2010. Vol. 15. No. 1. P. 012029.
25. Visser R., Dorenbos P., Van Eijk C.W.E., Meijerink A., Den Hartog H.W. The scintillation intensity and decay from $\text{Nd}^{3+} 4f^2 5d$ and $4f^3$ excited states in several fluoride crystals // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 1993.

Vol. 5. No. 44. Pp. 8437–8460.

26. **Kirm M., Lushchik A., Lushchik Ch., Makhov V., Negodin E., Vielhauer S., Zimmerer G.** VUV luminescence of BaF_2 , $\text{BaF}_2\text{:Nd}$ and BaY_2F_8 crystals under inner-shell excitation // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2002. Vol. 486. No. 1–2. Pp. 422–425.

27. **Cadatal M., Furukawa Y., Seo Y.-S., Ono S., Estacio E., Murakami H., Fujimoto Y., Sarukura N., Nakatsuka M., Fukuda K., Simura R., Suyama T., Yoshikawa A., Saito F.** Vacuum ultraviolet optical properties of a micro-pulling-down-method grown $\text{Nd}^{3+}(\text{La}_{0.9}, \text{Ba}_{0.1})\text{F}_{2.9}$ // *Journal of the Optical Society of America. B*. 2008. Vol. 25. No. 7. Pp. B27–B31.

28. **Abe N., Yokota Y., Yanagida T., Kawaguchi N., Pejchal J., Yoshikawa A.** Evaluation of gamma-ray response of $\text{Tm}:\text{BaF}_2$ single crystals // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2010. Vol. 57. No. 3. Pp. 1304–1307.

29. **Radzhabov E., Nagirnyi V., Kirm M., Prosekina E.** $5d-4f$ emission of Nd^{3+} , Sm^{3+} , Ho^{3+} , Er^{3+} , Tm^{3+} ions in alkaline earth fluorides // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2012. Vol. 59. No. 5. Pp. 2074–2078.

30. **Kobayashi M., Ishii M., Sobolev B.P., Zhmurova Z.I., Krivandina E.A.** Scintillation characteristics of nonstoichiometric phases formed in $\text{MF}_2\text{-GdF}_3\text{-CeF}_3$ system. Part I. ($\text{M} = \text{Ba}$), scintillation of $\text{Ba}_{0.9}\text{Gd}_{0.1-x}\text{Ce}_x\text{F}_{2.1}$ ($0 < x < 0.1$) fluorite-type crystals // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 1999. Vol. 421. No. 1–2. Pp. 180–190.

31. **Wojtowicz A.J., Janus S., Piatkowski D.** Fast and efficient VUV/UV emissions from $(\text{Ba}, \text{La})\text{F}_2\text{:Er}$ crystals // *Journal of Luminescence*. 2009. Vol. 129. No. 12. Pp. 1594–1597.

32. **Kurosawa Sh., Yanagida T., Yokota Yu., Yoshikawa A.** Crystal growth and scintillation properties of fluoride scintillators // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2012. Vol. 59. No. 5. Pp. 2173 – 2176.

33. **Yanovsky V.V., Reiterov V.M., Rodnyi P.A.** Effect of gamma-radiation on optical characteristics of barium fluoride scintillation crystals // *Nuclear Physics B. (Proceedings. Supplements)*. 1991. Vol. 23A. No. 1. Pp. 347–351.

34. **Zhu R.-Y.** On quality requirements to the barium fluoride crystals // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 1994. Vol. 340. No. 3. Pp. 442–457.

35. **Vistovskyy V.V., Zhyshkovych A.V., Chornodolskyy Ya.M., Myagkota O.S., Gloskovskii A., Gektin A.V., Vasil'ev A.N.,**

Rodnyi P.A., Voloshinovskii A.S. Self-trapped exciton and core-valence luminescence in BaF_2 nanoparticles // *Journal of Applied Physics*. 2013. Vol. 114. No. 19. P. 194306.

36. **Jacobsohn L.G., Kucera C.J., James T.L., Sprinkle K.B., di Maio J.R., Kokuoz B., Yazgan-Kukouz B., de Vol T.A., Ballato J.** Preparation and characterization of rare earth doped fluoride nanoparticles // *Materials*. 2010. Vol. 3. No. 3. Pp. 2053–2068.

37. **Jacobsohn L.G., Sprinkle K.B., Roberts S.A., Kucera C.J., James T.L., Yukihara E.G., de Vol T.A., Ballato J.** Fluoride nanoscintillators // *Journal of Nanomaterials*. 2011. Vol. 2011. P. 523638.

38. **Kang Z., Barta M., Nadler J., Wagner B., Rosson R., Kahn B.** Synthesis of $\text{BaF}_2\text{:Ce}$ nanophosphor and epoxy encapsulated transparent nanocomposite // *Journal of Luminescence*. 2011. Vol. 131. No. 10. Pp. 2140–2143.

39. **Simpson P.J., Tjossem R., Hunt A.W., Lynn K.G., Munne V.** Superfast timing performance from ZnO scintillators // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A*. 2003. Vol. 505. No. 1–2. Pp. 82–84.

40. **Zang C.H., Liu Y.C., Mu R., Zhao D.X., Ma J.G., Zhang J.Y., Shen D.Z., Fan X.W.** Optical properties of ZnO nanocrystals embedded in BaF_2 film fabricated by magnetron sputtering // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2007. Vol. 40. No. 18. Pp. 5598–5601.

41. **Батыгов С.Х., Болясникова Л.С., Гарибин Е.А., Демиденко В.А., Дорошенко М.Е., Дукельский К.В., Лугинина А.А., Миронов И.А., Осико В.В., Федоров П.П.** Сцинтилляционная керамика $\text{BaF}_2\text{:Ce}^{3+}$ // *Доклады Академии наук*. 2008. Т. 422. № 2. С. 179 –181.

42. **Han H., Zhang Z., Weng X., Liu J., Guan X., Zhang K., Li G.** Development of a fast radiation detector based on barium fluoride scintillation crystal // *The Review of Scientific Instruments*. 2013. Vol. 84. No. 7. P. 073503.

43. **de Vol T.A., Wehe D.K., Knol G.F.** Evaluation of wavelength shifters for spectral separation of barium fluoride emissions // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section. A*. 1994. Vol. 348. No. 1. Pp. 156–162.

44. **Boiano C., Bassini R., Pullia A., Camera F., Benzoni G., Bracco A., Brambilla S., Million B., Wieland O.** A fast-stretcher for an easy acquisition of the fast component of BaF_2 detectors signals // *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*. 2004. Vol. 3. Pp. 1349–1351.

45. **Rodnyi P.A., Mikhlin S.B., Mishin A.N., Sidorenko A.V.** Small-size pulsed X-ray source for measurements of scintillator decay time



constants //IEEE Nuclear Science Symposium. Conference Record. 2001. Vol. 48. No. 6. Pp. 2340–2343.

46. **Beaumont J.H., Hayes W., Kirk D.L.,**

Summers G.P. An investigation of trapped holes and trapped excitons in alkaline earth fluorides // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. 1970. Vol. 315. No. 1520. Pp. 69–97.

Статья поступила в редакцию 28.01.2019, принята к публикации 14.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

РОДНЫЙ Пётр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
rodnyi@physics.spbstu.ru

ГАРИБИН Евгений Андреевич — директор ЗАО «ИНКРОМ», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

193171, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Бабушкина, 36.
e.garibin@incrom.ru

ВЕНЕВЦЕВ Иван Дмитриевич — ассистент Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Venevtsev.Ivan@gmail.com

ДАВЫДОВ Юрий Иванович — руководитель отдела Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московской обл., Российская Федерация.

141980, Российская Федерация, г. Дубна Московской обл., ул. Жолио-Кюри, 6
Davydov@jinr.ru

REFERENCES

[1] **N.N. Ershov, N.G. Zakharov, P.A. Rodnyi**, Spektralno-kineticheskoye issledovaniye kharakteristik sobstvennoy lyuminesentsii kristallov tipa flyuorita [Studies in spectra and kinetics of intrinsic luminescence of fluorite-type crystals], Optics and Spectroscopy. 53 (1) (1982) 51–54.

[2] **M. Laval, M. Moszynski, R. Allemand, et al.**, Barium fluoride inorganic scintillator for subnanosecond timing, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 206 (1-2) (1983) 168–176.

[3] **Yu.M. Aleksandrov, V.N. Makhov, P.A. Rodnyi, et al.**, Sobstvennaya lyuminesentsiya BaF_2 pri impulsnom возбуждении sinkhrotronnym izlucheniym [BaF_2 intrinsic luminescence under pulse excitation by synchrotron radiation], Soviet Physics, Solid State, 26 (9) (1984) 265–286.

[4] **P.A. Rodnyi**, Ostovno-valentnyye perekhody v shirokazonnykh ionnykh kristallakh [Core-valence transitions in the high-bandgap ion crystals], Physics of the Solid State. 34 (7) (1992) 1975–1998.

[5] **C.L. Woody, P.W. Levy, J.A. Kierstead**, Slow component suppression and radiation damage in doped BaF_2 crystals, IEEE Transactions on Nuclear Science. 36 (1) (1989) 536–542.

[6] **B.P. Sobolev, E.A. Krivandina, S.E. Derenzo, et al.**, Suppression of BaF_2 slow component of X-ray luminescence in non-stoichiometric $\text{Ba}_{0.9}\text{R}_{0.1}\text{F}_{2.1}$ crystals (R = rare earth element), Proceedings of The Material Research Society: Scintillator and Phosphor Materials (M.J. Weber, ed.), (1994) 277–283.

[7] **A. Nepomnyashchikh, E.A. Radzhabov, A.V. Egranov, V.F. Ivashechkin**, Luminescence of $\text{BaF}_2\text{-LaF}_3$, Radiation Measurements. 33 (2001) 759–762.

[8] **E. Radzhabov, A. Istomin, A. Nepomnyashikh, et al.**, Exciton interaction with impurity in barium fluoride crystals, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A. 537 (1–2) (2005) 71–75.

[9] **S. Diehl, R.W. Novotny, B. Wohlfahrt, R. Beck**, Readout concepts for the suppression of the slow component of BaF_2 for the upgrade

of the TAPS spectrometer at ELSA, Journal of Physics: Conference Series. 587 (2015) 012044.

[10] **Ch.K. Najeed, J.-H. Lee, J. Chang, et al.**, Ultrafast UV-photo detector based on single-walled carbon nanotube/PEDOT-PSS composites, Journal of Nanoscience and Nanotechnology. 9 (2009) 6928–6933.

[11] **D. Hitlin, J.H. Kim, J. Trevor, et al.**, An APD for the detection of the fast scintillation component of BaF_2 , IEEE Transactions on Nuclear Science. 63 (2) (2016) 513–515.

[12] **R.-Y. Zhu**, The next generation of crystal detectors, Journal of Physics: Conference Series. 587 (2015) 012055.

[13] **P. Schotanus, P. Dorenbos, C.W.E. van Eijk, R.W. Hollander**, Recent developments in scintillator research, IEEE Transactions on Nuclear Science. 36 (1) (1989) 132–136.

[14] **J. Chen, F. Yang, L. Zhang, et al.**, Slow scintillation suppression in yttrium doped BaF_2 crystals, IEEE Transactions on Nuclear Science. 65 (8) (2018) 2147–2151.

[15] **V. Nesterkina, N. Shiran, A. Gektin, et al.**, The Lu-doping effect on the emission and the coloration of pure and Ce-doped LiLuF_4 crystals, Radiation Measurements. 42 (2007) 819–822.

[16] **D.M. Seliverstov, A.A. Demidenko, E.A. Garibin, et al.**, New fast scintillators on the base of BaF_2 crystals with increased light yield of 0.9 ns luminescence for TOF PET, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 695 (2012) 369–372.

[17] **P. Dorenbos, R.W. Visser, C.W.E. van Eijk, et al.**, Photon yields and decay times of cross luminescence in ionic crystals, IEEE Transactions on Nuclear Science. 39 (4) (1992) 506–510.

[18] **A.V. Golovin, N.G. Zakharov, P.A. Rodnyi**, Mekhanizm korotkovolnovoy lyuminesentsii florida bariya [A shortwave luminescent mechanism of barium fluoride], Optics and Spectroscopy. 65 (1) (1988) 176–180.

[19] **M. Biasini, D.B. Cassidy, S.H.M. Deng, et al.**, Suppression of the slow component of scintillation light in BaF_2 , Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 553 (3) (2005) 550–558.

[20] **P. Dorenbos, R. Visser, R.W. Hollander, et al.**, The effects of La^{3+} and Ce^{3+} dopants on the scintillation properties of BaF_2 crystals, Radiation Effects and Defects in Solids. 119–121 (1) (1991) 87–92.

[21] **C.W.E. Van Eijk**, Inorganic-scintillator development, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 460 (1) (2001) 1–14.

[22] **A.J. Wojtowicz, P. Szupryczynski, J. Glodo, et al.**, Radioluminescence and recombination

processes in $\text{BaF}_2\text{:Ce}$, Journal of Physics: Condensed Matter. 12 (2000) 4097–4124.

[23] **P.A. Rodnyy, Gain S.D., I.A. Mironov, et al.**, Spectral-kinetic characteristics of crystals and nanoceramics based on BaF_2 and $\text{BaF}_2\text{:Ce}$, Physics of the Solid State. 52 (9) (2010) 1910–1914.

[24] **E. Radzhabov, V. Nagirnyi**, Excitation of Pr^{3+} ions in alkaline-earth fluorides, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 15 (2010) 012029.

[25] **R. Visser, P. Dorenbos, C.W.E. Van Eijk, et al.**, The scintillation intensity and decay from $\text{Nd}^{3+} 4f^2 5d$ and $4f^3$ excited states in several fluoride crystals, Journal of Physics: Condensed Matter. 5 (44) (1993) 8437–8460.

[26] **M. Kirm, A. Lushchik, Ch. Lushchik, et al.**, VUV luminescence of BaF_2 , $\text{BaF}_2\text{:Nd}$ and BaY_2F_8 crystals under inner-shell excitation, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 486 (1–2) (2002) 422–425.

[27] **M. Cadatal, Y. Furukawa, Y.-S. Seo, et al.**, Vacuum ultraviolet optical properties of a micro-pulling-down-method grown $\text{Nd}^{3+}(\text{La}_{0.9}, \text{Ba}_{0.1})\text{F}_{2.9}$, Journal of the Optical Society of America, B. 25 (7) (2008) B27–B31.

[28] **N. Abe, Y. Yokota, T. Yanagida, et al.**, Evaluation of gamma-ray response of $\text{Tm}:\text{BaF}_2$ single crystals, IEEE Transactions on Nuclear Science. 57 (3) (2010) 1304–1307.

[29] **E. Radzhabov, V. Nagirnyi, M. Kirm, E. Prosekina**, $5d - 4f$ emission of Nd^{3+} , Sm^{3+} , Ho^{3+} , Er^{3+} , Tm^{3+} ions in alkaline earth fluorides, IEEE Transactions on Nuclear Science. 59 (5) (2012) 2074–2078.

[30] **M. Kobayashi, M. Ishii, B.P. Sobolev, et al.**, Scintillation characteristics of nonstoichiometric phases formed in $\text{MF}_2\text{--GdF}_3\text{--CeF}_3$ system, Part I. ($\text{M} = \text{Ba}$), scintillation of $\text{Ba}_{0.9}\text{Gd}_{0.1-x}\text{Ce}_x\text{F}_{2.1}$ ($0 < x < 0.1$) fluorite-type crystals, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 421 (1–2) (1999) 180–190.

[31] **A.J. Wojtowicz, S. Janus, D. Piatkowski**, Fast and efficient VUV/UV emissions from $(\text{Ba}, \text{La})\text{F}_2\text{:Er}$ crystals, Journal of Luminescence. 129 (2009) 1594–1597.

[32] **Sh. Kurosawa, T. Yanagida, Yu. Yokota, A. Yoshikawa**, Crystal growth and scintillation properties of fluoride scintillators, IEEE Transactions on Nuclear Science. 59 (5) (2012) 2173–2176.

[33] **V.V. Yanovsky, V.M. Reiterov, P.A. Rodnyi**, Effect of gamma-radiation on optical characteristics of barium fluoride scintillation crystals, Nuclear Physics, B. (Proceedings. Supplements). 23A (1991) 347–351.



- [34] R.-Y. Zhu, On quality requirements to the barium fluoride crystals, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, A. 340 (3) (1994) 442–457.
- [35] V.V. Vistovskyy, A.V. Zhyshkovych, Ya.M. Chornodolskyy, et al., Self-trapped exciton and core-valence luminescence in BaF₂ nanoparticles, *Journal of Applied Physics*. 114 (2013) 194306.
- [36] Z. Kang, M. Barta, J. Nadler, et al., Synthesis of BaF₂:Ce nanophosphor and epoxy encapsulated transparent nanocomposite, *Journal of Luminescence*. 131 (10) (2011) 2140–2143.
- [37] L.G. Jacobsohn, K.B. Sprinkle, S.A. Roberts, et al., Fluoride nanoscintillators, *Journal of Nanomaterials*. 2011 (2011) 523638.
- [38] L.G. Jacobsohn, C.J. Kucera, T.L. James, et al., Preparation and characterization of rare earth doped fluoride nanoparticles, *Materials*. 3 (2010) 2053–2068.
- [39] P.J. Simpson, R. Tjossem, A.W. Hunt, et al., Superfast timing performance from ZnO scintillators, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, A. 505 (1–2) (2003) 82–84.
- [40] C.H. Zang, Y.C. Liu, R. Mu, et al., Optical properties of ZnO nanocrystals embedded in BaF₂ film fabricated by magnetron sputtering, *Journal of Physics D: Applied Physics*. 40 (2007) 5598–5601.
- [41] S.Kh. Batygov, L.S. Bolyasnikova, E.A. Garibin, et al., BaF₂:Ce³⁺ scintillation ceramics, *Doklady Akademii Nauk*. 422 (2) (2008) 179–181.
- [42] H. Han, Z. Zhang, X. Weng, et al., Development of a fast radiation detector based on barium fluoride scintillation crystal, *The Review of Scientific Instruments*. 84 (2013) 073503.
- [43] T.A. de Vol, D.K. Wehe, G.F. Knol, Evaluation of wavelength shifters for spectral separation of barium fluoride emissions, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section*, A. 348 (1) (1994) 156–162.
- [44] C. Boiano, R. Bassini, A. Pullia, et al., A fast-stretcher for an easy acquisition of the fast component of BaF₂ detectors signals, *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*. 3 (2004) 1349–1351.
- [45] P.A. Rodnyi, S.B. Mikhrin, A.N. Mishin, A.V. Sidorenko, Small-size pulsed X-ray source for measurements of scintillator decay time constants, *IEEE Nuclear Science Symposium, Conference Record*. 48 (6) (2001) 2340–2343.
- [46] J.H. Beaumont, W. Hayes, D.L. Kirk, G.P. Summers, An investigation of trapped holes and trapped excitons in alkaline earth fluorides, *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*. 315 (1520) (1970) 69–97.

Received 01.02.2019, accepted 05.02.2019.

THE AUTHORS

RODNYI Piotr A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
rodnyi@physics.spbstu.ru

GARIBIN Evgeniy A.

CJS "INCROM"
36-1 Babushkina St., Saint Petersburg, 193171, Russian Federation
e.garibin@incrom.ru

VENEVTSSEV Ivan D.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
Venevtsev.Ivan@gmail.com

DAVYDOV Yuriy I.

Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie St., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation
Davydov@jinr.ru

DOI: 10.18721/JPM.12102

УДК 537.622: 539.378:620.186

СТРУКТУРА И ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ВЫСОКОМАГНИТОСТРИКЦИОННОГО СПЛАВА СИСТЕМЫ САМАРИЙ-ЖЕЛЕЗО СО СТРУКТУРОЙ ФАЗ ЛАВЕСА

**Г.А. Политова^{1,2}, А.Ю. Карпенков³, Т.П. Каминская⁴,
М.А. Ганин¹, Рави Кумар⁵, А.В. Филимонов²**

¹ Институт металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН,
Москва, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

³ Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация;

⁴ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Российская Федерация;

⁵ Индийский технологический институт Мадраса, г. Ченнаи, Индия

В работе методом индукционной плавки получен сплав SmFe_2 в высокочистом однофазном состоянии. Методами атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии исследованы особенности поверхности сплава при комнатной температуре. Выявлено наличие неоднородной зернистой структуры, определены основные структурные элементы. Показано наличие сложной доменной структуры, проведено ее описание, определены размеры доменов. Представлены результаты рентгеноструктурных исследований в интервале температур 100 – 300 К. Получены и проанализированы экспериментальные данные по температурным зависимостям магнитострикции в магнитных полях до 1,2 Тл в области спин-переориентационного фазового перехода. Косвенно подтверждено существование «угловой» фазы, уточнены ее температурные границы.

Ключевые слова: редкоземельная фаза Лавеса, фазовый переход, магнитострикция, атомно-силовая микроскопия, магнитно-силовая микроскопия

Ссылка при цитировании: Политова Г.А., Карпенков А.Ю., Каминская Т.П., Ганин М.А., Кумар Рави, Филимонов А.В. Структура и фазовые превращения высокомагнитострикционного сплава системы самарий-железо со структурой фаз Лавеса // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 28–38. DOI: 10.18721/JPM.12102

HIGH-MAGNETOSTRICTION LAVES-PHASE ALLOY OF THE SAMARIUM-IRON SYSTEM: THE STRUCTURE AND PHASE TRANSFORMATIONS

**G.A. Politova^{1,2}, A.Yu. Karpenkov³, T.P. Kaminskaya⁴,
M.A. Ganin¹, Ravi Kumar⁵, A.V. Filimonov²**

¹ Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science, RAS, Moscow, Russian Federation;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

³ Tver State University, Tver, Russian Federation;

⁴ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation;

⁵ Indian Institute of Technology Madras, Chennai, India

In this study, the SmFe_2 alloy in a high-purity single-phase state has been prepared by the induction melting technique. The surface features of the alloy at room temperature were investigated using the atomic-force and magnetic-force microscopy. The forming of hetero-



geneous granular structure was revealed, the main structural elements were determined. The presence of the complex domain structure was shown, its description was presented and the domain sizes were found. The results of X-ray structural studies over the temperature range from 100 to 300 K were presented. The experimental data on the temperature dependences of magnetostriction in magnetic fields up to 1.2 T were obtained and analyzed in the region of the spin-reorientational phase transition. The existence of the “angular” phase was indirectly confirmed, its temperature boundaries were refined.

Keywords: rare-earth Laves phase, phase transition, magnetostriction, atomic force microscopy, structure

Citation: G.A. Politova, A.Yu. Karpenkov, T.P. Kaminskaya, M.A. Ganin, Ravi Kumar, A.V. Filimonov, High-magnetostriction Laves-phase alloy of the samarium-iron system: the structure and phase transformations, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 28–38. DOI: 10.18721/JPM.12102

Введение

В последние годы возобновился интерес мирового научного сообщества к исследованиям сплавов со структурой фаз Лавеса типа RFe_2 (где R – редкоземельный металл (РЗМ)) [1 – 3]. Соединения редкоземельных и $3d$ -переходных металлов со структурой фаз Лавеса представляют собой важное семейство магнитных материалов, демонстрирующих большие значения анизотропной магнитострикции (порядка 10^{-3}) в сравнительно невысоких магнитных полях (менее 1 Тл) ниже температуры Кюри. Известно [4–6], что высокомагнитострикционные соединения способны преобразовывать электрическую энергию в механическую и применяются в таких устройствах, как приводы и датчики, работающие в различных средах и в широкой температурной области. В районе температуры Кюри некоторые фазы Лавеса могут демонстрировать как высокие значения магнитострикции, так и большой по величине магнитокалорический эффект, что также может найти практическое применение [7, 8]. Хотя физический механизм, ответственный за высокие значения магнитострикции в этих соединениях, известен [9, 10], однако комплексные исследования структуры и магнитных свойств, а также изучение аномалий в области фазовых переходов с помощью различных методик проводились фрагментарно (только для отдельных образцов).

Интерметаллические соединения RFe_2 кристаллизуются в кубическую структуру типа $MgCu_2$ пространственной группы $Fd\bar{3}m$. Согласно теории, в результате магнитного упорядочения наиболее вероятно появление огромной спонтанной магнитострикции вдоль направления легкого намагничивания $\langle 111 \rangle$. Особая симметрия

кубической фазы Лавеса $C15$ приводит к большому ромбоэдрическому искажению в направлении $\langle 111 \rangle$. Наиболее известные соединения фазы Лавеса с гигантской магнитострикцией насыщения при комнатной температуре – это $TbFe_2$ и $SmFe_2$ ($+1,7 \cdot 10^{-3}$ и $-1,5 \cdot 10^{-3}$, соответственно) [11 – 15]. Данные сплавы имеют близкие по абсолютной величине (однако разные по знаку) значения магнитострикции в области комнатной температуры. Оба эти сплава при переходе в магнитоупорядоченное состояние испытывают ромбоэдрические искажения, однако если в соединении $TbFe_2$ кубическая решетка вдоль направления $\langle 111 \rangle$ растягивается, то в $SmFe_2$ она, наоборот, слегка сжимается. Также данные соединения отличаются и типом магнитного упорядочения. Известно, что магнитные моменты подрешеток R и Fe параллельны, причем для легких РЗМ суммарные магнитные моменты подрешеток сонаправлены, в то время как для тяжелых – антипараллельны. Вследствие этого, $TbFe_2$ является ферримagnетиком, а $SmFe_2$ – ферромагнетиком.

В отличие от $TbFe_2$, кристаллическая структура $SmFe_2$, а также направление его магнитного момента изменяются с понижением температуры. С помощью мёссбауэровских и рентгенографических исследований было показано [15 – 18], что спонтанный магнитный момент соединения $SmFe_2$ при комнатной температуре ориентирован вдоль кристаллографического направления $\langle 111 \rangle$. Считалось, что при снижении температуры, в области $T = 180 - 200$ К наблюдается спин-переориентационный фазовый переход (СПП) и магнитные моменты ориентируются вдоль направления $\langle 110 \rangle$. Однако при детальном анализе дифракционных спектров, полученных при низких

температурах, было установлено [17, 18], что при понижении температуры примерно до 200 К структура сплава остается ромбоэдрической; при этом величина искажений увеличивается по абсолютной величине. При дальнейшем понижении температуры (в интервале 140 – 240 или 106 – 180 К, но данный интервал различен в литературных источниках), в сплаве появляется «угловая» магнитная фаза: вектор спонтанного магнитного момента находится в плоскости (110), не совпадая по направлению ни с $\langle 111 \rangle$, ни с $\langle 110 \rangle$. При низких температурах характер трансформации рентгенодифракционного спектра свидетельствует о возникновении ромбических искажений кристаллической решетки, а магнитный момент направлен вдоль оси $\langle 110 \rangle$. Аномалии в области СПП также проявляются на температурных зависимостях намагниченности [15].

Цель данной работы – проанализировать изменения кристаллической структуры и магнитоэлектрических свойств сплава SmFe_2 в интервале температур от 100 до 320 К, а также изучить особенности его поверхности при комнатной температуре методами атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии.

В связи с поставленной целью было необходимо получить сплав SmFe_2 в высокочистом однофазном состоянии.

Методика эксперимента

Изготовление образцов. Методом высокочастотной индукционной плавки (печь «Донец-1») был синтезирован сплав SmFe_2 в алундовом тигле в атмосфере особо чистого аргона (содержание влаги менее $0,02 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, азота – 0,0005 %, кислорода – 0,001 %), давление которого составляло 1,1 – 1,2 атм. В качестве исходных компонентов были взяты металлы высокой степени очистки. Экспериментально подобранное завышение в шихте содержания РЗМ на 10% позволило получить однофазные соединения после дальнейшего гомогенизирующего отжига. Скорость остывания сплавов была достаточно низкой (около 1 – 2 К/с), что способствовало достижению состояния, близкого к равновесному. Готовые образцы помещали в кварцевые ампулы, откачанные до высокого вакуума. Термическая обработка выплавленных сплавов проводилась по специально подобранному режиму с использованием трехзонной горизонтальной

трубчатой печи Carbolite TZF 15/610: образцы в ампулах нагревали до температуры 720°C со скоростью 7 К/мин, затем их выдерживали при этой температуре в течение 72 ч. После этого производилась их закалка в воду.

Регистрация рентгенодифракционных спектров. Проводилась на порошковых образцах в CuK_α -излучении ($\lambda = 0,1540598 \text{ нм}$) при комнатной температуре на рентгеновском дифрактометре «ДРОН-7», модифицированном системой быстрой регистрации на основе линейного стрипового позиционно-чувствительного детектора Mythen 1K (Dectris Ltd, Швейцария). Параметры элементарной ячейки определялись по отражениям в области углов $2\theta = 15 - 105^\circ$. Фазовый состав образца исследовался с помощью Ритвельд-анализа в программе Powder Cell 2.4. Температурные измерения дифрактограмм были выполнены с использованием фильтрованного MoK_α -излучения на рентгеновском дифрактометре SuperNova (Agilent) в диапазоне температур 110 – 250 К. Температуру образца контролировали путем его контакта с потоком газообразного азота заданной температуры, значение которой задавалось системой Oxford Cryosystems (Cobra Plus).

Микроскопия. Микроструктура образцов исследовалась на металлографическом микроскопе Neophot-30. Наблюдение и фотографирование производились при освещении ксеноновой лампой в режимах светлого поля или поляризованного света. Картины микроструктур выводились через оптический канал микроскопа на цифровую камеру высокого разрешения Levenhuk M800 Plus.

Анализ морфологии поверхности. Морфология поверхности образцов SmFe_2 исследовалась на шлифах методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) образцов фаз Лавеса, с использованием сканирующего зондового микроскопа Smena-A (платформа Solver, ЗАО НТ-МДТ, Россия), как в полуконтактной, так и в контактной модах, при комнатной температуре, с применением стандартных кремниевых кантилеверов типа HA_NC Etalon. Для выявления наноструктурированных особенностей поверхности образцы-шлифы подвергались травлению в 5%-м растворе азотной кислоты в спирте. Методом магнитно-силовой микроскопии (МСМ) исследования проводились на полностью размагниченных

образцах-шлифах с помощью специальных магнитных кантилеров MFM01 с хромокобальтовым покрытием, с резонансной частотой около 70 кГц и силовой константой 1 – 5 Н/м. Бесконтактная колебательная методика МСМ позволила получить большую чувствительность и высококачественные МСМ-изображения образцов. Для получения таких изображений поверхности была применена двухпроходная квазистатическая методика (максимум чувствительности метода достигается при совпадении частоты возбуждения кантилера с резонансной частотой системы зонд-образец).

Измерение деформации. Тензометрическим методом были исследованы деформации поликристаллического образца из сплава SmFe_2 в интервале температур от 100 до 320 К и в магнитных полях до 1,2 Тл. Измерения в магнитном поле проводились вдоль направления магнитного поля (продольная магнитострикция) и перпендикулярно ему (поперечная магнитострикция).

Экспериментальные результаты и их обсуждение

В результате проведенного синтеза методом высокочастотной индукционной плавки получены образцы сплава SmFe_2 . Сложность синтеза соединений RFe_2 заключается в близости точек эвтектики двух соединений RFe_2 и RFe_3 , что зачастую приводит к тому, что при недостатке в шихте редкоземельного металла R и неполном прохождении перитектической реакции, в сплаве кристаллизуется именно фаза 1 : 3, поскольку для ее образования необходимо меньшее количество атомов РЗМ. Анализ дифракционных данных, полученных при комнатной температуре (рис. 1) показал, что сплав однофазен по рентгенографическому признаку и атомно-кристаллическая структура изотипна структуре кубической фазы Лавеса C15 (MgCu_2). Найденное значение параметра решетки составило 7,4239 Å.

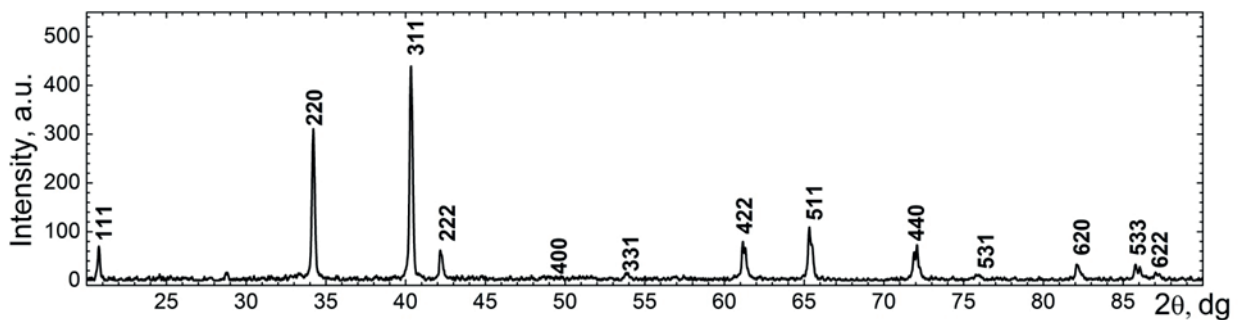


Рис. 1. Экспериментальная дифрактограмма сплава SmFe_2 ; цифры над пиками соответствуют индексам hkl; температура комнатная

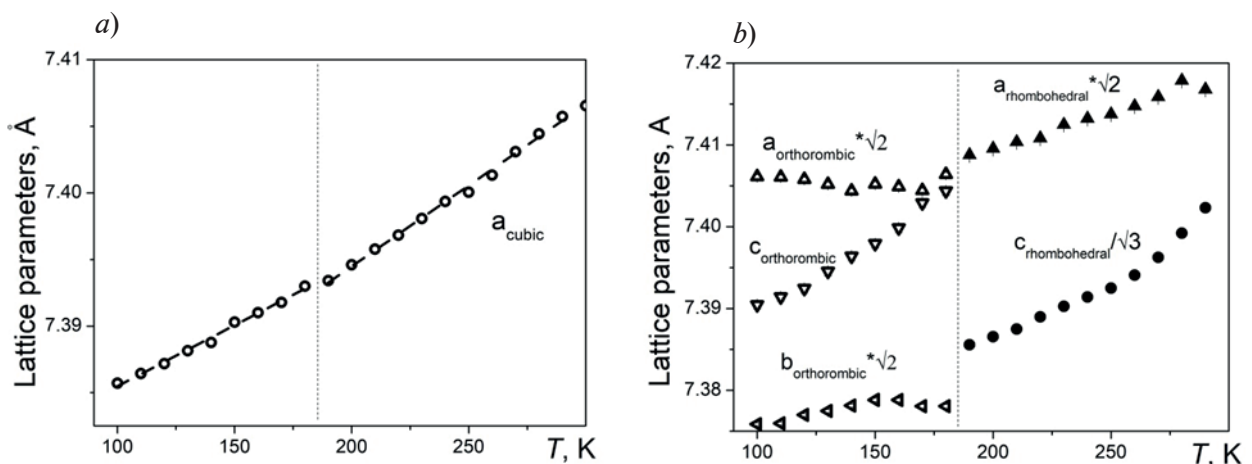


Рис. 2. Температурные зависимости параметров элементарной ячейки SmFe_2 : получены подгонкой рентгеновских дифракционных спектров в рамках модели кубической (a), а также ромбической (<180 К) и ромбоэдрической (> 190 К) решеток

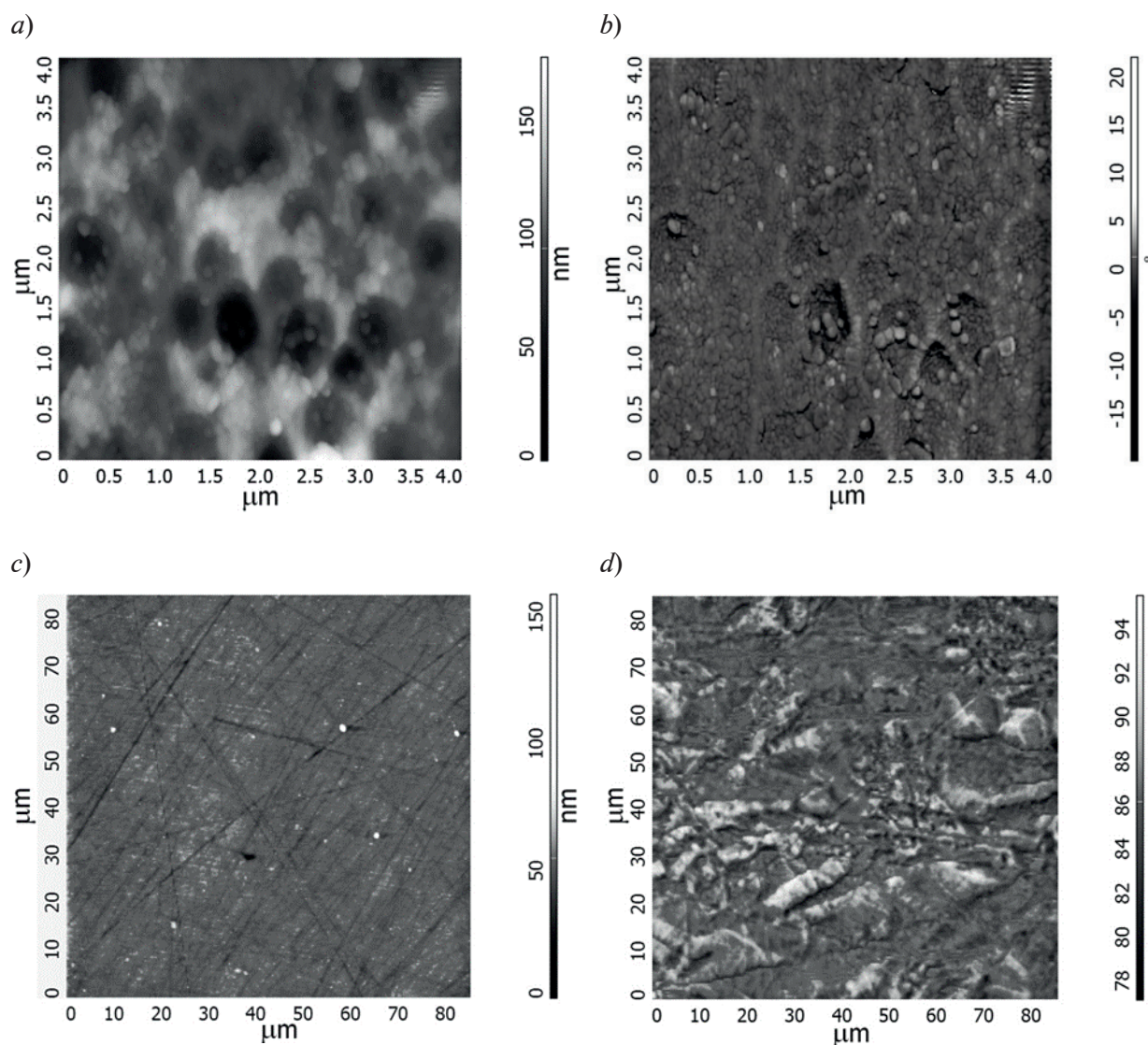


Рис. 3. ACM (*a*, *b*, *c*)- и MCM (*d*)-изображения поверхности сплава SmFe_2 , полученные при размерах скана 4×4 мкм (*a*, *b*) и 90×90 мкм (*c*, *d*); *b* – использован метод фазового контраста

Температурные зависимости параметров решетки (рис. 2, *a*) были получены путем подгонки дифракционных спектров в рамках модели кубической решетки. Видно, что в интервале температур 180 – 190 К происходит изменение наклона температурной зависимости параметра решетки; это свидетельствует об изменении кристаллической решетки, связанном с СПП. Полученные результаты хорошо согласуются с литературными данными [15 – 18], согласно которым в данной области температур происходит структурный переход из высокотемпературной ромбоэдрической фазы в угловую, которая далее переходит в низкотемпературную ромбическую фазу. Температурные зависимости параметров решетки *a*, *b*, *c*, полученные путем под-

гонки дифракционных спектров в рамках моделей ромбоэдрической (выше 190 К) и ромбической (орторомбической) (ниже 180 К) кристаллических решеток представлены на рис. 2, *b*. Для удобства сравнения на одном графике, параметры преобразованы (множители $\sqrt{2}, \sqrt{3}$) и приведены к псевдокубической ячейке.

Анализ микроструктуры оптическим методом выявил в образцах наличие второй фазы (она не была обнаружена рентгеновским методом). Количественный анализ микрофотографий, проведенный с помощью компьютерной программы, позволяющей по цветовым оттенкам пикселей рассчитать относительное содержание фаз, показал, что объемное содержание вторичных фаз не превышало 1 – 2 %, что

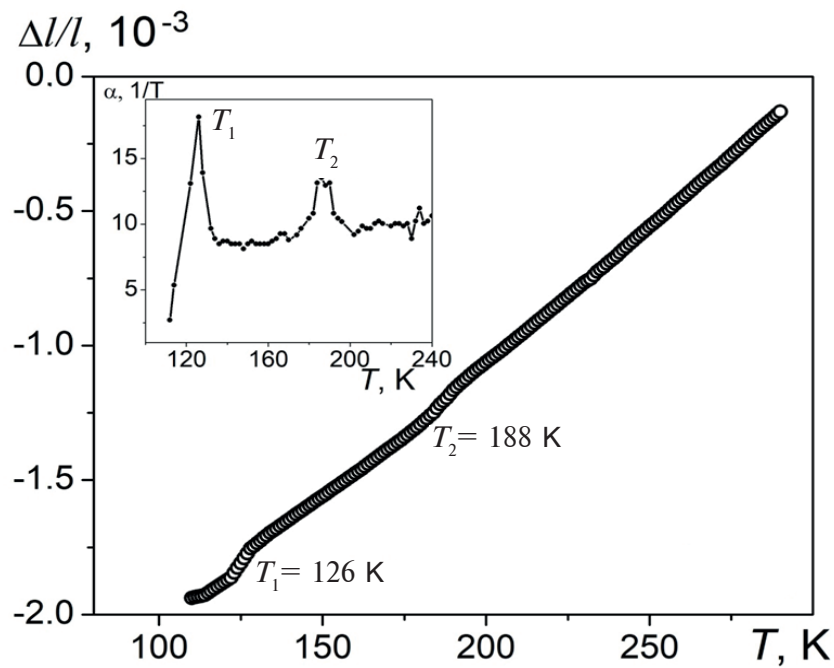


Рис. 4. Температурные зависимости относительного удлинения образца соединения SmFe_2 (тепловое расширение) и его коэффициента теплового расширения (на вставке); T_1 , T_2 — точки фазовых переходов

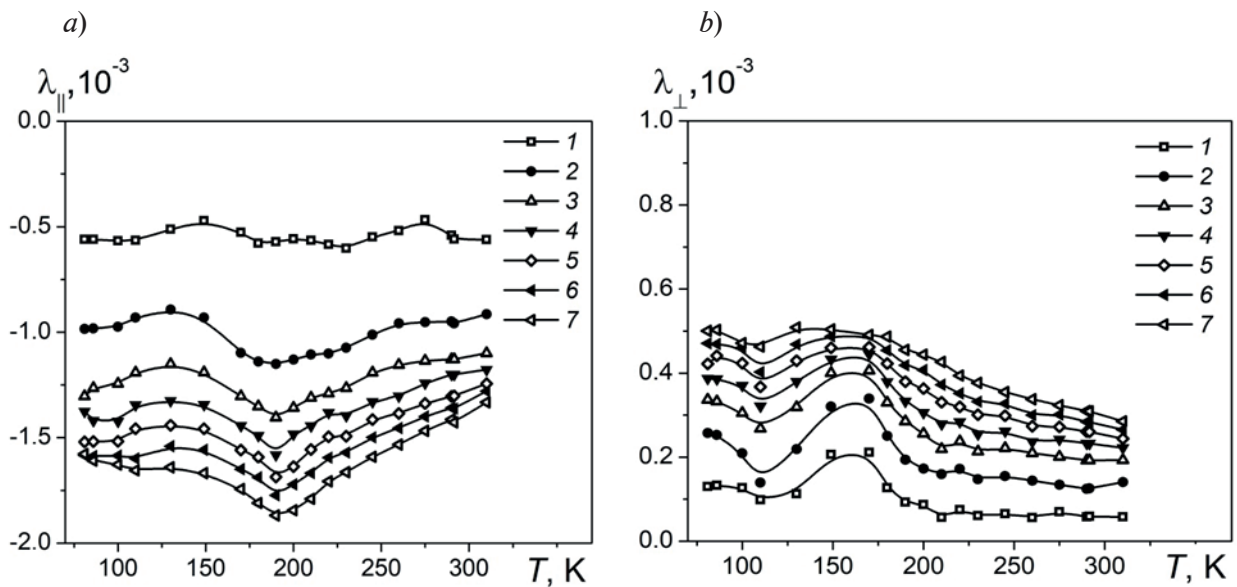


Рис. 5. Температурные зависимости продольной (a) и поперечной (b) магнитострикций SmFe_2 в магнитных полях со значениями индукции, Тл: 0,15 (1), 0,35 (2), 0,50 (3), 0,70 (4), 0,80 (5), 1,0 (6), 1,2 (7)

позволяет считать синтезированные соединения практически однофазными.

Методы атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии на современном этапе развития материаловедения становятся все более востребованными, поскольку позволяют получать дополнительную информацию об однородности фазового состава, зернистости синтезируемой фазы, размере и морфологии отдельных зерен, доменной структуре [19 – 21]. Исследования проводились в микронном, при размере скана 90×90 мкм (рис. 3, *d*), и наноразмерном, при размере 4×4 мкм (рис. 3, *a, b*) и менее, масштабах. Анализ АСМ-изображений топологии поверхности позволил установить, что образец SmFe_2 имеет неравномерно и неоднородно структурированную ячеистую поверхность с размерами данных структурных элементов (ячеек) от 500 до 700 нм в одном направлении и до 1 мкм в перпендикулярном направлении. Ячейки заполнены мелкими зернами (это другие структурные элементы) со средним размером 80 нм, что хорошо видно на рис. 3, *a*.

Исследования поверхности полированного шлифа SmFe_2 методом магнитно-силовой микроскопии (рис. 3, *d*) показывают наличие выраженной и довольно сложной доменной структуры: она состоит из островков с размерами от 6 до 12 мкм и полос шириной от 3 до 5 мкм. Наиболее мелкие домены имеют ширину 0,8 – 1,0 мкм. Такая сложная доменная структура на поверхности образца может быть обусловлена разными причинами, например наличием полей рассеяния (они связаны с напряжениями в образце), а также микровключений другой фазы. Присутствие напряжений вызвано, скорее всего, высокими магнитострикционными свойствами соединения SmFe_2 .

В данной работе были исследованы линейные деформации образцов SmFe_2 под действием внешнего магнитного поля, а также их зависимость от температуры (тепловое расширение). На рис. 4 показаны температурные зависимости относительного удлинения (тепловое расширение) и коэффициента теплового расширения объекта. Видно, что наблюдаются две аномалии при температурах 126 и 188 К. Данные аномалии связаны с фазовыми переходами, а именно: при $T_2 = 188$ К происходит переход из ромбоэдрической в «угловую» фазу, а при $T_2 = 126$ К «угловая» фаза пе-

реходит в ромбическую. Эти утверждения основаны на литературных данных [11, 12], а также на результатах наших рентгенографических исследований. Следует отметить, что если сведения о значении температуры T_2 мало различаются в разных литературных источниках, то значения T_1 различаются сильно. Таким образом, нами были уточнены значения указанных температурных точек путем измерения коэффициента теплового расширения образцов SmFe_2 в зависимости от температуры.

Еще более чувствительными к магнитным и структурным изменениям в образце оказываются магнитострикционные деформации, поэтому измерение магнитострикции удобно использовать как способ выявления магнитных и структурных фазовых переходов. На рис. 5 показаны температурные зависимости магнитострикции исследуемого сплава. В области температур 126 и 188 К наблюдаются аномалии как продольной (рис. 5, *a*), так и поперечной (рис. 5, *b*) магнитострикции при всех значениях приложенного магнитного поля, выраженные через минимум и максимум абсолютной величины магнитострикции, соответственно. Продольная магнитострикция SmFe_2 имеет отрицательный знак и максимальное абсолютное значение: $-1,9 \cdot 10^{-3}$, в то время как поперечная положительна и принимает максимальное значение, равное $+0,5 \cdot 10^{-3}$. В условиях комнатной температуры абсолютные величины магнитострикции снижаются, при этом значения продольной и поперечной составляющих равны, соответственно, $-1,4 \cdot 10^{-3}$ и $+0,3 \cdot 10^{-3}$.

Заключение

Индукционным методом синтезирован сплав SmFe_2 , комплексное исследование которого включало методы оптической металлографии и рентгеноструктурного анализа для подтверждения гомогенности и однофазности, в частности отсутствия фазы со стехиометрией 1 : 3, наиболее часто встречаемой в данных соединениях.

Методами атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии показано, что поверхность образца имеет неоднородно-структурированную ячеистую микроструктуру и сложную доменную структуру. Определены размеры основных структурных элементов.

Уточнены температурные границы су-



существования угловой фазы при переходе из ромбоэдрической в ромбическую фазу. Исследовано поведение магнитострикции в области этих аномалий.

Исследование выполнено при финансовой

поддержке РФФИ, проекты № 18-03-00798-а, № 16-52-48016 ИНД_оми (Кумар Рави и Филимонов А.В.), а также в рамках Госзадания Минобрнауки России, проект 11.5861.2017/БЧ (СПбПУ) и Государственного задания № 075-00746-19-00 (ИМЕТ РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang N.J., Liu Y., Zhang H.W., Chen X., Li Y.X. Fabrication, magnetostriction properties and applications of Tb-Dy-Fe alloys: a review // China Foundry. 2016. Vol. 13. No. 2. Pp. 75–84.
2. Ren W.J., Zhang Z.D. Progress in bulk MgCu₂-type rare-earth iron magnetostrictive compounds // Chin. Phys. B. 2013. Vol. 22. No. 7. P. 077507.
3. Wang Y., Ma T.Y., Wu C., et al. Correlation between magnetostriction and magnetic structure in pseudobinary compounds Tb(Co_{1-x}Fe_x)₂ // AIP Advances. 2017. Vol. 7. No. 7. P. 075311.
4. Chu Z.Q., Pourhosseini-Asl M.J., Dong S.X. Review of multi-layered magnetoelectric composite materials and devices applications // J. Phys. D: Appl. Phys. 2018. Vol. 51. No. 24. P. 243001(21).
5. Kalgin A.V., Gridnev S.A., Popov I.I. Magnetoelectric effect in two-layered self-biased composites Tb_{0.12}Dy_{0.2}Fe_{0.68}/epoxy PbZr_{0.53}Ti_{0.47}O₃ // Phys. Status Solidi. C. 2017. Vol. 14. No. 3–4. P. 1600231.
6. Nikitin S.A., Tereshina I.S., Verbetsky V.N., Salamova A.A., Skokov K.P., Pankratov N.Yu., Skourski Yu.V., Tristan N.V., Zubenko V.V., Tegelina I.V. Magnetostriction and magnetic anisotropy in TbFe₁₁TiH_x single crystal // J. Alloys and Compounds. 2001. Vol. 322. No. 1–2. Pp. 42–44.
7. Chzhan V.B., Tereshina I.S., Karpenkov A.Y., Tereshina-Chitrova E.A. Persistent values of magnetocaloric effect in the multicomponent Laves phase compounds with varied composition // Acta Materialia. 2018. Vol. 154. Pp. 303–310.
8. Tereshina I., Cwik J., Tereshina E., Politova G., Burkhanov G., Chzhan V., Ilyushin A., Miller M., Zaleski A., Nenkov K., Schultz L. Multifunctional phenomena in rare-earth intermetallic compounds with a Laves phase structure: Giant magnetostriction and magnetocaloric effect // IEEE Trans. Mag. 2014. Vol. 50. No. 11. P. 2504604.
9. Белов К.П. Магнитострикционные явления и их технические приложения. М.: Наука, 1987. 159 с.
10. Tereshina I., Nikitin S., Tulyakov A., Opalenko A.A., Palewski T. Rare earth compounds with compensated magnetic anisotropy and giant magnetostriction // J. Alloys Comp. 2008. Vol. 451. No. 1–2. Pp. 481–483.
11. Samata H., Fujiwara N., Nagata Y., et al. Magnetic anisotropy and magnetostriction of SmFe₂ crystal // J. Magn. Magn. Mater. 1999. Vol. 195. No. 2. Pp. 376–383.
12. Grössinger R., Sato Turtelli R., Mehmood N. Materials with high magnetostriction // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2014. Vol. 60. P. 012002.
13. Tang Y.J., Luo H.L., Gao N.F., et al. Magnetic properties and magnetostriction in TbFe₂ compound with the addition of manganese or gallium // Appl. Phys. Lett. 1995. Vol. 66. No. 3. Pp. 388–390.
14. Tang Y.M., Chen L.Y., Zhang L., Huang H.F., Xia W.B., Zhang S.Y., Wei J., Tang S.L., Du Y.W. Temperature dependence of the magnetostriction in polycrystalline PrFe_{1.9} and TbFe₂ alloys: Experiment and theory // Journal of Applied Physics. 2014. Vol. 115. No. 17. P. 173902.
15. Liu X.N., Lin K., Gao Q.L., et al. Structure and phase transformation in the giant magnetostriction Laves-phase SmFe₂ // Inorganic Chemistry. 2018. Vol. 57. No. 2. Pp. 689–694.
16. Atzmony U., Dariel M.P. Nonmajor cubic axes of easy magnetization in rare-earth-iron Laves compounds // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13. No. 9. Pp. 4006–4014.
17. Gaviko V.S., Korolyov A.V., Mushnikov N.V. X-ray diffraction investigation of spin reorientation in SmFe₂ // J. Magn. Magn. Mater. 1996. Vol. 157–158. May. Pp. 659–660.
18. Илюшин А.С., Солодов Е.В., Умхаева З.С. Структурные и магнитные превращения в сплавах псевдобинарной системы (Sm_{1-x}Tb_x)Fe₂ // Перспективные материалы. 2013. № 11. С. 42 – 47.
19. Миронов В.Л. Основы сканирующей зондовой микроскопии. Нижний Новгород: Институт физики микроструктур РАН, 2004. 110 с.

20. Политова Г.А., Бурханов Г.С., Терешина И.С., Каминская Т.П., Чжан В.Б., Терешина Е.А. Влияние легирования алюминием и железом на структуру, магнитные и магнитокалорические свойства многокомпонентных сплавов Tb-Dy-Fe-Co // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. № 4. С. 557–562.

21. Андреева Н.В., Филимонов А.В., Рудской А.И., Бурханов Г.С., Терешина И.С., Политова Г.А., Пелевин И.А. Исследование наноструктурированных магнитотвердых материалов системы Nd-Fe-Co-B методами атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии // ФТТ. 2016. Т. 58. № 9. С. 1798–1805.

Статья поступила в редакцию 01.02.2019, принята к публикации 05.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПОЛИТОВА Галина Александровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, Москва, Российская Федерация.

119334 Российская Федерация, г. Москва, Ленинский пр., 49
gpolitova@gmail.com

КАРПЕНКОВ Алексей Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики конденсированного состояния Тверского государственного университета, г.Тверь, Российская Федерация.

170002 Российская Федерация, г. Тверь, Садовый пер., 35
karpenkov_alex@mail.ru

КАМИНСКАЯ Татьяна Петровна — кандидат технических наук, доцент, научный сотрудник кафедры общей физики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация.

119999 Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1
ktp53@mail.ru

ГАНИН Максим Алексеевич — младший научный сотрудник Института металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, Москва, Российская Федерация.

119334 Российская Федерация, г. Москва, Ленинский пр., 49
ganmax_90@mail.ru

КУМАР РАВИ — доктор естественных наук, профессор Лаборатории машиностроительной керамики Индийского технологического института Мадраса, г. Ченнаи, Индия.

Chennai (Madras), 600036, India
nvrk@iitm.ac.in

ФИЛИМОНОВ Алексей Владимирович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
filimonov@rphf.spbstu.ru

REFERENCES

[1] N.J. Wang, Y. Liu, H.W. Zhang, et al., Fabrication, magnetostriction properties and applications of Tb-Dy-Fe alloys: a review, China Foundry. 13 (2) (2016) 75–84.

[2] W.J. Ren, Z.D. Zhang, Progress in bulk MgCu₂-type rare-earth iron magnetostrictive

compounds, Chin. Phys. B. 22 (7) (2013) 077507.

[3] Y. Wang, T.Y. Ma, C. Wu, et al., Correlation between magnetostriction and magnetic structure in pseudobinary compounds Tb(Co_{1-x}Fe_x)₂, AIP Advances. 7 (7) (2017) 075311.

[4] Z.Q. Chu, M.J. Pourhosseini-Asl, S.X. Dong,



Review of multi-layered magnetoelectric composite materials and devices applications, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 51 (24) (2018) 243001(21).

[5] A.V. Kalgin., S.A. Gridnev, I.I. Popov, Magnetoelectric effect in two-layered self-biased composites $\text{Tb}_{0.12}\text{Dy}_{0.2}\text{Fe}_{0.68}/\text{epoxy PbZr}_{0.53}\text{Ti}_{0.47}\text{O}_3$, *Phys. Status Solidi, C* 14 (3–4) (2017) 1600231.

[6] S.A. Nikitin, I.S. Tereshina, V.N. Verbetsky, et al., Magnetostriction and magnetic anisotropy in $\text{TbFe}_{11}\text{TiH}_x$ single crystal, *J. Alloys and Compounds* 322 (1–2) (2001) 42–44.

[7] V.B. Chzhan, I.S. Tereshina, A.Y. Karpenkov, E.A. Tereshina-Chitrova, Persistent values of magnetocaloric effect in the multicomponent Laves phase compounds with varied composition, *Acta Materialia* 154 (2018) 303–310.

[8] I. Tereshina, J. Cwik, E. Tereshina, et al., Multifunctional phenomena in rare-earth intermetallic compounds with a Laves phase structure: Giant magnetostriction and magnetocaloric effect, *IEEE Trans. Mag.* 50 (11) (2014) 2504604.

[9] K.P. Belov, Magnitostriksionniye yavleniya i ikh technicheskiye prilozheniya [Magnetostriction phenomena and their technical applications], Nauka, Moscow, 1987.

[10] I. Tereshina, S. Nikitin, A. Tulyakov, et al., Rare earth compounds with compensated magnetic anisotropy and giant magnetostriction, *J. Alloys Comp.* 451 (1–2) (2008) 481–483.

[11] H. Samata, N. Fujiwara, Y. Nagata, et al., Magnetic anisotropy and magnetostriction of SmFe_2 crystal, *J. Magn. Magn. Mater.* 195 (2) (1999) 376–383.

[12] R. Grössinger, R.S. Turtelli, N. Mehmood, Materials with high magnetostriction, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 60 (2014) 012002.

[13] Y.J. Tang, H.L. Luo, N.F. Gao, et al., Magnetic properties and magnetostriction in TbFe_2 compound with the addition of manganese

or gallium, *Appl. Phys. Lett.* 66 (3) (1995) 388–390.

[14] Y.M. Tang, L.Y. Chen, L. Zhang, et al., Temperature dependence of the magnetostriction in polycrystalline $\text{PrFe}_{1.9}$ and TbFe_2 alloys: experiment and theory, *Journal of Applied Physics* 115 (17) (2014) 173902.

[15] X.N. Liu, K. Lin, Q.L. Gao, et al., Structure and phase transformation in the giant magnetostriction Laves-phase SmFe_2 , *Inorganic Chemistry* 57 (2) (2018) 689–694.

[16] U. Atzmony, M.P. Darriel, Nonmajor cubic axes of easy magnetization in rare-earth-iron Laves compounds, *Phys. Rev. B* 13 (9) (1976) 4006–4014.

[17] V.S. Gaviko, A.V. Korolyov, N.V. Mushnikov, X-ray diffraction investigation of spin reorientation in SmFe_2 , *J. Magn. Magn. Mater.* 157–158 (May) (1996) 659–660.

[18] A.C. Ilyushin, E.V. Solodov, Z.S. Umkhaveva, Structural and spin-orientation phase transitions in pseudobinary $(\text{Sm}_{1-x}\text{Tb}_x)\text{Fe}_2$ system, *Journal Perspektivnye materialy* (11) (2013) 42–47.

[19] V.I. Mironov, Osnovy skaniruyushchey zondovoy mikroskopii [Principles of scanning probe microscopy], Institute for Physics of Microstructures of the RAN, Nizhni Novgorod, 2004.

[20] G.A. Politova, G.S. Burkhanov, I.S. Tereshina, et al., The effect of adding aluminum and iron to Tb-Dy-Ho-Co multialloys on their structure, magnetic and magnetocaloric properties, *Technical Physics* 62 (4) (2017) 577–582.

[21] N.V. Andreeva, A.V. Filimonov, A.I. Rudskoi, et al., A study of nanostructure magnetosolid Nd-Ho-Fe-Co-B materials via atomic force microscopy and magnetic force microscopy, *Physics of the Solid State* 58 (9) (2016) 1862–1869.

Received 01.02.2019, accepted 05.02.2019.

THE AUTHORS

POLITOVA Galina A.

Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science, RAS
49 Leninskiy Ave., Moscow, 119334, Russian Federation
gpolitova@gmail.com

KARPENKOV Aleksey Yu.

Tver State University
35 Sadovaya, 170002, Tver, Russian Federation
karpenkov_alex@mail.ru

KAMINSKAYA Tatiana P.

Lomonosov Moscow State University

GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

ktp53@mail.ru

GANIN Maksim A.

Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science, RAS

49 Leninskiy Ave., Moscow, 119334, Russian Federation

ganmax_90@mail.ru

KUMAR RAVI

Indian Institute of Technology Madras

Chennai (Madras), 600036, India

nvrk@iitm.ac.in

FILIMONOV Alexey V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

filimonov@rphf.spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.12103
УДК 532.517.4:536.24

МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ SST-МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлена новая модель для турбулентного числа Прандтля, обеспечивающая улучшение предсказательных возможностей популярной полуэмпирической модели турбулентности SST (Shear Stress Transport – модель переноса сдвиговых напряжений) при ее использовании для расчетов пристенного теплообмена. Начальное тестирование разработанной модели проведено на задачах установившегося течения и теплообмена в круглой трубе и плоскопараллельном канале при варьировании числа Прандтля в широких пределах: от 0,004 до 95. По результатам тестов погрешность расчета теплоотдачи во всем диапазоне значений числа Прандтля снизилась в два раза и более. Наибольший положительный эффект от использования разработанной модели наблюдается при числах Прандтля, меньших 0,1.

Ключевые слова: турбулентное течение, пристенный теплообмен, численное моделирование, турбулентное число Прандтля

Ссылка при цитировании: Зайцев Д.К., Смирнов Е.М. Метод расчета турбулентного числа Прандтля для SST-модели турбулентности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 39–49. DOI: 10.18721/JPM.12103

METHOD OF CALCULATION OF TURBULENT PRANDTL NUMBER FOR THE SST TURBULENCE MODEL

D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

We present a new model for turbulent Prandtl number that provides an improvement of prediction capabilities of the SST turbulence model in application to wall heat transfer problems. The model was calibrated using Kader's empirical correlation for near-wall temperature profile. To get an initial assessment of the model we performed computations of the fully developed flow in a round tube and a flat channel with Prandtl number varying from 0.004 to 95; the simulation results were validated against benchmark DNS data and empirical correlations for the Nusselt number. According to the tests, applying the new model resulted in considerable reduction of the Nusselt number prediction error (by factor two and more) in the whole range of Prandtl number considered; the most pronounced effect was observed at Prandtl number values below 0.1.

Keywords: turbulent flow, wall heat transfer, numerical simulation, turbulent Prandtl number

Citation: D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov, Method of calculation of turbulent Prandtl number for the SST turbulence model, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 39–49. DOI: 10.18721/JPM.12103

Введение

Для численного моделирования турбулентного теплопереноса на основе осредненных уравнений Навье – Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier – Stokes) сегодня в большинстве практических приложений используется та или иная полуэмпирическая модель турбулентной вязкости [1, 2], а связь коэффициентов турбулентной теплопроводности λ_t и вязкости μ_t задается турбулентным числом Прандтля $Pr_t = \mu_t C_p / \lambda_t$. Модели, в которых для определения коэффициента турбулентной теплопроводности предлагается решать дополнительные дифференциальные уравнения (например, уравнения переноса «энергии» температурных пульсаций и скорости ее диссипации [3]), чаще всего воспринимаются как излишне сложные, и пока они не получили широкого распространения.

В моделях теплопереноса, использующих турбулентное число Прандтля, для последнего обычно принимается постоянное значение (как правило, $Pr_t = 0,85$ или $0,90$, в зависимости от используемой модели турбулентности), что в большинстве случаев не соответствует действительности. Согласно общепринятым представлениям о механизме турбулентного теплопереноса, которые подкреплены множеством расчетных и экспериментальных исследований (см., например, обзоры [4 – 6]), турбулентное число Прандтля меняется в зависимости от значимости молекулярного теплопереноса на масштабах турбулентных пульсаций. А именно, в условиях, когда молекулярным переносом тепла можно пренебречь (вдали от ограничивающих поток стенок при достаточно больших значениях числа Рейнольдса), турбулентное число Прандтля должно иметь некое предельное значение $Pr_{t,\infty} < 1$; по мере же увеличения относительной роли молекулярного теплопереноса (например, при приближении к стенке, а также при уменьшении числа Рейнольдса и/или молекулярного числа Прандтля $Pr = \mu C_p / \lambda$) значение Pr_t должно увеличиваться.

В литературе предложены многочисленные модели для турбулентного числа Прандтля, призванные обеспечить лучшее, чем при использовании «стандартного» значения $Pr_t \approx 0,85$, согласие расчетных и опытных данных по теплоотдаче для некоторых классов течений. В качестве примера можно упомянуть следующие формулиров-

ки из работ [7, 4, 8, 9, 5] соответственно:

$$Pr_t = \Gamma / (1 - e^{-\Gamma}), \quad (1)$$

$$\Gamma = (0,014 Re^{0,45} Pr^{0,2})^{-1};$$

$$Pr_t = \left(1 + \frac{100}{\sqrt{Re} Pr}\right) \times \left(\frac{1}{1 + 120/\sqrt{Re}} - 0,15\right); \quad (2)$$

$$Pr_t = 1,855 - \text{th}(0,2y^+ - 1,5); \quad (3)$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\rho \tau_w} d}{\mu};$$

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{0,5}{Pr_{t,\infty}} + \frac{\alpha Pe_t}{Pr_{t,\infty}^{0,5}} - (\alpha Pe_t)^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-1}{\alpha Pe_t Pr_{t,\infty}^{0,5}}\right)\right]; \quad (4)$$

$$Pr_t = 0,85 + \frac{f}{Pe_t}; \quad (5)$$

$$Pe_t = Pr \cdot \frac{\mu_t}{\mu}.$$

Узкоспециализированные модели (1) и (2) разработаны для случая установившегося течения по цилиндрическим трубам. В этих моделях турбулентное число Прандтля полагается постоянным по сечению трубы, но его значение ставится в зависимость от глобального режимного параметра – числа Рейнольдса Re . Благодаря этому расчет дает правильное значение коэффициента теплоотдачи, хотя профиль температуры предсказывается не совсем верно.

Физически более оправданы модели (3) – (5), в которых значение Pr_t меняется по пространству, увеличиваясь при приближении к стенке. В частности, в формулировке (3) расстояние до стенки d явным образом входит в определение универсальной пристеночной координаты y^+ . Следует заметить, однако, что модель (3) весьма неудобна с точки зрения организации вычислений в современных гидродинамических (CFD – Computational Fluid Dynamics) кодах, поскольку используемый в выражении (3) аргумент y^+ не является чисто локальной переменной – для его вычисления требует-



ся знать напряжение трения τ_w на стенке, в точке, ближайшей к рассматриваемой точке потока.

В этом отношении более привлекательны модели, не требующие каких-либо нелокальных вычислений. В качестве примера можно упомянуть формулировки (4) и (5) с параметрами $Pr_{t,\infty} = 0,85$, $\alpha = 0,3$, $f = 2$, аргументом которых служит чисто локальный параметр Re_t , часто называемый турбулентным числом Пекле.

Отметим, что для обеих формулировок в литературе предложены также «нелокальные» модификации (малопригодные для внедрения в CFD-коды общего назначения). В частности, в работе [5] указывается на целесообразность «переключения» с корреляции (5) на фиксированное значение $Pr_t = 1,07$ при $y^+ < 10$, а в работе [10] для лучшего согласия с опытными данными по теплоотдаче в трубах при малых числах Прандтля (жидкие металлы) предложено вычислять предельное значение $Pr_{t,\infty}$ в выражении (4) с учетом числа Рейнольдса:

$$Pr_{t,\infty} = 0,85 + 100 Pr^{-1} Re^{-0,888}.$$

Следует также иметь в виду, что эффект от применения того или иного метода расчета турбулентного числа Прандтля может зависеть от используемой модели турбулентности, поскольку разные модели предсказывают различающиеся распределения турбулентной вязкости. В качестве примера можно упомянуть работу [11], в которой оценивалась точность моделей турбулентности $k - \epsilon$ [12] (realizable) и $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport) [13] применительно к расчету теплообмена; оценка проводилась на задаче о течении жидкого металла ($Pr = 0,025$) в плоскопараллельном канале. По результатам расчетов в указанной работе [11], при использовании модели $k - \epsilon$ наилучшее согласие с данными эталонных расчетов [14], выполненных по методу прямого численного моделирования (DNS – Direct Numerical Simulation), обеспечила корреляция (2), тогда как в случае модели SST лучшей оказалась формулировка (5) с параметром $f = 0,7$.

Таким образом, разработка модели для турбулентного числа Прандтля должна проводиться применительно к конкретной полуэмпирической модели турбулентности.

В настоящей работе предложен новый метод расчета турбулентного числа Прандтля, ориентированный в первую очередь на

моделирование пристенного теплообмена при малых и умеренных числах Прандтля с использованием популярной модели турбулентности $k - \omega$ SST [13].

В работе представлена концепция калибровки метода, дана его итоговая математическая формулировка, приведены результаты начального тестирования.

Расчеты проводились с помощью исследовательского CFD-кода SINF/Flag-S, ориентированного на численное решение задач гидродинамики и теплообмена с использованием структурированных и неструктурированных расчетных сеток, вписанных в границы области течения. Некоторые примеры применения кода и детали реализованных в нем численных схем даны в работах [15 – 19].

Математическая модель

В стандартной формулировке SST-модели турбулентности [13] значение турбулентного числа Прандтля полагается равным $Pr_t = 0,85$, что обычно обеспечивает приемлемую точность моделирования турбулентного теплопереноса для сред с числом Прандтля порядка единицы. Однако в случае жидких металлов, число Прандтля у которых на два порядка меньше, расчеты с указанным «стандартным» значением Pr_t значительно завышают теплоотдачу на стенке, поскольку, как уже было отмечено, турбулентное число Прандтля должно возрастать по мере увеличения относительной роли молекулярного теплопереноса; это особенно важно около стенки при малых числах Прандтля.

В настоящей работе, в качестве основы для доработки модели пристенного теплопереноса, из представленных в литературе соотношений для расчета турбулентного числа Прандтля была выбрана формулировка (5) [5], которая отличается простотой и удовлетворяет указанным выше общим требованиям. Подчеркнем также, что в рамках данной формулировки турбулентное число Прандтля вдали от стенки (где $\mu_t \gg \mu$ и, соответственно, $Re_t \gg 1$) стремится к «стандартному» значению $Pr_t = 0,85$, благодаря чему модель турбулентного теплопереноса подвергается ревизии только в пристенной области, без изменения свойств стандартной модели в остальной части потока.

Настройка предлагаемой модели для турбулентного числа Прандтля проводилась на задаче об установившемся плоском тече-

нии несжимаемой жидкости в зазоре между разнонагретыми стенками, одна из которых движется в продольном направлении (течение Куэтта). Число Рейнольдса Re , построенное по высоте канала и скорости движения стенки, полагалось равным 10^7 ; число Прандтля Pr варьировалось от 0,001 до 95.

Хотя данная задача, по сути, является одномерной, расчеты проводились в полной трехмерной постановке, с наложением условий периодичности (фактически, однородности) по продольному направлению. Поперек канала расчетная сетка бралась достаточно мелкой для получения сеточно-независимого решения (значение нормированной пристенной координаты в ближайшей к стенке расчетной точке составляло $y^+ < 0,03$). Для каждого выбранного числа Прандтля (общее количество вариантов составило 15) проводилась серия расчетов с различными значениями коэффициента f в выражении (5). По результатам расчетов определялось то «оптимальное» значение коэффициента f , которое обеспечивало наиболее близкое соответствие между расчетным профилем температуры $T^+(y^+)$ и следующей аппроксимацией:

$$\begin{aligned} T^+ &= e^{-G} Pr y^+ + e^{-1/G} T_{\log}^+; \\ G &= \frac{0,01 (Pr y^+)^4}{1 + 5 Pr^3 y^+}; \\ T_{\log}^+ &= 2,12 \ln (Pr (1 + y^+)) + \\ &+ \max (0; 3,85 Pr^{1/3} - 1,3)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} T^+ &= \frac{(T - T_w) \rho C_p u_\tau}{q_w}; \\ u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; y^+ = \frac{\rho du_\tau}{\mu}. \end{aligned}$$

Эта аппроксимация базируется на широко известной полуэмпирической корреляции Кадера [20], которая удачно аппроксимирует обширные опытные данные при числах Прандтля от 0,025 до 95 и, следовательно, может рассматриваться как их достаточно надежный аналитический «эквивалент». Ввиду использования довольно большого значения числа Рейнольдса, из оригинальной корреляции Кадера [20] были

убраны поправки, учитывающие влияние высоты канала. Также в аппроксимацию (6) введен ограничитель, устраняющий немонотонность по числу Прандтля в области его сверхмалых значений (второе слагаемое в выражении для $T_{\log}^+$).

Помимо подбора коэффициента f , вводились некоторые модификации в соотношения (5) с целью получения наилучшего согласования расчетного профиля температуры с аппроксимацией (6). В частности, опробовались различные ограничители, предотвращающие неограниченный рост Pr_t при $Re_t \rightarrow 0$. Итоговая формулировка разработанной модели для турбулентного числа Прандтля описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} Pr_t &= 0,85 \cdot \begin{cases} (1 + f^*/Pe_t^*), & f^* > 0; \\ (1 - f^*/Pe_t^*)^{-1}, & f^* < 0; \end{cases} \\ Pe_t^* &= \sqrt{0,01 + (Pr \mu_t / \mu)^2}; \\ f^*(Pr) &= (\psi_1 - 1) \cdot (\psi_2^2 + \psi_3^2)^{1/2}; \\ \psi_1 &= \left[(0,68 \ln(1 + 50/Pr) + \right. \\ &\left. + 0,46)^{-4} + 2,2^{-4} \right]^{-1/4}; \\ \psi_2 &= 0,25 + \frac{0,75}{1 + 500 Pr^2}; \\ \psi_3 &= 0,11 + \frac{0,89}{1 + 5 Pr^{-2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь функция $f^*(Pr)$ задается выражениями, полученными в результате аппроксимации дискретных «оптимальных» значений коэффициента f^* . Качество данной аппроксимации иллюстрируется на рис. 1.

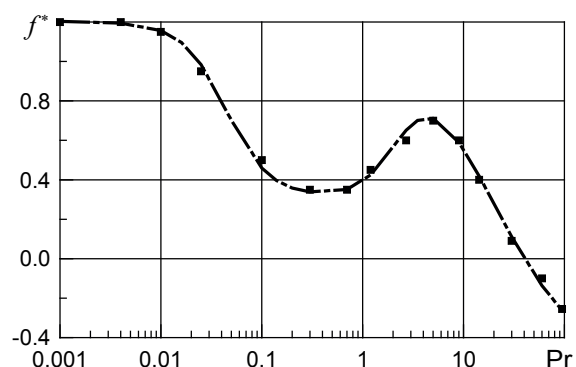


Рис. 1. Вид функции $f^*(Pr)$ в соотношениях (7); представлены дискретные «оптимальные» значения f^* (символы) и аппроксимирующая функция (линия)

На рис. 2 пристенные профили температуры для течения Куэтта, рассчитанные при $Pr = 0,7$ и $0,025$, сопоставляются с соответствующими опытными данными, приведенными в работе [20]. Видно, что использование разработанной модели (7) обеспечило значительно лучшее согласие расчетных и измеренных профилей температуры, по сравнению со случаем стандартного значения $Pr = 0,85$. Это позволяет рассчитывать и на более точное предсказание коэффициента теплоотдачи.

Тестовые расчеты

Представленная выше настройка модели теплопереноса (7) проводилась на модельной задаче Куэтта при довольно большом (нетипичном для практических приложений) числе Рейнольдса, что было продиктовано стремлением свести к минимуму влияние высоты канала на пристенную область течения и получить в профиле температуры хорошо различимый «логарифмический» участок. Для оценки предсказательных возможностей разработанной модели в условиях, более приближенных к реальным конфигурациям, были проведены RANS-расчеты течения жидкости в круглой трубе и в плоскопараллельном канале при умеренных числах Рейнольдса (порядка $10^4 - 10^5$). В обоих случаях рассматривалось установившееся течение (под действием заданного перепада давления) с объемным источником тепла. Как и для течения Куэтта, задача решалась в трехмерной постановке с наложением условий периодичности по

продольному направлению; расчетная сетка была достаточно мелкой ($y^+ < 0,03$) для получения сеточно-независимого решения.

Рассмотрим более подробно задачу о течении в круглой трубе. В рамках принятой постановки движение задается наложением продольного градиента давления dp/dx (эквивалентная объемная сила), а среднерасходная скорость U находится по результатам расчета. Градиент давления связан с напряжением трения на стенке τ_w и диаметром трубы D балансовым соотношением

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4\tau_w}{D}.$$

При переходе к безразмерным величинам из этого соотношения следует связь между числом Рейнольдса Re , «динамическим» числом Рейнольдса Re_τ и коэффициентом гидравлического сопротивления ξ :

$$\frac{Re_\tau}{Re} = \frac{u_\tau}{U} = \sqrt{\frac{\xi}{8}},$$

где упомянутые безразмерные параметры определены следующим образом:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu};$$

$$Re_\tau = \frac{\rho u_\tau D}{\mu}; \quad (8)$$

$$\xi = \left| \frac{dp}{dx} \right| \cdot \frac{2D}{\rho U^2}.$$

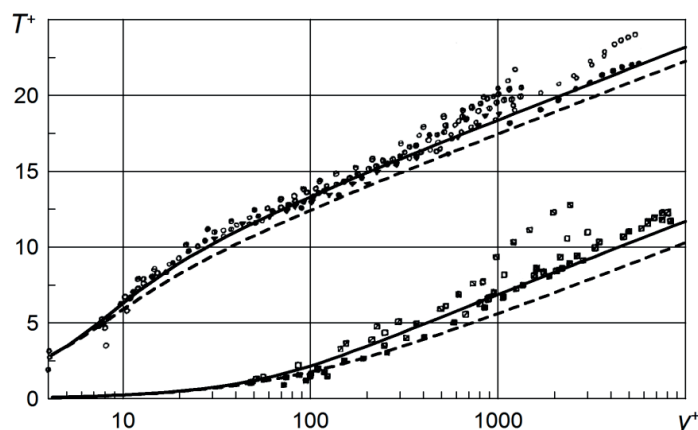


Рис. 2. Расчетные (линии) и измеренные (символы) профили температуры в пристенной области квазиравновесного турбулентного течения для значений числа Прандтля $Pr = 0,7$ и $0,025$ (верхние и нижние профили соответственно); приведены результаты расчетов по модели (7) (сплошные линии) и при $Pr = 0,85$ (пунктиры); символы — опытные данные разных авторов из работы [20]

Таким образом, задаваемым параметром задачи фактически является «динамическое» число Рейнольдса Re_τ , а значения Re и ξ определяются по результатам расчета профиля скорости.

Нагрев жидкости относительно фиксированной температуры стенки T_w создается равномерным объемным источником тепла Q , который фактически задает плотность q_w теплового потока на стенке: $q_w = QD/4$. Такая модельная постановка задачи с объемным источником тепла примерно соответствует условиям физических экспериментов с постоянным тепловым потоком на стенке. По полученным в результате расчета полям скорости и температуры потока определяется среднемассовая температура $\bar{T}$ и отвечающий ей безразмерный коэффициент теплоотдачи — число Нуссельта:

$$Nu = \frac{q_w D}{(\bar{T} - T_w) \lambda}. \quad (9)$$

Расчеты проводились по модели турбулентности $k - \omega$ SST [13] для двух значений «динамического» числа Рейнольдса: $Re_\tau = 10^3$ и $5 \cdot 10^3$; полученные значения числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления ξ (8) составили, соответственно, $Re = 1,671 \cdot 10^4$ и $1,045 \cdot 10^5$, $\xi = 0,0286$ и $0,0183$. Отметим, что отклонение расчетных значений коэффициента сопротивления от значений, даваемых известной формулой Блазиуса [21]

$$\xi = \frac{0,3164}{Re^{0,25}},$$

не превышает 4 %.

Расчеты проводились при значениях числа Прандтля от 0,004 до 95. Наряду с разработанной моделью (7) был использован и стандартный подход с заданием фиксированного значения турбулентного числа Прандтля $Pr_\tau = 0,85$.

На рис. 3 представлены сводные результаты тестовых расчетов, а именно — сравнение расчетных данных по числу Нуссельта (точки) с известными эмпирическими корреляциями для гладких труб (линии):

$$Nu = \frac{(\xi/8) Pr Re}{1,07 + 12,7 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}; \quad (10)$$

$$Nu = 6,3 + 0,0167 Re^{0,85} Pr^{0,93}. \quad (11)$$

Корреляция (10) [22, 23] для умеренных чисел Прандтля ($0,5 < Pr < 200$) связывает

число Нуссельта с коэффициентом сопротивления ξ (см. формулу (8)); погрешность этой корреляции в диапазоне чисел Рейнольдса $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ не превышает 6 %.

Корреляция (11) [24] считается одной из лучших для жидких металлов в диапазоне чисел Рейнольдса $10^4 < Re < 10^6$.

Как можно видеть на рис. 3, для чисел Прандтля $Pr \geq 0,7$ отклонение расчетных значений числа Нуссельта от эмпирической корреляции (10) не превышает 10 %, а положительный эффект от использования разработанной модели (7) оказывается сравнительно малым — менее 5 %. Для малых чисел Прандтля ($Pr \leq 0,1$) расчет со «стандартным» значением $Pr_\tau = 0,85$ дает существенно завышенную интенсивность теплоотдачи (максимально — почти в полтора раза); использование модели (7) значительно улучшает ситуацию — отклонение от корреляции (11) не превышает 20 %. В целом, если учесть большой разброс опытных данных по теплоотдаче для жидких металлов, то такую точность расчета с использованием модели (7) можно считать вполне удовлетворительной.

Для второго теста по проверке работоспособности предлагаемой модели (течение в плоскопараллельном канале) имеется

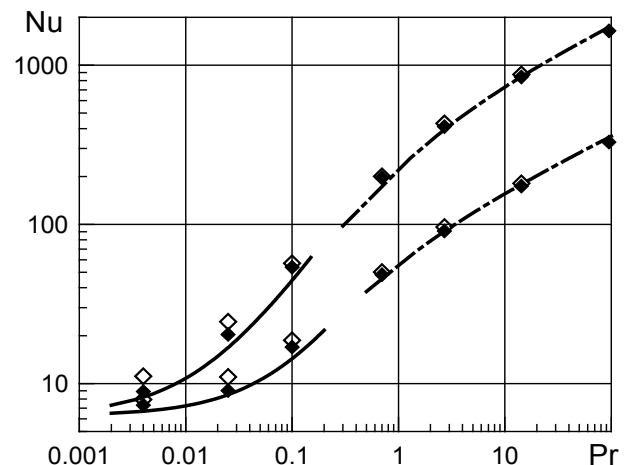


Рис. 3. Сравнение расчетных (символы) и экспериментальных (линии) данных по теплоотдаче в круглой трубе при значениях «динамического» числа Рейнольдса $Re_\tau = 10^3$ и $5 \cdot 10^3$ (нижние и верхние кривые соответственно);

приведены результаты расчетов по модели (7) и при $Pr_\tau = 0,85$ (затушеванные и пустые символы соответственно), а также эмпирические корреляции по формулам (10) и (11) (сплошные линии и штрихпунктиры соответственно)



открытая база данных DNS-расчетов [25], проведенных при числах Прандтля от 0,025 до 10. Постановка задачи полностью аналогична рассмотренной выше для случая круглой трубы.

Сначала, следуя условиям численных экспериментов [25], были выполнены расчеты течения в канале при значениях «динамического» числа Рейнольдса $Re_\tau = 360$ и 790 (за масштаб длины принята высота канала D). Однако полученные значения числа Рейнольдса Re (8) оказались на 4 % ниже соответствующих значений, приведенных в работе [25]; это равносильно завышению коэффициента гидравлического сопротивления примерно на 7 %. Поскольку при теплогидравлическом анализе число Нуссельта принято соотносить с числом Рейнольдса Re (а не Re_τ), дальнейшие расчеты проводились при скорректированных значениях $Re_\tau = 373$ и 814. В таком случае отклонение полученных значений числа Рейнольдса $Re = 5,70 \cdot 10^3$ и $1,41 \cdot 10^4$ от «эталонных» значений, представленных в работе [25], не превышало 0,5 %.

Главным источником погрешности определения коэффициента гидравлического сопротивления в настоящих расчетах выступает, очевидно, сама SST-модель турбулентности, одной из особенностей которой является не вполне адекватное предсказание значений турбулентной вязкости в пристенной области течения. В частности, как видно на рис. 4, в расчете по указан-

ной модели, при $Re = 1,41 \cdot 10^4$ полученное значение турбулентной вязкости на границе вязкого подслоя ($y^+ \approx 10$) оказывается завышенным в полтора раза, что приводит к заметному искажению профиля скорости потока $u^+ = u/u_\tau$. Естественно, это сказывается и на величине напряжения трения на стенке.

На рис. 4, *b* также приведено известное аналитическое решение

$$u_{\log}^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5 \quad (12)$$

для распределения скорости в равновесной «логарифмической» области пристенного течения (см., например, [21]). По опыту расчетов с использованием SST-модели турбулентности, данной модели свойственно затягивание начала «логарифмического» участка в пристенном профиле скорости. На рис. 4, *b* можно видеть, что DNS-расчет показывает наличие в пристенном профиле скорости довольно протяженного «логарифмического» участка, тогда как в расчете по модели SST соответствующий участок практически вырождается.

На рис. 5 представлены нормированные профили температуры $T^+(y^+)$, полученные в настоящей работе и в эталонных DNS-расчетах [25] при значениях числа Прандтля $Pr = 0,71$ и 0,025. Видно, что, как и на рис. 2, использование модели (7) обеспечивает значительно лучшую согласованность расчетных профилей температуры с эталонными данными.

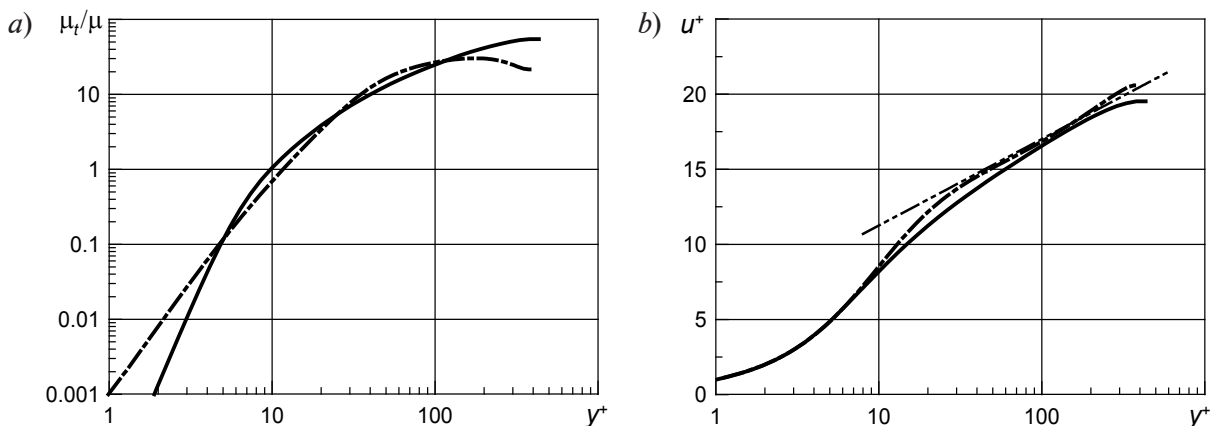


Рис. 4. Нормированные профили турбулентной вязкости (*a*) и скорости (*b*) в плоскопараллельном канале при $Re = 1,41 \cdot 10^4$;

представлены результаты расчета по модели SST (сплошные линии), DNS-расчета [25] (штрихпунктиры), а также аналитическое решение (12) (двойной штрихпунктир)

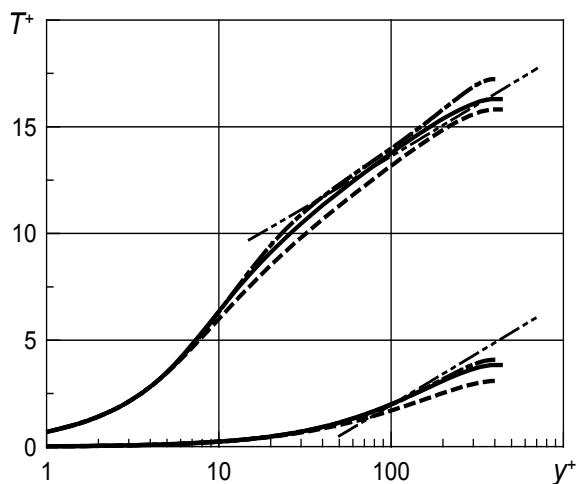


Рис. 5. Профили температуры $T^+(y^+)$ в плоском канале при $Re = 1,41 \cdot 10^4$ для значений $Pr = 0,71$ и $0,025$ (верхнее и нижнее семейства кривых соответственно);

представлены результаты расчета по модели (7) (сплошные линии), расчета при $Pr_t = 0,85$ (пунктиры), DNS-расчета [25] (штрихпунктиры), а также «логарифмические» профили $T_{\log}^+$ (6) (двойные штрихпунктиры)

На рис. 6 представлены сводные результаты тепловых расчетов, а именно – сравнение данных по числу Нуссельта (9), полученных в настоящей работе (линии) и в DNS-расчетах [25] (точки). Можно видеть, что, аналогично предыдущему тесту (см. рис. 3), использование разработанной модели (7) заметно улучшает точность расчета теплоотдачи при всех значениях числа Прандтля. В области $Pr \geq 0,2$ максимальное отклонение числа Нуссельта от эталонных значений [25] уменьшилось с 15 до 8 %, а при $Pr \leq 0,1$ – с 24 до 6 %

Отметим также, что итоговая погрешность расчета теплоотдачи – величина того же уровня, что и погрешность расчета трения (около 7 %). Это подталкивает нас к заключению о том, что обе погрешности обусловлены не вполне правильным поведением турбулентной вязкости, предсказываемым моделью турбулентности $k - \omega$ SST.

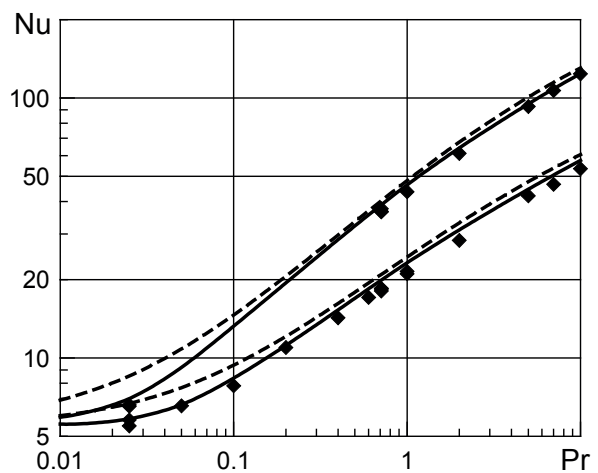


Рис. 6. Расчетные результаты по теплоотдаче в плоскопараллельном канале при значениях числа Рейнольдса $Re = 5,7 \cdot 10^3$ и $1,41 \cdot 10^4$ (нижнее и верхнее семейства кривых соответственно);

приведены результаты расчетов по модели (7) (сплошные линии), расчетов при значениях $Pr_t = 0,85$ (пунктиры), DNS-расчетов [25] (символы)

Заключение

В проведенном исследовании получены следующие основные результаты.

Разработана новая модель для расчета локального турбулентного числа Прандтля, обеспечивающая улучшенное качество предсказания характеристик теплопереноса в потоках жидкости с малыми и умеренными числами Прандтля в случае применения популярной модели турбулентности $k - \omega$ SST.

Проведено начальное тестирование разработанной модели на задачах установившегося течения и теплообмена в круглой трубе и плоскопараллельном канале при варьировании числа Прандтля от 0,004 до 95. Показано, что применение предлагаемой модели приводит к значительному уменьшению погрешности расчета теплоотдачи (до двух и более раз). Наибольший положительный эффект достигается при числах Прандтля, меньших одной десятой.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-19-00082.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wilcox D.C.** Turbulence modelling for CFD. La Canada: DCW Industries Inc., 1993. 460 p.
2. **Leschziner M.** Statistical turbulence modelling for fluid dynamics, demystified. London: Imperial College Press, 2016. 424 p.
3. **Nagano Y., Shimada M.** Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers // *Physics of Fluids*. 1996. Vol. 8. No. 12. Pp. 3379–3402.
4. **Reynolds A.J.** The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1975. Vol. 18. No. 9. Pp. 1055–1069.
5. **Kays W.M.** Turbulent Prandtl number – Where are we? // *ASME Journal of Heat Transfer*. 1994. Vol. 116. No. 2. Pp. 284–295.
6. **Chen F., Huai X., Cai J., Li X., Meng R.** Investigation on the applicability of turbulent Prandtl number models for liquid lead-bismuth eutectic // *Nuclear Engineering and Design*. 2013. Vol. 257. April. Pp. 128–133.
7. **Aoki S.** A consideration on the heat transfer in liquid metal // *Bulletin of the Tokyo Institute of Technology. Ser. B*. 1963. Vol. 54. Pp. 63–73.
8. **Hollingsworth D.K., Kays W.M., Moffat R.J.** Measurement and prediction of the turbulent thermal boundary layer in water on flat and concave surface // *Report HMT-41*. Dept. Mech. Engineering, Stanford University, 1989.
9. **Kays W.M., Crawford M.E.** Convective heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill, 1980. 387 p.
10. **Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E.** An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1997. Vol. 40. No. 17. Pp. 4191–4196.
11. **Vodret S., di Maio D.V., Caruso G.** Numerical simulation of turbulent forced convection in liquid metals // *Journal of Physics: Conference Series*. 2014. Vol. 547. P. 012033. Pp. 1–10.
12. **Shih T.H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.** A new $k - \epsilon$ eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – model development and validation // *Computers & Fluids*. 1995. Vol. 24. No. 3. Pp. 227–238.
13. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. 4. Begell House. 2003. Pp. 625–632.
14. **Kawamura H., Abe H., Matsuo Y.** DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1999. Vol. 20. No. 3. Pp. 196–207.
15. **Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.** Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // *Научно-технические ведомости*. 2004. № 2 (36). С. 70–81.
16. **Абрамов А.Г., Ковалев Г.А., Смирнов Е.М.** Численное моделирование циркуляции паровоздушной среды и сопутствующей конденсации на ряде вертикальных трубок // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2013. № 3 (177). С. 69–79.
17. **Пожилов А.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Смирновский А.А.** Численное моделирование тепломассопереноса в трехмерной модели испарителя контурной тепловой трубы // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 3. С. 52–63.
18. **Смирнов С.И., Смирнов Е.М., Смирновский А.А.** Влияние теплопереноса в торцевых стенках на турбулентную конвекцию ртути во вращающемся цилиндре // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10, № 1. С. 31–46.
19. **Smirnov E.M., Smirnovsky A.A., Schur N.A., Zaitsev D.K., Smirnov P.E.** Comparison of RANS and IDDES solutions for turbulent flow and heat transfer past a backward-facing step // *Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 54. No. 8. Pp. 2231–2241.
20. **Kader B.A.** Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1981. Vol. 24. No. 9. Pp. 1541–1544.
21. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
22. **Петухов Б.С., Кириллов В.В.** К вопросу о теплообмене при турбулентном течении жидкости в трубах // *Теплоэнергетика*. 1958. № 4. С. 63–68.
23. **Petukhov B.S.** Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. Vol. 6. Pp. 504–564.
24. **Sleicher C.A., Awad A.S., Notter R.H.** Temperature and eddy diffusivity profiles in

- NaK // International Journal of Heat Mass Transfer. 1973. Vol. 16. No. 8. Pp. 1565–1575. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html>
 25. **Kawamura H.** DNS database of wall turbulence and heat transfer. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html> (Accessed date: 11.01. 2019).

Статья поступила в редакцию 16.01.2019, принята к публикации 31.01.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЗАЙЦЕВ Дмитрий Кириллович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 zaitsev_dk@spbstu.ru

СМИРНОВ Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 smirnov_em@spbstu.ru

REFERENCES

- [1] **D.C. Wilcox**, Turbulence modelling for CFD, DCW Industries Inc., 1993.
- [2] **M. Leschziner**, Statistical turbulence modeling for fluid dynamics, demystified, Imperial College Press, London, 2016.
- [3] **Y. Nagano, M. Shimada**, Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers, Physics of Fluids. 8(12) (1996) 3379–3402.
- [4] **A.J. Reynolds**, The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers, International Journal of Heat and Mass Transfer. 18 (9) (1975) 1055–1069.
- [5] **W.M. Kays**, Turbulent Prandtl number — Where are we? ASME Journal of Heat Transfer. 116 (2) (1994) 284–295.
- [6] **F. Chen, X. Huai, J. Cai, et al.**, Investigation on the applicability of turbulent Prandtl number models for liquid lead-bismuth eutectic, Nuclear Engineering and Design. 257 (April) (2013) 128–133.
- [7] **S. Aoki**, A consideration on the heat transfer in liquid metal, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, Ser. B. 54 (1963) 63–73.
- [8] **D.K. Hollingsworth, W.M. Kays, R.J. Moffat**, Measurement and prediction of the turbulent thermal boundary layer in water on flat and concave surface, Report HMT-41 (1989). Dept. Mech. Engineering, Stanford University.
- [9] **W.M. Kays, M.E. Crawford**, Convective heat and mass transfer, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [10] **B. Weigand, J.R. Ferguson, M.E. Crawford**, An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model, International Journal of Heat and Mass Transfer. 40 (17) (1997) 4191–4196.
- [11] **S. Vodret, D.V. di Maio, G. Caruso**, Numerical simulation of turbulent forced convection in liquid metals, Journal of Physics: Conference Series. 547 (2014) 012033, 1–10.
- [12] **T.H. Shih, W.W. Liou, A. Shabbir, et al.**, A new k–ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — Model development and validation, Computers & Fluids. 24(3) (1995) 227–238.
- [13] **F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry**, Ten years of industrial experience with the SST turbulence model, Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, Begell House, (2003) 625–632.
- [14] **H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo**, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, International Journal of Heat and Fluid Flow. 20(3) (1999) 196–207.
- [15] **E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev**, Finite volume method as applied to hydro- and gas dynamics and heat transfer problems in complex geometry domains, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. (2(36)) (2004) 70–81.
- [16] **A.G. Abramov, G.A. Kovalev, E.M. Smirnov**, Numerical simulation of circulation of steam-air mixture and film condensation on series of vertical tubes, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3 (177)) (2013) 69–79.



- [17] **A.A. Pozhilov, D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky**, Numerical simulation of heat and mass transfer in a 3D model of a loop heat pipe evaporator, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 3(3) (2017) 210–217.
- [18] **S.I. Smirnov, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky**, Endwall heat transfer effects on the turbulent mercury convection in a rotating cylinder, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 3(2) (2017) 83–94.
- [19] **E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky, N.A. Schur, et al.**, A comparison of RANS and IDDES solutions for turbulent flow and heat transfer past a backward-facing step, *Heat and Mass Transfer*. 54(8) (2018) 2231–2241.
- [20] **B.A. Kader**, Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 24 (9) (1981) 1541–1544.
- [21] **H. Schlichting**, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [22] **B.S. Petukhov, V.V. Kirillov**, K voprosu o teploobmene pri turbulentnom techenii zhidkosti v trubah [On heat exchange in the turbulent fluid flow in tubes], *Thermal Engineering*. 4 (1958) 63–68.
- [23] **B.S. Petukhov**, Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties, *Advances in Heat Transfer*. 6 (1970) 504–564.
- [24] **C.A. Sleicher, A.S. Awad, R.H. Notter**, Temperature and eddy diffusivity profiles in NaK, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 16(8) (1973) 1565–1575.
- [25] **H. Kawamura**, DNS database of wall turbulence and heat transfer, <https://www.rs.tus.ac.jp/~t2lab/db/index.html>, accessed Jan. 11, 2019.

Received 16.01.2019, accepted 31.01.2019.

THE AUTHORS

ZAITSEV Dmitri K.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

zaitsev_dk@spbstu.ru

SMIRNOV Evgueni M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

smirnov_em@spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.12104

УДК 517.946

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ, ИНИЦИИРОВАННЫЕ ГРАНИЧНЫМ РЕЖИМОМ

Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

Рассматриваются поперечные колебания полуограниченной струны, состоящей из различных материалов. Математической моделью служит однородное волновое уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами. В качестве первого этапа исследуется решение этого уравнения с нулевыми данными Коши. Доказывается существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи, и анализируются его свойства. Отмечается специфичность полученных выводов, в частности, указываются зоны распространения колебаний и их отсутствия. Полученные результаты имеют конструктивный характер и могут служить основой создания численного алгоритма. Актуальность подобных задач вызвана их использованием в теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, разрывный коэффициент, зондирование неизвестных сред, волновой процесс

Ссылка при цитировании: Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Колебания полуограниченной струны, инициированные граничным режимом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 50–60. DOI: 10.18721/JPM.12104

SEMI-BOUNDED STRING'S VIBRATIONS INITIATED BY THE BOUNDARY REGIME

D.S. Anikonov, D.S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

Transverse vibrations of a semi-bounded string consisting of different materials are considered. The homogeneous wave equation with piecewise constant coefficients stand duty as a mathematical model. As a first step, we have investigated the solution of this equation with zero Cauchy data. The existence and uniqueness of the generalized solution of the problem were proved and the properties of the solution were analyzed. The specificity of the obtained conclusions was discussed, in particular, the zones of oscillations' propagation and of their absence were demonstrated. The obtained results are of a constructive character and can serve as a basis for the creation of a numerical algorithm. The importance of such problems is caused by their use in the theory of sensing inhomogeneous media by physical signals.

Keywords: differential equation, discontinuous coefficient, sounding of unknown media, wave process

Citation: D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, Semi-bounded string's vibrations initiated by the boundary regime, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 50–60. DOI: 10.18721/JPM.12104

Введение

В настоящей работе исследуются решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами при старших производных. Это научное направление пока еще находится в стадии становления, и по нему имеются лишь разрозненные результаты. Вместе с тем мы можем указать на ряд работ подобного типа [1–13], из которых наиболее близкими к настоящей статье являются [8–10].

Суть данной проблемы состоит в следующем. На плоскости переменных (x, t) в первом квадранте

$$\mathbb{R}_2^{++} = \{(x, t), x > 0, t > 0\}$$

рассматривается уравнение

$$\alpha(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \beta(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}_2^{++}, \alpha(x), \beta(x) > 0$$

и дополнительные условия

$$u(0, t) = \mu(t), u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\mu(t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и выполняются условия согласования

$$\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0, \quad (3)$$

Эти условия совпадают с традиционными требованиями, которые сформулированы в монографии [11].

Для удобства считаем функцию $\mu(t)$ продолженной нулем при $t < 0$. Задача (1), (2) состоит в нахождении функции $u(x, t)$ при заданных функциях $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\mu(t)$. Формулы для ее решения при постоянных α , β хорошо известны и приводятся, например, в монографии [11].

Мы рассматриваем случай, который ранее не изучался; это когда функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ кусочно-постоянны:

$$\alpha(x) = \alpha_1, 0 \leq x \leq x_0, \alpha(x) = \alpha_2, x > x_0;$$

$$\beta(x) = \beta_1, 0 \leq x \leq x_0, \beta(x) = \beta_2, x > x_0,$$

где x_0 , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 – положительные постоянные числа.

Равенства (1), (2), в частности, представляют собой математическую модель процесса поперечных колебаний полуограниченной струны. При этом колебания вызваны в данном случае только поведением

граничной точки ($x = 0$). Как показал предварительный анализ, более общая задача с ненулевой правой частью уравнения (1) и ненулевыми данными Коши ($u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$) потребует весьма громоздкого исследования, которое, вероятно, будет выполнено авторами в дальнейшем поэтапно.

Также отметим, что рассмотренная задача (1), (2) довольно специфична как по возможности использования сравнительно простого метода, так и по выводам. В частности, будет указана зона распространения колебаний и зона их отсутствия. Структура этих зон определяется значениями разрывных коэффициентов уравнения (1) и отличается от классического случая.

Принятые обозначения и определения

Для первых производных произвольной функции $\chi(x, t)$, дифференцируемой по x и по t , кроме традиционных обозначений, будем использовать также запись $\partial_1 \chi(x, t)$, $\partial_2 \chi(x, t)$

Введем в рассмотрение следующие единичные векторы, имеющие характеристические направления:

$$\omega_1^+ = \left(\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \beta_1}, \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_1 + \beta_1} \right),$$

$$\omega_1^- = \left(\frac{-\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \beta_1}, \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_1 + \beta_1} \right),$$

$$\omega_2^+ = \left(\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\alpha_2} + \beta_2}, \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 + \beta_2} \right),$$

$$\omega_2^- = \left(\frac{-\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\alpha_2} + \beta_2}, \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 + \beta_2} \right).$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1 \beta_1}, \gamma_2 = \sqrt{\alpha_2 \beta_2},$$

$$a_1 = \sqrt{\beta_1} / \sqrt{\alpha_1},$$

$$a_2 = \sqrt{\beta_2} / \sqrt{\alpha_2}.$$

В квадранте $\mathbb{R}_2^{++}$ выделяются следующие множества:

$$G_1 = \{(x, t) : 0 < x < x_0, t > 0\},$$

$$G_2 = \{(x, t) : x > x_0, t > 0\},$$

$$G_0 = G_1 \cup G_2.$$

Далее в нашей работе широко исполь-

зуются криволинейные интегралы второго рода. Для кривой с началом в точке $P = (p_1, p_2)$ и концом в точке $Q = (q_1, q_2)$ используется обозначение (PQ) . Если кривая является границей односвязной ограниченной области, то принята ориентация, когда при перемещении точки по кривой область располагается слева. Считаем, что точки P и Q принадлежат кривой (PQ) .

Обобщенное решение ищется в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих условиям (2) и уравнению (1) в областях G_1 и G_2 . В целом $u(x, t)$ считается непрерывной при $x \geq 0$, $t \geq 0$ и имеющей частные производные в областях G_1 и G_2 , равномерно непрерывные в любой ограниченной подобласти в G_1 и G_2 . Кроме того, предполагается, что на луче (x_0, t) , $t > 0$ выполнены условия сопряжения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \partial_2 u(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \partial_2 u(x, t), \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \beta_1 \partial_1 u(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \beta_2 \partial_1 u(x, t), \quad (5)$$

которые являются следствиями закона Гука и закона сохранения импульса.

В книге [11] рассматривается задача, совпадающая по смыслу с задачей (1), (2), сформулированной нами, но там введены другие ограничения. А именно – вместо уравнения (1) исследуется интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $u(x, t)$, записанное через криволинейный интеграл второго рода:

$$J(G) = \int_{\partial G} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = 0. \quad (6)$$

В равенстве (6) аргумент G – это произвольная односвязная область в $\mathbb{R}_2^{++}$, а ее граница ∂G – кусочно-гладкая линия класса C^1 . Функция $u(x, t)$ непрерывна в $\mathbb{R}_2^{++}$, а ее частные производные $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ – кусочно-непрерывны с возможными разрывами первого рода на некоторых линиях. При этом допускается наличие разрывов $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ внутри G , а также возможен случай, когда линия разрывов совпадает с частью ∂G . Тогда в качестве производных $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ берутся их предельные значения изнутри области G . Подчеркнем, что уравнение (6) есть следствие закона Гука и закона сохранения импульса. Соответственно и выводы, полученные из равенства (6),

также следуют из этих законов.

Уравнение (6) с условием (2) будем называть задачей (6), (2). Отметим, что в монографии [11] авторы при постановке задачи допускают наличие переменных $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в уравнении (6), однако все выводы они делают только для постоянных коэффициентов.

Построение составных характеристик, исходящих из точки области G_1

Далее в работе будет неоднократно использоваться следующее простое утверждение для функций $u(x, t)$, описанных в задаче (6), (2).

Лемма. Верны следующие равенства:

$$\int_{(PQ)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \gamma_i(u(Q) - u(P)), \quad (7)$$

$$(PQ) \subset \overline{G_i}, (PQ) = \{P - \tau \omega_i^+, \tau \in [0, |Q - P|]\}, \\ i = 1, 2;$$

$$\int_{(PQ)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\ = -\gamma_i(u(Q) - u(P)), \\ (PQ) \subset \overline{G_i}, (PQ) = \\ = \{P + \tau \omega_i^-, \tau \in [0, |Q - P|]\}, \\ i = 1, 2.$$

Доказательство. Используем в левой части формулы (7) представление

$$(PQ) = \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right), \\ 0 \leq s \leq |Q - P|,$$

и таким путем перейдем к обычному определенному интегралу:

$$\int_{(PQ)} \alpha_i \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta_i \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\ = \int_0^{|QP|} \left[\alpha_i \partial_2 u \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, \right. \right. \\ \left. \left. p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right) \frac{-\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & +\beta_i \partial_1 u \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, \right. \\
 & \left. p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right) \frac{-\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \Big] ds = \\
 & = \sqrt{\alpha_i \beta_i} \int_0^{|Q|} \frac{d}{ds} [u(P - s\omega_i^+)] = \\
 & \gamma_i(u(Q) - u(P)).
 \end{aligned}$$

В итоге полученные равенства доказывают формулу (7); формула же (8) доказывается совершенно аналогично.

Лемма доказана.

Далее сделаем следующие построения.

Из начала координат проведем отрезок прямой $x = a_1 t$ до его пересечения с линией $x = x_0$ в точке $P = (x_0, p)$. Затем из точки P проведем луч, лежащий на линии $x - x_0 = a_2(t - p)$ и находящийся в области G_2 . Обозначим через G_3 область, ограниченную указанными отрезком и лучом сверху, а также полуосью Ox , $x > 0$ снизу.

Покажем, что из равенства (6) следует другое равенство:

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in G_3.$$

Возьмем произвольную точку $H = (x_0, h)$ в области G_3 .

Прямые

$$x - x_0 = a_1(t - h), \quad x - x_0 = -a_2(t - h)$$

пересекают полуось Ox , $x > 0$ в точках C и B соответственно.

В качестве области G возьмем треугольник $G(H)$ с вершинами в точках H, B, C ; на основании леммы и формулы (6) имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial G(H)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\
 & = \int_{(HC)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau + \\
 & + \int_{(CB)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau + \\
 & + \int_{(CH)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\
 & = \gamma_1(u(C) - u(H)) - \gamma_2(u(H) - u(B)) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенств

$$u(C) = u(B) = 0$$

имеем равенство $u(H) = 0$.

Теперь возьмем точку

$$M = (x, t) \in G_1 \cap G_3.$$

Прямая $\xi - x = a_1(\tau - t)$, проходящая через точку M , пересекает полуось Ox , $x > 0$ в точке C' . Рассмотрим прямую

$$\xi - x = -a_1(\tau - t),$$

также проходящую через точку M . Из двух возможных вариантов рассмотрим более сложный, когда указанная прямая пересекает луч (x_0, t) , $t > 0$, в точке $H = (x_0, h)$ в области G_3 . Далее через точку H проведем прямую

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h),$$

пересекающую полуось Ox , $x > 0$ в точке B' .

Рассмотрим четырехугольник $G(M)$ с вершинами M, C', B', H . Применяем формулу (6) к области $G = G(M)$ и вычисляем интегралы вдоль прямолинейных участков ее границы; с учетом равенств

$$u(C') = u(B') = u(H) = 0,$$

получаем равенство $u(M) = 0$.

Для точки $M = (x, t) \in G_2 \cap G_3$ рассуждения полностью аналогичны.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что характеристики для уравнения (1) представляют собой отрезки прямых

$$x = \pm a_1 t + \text{const}$$

в области G_1 , а в области G_2 — отрезки прямых

$$x = \pm a_2 t + \text{const}.$$

Возьмем точку $M_1 \in G_1 \setminus \overline{G_3}$, т. е.

$$M_1 = (x, t), \quad 0 < x < x_0, \quad t > a_1 x$$

(рис. 1). Из точки M_1 проведены две непрерывные составные характеристики, лежащие в области G_1 , участки которых, проходящие через точку $P = (p_1, p_2)$, являются частями прямых

$$\xi - p_1 = \pm a_1(\tau - p_2).$$

Эти участки имеют концевые точки на лучах

$$R_1 = (0, t), \quad t > 0,$$

$$R_2 = (x_0, t), \quad t > 0.$$

Точки, лежащие на луче R_1 , обозначаются как

$$E_{i,k} = (0, e_{i,k}), \quad i = 1, 2, k = 0, 1, \dots,$$

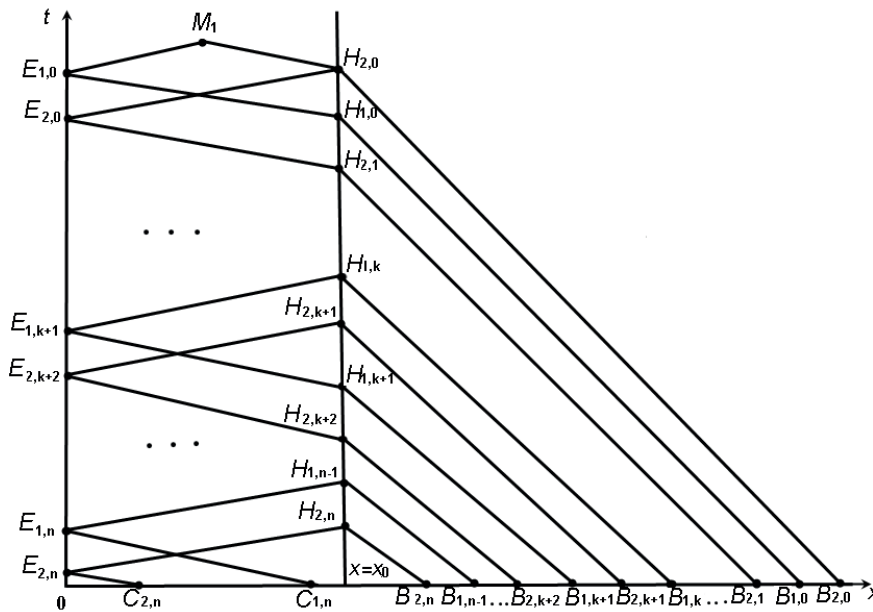


Рис. 1. Иллюстрация к построению на графике $x(t)$ двух составных характеристик, исходящих из точки $M_1 = (x, t)$, $0 < x < x_0$, $t > a_1 x$

а точки на луче R_2 – как $H_{i,k} = (x_0, h_{i,k})$.

При этом индекс i указывает номер составной характеристики, а индекс k есть нумерация конечных точек.

Первая составная характеристика получается по следующему правилу. Из точки M_1 проводится прямая

$$\xi - x = a_1(\tau - t)$$

вплоть до ее пересечения с лучом R_1 в точке $E_{1,0} = (0, e_{1,0})$. Далее через полученную точку $E_{1,0}$ проводится прямая

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,0})$$

до пересечения с лучом R_2 в точке $H_{1,0} = (x_0, h_{1,0})$. Дальнейшее построение состоит в том, что через получаемые точки $E_{1,k} = (0, e_{1,k})$ на луче R_1 проводятся прямые

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,k}),$$

пересекающие луч R_2 в точках $H_{1,k} = (x_0, h_{1,k})$. Через точки $H_{1,k}$ проводятся прямые

$$\xi - x_0 = a_1(\tau - h_{1,k}).$$

Формулы для этих точек имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e_{1,k} &= t - \frac{x}{a_1} - 2k \frac{x_0}{a_1}, \\ h_{1,k} &= t - \frac{x}{a_1} - (2k+1) \frac{x_0}{a_1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Построение продолжается до тех пор, пока получаемые отрезки характеристик имеют непустое пересечение с областью G_1 . Таким образом, мы получили множество точек $E_{1,k}$, $H_{1,k}$ на лучах R_1 , R_2 соответственно, $0 \leq k \leq n$. Для окончательного построения используем прямую

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,n}),$$

пересекающую полуось Ox , $x > 0$, в точке $C_{1,n}$.

Вторая составная характеристика, исходящая из точки M_1 , строится аналогично. А именно: из точки M_1 проводится прямая

$$\xi - x_0 = -a_1(\tau - t)$$

вплоть до ее пересечения с лучом R_2 в точке $H_{2,0}$. Далее, действуя последовательно и попеременно используя характеристики

$$\xi = \pm a_1 \tau + \text{const},$$

исходящие из уже полученных точек, получаем множество конечных точек $E_{2,k}$, $0 \leq k \leq n$ на луче R_1 и $H_{2,k}$, $0 \leq k \leq n$ на луче R_2 а также точку $C_{2,n}$ на отрезке горизонтальной оси $(0, x_0)$.

Формулы для этих точек имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e_{2,k} &= t - \frac{x_0 - x}{a_1} - (2k+1) \frac{x_0}{a_1}, \\ h_{2,k} &= t - \frac{x_0 - x}{a_1} - 2k \frac{x_0}{a_1}, \quad (10) \\ k &\geq 0, \quad C_{2,n} = (0, c_{2,n}). \end{aligned}$$



В множестве $\overline{G_2}$ построение используемых характеристик имеет более простой характер: через точки $H_{i,k}$, $i = 1, 2$, $k = 0, \dots, n$, проводятся прямые

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h_{i,k})$$

вплоть до их пересечения с полуосью Ox , $x > 0$ в точках $B_{i,k}$.

Следствия для функции $u(x, t)$ из равенства (6) в областях G_1 , G_2

Рассмотрим многоугольник $G(M_1)$ с вершинами в точках M_1 , $E_{1,0}$, $H_{1,0}$, $B_{1,0}$, $B_{2,0}$, $H_{2,0}$ и применим к нему формулу (6) для случая $G = G(M_1)$ (см. рис. 1).

Ввиду того, что

$$\partial G(M_1) = (M_1 E_{1,0}) \cup (E_{1,0} H_{1,0}) \cup (H_{1,0} B_{1,0}) \cup (B_{1,0} B_{2,0}) \cup (B_{2,0} H_{2,0}) \cup (H_{2,0} M_1),$$

вычисляем интеграл $J(G(M_1))$, пользуясь леммой:

$$\begin{aligned} J(G(M_1)) &= \gamma_1(u(E_{1,0}) - u(M_1)) - \\ &- \gamma_1(u(H_{1,0}) - u(E_{1,0})) - \gamma_2(u(B_{1,0}) - \\ &- u(H_{1,0})) - \gamma_2(u(H_{2,0}) - u(B_{2,0})) - \\ &- \gamma_1(u(M_1) - u(H_{2,0})) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенств $u(B_{1,0}) = u(B_{2,0}) = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} u(M_1) &= u(E_{1,0}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\gamma_1} \times \\ &\times u(H_{1,0}) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_1} u(H_{2,0}). \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы найти выражение для $u(H_{2,0})$, рассмотрим многоугольник $G(H_{2,0})$ с вершинами в точках $H_{2,0}$, $E_{2,0}$, $H_{2,1}$, $B_{2,1}$, $B_{2,0}$. Аналогично только что выполненным вычислениям, с использованием леммы для случая $G = G(H_{2,0})$ получаем следующее:

$$u(H_{2,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,0}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,1}).$$

Чтобы найти выражение для $u(H_{2,1})$, рассмотрим многоугольник $G = G(H_{2,1})$ с вершинами $H_{2,1}$, $E_{2,1}$, $H_{2,2}$, $B_{2,2}$, $B_{2,1}$. Снова применяя лемму и повторяя вычисления, приходим к формуле

$$u(H_{2,1}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,1}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,2}).$$

Таким же образом мы можем получить следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} u(H_{2,k}) &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,k}) + \\ &+ \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя полученную рекуррентную формулу (12), имеем:

$$u(H_{2,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_{2,k}). \quad (13)$$

Чтобы найти формулы для $u(H_{1,0})$ аналогичными действиями, но при этом использовать элементы второй составной характеристики, которая исходит из точки M_1 , получаем следующее равенство:

$$u(H_{1,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_{1,k+1}). \quad (14)$$

Следует отметить, что в правых частях равенств (13) и (14), вследствие условия (3), $\mu(t) = 0$, $t \leq 0$, отличным от нуля является лишь конечное число первых слагаемых. Используя равенства (13), (14) для формулы (11), в итоге получаем:

$$\begin{aligned} u(M_1) &= u(E_{1,0}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \times \\ &\times (u(E_{1,k+1}) - u(E_{2,k})). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим более простой случай, когда произвольная точка $M_2 = (x, t)$ принадлежит области $G_2 \setminus \overline{G_3}$. Построим составную непрерывную характеристику, которая исходит из этой точки и заканчивается на горизонтальной оси. Для этого снова будем использовать отрезки характеристик, лежащих на прямых

$$\xi = \pm a_2 \tau + \text{const.}$$

Концы отдельных характеристик, которые получаются на луче $x = x_0$, $t > 0$, мы обозначили через H_k , $k = 0, 1, \dots, m$, а на луче $x = 0$, $t > 0$ — через E_k , $k = 0, 1, \dots, m$. Концы же отдельных характеристик на горизонтальной оси, в порядке их возрастания, мы обозначили через C_m , B_m , $B_{m-1}, \dots, B_0$, D (рис. 2).

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, выводим следующие формулы:

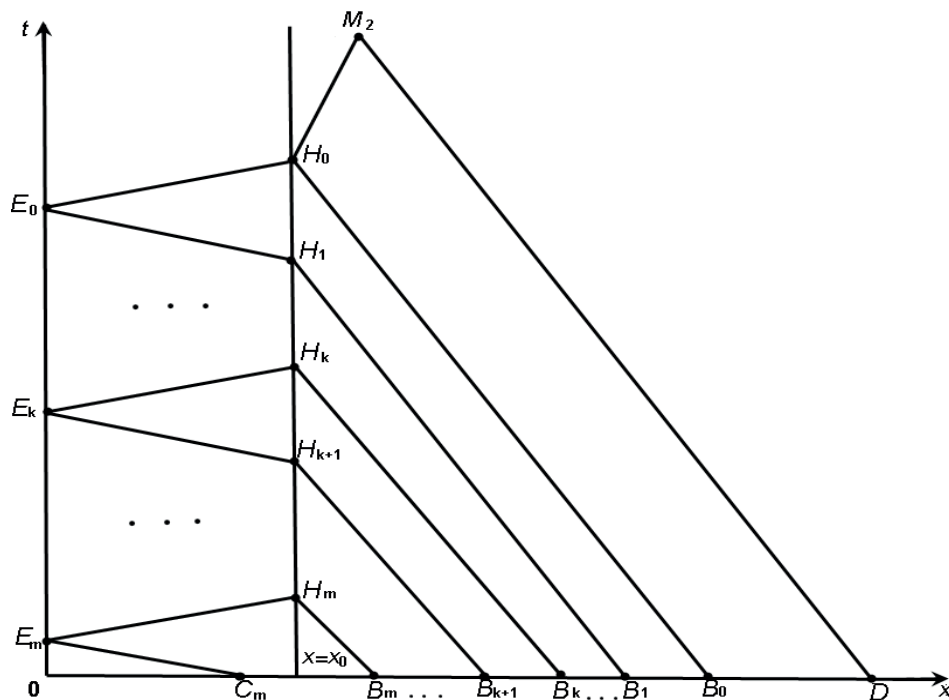


Рис. 2. Иллюстрация к построению на графике $x(t)$ двух составных характеристик, исходящих из точки $M_2 \in G_2 \setminus \overline{G_3}$

$$u(M_2) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_k), \quad (16)$$

$$E_k = \left(0, t - \frac{x}{a_2} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) x_0 - 2k \frac{x_0}{a_1} \right). \quad (17)$$

Заметим, что ситуация, представленная при построении составных характеристик (см. рис. 1 и 2), не охватывает все варианты. Возможен, например, случай, когда последний участок составной характеристики исходит из точки $H_{2,n}$ или H_m и заканчивается на горизонтальной оси. Этот вариант нами также проанализирован. Установлено, что он не приводит к изменению полученных формул.

Основной результат

В этом разделе будет показано, что полученные выше формулы дают возможность решить задачу (1), (2).

Теорема. Существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), представленное двумя равенствами: (15) при всех $M_1 \in G_1$ и (16) для любой точки $M_2 \in G_2$.

Доказательство. Проведем доказательство в два этапа.

1. *Существование решения.* Тот факт, что

функция $u(x, t), (x, t) \in G_0 \setminus \overline{G_3}$, представленная формулами (15), (16), удовлетворяет уравнению (1), прямо следует из того, что каждое слагаемое в соответствующих рядах является решением этого уравнения. Что касается множества $\overline{G_3}$, то, как было показано, $u(x, t) = 0, (x, t) \in \overline{G_3}$. Таким образом, остается проверить выполнение остальных свойств, указанных нами при постановке задачи.

Во-первых, необходимо отметить, что если точка M_1 стремится к линии $\xi = a_1 \tau$, то, как следует из формул (9), (10),

$$\mu(e_{1,k}) \rightarrow 0, \mu(e_{2,k}) \rightarrow 0,$$

что и означает непрерывность $u(x, t), (x, t) \in G_1$.

Из таких же соображений следует непрерывность частных производных первого и второго порядков функции $u(x, t), (x, t) \in G_1$. Рассуждая аналогично, нетрудно показать выполнение требуемых свойств гладкости функции $u(x, t), (x, t) \in G_2$. Из вышеизложенного следует, что формулы (15), (16) дают функции, удовлетворяющие уравнению (1) везде в области G_0 .

Далее отметим, что если точка $M_1 = (x, t)$ стремится к точке $(0, t)$, то



$$\begin{aligned} E_{1,k} &\rightarrow \left(0, t - 2k \frac{x_0}{a_1}\right), \\ E_{2,k} &\rightarrow \left(0, t - (2k+2) \frac{x_0}{a_1}\right), \\ E_{1,0} &\rightarrow (0, t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|E_{2,k} - E_{1,k+1}| \rightarrow 0$. Поэтому правая часть равенства (15) стремится к $\mu(t)$, что и означает выполнение граничного условия $u(0, t) = \mu(t)$. Таким образом доказано выполнение условий (2) для функции $u(x, t)$.

Осталось проверить выполнение свойств $u(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$. Нетрудно видеть, что при этом выполняется соотношение

$$E_k, E_{1,k}, E_{2,k} \rightarrow \left(0, t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1}\right).$$

Следовательно, формула (15) при $x \rightarrow x_0$ принимает вид

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= u(E_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \times \\ &\times (u(E_{k+1}) - u(E_k)) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k - \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \right) u(E_k) = \\ &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Правая часть полученного равенства (18) совпадает с правой частью равенства (16), что и доказывает непрерывность функции $u(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$.

Теперь докажем выполнение условий (4), (5). Из равенства (15) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_1)}{\partial t} &= \mu'(e_{1,0}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \times \\ &\times (\mu(e_{1,k+1}) - \mu(e_{2,k})). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial t} &= \mu' \left(t - \frac{x_0}{a_1} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \left(\mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) - \right. \\ &\left. - \mu' \left(t - (2k-1) \frac{x_0}{a_1} \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, из равенства (16) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial t} &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \times \\ &\times \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Выполняя в равенстве (19) действия, аналогичные тем, которые выполнялись при получении равенства (18), получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial t} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial t};$$

полученное равенство означает выполнение условия (4).

Почти такими же действиями проверяется выполнение условия (5):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} &= -\frac{1}{a_1} \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right); \\ \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial x} &= -\frac{1}{a_2} \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right). \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\beta_2 \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial x} = \beta_1 \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial x},$$

а это означает выполнение условия (5).

Итак, существование решения доказано.

2. *Единственность решения.* Для доказательства возьмем два решения задачи (1), (2) и обозначим их разность как $V(x, t)$.

Рассмотрим функции

$$v_1(x, t) = \partial_2 V(x, t) + a(x) \partial_1 V(x, t),$$

$$v_2(x, t) = \partial_2 V(x, t) - a(x) \partial_1 V(x, t).$$

Нетрудно проверить, что выполняются следующие равенства:

$$\partial_2 v_1(x, t) - a(x) \partial_1 v_1(x, t) = 0,$$

$$\partial_2 v_2(x, t) + a(x) \partial_1 v_2(x, t) = 0, \quad (21)$$

$$v_i(0, t) = 0, v_i(x, 0) = 0,$$

$$i = 1, 2, (x, t) \in G_0. \quad (22)$$

Условимся обозначать для $0 < x < x_0$

$$v_1(x, t), v_2(x, t), V(x, t)$$

через

$$v_1^-(x, t), v_2^-(x, t), V^-(x, t),$$

а для $x \geq x_0$ — через

$$v_1^+(x, t), v_2^+(x, t), V^+(x, t).$$

Следовательно, из равенств (21) и (22) имеем уравнение

$$v_1^-(x, t) = v_2^-(x, t) = 0.$$

Отсюда и из условий (4), (5) следуют равенства

$$v_1^+(H) = v_2^+(H) = 0$$

для произвольной точки H на луче (x_0, t) , $t > 0$.

Из этих равенств и равенств (21), с учетом условий

$$v_1^+(x, 0) = v_2^+(x, 0) = 0,$$

следует, что

$$v_1^+(x, t) = v_2^+(x, t) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к равенствам

$$v_1(x, t) = v_2(x, t) = 0,$$

$$\partial_1 V(x, t) = 0, \partial_2 V(x, t) = 0,$$

$$V(x, t) = \text{const.}$$

Поэтому, в силу условия $V(x, t) = 0$ имеем:

$$V(x, t) = 0, (x, t) \in \overline{\mathbb{R}_2^{++}},$$

что и означает единственность решения задачи.

Теорема доказана.

Заключение

В работе рассмотрено одномерное волновое уравнение, описывающее не только поперечные колебания неоднородной полуграниченной струны, но и продольные колебания неоднородного стресса. При этом поставлена задача о нахождении функции колебаний для частного случая, когда процесс вызван исключительно поведением граничной точки.

Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи, и для него приведены простые и явные формулы. В теореме представлена компактная форма записи решения, в которой использованы удобные вспомогательные обозначения.

Более полные формулы, содержащие только исходные данные задачи, имеют следующий вид:

$$(x, t) \in G_1, u(x, t) = \mu \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \left(\mu \left(t - \frac{x}{a_1} - 2(k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) - \right. \\ \left. - \mu \left(t - \frac{x}{a_1} - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) \right),$$

$$(x, t) \in G_2, u(x, t) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \times \\ \times \mu \left(t - \frac{x}{a_2} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) x_0 - 2k \frac{x_0}{a_1} \right).$$

Важно отметить, что последние из представленных формул позволяют создать без затруднений соответствующий численный алгоритм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petrova G., Popov B. Linear transport equations with discontinuous coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 1999. Vol. 24. No. 9–10. Pp. 1849–1873.
2. Bouchut F., Jame F. One-dimensional transport equations with discontinuous



coefficients // Journal of Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 32. No. 7. Pp. 891–933.

3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений // Лекционные курсы НОЦ. Вып. 16. М.: Изд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. 122 с.

4. Tadmor E. Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Anal. 1991. Vol. 28. No. 4. Pp. 891–906.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

6. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. XIV. Вып. 2 (86). С. 87–158.

7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.

8. Ильин В.А. Формула типа Даламбера для

продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из разной плотности и разной упругости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 4. С. 466–468.

9. Ильин В.А. Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 609–611.

10. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.

11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

12. Салехов Г.С. Обобщение формул Даламбера и Пуассона // Успехи математических наук. 1947. Т. 2. Вып. 40. С. 175–182.

13. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 416 с.

Статья поступила в редакцию 02.11.2018, принята к публикации 12.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич — доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
anik@math.nsc.ru

КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
dsk@math.nsc.ru

REFERENCES

[1] G. Petrova, B. Popov, Linear transport equations with discontinuous coefficients, Communications in Partial Differential Equations. 24 (9–10) (1999) 1849–1873.

[2] F. Bouchut, F. Jame, One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients, Journal Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 32 (7) (1998) 891–933.

[3] A.G. Kulikovskiy, E.I. Sveshnikova, A.P. Chugaynova, Matematicheskiye metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical methods of studies in discontinuous solutions of systems of nonlinear hyperbolic equations], SEC

lecture course, 16 (2010), MIAN, Moscow.

[4] E. Tadmor, Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations, SIAM J. Numer. Anal. 28 (4) (1991) 891–906.

[5] N.N. Kalitkin, Chislennyye metody [Numerical methods], Nauka, Moscow, 1978.

[6] I.M. Gel'fand, Some problems of analysis and differential equations, Uspekhi Mat. Nauk. 14 (2(86)) (1959) 87–158.

[7] A.F. Filippov, Differentsialnyye uravneniya s razryvnoy pravoy chastyu [Differential equations with a discontinuous right-hand part], Nauka, Moscow, 1985.

- [8] **V.A. Il'in**, A d'Alembert-type formula for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities and elasticities, *Doklady Mathematics*. 80 (1) (2009) 613–615.
- [9] **V.A. Il'in**, A d'Alembert-type formula for transverse oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities, *Doklady Mathematics*. 80 (1) (2009) 624–626.
- [10] **D.S. Anikonov, D.S. Konovalova**, Direct and inverse problems for a wave equation with discontinuous coefficients, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 11 (2) (2018) 61–72.
- [11] **A.N. Tikhonov, A.A. Samarskiy**, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations], Nauka, Moscow, 1977.
- [12] **G.S. Salekhov**, A generation of formulas of d'Alembert and Poisson, *Uspekhi Mat. Nauk.* 2 (4(20)) (1947) 175–182.
- [13] **A.G. Sveshnikov, A.N. Bogolyubov, V.V. Kravtsov**, *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures on mathematical physics], MSU, Moscow, 2004.

Received 02.11.2018, accepted 12.11.2018.

THE AUTHORS

ANIKONOV Dmitriy S.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
anik@math.nsc.ru

KONOVALOVA Dina S.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
dsk@math.nsc.ru

DOI: 10.18721/JPM.12105
УДК 621.039.539.7

РАСЧЕТ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ СУПЕРИСТОЧНИКА УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ ДЛЯ РЕАКТОРА ВВР-М

М.С. Онегин, В.А. Лямкин, А.П. Серебров

НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ,
г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация

В работе выполнены проектирование и расчет биологической защиты на выходе суперисточника ультрахолодных нейтронов (УХН) на сверхтекучем гелии, предназначенной для исследовательского водо-водяного ядерного реактора (ВВР-М). Рассчитана конфигурация каземата – биологической защиты вокруг расщепителя тепловой колонны. В расчете учитывались плотность потока, спектр и угловая расходимость пучка нейтронов на выходе внутриканальной части источника УХН, а также геометрия, химический состав и свойства материалов, находящихся внутри каземата. Для слоистой конструкции, выполненной из стали, полиэтилена и свинца, толщина защиты варьируется от 85 до 92 см. Максимальная расчетная мощность дозы для нейтронов и гамма-квантов на поверхности каземата не превышает 1 мбэр/ч, следовательно, конструкция каземата источника УХН обеспечивает безопасную эксплуатацию источника. Расчет проводился методом Монте-Карло в рамках комплекса SCALE-6.2 по программе MAVRIC.

Ключевые слова: реактор ВВР-М, источник ультрахолодных нейтронов, биологическая защита, ядерная безопасность

Ссылка при цитировании: Онегин М.С., Лямкин В.А., Серебров А.П. Расчет биологической защиты суперисточника ультрахолодных нейтронов для реактора ВВР-М // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 61–72. DOI: 10.18721/JPM.12105

THE ULTRACOLD NEUTRON SUPERSOURCE AT THE WWR-M REACTOR: A BIOLOGICAL SHIELDING DESIGN

M.S. Onegin, V.A. Lyamkin, A.P. Serebrov

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI,
Gatchina of Leningrad region, Russian Federation

In the paper, the biological shielding at the output of the ultracold neutron (UCN) super-source for the WWR-M reactor based on superfluid helium has been designed. The configuration of a casemate, i.e., a biological protection around the thermal column splitter, was calculated. The flux density, the spectrum and the angular divergence of the neutron beam at the exit of the intercanal part of the UCN source, as well as the materials' geometry and composition inside the casemate were taken into account. The total thickness of the shielding made from steel, polyethylene and lead varied from 85 to 92 cm. The calculated maximum dose rate for neutrons and gammas on the casemate surface did not exceed 1 mrem p.h. Thus, the casemate design of the UCN supersource ensures the safe operation of the facility. The calculation was carried out by the Monte Carlo method within the SCALE-6.2 complex using the MAVRIC program.

Keywords: WWR-M reactor, ultracold neutron source, biological shielding, nuclear safety

Citation: M.S. Onegin, V.A. Lyamkin, A.P. Serebrov, The ultracold neutron supersource at the WWR-M reactor: a biological shielding design, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 61–72. DOI: 10.18721/JPM.12105

Введение

В настоящее время, на базе реактора ВВР-М (исследовательский водо-водяной ядерный реактор бассейнового типа), находящегося в Национальном исследовательском центре (НИЦ) «Курчатовский институт» – ПИЯФ (Петербургский институт ядерной физики), разработан источник ультрахолодных нейтронов (УХН), который предусматривает вывод не только УХН, но и холодных (ХН) и очень холодных (ОХН) нейтронов. Созданный комплекс предназначен для проведения исследований по физике фундаментальных взаимодействий и физике конденсированного состояния [1]. На ВВР-М имеется уникальная возможность создания условий низкого тепловыделения при достаточно высоком нейтронном потоке ($10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$). Эта задача может быть реализована в нише так называемой тепловой колонны (ТК), которая представляет собой канал большого диаметра (1 м), примыкающий к активной зоне реактора. Подробное описание проекта источника УХН приведено в публикациях [2, 3].

С помощью нового источника УХН предполагается повысить точность измерений электрического дипольного момента (ЭДМ) нейтрона [4] на два порядка и проверить предсказания суперсимметричных теорий, которые относятся к одному из вариантов расширения Стандартной модели. В рамках этих теорий, величина ЭДМ нейтрона должна иметь уровень, доступный для планируемых экспериментов. В то же время, суперсимметричные теории предсказывают барионную асимметрию Вселенной на наблюдаемом уровне, что указывает на возможную справедливость предложенных вариантов теории.

Помимо установки для измерения ЭДМ нейтрона, в комплексе исследовательских станций реактора ВВР-М имеются две установки для измерения времени жизни нейтрона: с магнитной ловушкой [5] и с большой гравитационной ловушкой [6]. Прецизионные измерения времени жизни нейтрона важны для проверки модели формирования Вселенной на ее ранней стадии, а также для поиска отклонений от Стандартной модели. Кроме того, создана установка для поиска зеркальной темной материи ($n - n'$) [7]. Все эти установки разработаны и изготовлены в ПИЯФ и в настоящее время проходят испытания на пучках УХН в Институте Лауэ – Ланжеве-

на (г. Гренобль, Франция). Предполагается, что они будут перенесены в ПИЯФ на новый источник УХН. Повышение интенсивности УХН более чем на два порядка позволит проводить принципиально новые исследования. Наконец, для высокоинтенсивного источника УХН можно обсуждать постановку эксперимента по поиску нейтрон-антинейтронных осцилляций ($n - \bar{n}$) [8] с целью проверки нарушения барионного числа – второго условия возникновения Вселенной, согласно теореме А.Д. Сахарова.

Таким образом, кроме важнейшего эксперимента по поиску значения ЭДМ нейтрона, открываются возможности для проведения целой серии экспериментов по физике фундаментальных взаимодействий.

Программа исследований конденсированного состояния на пучках ХН рассчитана на пять экспериментальных станций. Среди них есть уже четыре готовые установки: рефлектометр [9], поляриметр [10], порошковый дифрактометр [11] и спектрометр спинового эха [12]. Также предусмотрен вывод резервного пучка ОХН (CN3) для будущих экспериментов.

Общий вид нейтроноводов для вывода пучков УХН, ХН и ОХН представлен на рис. 1. Непосредственно к вакуумной катушке с системой вакуумных труб примыкает расщепитель 4, в котором нейтроны, транспортируемые по внутриканальной части источника УХН (1), расщепляются на три пучка (CN1, CN2 и CN3), которые направляют пучки ХН и ОХН на экспериментальные установки. Над расщепителем расположены два нейтроновода УХН (UCN1 и UCN2). Для защиты персонала и окружающей среды от прямого пучка нейтронов, исходящих из реактора, вокруг расщепителя и нейтроноводов УХН предусмотрен чугунный коллиматор 3. Центральный нейтронный пучок транспортируется по прямому нейтроноводу; в его конструкции должна быть предусмотрена дополнительная биологическая защита. Расщепитель с коллиматором также должен быть окружен биологической защитой. Общий вид реактора с примыкающей к нему системой нейтроноводов, а также предполагаемая биологическая защита для этой системы представлена на рис. 2.

В настоящей статье выполнен расчет так называемого каземата – биологической защиты расщепителя и коллиматора.

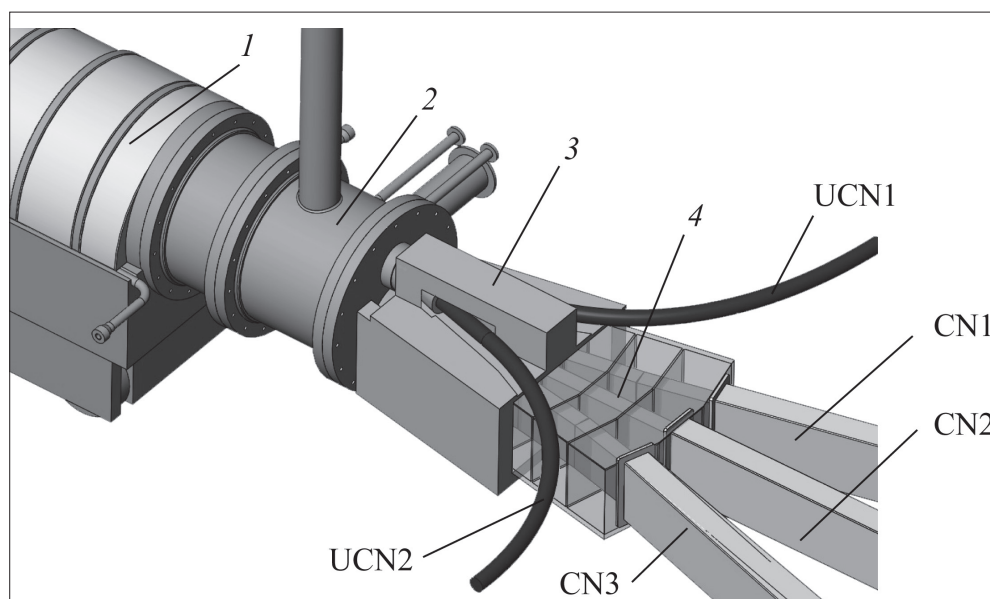


Рис. 1. Модель системы разводки пучков на выходе внутриреакторного устройства тепловой колонны (ТК):

1 – внутриканальная часть источника ультрахолодных нейтронов (УХН),
2 – стыковочная катушка, 3 – чугунный коллиматор, 4 – расщепитель; UCN1, UCN2 – нейтроноводы УХН; CN1, CN3 – нейтроноводы холодных нейтронов (ХН); CN2 – нейтроновод очень холодных нейтронов (ОХН)

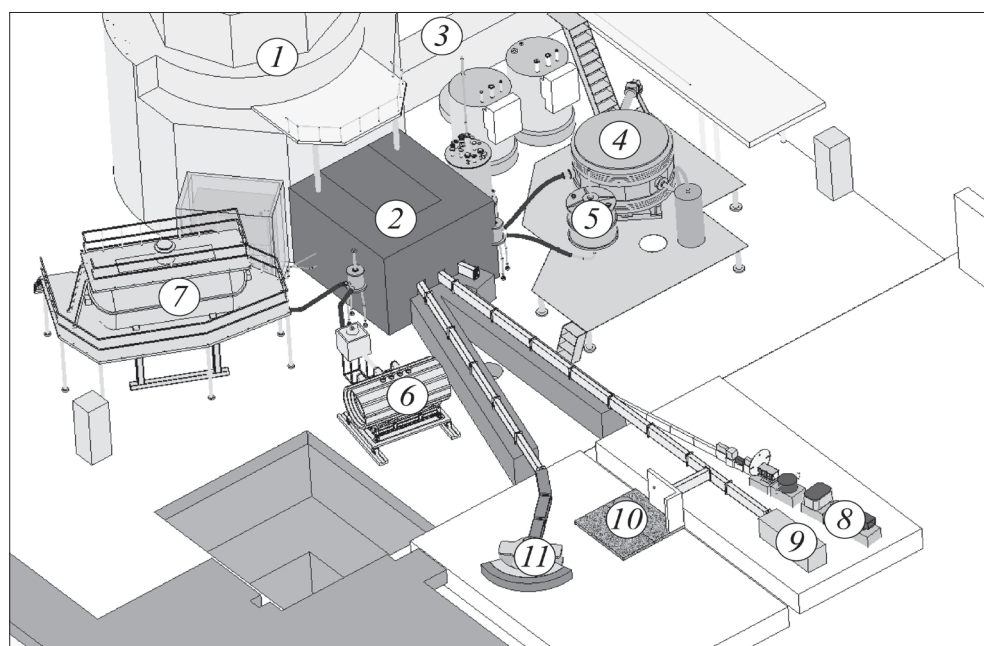


Рис. 2. Общий вид нейтроноводной системы с защитой:

1 – реактор ВВР-М, 2 – каземат, 3 – криогенное оборудование,
4 – ЭДМ-спектрометр,
5 – магнитная ловушка УХН, 6 – установка по поиску зеркальной темной материи,
7 – гравитационная ловушка УХН, 8 – рефлектометр, 9 – поляриметр,
10 – порошковый дифрактометр, 11 – спектрометр спинового эха

Расчет параметров нейтронного пучка ТК на границе биологической защиты реактора

Для расчета биологической защиты каземата требуется рассчитать плотность потока, спектр и угловую расходимость пучка нейтронов на выходе вакуумного канала внутри ТК.

Спектр нейтронов на выходе ТК существенно зависит от режима работы источника УХН. На рис. 3 приведены спектры яркости нейтронного излучения источника (зависимости яркости от длины волны нейтронного излучения) для различных режимов. В теплом режиме, когда в камерах отсутствует жидкий дейтерий и сверхтекучий гелий, спектр нейтронного излучения становится жестче, так что плотность потока тепловых нейтронов на порядок больше, чем в холодном режиме работы источника. Также в отсутствие наполнения камер дейтерием и гелием существенно вырастают плотности потока быстрых и резонансных нейтронов на выходе ТК. В связи с этими эффектами расчет биологической защиты

выполнялся для теплого режима работы источника, когда радиационные условия на выходе наиболее опасны.

Средняя плотность потока нейтронов в полости на границе биологической защиты реактора составляет $2,15 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Плотность потока быстрых нейтронов (с энергией более 0,5 МэВ) составляет $1,3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Полная интенсивность нейтронного источника равна $5,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. На рис. 4 представлено расчетное угловое распределение нейтронов (в диапазоне $0^\circ < \theta < 90^\circ$) для разных энергетических групп.

Как следует из расчета, угловые распределения для тепловых и быстрых нейтронов практически совпадают с таковыми для нейтронов всех энергий, вплоть до значений в 10° . В этом диапазоне углов лежит основная интенсивность излучения, поэтому в дальнейших расчетах биологической защиты использовалось угловое распределение, полученное для всех энергий, независимо от энергии нейтрона.

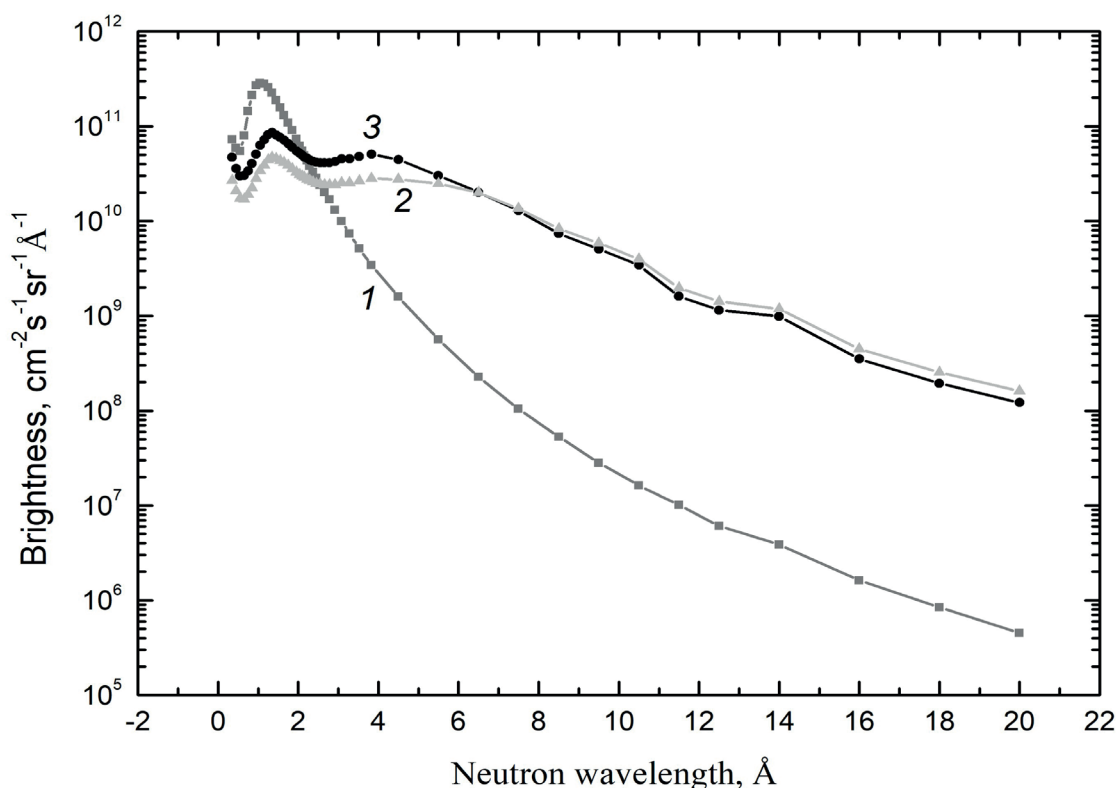


Рис. 3. Спектральная яркость источника УХН в различных режимах его работы: 1 — теплый (в отсутствие жидких гелия и дейтерия), 2 — холодный (в присутствии жидких гелия и дейтерия), 3 — в отсутствие жидкого гелия в камере

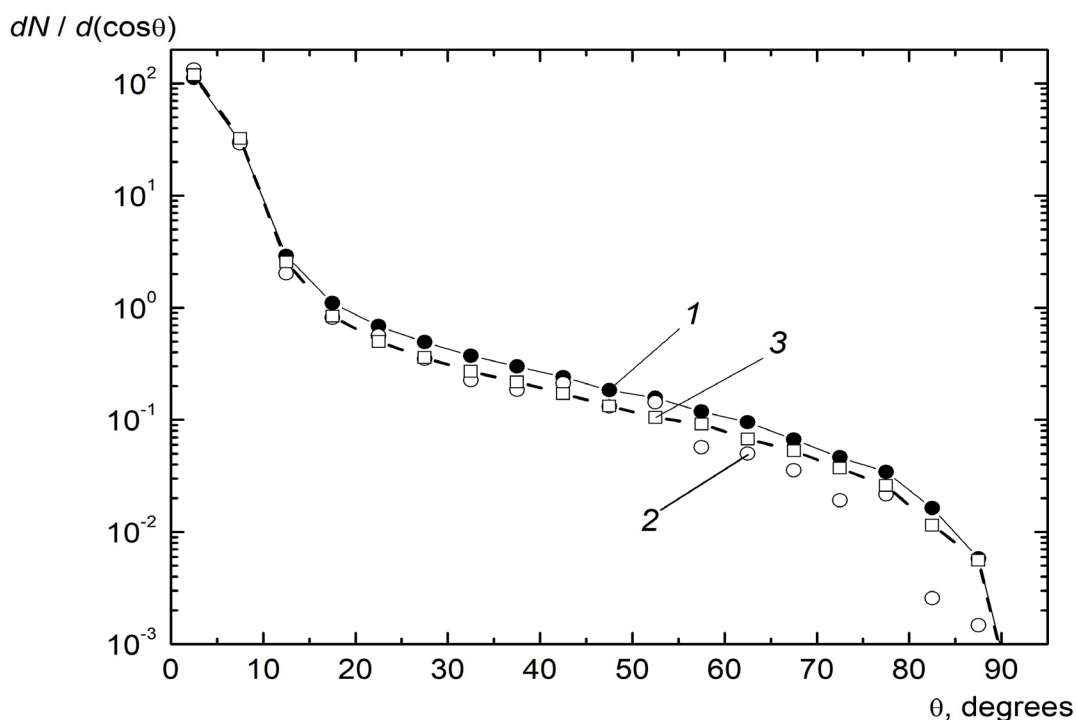


Рис. 4. Результаты расчета углового распределения нейтронов на границе биологической защиты вакуумного канала ТК:

1 — для нейтронов всех энергетических групп; 2 — для быстрых нейтронов с энергией $E > 0,5$ МэВ; 3 — для тепловых нейтронов с $E < 0,625$ эВ

Моделирование геометрии нейтронного расщепителя

Компьютерная модель нейтронного расщепителя в горизонтальном разрезе (по центральной оси реактора ВВР-М) представлена на рис. 5. Вакуумный канал внутри ТК заканчивается стыковочной катушкой 1, на конце которой предусмотрен алюминиевый фланец 2. В нейтронно-физической модели, разработанной для расчета биологической защиты, учитывались такие элементы внутриреакторного устройства, как конечная часть ТК вместе с алюминиевым коллиматором (на рис. 5 не показана), стыковочная катушка с фланцем, а также расщепитель пучка ХН (3) с системой нейтроноводов 4 внутри. На первом этапе расчета интенсивность излучения от нейтроноводов, примыкающих к нейтронному расщепителю, не рассматривалась.

Горизонтальное сечение нейтронного расщепителя имеет форму равнобедренной трапеции. Его высота принималась равной 40 см, длина — 167 см. Стенки короба расщепителя изготовлены из алюминия толщиной 20 мм. Передняя грань расщепителя

имеет ширину 35 см, задняя — 95 см. Внутри расщепителя расположены три нейтроновода. Центральный является прямым, два других загигаются соответственно вправо и влево. Нейтроноводы состоят из четырех звеньев, каждое длиной 400 мм. Внутри нейтроновода находится вакуум. Сечение вакуумного канала каждого нейтроновода имеет размеры 30×200 мм. Вакуумная полость ограничена стеклом марки К8, на которое напылен слой Ni^{58} , отражающий холодные нейтроны. Наружное сечение нейтроновода имеет размеры 90×260 мм. Все внутреннее пространство короба, за исключением четырех стальных пластин (их толщина — 10 мм) внутри расщепителя, заполнено полиэтиленовыми шариками. Алюминиевый короб, на первом метре его длины, окружен чугуном коллиматором (см. рис. 1). Его роль состоит в недопущении прямого прострела нейтронов из вакуумной полости ТК на переднюю стенку защиты. Эффективно рассеивая нейтроны, коллиматор снижает дозовую нагрузку на переднюю стенку биологической защиты. Расчеты биологической защиты выполнялись по программе SCALE-6.2.3 [13].

Геометрия и состав биологической защиты на выходе ТК

Биологическую защиту предполагается делать разборной, состоящей из нескольких слоев защитных материалов. Поскольку на нее падает нейтронный пучок, содержащий существенную долю быстрых нейтронов, защитные материалы должны сначала эффективно термализовать их, а затем поглотить. Для защиты от быстрых нейтронов удобно использовать сталь марки СтЗсп. Железо в ее составе эффективно тормозит быстрые нейтроны за счет неупругого рассеяния, переводя их в область энергий, лежащую ниже порога неупругого рассеяния. Последний для изотопа Fe^{56} равен 0,862 МэВ, а для изотопа Fe^{57} — 0,014 МэВ. Для этих изотопов сечение неупругого рассеяния в быстрой области нейтронного спектра составляет около 1 барна. Другим элементом, эффективно тормозящим нейтроны за счет упругого рассеяния, является водород. Сечение упругого рассеяния нейтронов на водороде в резонансной

области энергий равно примерно 20 барн. Для защиты используется водородосодержащий материал — полиэтилен высокого давления (ПВД), чистый и с примесью бора. Однако водород, имея довольно большое сечение захвата нейтрона, испускает при захвате гамма-квант с энергией около 2 МэВ. Добавка бора (содержит изотоп B^{10}) позволяет снизить генерацию захватных гамма-квантов при защите. Это свойство изотопа B^{10} обусловлено его большим сечением захвата нейтрона, вследствие чего материал с добавкой бора практически не испускает гамма-квантов при таком захвате.

При построении защиты эффективно использовать чередующиеся слои стали и полиэтилена. Последний слой полиэтилена предполагается сделать боросодержащим для снижения генерации гамма-излучения. В качестве наружного используется слой свинца для защиты от гамма-излучения. Первый же слой стали в защитном кожухе требуется покрыть боросодержащим пластиком или резиной. Содержание карбида бора в них должно превышать 50% по весу. Такое покрытие защитит материал от холодных и тепловых нейтронов и снизит его активацию при защите. Состав стали марки СтЗсп, использованный нами в расчетах, приведен в табл. 1. Было принято, что ПВД с добавками бора содержит 3% бора по массе. Содержание же карбида бора в пластике принималось равным 50% по массе.

Таблица 1

Химический состав стали СтЗсп, используемый для биологической защиты

Химический состав, % вес.						
C	Si	Mn	Cr	Ni	Cu	Fe
0,3	0,2	0,5	0,3	0,3	0,3	98,1

Примечание. Плотность стали — 7,8 г/см³

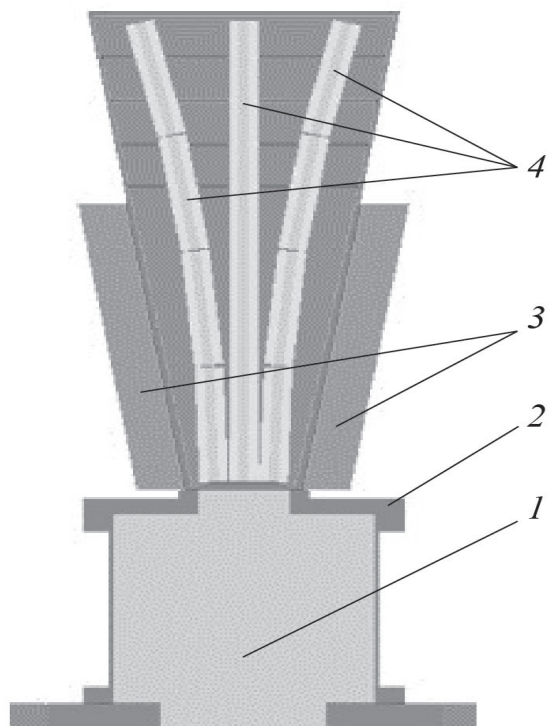


Рис. 5. Компьютерная модель нейтронного расщепителя (горизонтальное сечение):

- 1 — стыковочная катушка;
- 2 — фланец стыковочного фланца;
- 3 — расщепитель пучка ХН;
- 4 — система нейтронотводов ХН

Геометрическая схема биологической защиты расщепителя с передней и верхней сторон представлена на рис. 6. Первый слой защиты выполнен из стали, покрытой борируемым пластиком (резиной), затем идет слой ПВД, затем снова слой стали и далее снова слой ПВД. Наружный слой полиэтилена содержит примесь бора (3% по весу). Последний слой защиты выполнен из свинца. Значения толщины слоев при-

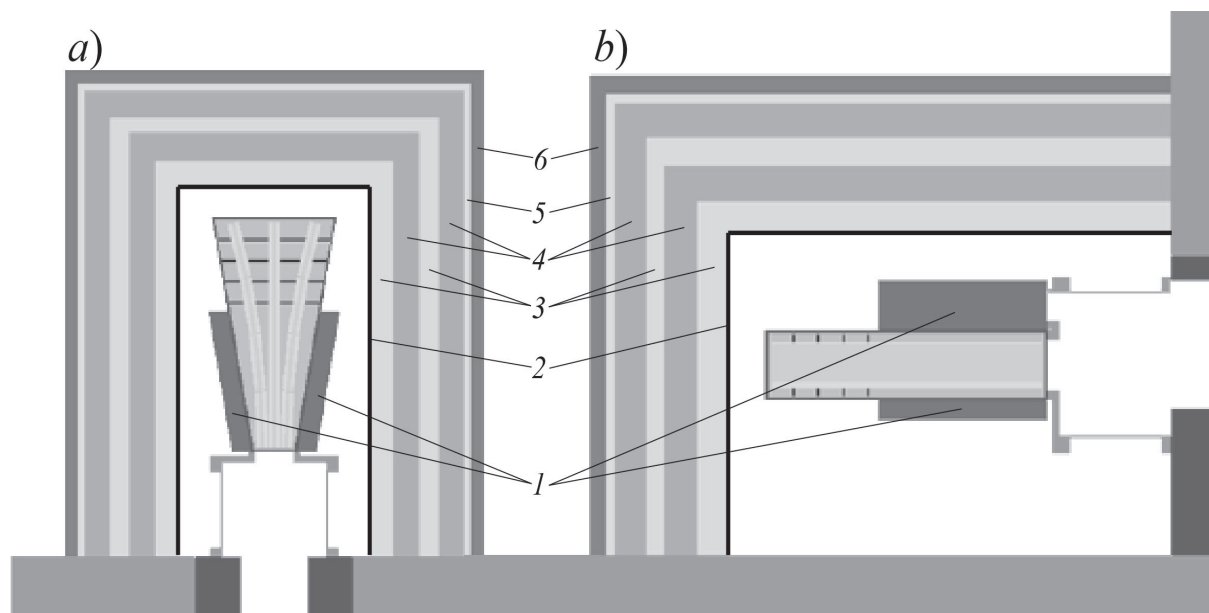


Рис. 6. Горизонтальное (а) и вертикальное (б) сечения нейтронного расщепителя (1) и его биологической защиты, включающей слои борированной резины (2) стали (3), полиэтилена высокого давления (ПВД) (4) и борированного ПВД (5). Наружный слой выполнен из свинца (6)

Таблица 2

**Структура многослойного покрытия для
биологической защиты нейтронного расщепителя**

Материал слоя	Толщина слоя, см		
	Спереди	Сбоку	Сверху
Борированный пластик (резина)	0,5	0,5	0,5
Ст3сп	20	20	20
Полиэтилен высокого давления (ПВД)	20	20	20
Ст3сп	10	15	15
ПВД	20	20	20
Борированный ПВД	5	5	5
Свинец (наружный слой)	10	12	12
Суммарная толщина защиты, см	85,5	92,5	92,5

ведены в табл. 2. Из данных табл. 2 видно, что полная толщина защиты с передней стороны расщепителя составляет 85,5 см, с боковых и верхней — по 92,5 см.

Отдельно рассчитывались мощности дозы за защитой от нейтронов и гамма-квантов. Расчет проводился методом Монте-Карло в рамках комплекса SCALE-6.2 по программе MAVRIC. Для улучшения статистики применялся весовой метод Монте-Карло. В качестве ценностей для нейтронов и гамма-квантов использовались решения для сопряженной функции.

Для этого предварительно по программе DENOVO рассчитывались сопряженные функции уравнения переноса с источником в точке нахождения точечных детекторов,

расположенных за казематом. Биологическая защита комбинировалась таким образом, чтобы суммарная мощность дозы за ней не превышала 12 мкЗв/ч (1,2 мбэр/ч). Результаты расчета распределения мощности дозы от нейтронов и гамма-квантов с передней стороны защиты представлены на рис. 7, сбоку — на рис. 8, а сверху — на рис. 9.

Заключение

Настоящая работа посвящена аспекту безопасной эксплуатации источника ультрахолодных нейтронов (УХН) на исследовательском ядерном реакторе ВВР-М. С целью безопасности были выполнены проектирование и расчет биологической защиты на выходе источника УХН на сверхтекучем

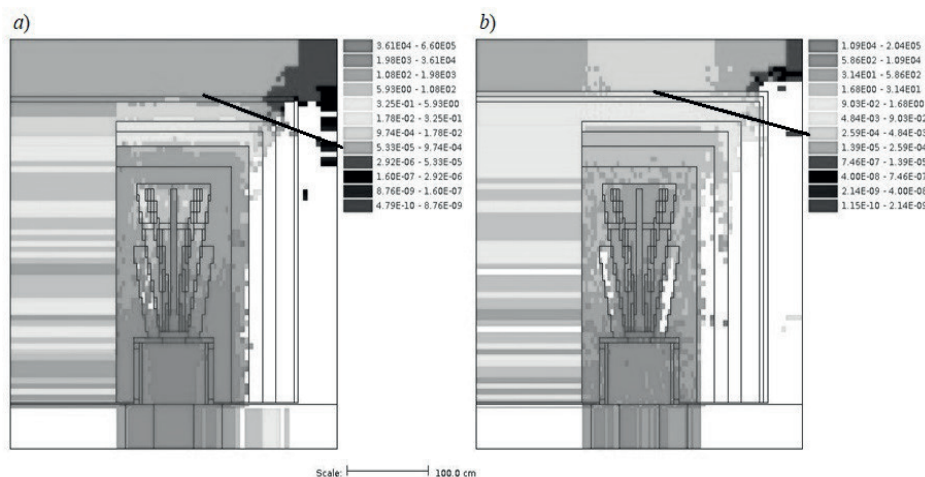


Рис. 7. Расчетные распределения мощности дозы за защитой от нейтронов (a) и гамма-квантов (b) в направлении вперед. Единицы измерения — бэр/ч

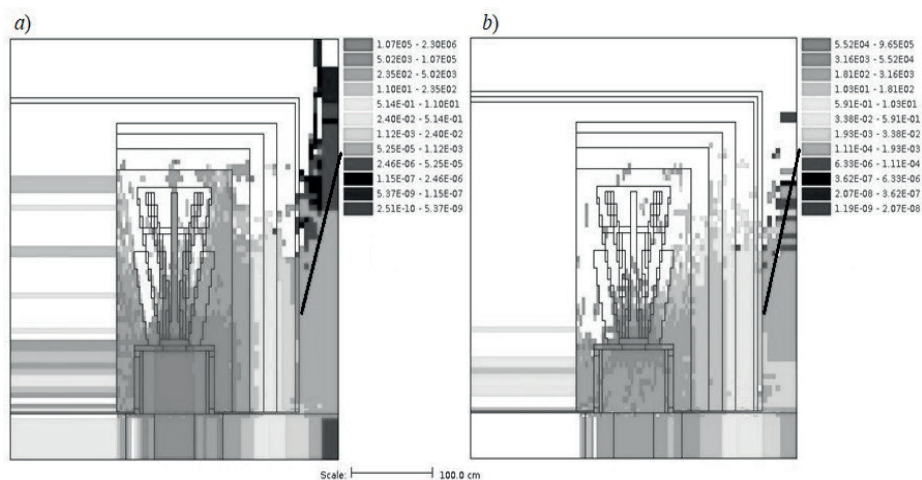


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но в направлении вбок

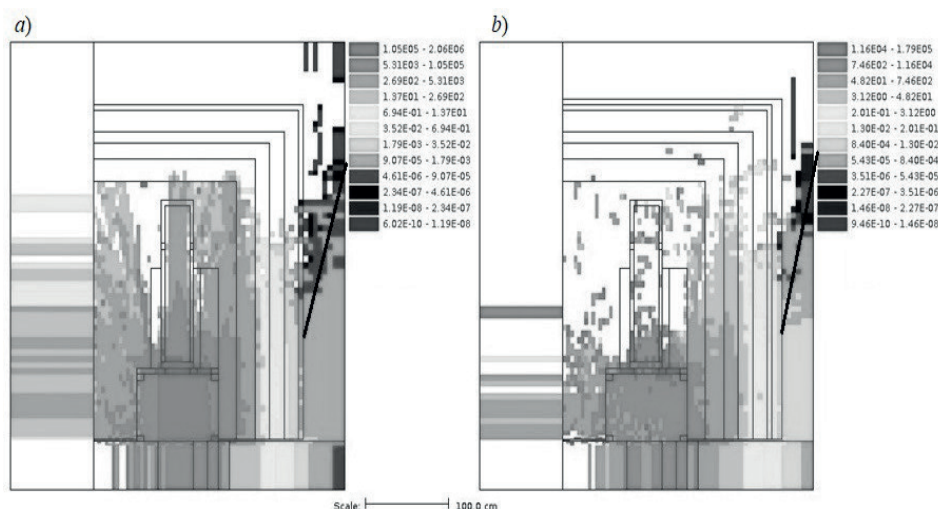


Рис. 9. То же, что на рис. 7 и 8, но в направлении сверху

гелии. Внутриканальная часть источника УХН будет размещена в тепловой колонне этого реактора. Ввиду конструктивных особенностей источника УХН, значительная часть элементов, необходимых для разводки пучков УХН, ХН и ОХН должна быть расположена за пределами тепловой колонны реактора. На этом основании было решено соорудить защитный каземат — многослойную биологическую защиту вокруг расщепителя и разветвителя пучков УХН. Защита должна обеспечивать радиационную обстановку в главном зале реактора ВВР-М в соответствии с требованиями безопасности к экспериментальным устройствам исследовательских ядерных реакторов, изложенных в пункте 3.5 НП-033-01 (в редакции 2010 года).

В результате проведенных расчетов выбраны материалы и значения толщины слоев каземата. Первый слой защиты выполнен из стали, покрытой борированным пластиком (резиной); за ним идет слой полиэтилена высокого давления (ПВД), затем снова слой стали и далее слой такого же

полиэтилена. Наружный слой ПВД содержит примесь бора (3% по весу). Последний слой защиты изготавливается из свинца. Полная толщина защиты спереди расщепителя должна быть равна 85,5 см, а с боков и сверху — 92,5 см.

Максимальная расчетная мощность дозы для нейтронов и гамма-квантов на поверхности каземата не будет превышать 1 мбэр/ч. При предельно допустимой мощности дозы для персонала группы А, равной 1,2 мбэр/ч, конструкция каземата источника УХН обеспечивает безопасную эксплуатацию источника.

На основании данного расчета можно приступать к детальному проектированию конструкции каземата — к разработке конструкторской и проектной документации.

Исследование выполнено в НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серебров А.П., Митюхляев В.А., Захаров А.А. и др. Проект источника ультрахолодных и холодных нейтронов на реакторе ВВР-М со сверхтекучим гелием в качестве замедлителя // Физика твердого тела. 2010. Т. 52. Вып. 5. С. 969–973.
2. Серебров А.П., Фомин А.К., Харитонов А.Г. и др. Высокоинтенсивный источник ультрахолодных нейтронов на реакторе

ВВР-М для научных исследований в области фундаментальной физики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 4. Физика и химия. 2015. Т. 2 (60). № 1. С. 27–41.

3. Серебров А.П., Лямкин В.А., Фомин А.К. и др. Суперисточник УХН со сверхтекучим гелием на реакторе ВВР-М // Ядерная физика и инжиниринг. 2017. Т. 8. № 3. С. 235–241.

4. Серебров А.П., Коломенский Э.А., Пирожков А.Н. и др. Дифференциальный ЭДМ спектрометр ПИЯФ и последние результаты измерения ЭДМ нейтрона // Ядерная физика и инжиниринг. 2014. Т. 5. № 9–10. С. 795–799.
5. Ежов В.Ф., Базаров Б.А., Гельтенборт П. и др. Магнитная ловушка из постоянных магнитов для хранения ультрахолодных нейтронов // Письма в Журнал технической физики. 2001. Т. 27. № 24. С. 64–70.
6. Серебров А.П., Фомин А.К., Харитонов А.Г., Варламов В.Е., Чечкин А.В. Новая установка для измерения времени жизни нейтрона с большой гравитационной ловушкой ультрахолодных нейтронов // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. № 11. С. 136–141.
7. Серебров А.П., Жеребцов О.М. Ловушка с ультрахолодными нейтронами как детектор частиц темной материи с дальнедействующим радиусом сил // Письма в Астрономический журнал. Астрономия и космическая астрофизика. 2011. Т. 37. № 3. С. 204–216.
8. Серебров А.П., Фомин А.К., Камышков Ю.А. Чувствительность эксперимента по поиску нейтрон-антинейтронных осцилляций на проектируемом источнике ультрахолодных нейтронов на реакторе ВВР-М // Письма в Журнал технической физики. 2016. № 2. С. 85–90.
9. Pleshanov N.K., Bulkin A.P., Syromyatnikov V.G. A new method for improving polarizing neutron coatings // Nuclear Instruments and Methods in Physics. A. 2011. Vol. 634. No. 1. Supplement. Proceedings of the International Workshop on Neutron Optics NOP-2010. Pp. S63–S66.
10. Gordeev G.P., Zabenkin V.N., Axelrod L.A., et al. Investigation of magnetic mesostructure of $(\text{Pd}_{0.984}\text{Fe}_{0.016})_{0.95}\text{Mn}_{0.05}$ alloy by polarized neutrons // Physica B. Condensed Matter. 2007. Vol. 397. No. 1–2. Proceedings of the Sixth International Workshop on Polarised Neutrons in Condensed Matter Investigations (PNCMI 2006). Pp. 33–35.
11. Ryzhov V.A., Lazuta A.V., Molkanov P.L., et al. Comparative study of heterogeneous magnetic state above TC in $\text{La}_{0.82}\text{Sr}_{0.18}\text{CoO}_3$ cobaltite and $\text{La}_{0.83}\text{Sr}_{0.17}\text{MnO}_3$ manganite // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2012. Vol. 324. No. 21. Fifth Moscow International Symposium on Magnetism. Pp. 3432–3436.
12. Величко Е.В., Четвериков Ю.О., Аксельрод Л.А., Забенкин В.Н., Пиядов В.В., Сумбатян А.А., Краан В., Григорьев С.В. Установка спин-эхо малоуглового рассеяния нейтронов: тестовый эксперимент на коллоидных кристаллах SiO_2 // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 5. С. 3–9.
13. Rearden B.T., Jessee M.A. SCALE Code System. Version 6.2.3. Report ORNL/TM-2005/39(2016). https://www.ornl.gov/sites/default/files/SCALE_6.2.3.pdf.

Статья поступила в редакцию 13.11.2018, принята к публикации 28.11.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ОНЕГИН Михаил Сергеевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отделения теоретической физики (ОТФ) НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация.

188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Ро-
ща, д. 1
onegin_ms@pnpi.nrcki.ru

ЛЯМКИН Виталий Александрович — младший научный сотрудник отделения нейтронной физики (ОНФ) НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация.

188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Ро-
ща, д. 1
lyamkin_va@pnpi.nrcki.ru



СЕРЕБРОВ Анатолий Павлович — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики нейтрона ОНФ НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация.

188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Ро-
ща, д. 1

serebrov_ap@pnpi.nrcki.ru

REFERENCES

- [1] A.P. Serebrov, V.A. Mityukhlyayev, A.A. Zakharov, Project of the ultracold and cold neutron source at the WWR-M reactor with superfluid helium as a moderator, *Physics of the Solid State*. 52 (5) (2010) 1034–1039.
- [2] A.P. Serebrov, A.K. Fomin, A.G. Kharitonov, et al., High-density ultracold neutrons source for the WWR-M reactor for scientific research in fundamental physics, *Bulletin of St. Petersburg University, Physics and Chemistry*. 2 (1) (2015) 27–41.
- [3] A.P. Serebrov, V.A. Lyamkin, A.K. Fomin, et al., High-density ultracold neutrons source for the WWR-M reactor, *Nuclear Physics and Engineering*. 8 (3) (2017) 235–241.
- [4] A.P. Serebrov, E.A. Kolomenskiy, A.N. Pirozhkov, et al., PNPI differential EDM spectrometer and latest results of measurements of the neutron electric dipole moment, *Physics of Atomic Nuclei*. 78 (14) (2015) 1601–1605.
- [5] V.F. Yezhov, G.B. Krygin, V.L. Ryabov, et al., Permanent-magnet trap for ultracold neutron storage, *Technical Physics Letters*. 27(12) (2001) 1055–1057.
- [6] A.P. Serebrov, A.K. Fomin, A.G. Kharitonov, V.Ye. Varlamov, A.V. Chechkin, New installation for measuring a neutron lifetime with a big gravitational trap of ultra cold neutrons, *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*. 58 (11) (2013) 1681–1687.
- [7] A.P. Serebrov, O.M. Zhrebtsov, Trap with ultracold neutrons as a detector of dark matter particles with long-range forces, *Astronomy Letters*. 37 (3) (2011) 181–193.
- [8] A.P. Serebrov, A.K. Fomin, Y.A. Kamyshev, Sensitivity of experiment on search for neutron-antineutron oscillations on the projected ultracold neutron source at the WWR-M reactor, *Technical Physics Letters*. 42 (1) (2016) 99–101.
- [9] N.K. Pleshanov, A.P. Bulkin, V.G. Syromyatnikov, A new method for improving polarizing neutron coatings, *Nuclear Instruments and Methods in Physics. A. Supplement. Proceedings of the International Workshop on Neutron Optics NOP-2010*. 634 (1) (2011) S63–S66.
- [10] G.P. Gordeev, V.N. Zabenkin, L.A. Axelrod, et al., Investigation of magnetic mesostructure of $(\text{Pd}_{0.984}\text{Fe}_{0.016})_{0.95}\text{Mn}_{0.05}$ alloy by polarized neutrons, *Physica B: Condensed Matter, Proceedings of the Sixth International Workshop on Polarised Neutrons in Condensed Matter Investigations (PNCMI 2006)*. 397 (1–2) (2007) 33–35.
- [11] V.A. Ryzhov, A.V. Lazuta, P.L. Molkanov, et al., Comparative study of heterogeneous magnetic state above TC in $\text{La}_{0.82}\text{Sr}_{0.18}\text{CoO}_3$ cobaltite and $\text{La}_{0.83}\text{Sr}_{0.17}\text{MnO}_3$ manganite, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 324 (2012) 3432–3436.
- [12] E.V. Velichko, Y.O. Chetverikov, L.A. Aksel'rod, et al., Spin-echo small-angle neutron scattering device: Test experiment using SiO_2 colloidal particles, *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 7(3) (2013) 401–406.
- [13] B.T. Rearden, M.A. Jessee, SCALE Code System. Version 6.2.3, Report ORNL/TM-2005/39(2016). https://www.ornl.gov/sites/default/files/SCALE_6.2.3.pdf.

Received 13.11.2018, accepted 28.11.2018.

THE AUTHORS

ONEGIN Mikhail S.

NRC «Kurchatov Institute» — PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
onegin_ms@pnpi.nrcki.ru

LYAMKIN Vitaliy A.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
lyamkin_va@pnpi.nrcki.ru

SEREBROV Anatolii P.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
serebrov_ap@pnpi.nrcki.ru



DOI: 10.18721/JPM.12106
УДК 536.24

**ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОЕ РАСЧЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЧАСТИ ИСТОЧНИКА
УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ ДЛЯ РЕАКТОРА ВВР-М**
**А.П. Серебров, В.А. Лямкин, А.О. Коптюхов, М.С. Онегин,
Д.В. Прудников, О.Ю. Самодуров**

НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ,
г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация

Представлены теплогидравлические расчеты низкотемпературной части источника ультрахолодных нейтронов (УХН) на реакторе ВВР-М, направленные на подбор оптимальных режимов работы всего технологического комплекса этого источника. Согласно расчетным данным, штатный рефрижератор Linde TCF-50 способен поддерживать рабочую температуру тепловых экранов и конденсацию 50 л дейтериевого предзамедлителя в камере. Результаты расчетов температурного поля теплового экрана, находящегося в низкотемпературной части источника УХН, были использованы для выбора места установки опорных конструкций для камеры со сверхтекучим гелием. Кроме того, была сделана оценка суммарного теплопритока к камере источника УХН, которая составила 35 Вт. Установлено, что производительность вакуумной системы для откачки паров гелия и гелиевого ожижителя достаточна для поддержания 35 л сверхтекучего конвертора УХН.

Ключевые слова: источник ультрахолодных нейтронов, сверхтекучий гелий, реактор ВВР-М, суммарный теплоприток

Ссылка при цитировании: Серебров А.П., Лямкин В.А., Коптюхов А.О., Онегин М.С., Прудников Д.В., Самодуров О.Ю. Теплогидравлический расчет низкотемпературной части источника ультрахолодных нейтронов для реактора ВВР-М // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. №. 1 С. 73–86. DOI: 10.18721/JPM.12106

**THE LOW-TEMPERATURE SUB-SYSTEM OF THE ULTRACOLD
NEUTRON SUPERSOURCE AT THE WWR-M REACTOR:
A HEAT-HYDRAULIC DESIGN STUDY**

**A.P. Serebrov, V.A. Lyamkin, A.O. Koptukhov,
M.S. Onegin, D.V. Prudnikov, O.Yu. Samodurov**

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI,
Gatchina of Leningrad region, Russian Federation

Heat-hydraulic design studies of the low-temperature sub-system of the ultracold neutron (UCN) supersource at the WWR-M reactor have been presented in the paper. The studies were directed toward selection of the optimal working modes of the aggregate technological complex of this source. According to the calculation data, the Linde TCF-50 standard refrigerator was able to maintain the operating temperature of the thermal screens and the condensation of 50 liters of the deuterium pre-moderator in the chamber. Calculation results for the temperature field of the thermal shield placed in the low-temperature sub-system were used to select the location of the support structures for a superfluid helium vessel. Based on these calculations, an estimate of the total heat penetration at the UCN source chamber was made; it was equal to 35W. The capacity of the vacuum system for pumping the helium vapor and helium liquefier was established to be sufficient to maintain 35 liters of the superfluid UCN converter.

Keywords: ultracold neutron source, superfluid helium, WWR-M reactor

Citation: A.P. Serebrov, V.A. Lyamkin, A.O. Koptuyukhov, M.S. Onegin, D.V. Prudnikov, O.Yu. Samodurov, The low-temperature sub-system of the ultracold neutron supersource at the WWR-M reactor: A heat-hydraulic design study, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics, 12 (1) (2019) 73–86. DOI: 10.18721/JPM.12106

Введение

История создания источников холодных и ультрахолодных нейтронов (УХН) берет начало в 1970-х годах. Эффективное производство нейтронов с низкой энергией на исследовательском водо-водяном ядерном реакторе бассейнового типа (реакторный комплекс, сокращенно ВВР-М) неразрывно связано с использованием криогенной техники. Именно на реакторе ВВР-М пропускали реакторные нейтроны через низкотемпературные конверторы, такие как холодный бериллий [1], жидкий водород [2], жидкий дейтерий [3], твердый дейтерий [4], и таким путем получали высокие (для своего времени) плотности потоков УХН. При термализации нейтронов в среде с низкой температурой, долю УХН в спектре можно увеличивать в десятки и тысячи раз.

Однако для наиболее эффективной работы конвертора необходима температура замедлителя 10^{-3} К, которая недостижима в условиях реакторного облучения. Ультрахолодные нейтроны образуются из тепловых не в результате их дополнительного замедления, а в результате очень редкого процесса — единственного неупругого соударения, которое сопровождается потерей тепловым нейтроном практически всей его энергии [5].

Количественное производство УХН зависит от интенсивности реакторного нейтронного потока и эффективности криогенного замедлителя (конвертора). Однако стремление поместить замедлитель с криогенной температурой в высокий нейтронный поток на реакторе, наталкивается на проблему отвода радиационного тепла. Чем ниже температура замедлителя, тем сложнее проблема теплоотвода.

Настоящее исследование находится на передовых научных рубежах и предполагает высокий технический уровень практической реализации, поскольку затрагивает сверхнизкий температурный уровень (1,2 К) в условиях реакторного нагрева. Подобные устройства при таких низких температурах пока никто не размещал внутри каналов реактора.

При эксплуатации реактора ВВР-М

имеется уникальная возможность создания условий низкого тепловыделения при достаточно высоком потоке холодных нейтронов ($4,8 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$). Эту задачу можно реализовать в нише так называемой тепловой колонны, которая представляет собой канал большого диаметра (1 м), примыкающий к активной зоне реактора [6, 7]. Большой диаметр канала позволит смонтировать защиту из свинца толщиной 10 см для снижения уровня тепловыделения, предзамедлитель из жидкого дейтерия при температуре 20 – 23 К для получения холодных нейтронов и, наконец, конвертер холодных нейтронов в ультрахолодные из сверхтекучего гелия объемом 35 л при температуре 1,2 К.

Подобное расположение позволит достичь уровня теплопритоков к сверхтекучему гелию мощностью не более 35 Вт (рис. 1). В НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ (Петербургский институт ядерной физики, г. Гатчина Ленинградской области, Россия) имеется система вакуумной откачки, производительность которой достаточно для отвода данного количества тепла. В совокупности с криогенными установками фирмы «Линде Инжиниринг Рус» (немецкая транснациональная компания), данный технологический комплекс способен обеспечивать стабильную работу источника УХН на реакторе ВВР-М. Приведем технические характеристики реактора ВВР-М.

Технические характеристики реактора ВВР-М

Мощность16 МВт

Поток тепловых нейтронов.... $10^{14} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$

Поток холодных нейтронов
в сверхтекучем гелии $4,8 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$

Плотность УХН
в сверхтекучем гелии 10^4 см^{-3}

Проектная документация внутриканальной части источника УХН на реакторе ВВР-М была разработана в рамках



Рис. 1. Расположение источника ультрахолодных нейтронов (УХН) в тепловой колонне реактора ВВР-М:

1 – камера со сверхтекучим гелием, 2 – камера с жидким дейтерием,
3 – графитовый предзамедлитель, 4 – свинцовая защита,
5 – активная зона реактора ВВР-М.

Значения основных параметров комплекса приведены в табл. 1 и в тексте

Таблица 1

**Основные физические характеристики составляющих
внутриканальной части источника УХН**

Параметр	Значение			
	Сверхтекучий гелий	Жидкий дейтерий	Графитовый предзамедлитель	Свинцовый экран
Температура, К	1,2	20	300	300
Энерговыведение, Вт	35	287	700	15000

государственного контракта (№ 1215 от 20 октября 2010 года). Однако при разработке конструкторской документации проект претерпел некоторые изменения, поскольку вводились новые технические решения, направленные, по большей части, на обеспечение безопасной эксплуатации источника УХН. Была поставлена задача перерасчета низкотемпературного контура. Требуемый расчет производился на основании предоставленной конструкторской документации.

Общее описание низкотемпературной части источника УХН

Составные узлы низкотемпературной части (НТЧ) источника УХН изготовлены из алюминиевого сплава АМг6. НТЧ состоит из трех основных частей: дейтериевого контура, гелиевого контура и теплового экрана.

Первый контур представляет собой замкнутую систему, в которую входят рабочий ресивер, трубопроводы и камера дейтериевого предзамедлителя. Указанная камера заключена в оболочку из газообразного гелия с температурой примерно 20 К. Исследования [8] показывают, что в холодном режиме, при давлении в дейтериевом контуре $P_w = 1,5$ ата, температура кипения равновесного дейтерия составляет 24,12 К. В то же время важнейшим критерием безопасности источника является отсутствие локальных образований твердого дейтерия. В противном случае такие образования могут привести к закупориванию трубопроводов и, при повышении тепловой нагрузки на дейтериевую камеру, создать в ней давление, достаточное для разрыва контейнера с предзамедлителем. Таким образом, температуру дейтерия в дейтериевой камере следует поддерживать строго в диапазоне 18,73 – 24,12 К (18,73 К – тройная точка равновесного дейтерия). Гелиевая оболочка, обеспечивающая конденсацию дейтерия, одновременно выполняет функцию водородной безопасности, препятствуя образованию водородно-воздушной смеси.

Камера дейтериевого предзамедлителя (ДК) состоит из внутренней дейтериевой и внешней гелиевой оболочек (рис. 2). ДК имеет три патрубка: один для приварки дейтериевой трубы с окружающей ее гелиевой трубой и два для двух гелиевых труб охлаждения ДК. Дейтериевая труба находится в верхней части дейтериевой камеры для того, чтобы дейтерий беспрепятственно

испарялся из этой камеры при переходе дейтериевого контура в «теплый» режим. Для обеспечения равномерного обдува гелием ДК, в ее задней части имеется коллектор, представляющий собой кольцевой зазор, соединенный с остальной гелиевой полостью ДК через 16 отверстий диаметром 5 мм. Коллектор установлен как на участке подачи гелия, так и на участке его отвода от ДК. Дейтериевая оболочка камеры в ее передней части имеет отверстие, соединяющее гелиевые полости подачи и возврата охлаждающего гелия.

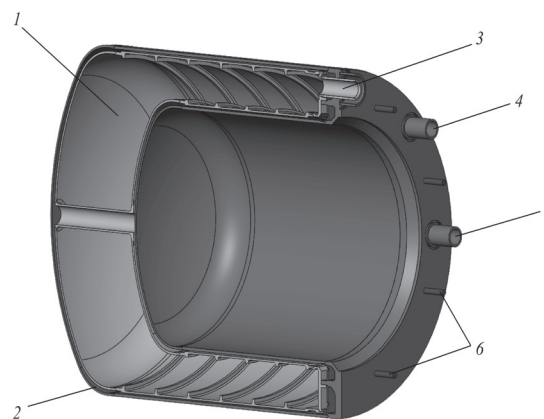


Рис. 2. Дейтериевая камера (в разрезе): 1 – объем с жидким дейтерием; 2 – его гелиевая оболочка; 3 – канал подачи и возврата дейтерия; 4, 5 – каналы подачи и возврата гелия соответственно; 6 – шпильки крепления камеры с дейтерием к теплому экрану

Охлаждающий гелий подается в дейтериевую камеру через патрубок. Затем он поступает в коллектор, равномерно в нем распределяется и поступает в кольцевой зазор, образованный внутренней дейтериевой и внутренней гелиевой оболочками. Далее гелий движется к передней части ДК и через отверстие в дейтериевой оболочке перетекает в зазор, образованный внешней дейтериевой и внешней гелиевой оболочками. После этого гелий движется уже в противоположном направлении и равномерно поступает в отводящий коллектор, соединенный с выходным патрубком.

Для поддержания температуры теплового экрана на уровне 20 К и для конденсации дейтерия в дейтериевой камере, применяется гелиевый рефрижератор TCF-50. Помимо дейтериевого контура, рефрижератор должен обеспечивать рабочую температуру (не более 20 К) тепловых экранов криостата для производства сверхтекучего гелия. Для

обеспечения максимальной надежности была выбрана последовательная схема подключения дейтериевого контура и криостата к рефрижератору (рис. 3).

Технические характеристики рефрижератора TCF-50 (получены экспериментальным путем) приведены в табл. 2

В результате двухступенчатого адиабатического расширения, на турбодетандерах рефрижератора образуется поток холодного гелия $G = 108$ г/с при температуре $T_{3165} = 10,5$ К и давлении $P_{3165} = 2,5$ ата (см. рис. 3). Давление P_{3165} устанавливается в автоматическом режиме, благодаря вентилю CV-3175. Вентилем CV-3170 выполняется настройка потока гелия на НТЧ.

По сигналу автоматики вентиль CV-3290 открывается при пуске рабочего режима эксплуатации рефрижератора. Встроенный в рефрижератор нагреватель R3270 обеспечивает возврат гелия после эксперимента на уровне $T_{3240} = 21$ К. Таким образом устанавливается стационарный режим работы рефрижератора.

После рефрижератора гелий поступает на охлаждение тепловых экранов криостата. Система охлаждения теплового экрана криостата имеет два параллельно смонтированных трубопровода с условным диаметром 14 мм и длиной 6 м каждый. Данные экраны поддерживают гелий в нижней и сливной ваннах криостата на уровне 1,2 К.

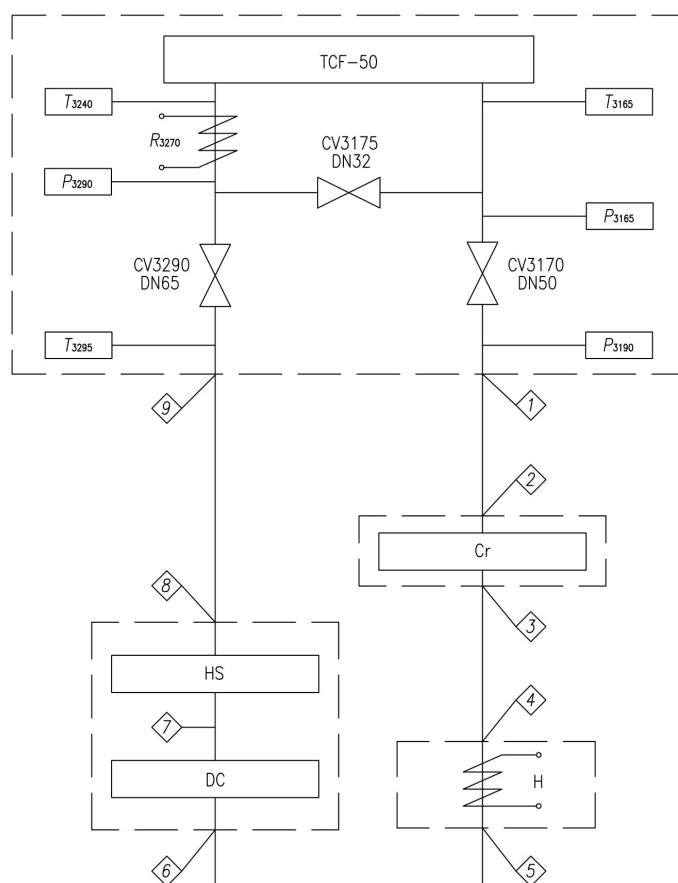


Рис. 3. Принципиальная схема низкотемпературного контура охлаждения: TCF-50 — гелиевый рефрижератор, HS — тепловой экран, DC — дейтериевая камера, Cr — криостат, H — нагреватель; CVkkkk — вентили, DNkk — условный диаметр вентилей; Tkkkk, Pkkkk — обозначения температуры и давления соответственно; R3270 — нагреватель для возврата гелия; узловые точки пронумерованы цифрами в квадратах

Таблица 2
Технические характеристики
гелиевого рефрижератора
ТСР- 50

Параметр	Значение
Поток гелия, г/с	108
Давление, ата на входе на выходе	$\geq 1,5$ 2,5
Температура, К на входе на выходе	$\leq 21,0$ 10,6
Тепловая нагрузка при $T=20$ К, кВт	3

После криостата гелий поступает в нагреватель. В нагревателе происходит нагрев гелия до температуры $T = 20$ К. Данная температура поддерживается для того, чтобы исключить образование дейтерия в твердой фазе, так как это может привести к закупориванию дейтериевого трубопровода с его последующим разрывом.

После нагревателя гелий поступает в источник УХН, где он сначала идет в дейтериевую камеру на конденсацию газообразного дейтерия, а затем на охлаждение теплового экрана источника УХН.

Геометрические характеристики трубопроводов НКО приведены в табл. 3.

Расчет теплопритоков к низкотемпературной части источника УХН

К низкотемпературной части (НТЧ) источника УХН предъявляются следующие требования:

гидравлическое сопротивление всех трубопроводов НТЧ должно быть не более 1 атм;

температура гелия T_{3240} (см. рис. 3) должна быть не более 21 К;

температура дейтерия должна быть выше точки затвердевания, но ниже точки конденсации;

теплоприток к НТЧ должен быть более 3 кВт на температурном уровне 20 К.

В качестве источника по основным уравнениям гидравлики и теплопередачи был использован справочник [9].

Теплопритоки к низкотемпературным конструкциям источника УХН осуществляются преимущественно по трем каналам: через вакуумную изоляцию, по тепловому мосту и от реакторного излучения.

Теплоприток через вакуумную теплоизоляцию определяется лучистым теплообменом от «теплой» поверхности вакуумного кожуха к «холодной» поверхности НТЧ:

$$Q_{rad} = \varepsilon_{ef} C \cdot 10^{-18} (T_1^4 - T_2^4) \cdot S_c,$$

где ε_{ef} — приведенная степень черноты; C — постоянная излучения для абсолютно черного тела ($C = 5,77$ Вт/(м²·К)); S_c , м², — площадь наружной поверхности «холодного» тела; T_1 , T_2 , К, — температуры «теплой» и «холодной» поверхностей ($T_1 = 300$ К, $T_2 = 20$ К).

Приведенная степень черноты вычислена по формуле

$$\varepsilon_{red} = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1} = 0,028,$$

где ε_1 , ε_2 — степени черноты «теплой» и «холодной» поверхностей; в данном случае для полированного алюминия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,055$ [9].

Тепловыми мостами к НТЧ служат опорные конструкции низкотемпературной части, трубопроводы холодного гелия и дейтерия, а также нейтроновод УХН.

Для расчетов теплопритоков через тепловые мосты следует использовать формулу

$$Q_{TC} = \frac{\lambda S_b}{L} (T_1 - T_2),$$

где λ , Вт/(см·К), — теплопроводность материала опорной конструкции (для алюминиевого сплава АМг6 $\lambda = 0,75$ Вт/(см·К) при $T_{av} = 173$ К); T_1 , T_2 , К, — температуры «теплого» и «холодного» концов моста ($T_1 = 300$ К, $T_2 = 20$ К); S_b , м², — площадь поперечного сечения моста; L , м, — длина моста.

Энерговыведения в конструктивных элементах источника УХН непосредственно от реактора вызывают гамма-кванты и нейтроны. Основным источником гамма-излучения является активная зона реактора; кроме того, оно генерируется в процессе захвата нейтронов ядрами конструктивных материалов. В активной зоне реактора генерация гамма-излучения происходит при делении ядер; осколки деления также излучают гамма-кванты.



Таблица 3

Геометрические характеристики гелиевых трубопроводов НКО

Позиция на рис. 3	Назначение трубопровода	Условный диаметр, мм	Длина, м
1-2	Подача гелия от рефрижератора на криостат	50	6,000
2-3	Охлаждение теплового экрана криостата	14	6,000
3-4	Подача гелия от криостата на нагреватель	50	6,000
4-5	Нагрев теплоносителя	—	—
5-6	Подача гелия от нагревателя на ДК	22	5,000
6-7	Охлаждение дейтерия в ДК	—	—
7-8	Охлаждение теплового экрана источника УХН	22	15,000
8-9	Возврат гелия от источника УХН на рефрижератор	50	6,000

Принятые сокращения: НКО — низкотемпературный контур охлаждения, УХН — ультрахолодные нейтроны, ДК — дейтериевая камера.

Нейтронно-физический расчет ядерного реактора ВВР-М с источником УХН осуществлялся методом Монте-Карло по программе MCNP-4C [10]. Расчетная модель оптимизировалась с целью получения максимальной плотности потока нейтронов с длиной волны $9\text{\AA}$ в сверхтекучем гелии. Мощность реактора принималась равной 16 МВт.

Расчетные суммарные теплопритоки к дейтериевой камере и теплому экрану представлены в табл. 4.

Перепад температур теплоносителя в дейтериевой камере определяется по формуле

$$\Delta T_{DK} = \frac{Q_{\Sigma DC}}{G c_p} = 1,19 \text{ К},$$

а перепад температур теплоносителя на тепловом экране — по формуле

$$\Delta T_{HS} = \frac{Q_{\Sigma HS}}{G c_p} = 1,74 \text{ К},$$

где G , г/с, — принятый массовый расход гелия ($G = 50$ г/с); c_p , Дж·кг⁻¹·К⁻¹, — теплоемкость гелия при $T_2 = 20$ К ($c_p = 5,3 \cdot 10^3$ Дж·кг⁻¹·К⁻¹); $Q_{\Sigma DC}$, $Q_{\Sigma HS}$, Вт, — суммарный теплоприток к дейтериевой камере и теплому экрану соответственно.

Теплогидравлический расчет низкотемпературной части источника

Для расчета гидравлических сопротивлений ΔP_{pip} в трубопроводах используется формула Дарси — Вейсбаха:

$$\Delta P_{pip} = \frac{\lambda_f l w^2 \rho}{2d},$$

где l , d , мм, — длина и внутренний диаметр трубопровода; w , м/с, — скорость течения в нем газа; λ_f — коэффициент трения; ρ , кг/м³, — плотность газа (гелий).

Плотность ρ рассчитывается с учетом абсолютного давления и температуры газа:

$$\rho = \frac{PM}{RT}.$$

Скорость гелия в трубопроводе выражается как

$$w = \frac{G}{\rho S},$$

где S , м², — площадь поперечного сечения трубопровода.

Коэффициент трения λ_f вычисляется с учетом его зависимости от величины числа Рейнольдса.

Таблица 4
Картина расчетных теплопритоков к двум узлам НКО

Источник теплопритока	Канал теплопередачи	Теплоприток, Вт	
		ДК	ТЭ
Через вакуумную изоляцию	Лучистый теплообмен	24,00	88,00
По тепловому мосту	Дейтериевый трубопровод	2,45	—
	Трубки охлаждения паров дейтерия и ТЭ	—	22,00
	Трубки откачки паров гелия	—	2,28
	2 опорных колеса	—	89,23
	2 опорных кронштейна	—	214,12
	Нейтронотвод УХН	—	26,00
Реакторное излучение	К алюминиевому корпусу	204,00	20,15
	К жидкому дейтерию	83,00	—
Суммарный теплоприток, Вт		313,45	461,78

Принятые сокращения: ДК – дейтериевая камера, ТЭ – тепловой экран.

Для зоны доквадратичного сопротивления, когда

$$20 \frac{d}{\Delta} < Re < 500 \frac{d}{\Delta}$$

(Δ , мм, – абсолютная шероховатость труб; для алюминия $\Delta = 0,06$ мм), λ_f вычисляется по формуле Альтшуля:

$$\lambda_f = 0,11 \cdot \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25};$$

для квадратичного сопротивления, когда $Re > 500 \frac{d}{\Delta}$, λ_f вычисляется по формуле

Шифринсона:

$$\lambda_f = 0,11 \cdot \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}.$$

При этом число Рейнольдса, критерий режима течения, рассчитывается по формуле

$$Re = \frac{wd\rho}{\mu}, \quad (1)$$

где μ , Па·с, – коэффициент динамической вязкости.

В формуле (1) коэффициент μ для газообразного гелия можно определить по формуле Кеезома [9]:

$$\mu = 5,023 \cdot T^{0,647}.$$

При расчете полного гидравлического сопротивления трубопроводов необходимо также учитывать потери давления ΔP_{loc} на местные сопротивления:

$$\Delta P_{loc} = \zeta \frac{\rho w^2}{2},$$

где ζ – коэффициент местного сопротивления.

Коэффициент ζ при повороте потока на угол φ определяется по формуле

$$\zeta = \left[0,131 + 0,16 \cdot \left(\frac{d}{R} \right)^{3,5} \right] \cdot \frac{\varphi}{90}.$$

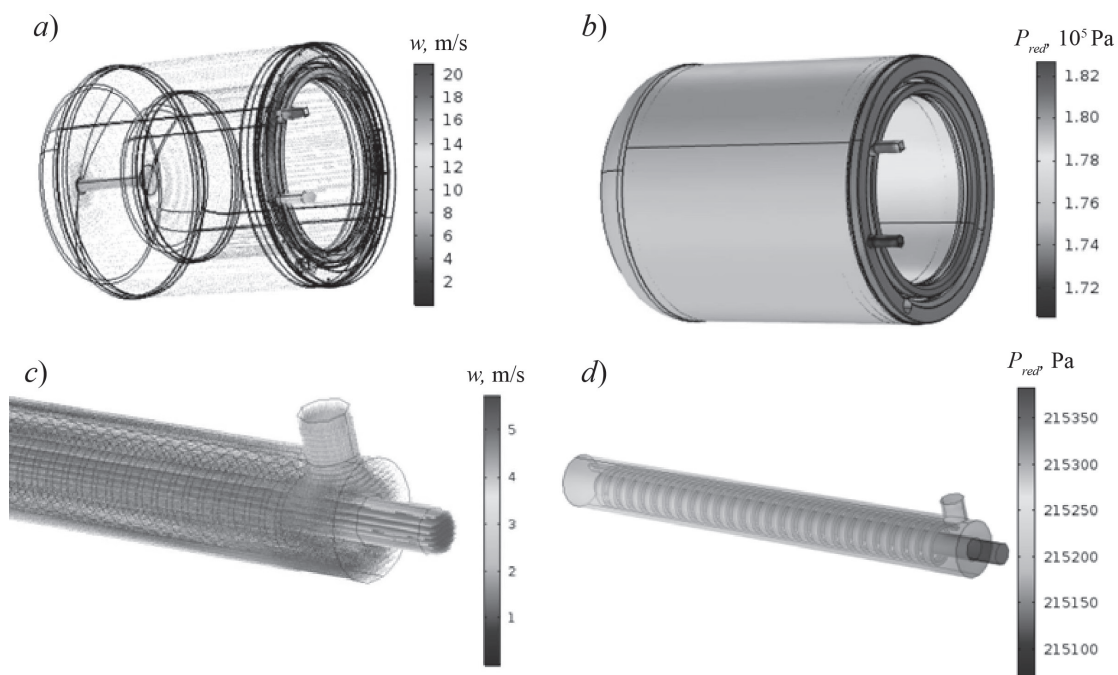


Рис. 4. Расчетные поля скорости теплоносителей (*a,c*) и абсолютного давления теплоносителей (*b,d*) для контуров охлаждения дейтериевой камеры (*a,b*) и нагревателя гелия (*c,d*)

Таблица 5

Расчетные гидравлические сопротивления низкотемпературного контура источника УХН

Назначение трубопровода (номера на рис. 3)	Скорость гелия в трубопроводе, м/с	Потеря давления на трение, Па
Возврат гелия в рефрижератор (8–9)	7,92	302
Охлаждение теплового экрана НТЧ (7–8)	29,86	37798
Охлаждение дейтериевой камеры (6–7)	4,54	17288
Подача гелия к дейтериевой камере от нагревателя (5–6)	25,21	9676
Нагрев гелия (4 –5)	2,47	183
Подача гелия от криостата к нагревателю (3–4)	2,80	107
Охлаждение тепловогоэкрана криостата (2–3)	16,30	11248
Подача гелия в криостатот рефрижератора (1–2)	2,43	94
Суммарное значение потерь давления, Па		76696

Примечание. Представлены расчетные результаты для значения массового расхода гелия $G = 50 \text{ г/с}$.

Следует особо отметить расчет гидравлических сопротивлений контура охлаждения дейтериевой камеры и контура нагревателя гелия, который располагается перед входом в дейтериевую камеру и обеспечивает точную температуру подачи гелия на конденсацию дейтерия в диапазоне 20 – 24 К. Эти контуры имеют сложную геометрическую форму, поэтому их расчет производился в пакете COMSOL Multiphysics 5.2a. Результаты расчетов представлены на рис. 4.

Результаты гидравлического расчета низкотемпературного контура источника УХН на реакторе ВВР-М представлены в табл. 5. Нумерация трубопроводов указана в соответствии со схемой, представленной на рис. 3.

Значение итогового гидравлического сопротивления контура НТЧ $\Delta P_T = 76,7$ кПа оказалось меньше такового для гидравлического сопротивления, указанного в паспорте к рефрижератору TCF-50 (100 кПа). Таким образом, проделанный гидравлический расчет показал способность контура НТЧ работать при массовом расходе гелия $G = 50$ г/с.

Тепловые расчеты для камеры жидкодейтериевого предзамедлителя при потоке гелия в оболочке $G = 50$ г/с дают значение средней температуры стенки камеры, равное 22,83 К (рис. 5).

На рис. 6 представлена расчетная зависимость максимальной температуры дейтерия от массового расхода гелия. При потоке гелия в $G = 50$ г/с, максимальная температура дейтерия составляет 23 К. Поскольку при

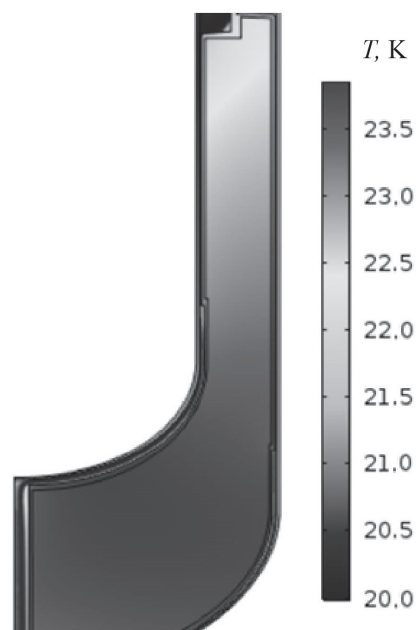


Рис. 5. Расчетное распределение температуры дейтерия в дейтериевой камере

давлении в дейтериевом контуре, равном 1,5 ата, температура кипения равновесного дейтерия составляет $T = 24,12$ К, то из данного расчета можно заключить, что данная схема НТЧ обеспечит в камере переход всего дейтерия в жидкую фазу.

Температурное поле было также рассчитано для всей поверхности теплового экрана (рис. 7).

На основании этого расчета, в местах с минимальной температурой поверхности теплового экрана были найдены опорные точки для установки гелиевого модуля со

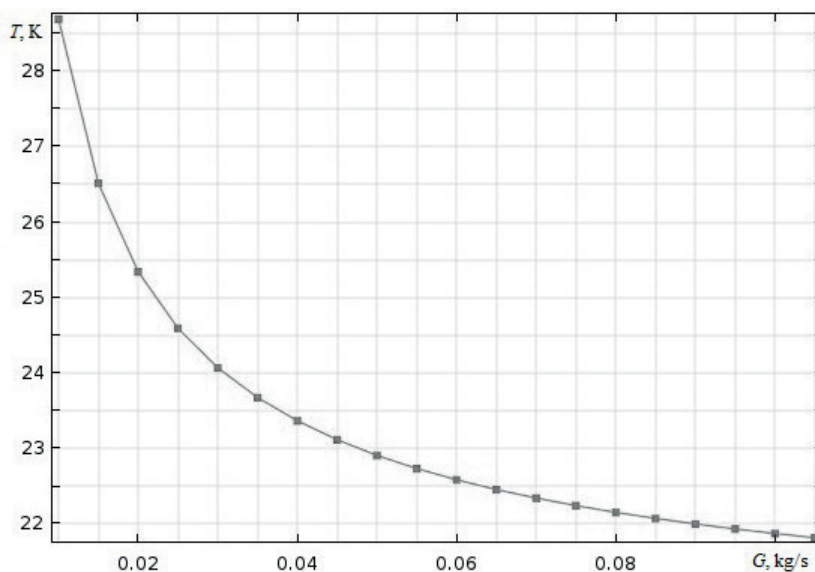


Рис. 6. Расчетная зависимость максимальной температуры дейтерия от массового расхода гелия

сверхтекучим гелием. От величины теплопритоков к гелиевой камере зависит температура сверхтекучего гелия в камере источника, что в свою очередь сильно влияет на время жизни нейтронов. Таким образом, теплопритоки к сверхтекучему гелию непосредственно влияют на качество источника УХН на реакторе ВВР-М.

С помощью наших расчетов было установлено, что величину теплоприто-

ка от реакторного излучения можно существенно уменьшить, если отодвинуть источник УХН от активной зоны на 25 см. Так, величина теплопритоков к камере со сверхтекучим гелием составила 35,89 Вт для случая установки источника УХН вплотную к активной зоне реактора и 22,34 Вт при откате этого источника от указанной активной зоны на 25 см (табл. 6).

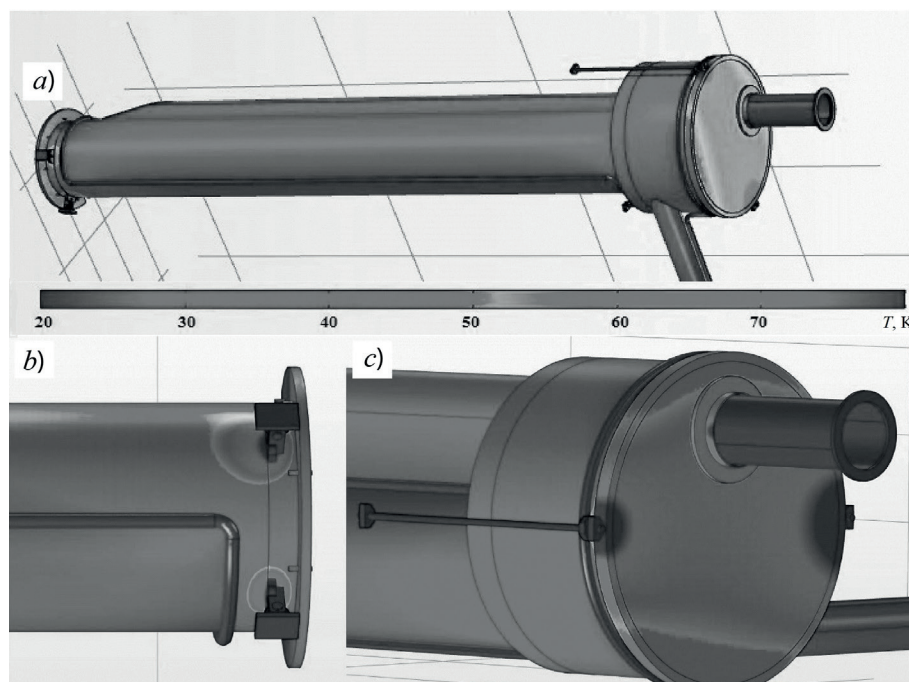


Рис. 7. Расчетные распределения температуры по теплому экрану источника УХН (a) и по его фрагментам: в районе опорных колес (b), а также опорных кронштейнов и нейтронвода УХН (c)

Таблица 6

Зависимость теплопритока к гелиевой камере от ее позиции относительно ядерного реактора

Источник теплопритока	Канал теплопередачи	Теплоприток, Вт	
		Исходная позиция	Сдвиг на 25 см
Через вакуумную изоляцию	Лучистый теплообмен	10^{-3}	
По тепловому мосту	Опоры гелиевой камеры	0,71	
Реакторное излучение	К алюминиевому корпусу	17,18	10,28
	К жидкому гелию	18,00	11,35
Суммарный теплоприток, Вт		35,89	22,34

Заключение

В настоящей статье представлены тепло-гидравлические исследовательские расчеты низкотемпературной части (НТЧ) источника ультрахолодных нейтронов (УХН) на реакторе ВВР-М. Расчеты выполнены на основании разработанной ранее конструкторской документации. В результате проведенной работы получены следующие результаты.

Показано, что за счет всевозможных теплопритоков к НТЧ, при мощности реактора в 16 МВт, в сверхтекучем гелии (конвертор холодных нейтронов в ультрахолодные) будет выделяться мощность 35 Вт; при этом тепловая нагрузка на низкотемпературный контур НТЧ составит 775 Вт. Охлаждение НТЧ происходит за счет потока холодного гелия величиной $G = 50$ г/с.

Система трубопроводов НТЧ спроектирована таким образом, чтобы обеспечить

необходимую пропускную способность для указанного потока жидкого и газообразного гелия. Установлено, что гелиевый рефрижератор TCF-50 обеспечит оптимальную работу источника УХН на реакторе ВВР-М. Согласно проведенным расчетам, максимальная температура дейтерия в источнике УХН составит 23 К. Такая температура при рабочем давлении $P_w = 1,5$ ата гарантирует переход дейтериевого предзамедлителя в жидкую фазу.

Проведенные расчеты позволяют перейти к изготовлению низкотемпературной части источника УХН на реакторе ВВР-М.

Исследование выполнено в НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Altarev I.S., Egorov A.I., Ezhov V.F., et al. An investigation of the effect of the converter cooling upon the yield of ultracold neutrons and development of a cooled source of ultracold neutrons. Preprint PNPI-246. Gatchina: PNPI, 1976. 17 p.
2. Altarev I.S., Borisov Yu.V., Brandlin A.B., et al. A liquid hydrogen source of ultra-cold neutrons // Physics Letters. A. 1980. Vol. 80. No. 5–6. Pp. 413–416.
3. Алтарев И.С., Боровикова Н.В., Булкин А.П. и др. Универсальный жидководородный источник поляризованных холодных и ультрахолодных нейтронов на реакторе ВВР-М ПИЯФ // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. Вып. 6. С. 269–272.
4. Серебров А.П., Митюхляев В.А., Захаров А.А., Харитонов А.Г., Несвижевский В.В., Ласаков М.С., Тальдаев Р.Р., Алдушенков А.В., Варламов В.Е., Васильев А.В., Грин Г., Боулс Т. Исследование твердодейтериевого источника ультрахолодных нейтронов // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. Вып. 10. С. 764–769.
5. Ахизер А.И., Померанчук И.Я. О рассеянии нейтронов с энергией несколько градусов в жидком гелии II // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 391.
6. Серебров А.П., Фомин А.К., Харитонов А.Г., Лямкин В.А., Прудников Д.В., Иванов С.А., Ерыкалов А.Н., Онегин М.С., Митюхляев В.А., Захаров А.А., Гриднев К.А. Высокоинтенсивный источник ультрахолодных нейтронов на реакторе ВВР-М для научных исследований в области фундаментальной физики // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2015. Т. 2 (60). Вып. 1. С. 27–41.
7. Serebrov A.P. Supersource of ultracold neutrons at the WWR-M reactor and the program of fundamental research in physics // Crystallography Reports. 2011. Vol. 56. No. 7. Pp. 1230–1237.
8. Бондаренко С.Д. Физические свойства изотопов водорода и их соединений на линии равновесия жидкость — пар. Препринт ПИЯФ. № 2471. Гатчина: Изд. ПИЯФ, 2002. 39 с.
9. Малков М.П., Данилов И.Б., Зельдович А.Г., Фрадков А.Б. Справочник по физико-техническим основам криогеники. М.: Энергоатомиздат, 1985. 432 с.
10. Briesmeister J.F. MCNPTM — A general Monte Carlo N -particle transport code. Version 4C // Los Alamos National Laboratory. Los Alamos. New Mexico. 2000. <https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-13709-M>.

Статья поступила в редакцию 14.11.2018, принята к публикации 28.11.2018.



СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СЕРЕБРОВ Анатолий Павлович — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики нейтрона отделения нейтронной физики (ОНФ) НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 serebrov_ar@pnpi.nrcki.ru

ЛЯМКИН Виталий Александрович — младший научный сотрудник ОНФ НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 lyamkin_va@pnpi.nrcki.ru

КОПТЮХОВ Артем Олегович — стажер-исследователь ОНФ НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 t44h@yandex.ru

ОНЕГИН Михаил Сергеевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отделения теоретической физики (ОТФ) НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 onegin_ms@pnpi.nrcki.ru

ПРУДНИКОВ Дмитрий Владимирович — инженер-технолог ОНФ НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 dpvbox@mail.ru

САМОДУРОВ Олег Юрьевич — инженер-технолог ОНФ НИЦ «Курчатовский институт» — ПИЯФ, г. Гатчина Ленинградской области, Российская Федерация. 188300, Российская Федерация, Ленинградская область, г. Гатчина, мкр. Орлова Роща, д. 1 samodurov.o@yandex.ru

REFERENCES

- [1] I.S. Altarev, A.I. Egorov, V.F. Ezhov, et al., An investigation of the effect of the converter cooling upon the yield of ultracold neutrons and development of a cooled source of ultracold neutrons, Preprint PNPI-246, Gatchina (1976).
- [2] I.S. Altarev, Yu.V. Borisov, A.B. Brandlin, et al., A liquid hydrogen source of ultracold neutrons, Physics Letters. A. 80 (5, 6) (1980) 413–416.
- [3] I.S. Altarev, N.V. Borovikova, A.P. Bulkin, et al., Universal liquid-hydrogen source of polarized cold and ultracold neutrons at the WWR-M reactor of the Leningrad Institute of Nuclear Physics, JETP Letters. 44 (6) (1986) 344–348.
- [4] A.P. Serebrov, V.A. Mityukhlyayev, A.A. Zakharov, et al., Experimental study of solid-deuterium source of ultracold neutrons, JETP Letters. 62 (10) (1995) 785–790.
- [5] A.I. Ahizeer, I.Ya. Pomeranchuk, On elastic scattering of neutrons with energy of a few Kelvins in liquid helium II, J. Phys. USSR. 9 (1945) 461.
- [6] A.P. Serebrov, A.K. Fomin, A.G. Kharitonov, et al., High-density ultracold neutrons source for the WWR-M reactor for scientific research in fundamental physics, Bulletin of St. Petersburg University. Physics and Chemistry. 2 (60) (1) (2015) 27–41.
- [7] A.P. Serebrov, Supersource of ultracold neutrons at the WWR-M reactor and the program of fundamental research in physics, Crystallography Reports. 56 (7) (2011) 1230–1237.
- [8] S.D. Bondarenko, Properties of hydrogen isotopes and their compounds on line of vapor-liquid equilibrium. Preprint-PNPI-2471 (2002).

[9] **M.P. Malkov, I.B. Danilov, A.G. Zeldovich, et al.**, *Spravochnik po fiziko-tekhnicheskim osnovam kriogeniki* [Reference book on physical-technical fundamentals of cryogenics], Energoatomizdat, Moscow (1985).

Monte Carlo N -particle transport code. Version 4C, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico. (2000) <https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-13709-M>.

10. **J.F. Briesmeister**, MCNP6 – A general

Received 14.11.2018, accepted 28.11.2018.

THE AUTHORS

SEREBROV Anatolii P.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
serebrov_ap@pnpi.nrcki.ru

LYAMKIN Vitaliy A.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
lyamkin_va@pnpi.nrcki.ru

KOPTYUHOV Artem O.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
t44h@yandex.ru

ONEGIN Mikhail S.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
onegin_ms@pnpi.nrcki.ru

PRUDNIKOV Dmitriy V.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
dpybox@mail.ru

SAMODUROV Oleg Yu.

NRC «Kurchatov Institute» – PNPI

1, Orlova Roscha microdistrict, Gatchina, 188300, Leningrad Oblast, Russian Federation
samodurov.o@yandex.ru



DOI: 10.18721/JPM.12107

УДК 621.391:681.142

ТЕХНОЛОГИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МИКРОИНСТРУМЕНТА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

В.Н. Савин, В.А. Степанов, М.В. Шадрин

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

г. Рязань, Российская Федерация

Разработана и реализована схема оптического микроскопа, включающего специальную бителецентрическую оптическую систему для формирования диодной подставки и телецентрического объектива для захвата изображения. Применение указанной системы позволяет снизить влияние дифракционных эффектов на краях теневой картины и измерять с помощью оптического микроскопа основные параметры режущего микроинструмента — его вылет и диаметр. Разработан алгоритм, моделирующий два основных зрительных канала глаза человека и детектирующий быстрые пространственно-временные процессы и шумы. Алгоритм обеспечивает измерение контура режущей кромки инструмента с субпиксельной точностью (до 0,01 пикселя) и позволяет определять физические размеры режущего инструмента с погрешностью 0,5 мкм.

Ключевые слова: телецентрический объектив, модель зрения человека, микроинструмент, субпиксельная точность

Ссылка при цитировании: Савин В.Н., Степанов В.А., Шадрин М.В. Технология измерения геометрических параметров микроинструмента на основе модели зрения человека // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 87–95. DOI: 10.18721/JPM.12107

HUMAN VISUAL MODEL-BASED TECHNOLOGY: MEASURING THE GEOMETRIC PARAMETERS OF MICROINSTRUMENT

V.N. Savin, V.A. Stepanov, M.V. Shadrin

Ryazan State University named for S.A. Esenin, Ryazan, Russian Federation

In the paper, a scheme of an optical microscope which includes a special bitelecentric optical system for the formation of a diode support and a telecentric objective for capturing the image has been designed and implemented. The use of such system makes it possible to reduce the diffraction effects at the edges of the shadow structure and to measure (using the microscope) the main parameters of a cutting microinstrument: its protrusion and diameter. An algorithm for modeling the two main visual channels of the human eye was developed. It allowed rapid detection of spatial-temporal processes and noise, and provided measuring the cutting edge contour of the instrument with a subpixel error (up to 0.01 pixel) and determining the dimensions of the cutting tool with an error of 0.5 μm .

Keywords: telecentric objective, human visual model, microinstrument, subpixel accuracy

Citation: V.N. Savin, V.A. Stepanov, M.V. Shadrin, Human visual model-based technology: measuring the geometric parameters of microinstrument, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 87–95. DOI: 10.18721/JPM.12107

Введение

Основу современного обрабатывающего производства металлов (механическая обработка) составляют станки и обрабатывающие центры с ЧПУ (числовое программное управление). Для получения на таких станках высококачественной продукции, обладающей заданной точностью исполнения, необходимо учитывать ряд факторов. Некоторые из них обеспечиваются на стадии проектирования изделия. Создается управляющая программа, подбираются материал и инструмент. Но реальные инструменты не всегда абсолютно точно соответствуют заданным в программе объектам. Современные системы позволяют корректировать работу станка с учетом реальных размеров инструмента, но для этого необходимо точно знать параметры этого инструмента.

Существует множество способов (как оптических, так и механических) оценивать и измерять параметры режущих кромок инструментов [1]. Наиболее современными являются пресеттеры на основе оптического микрометра. Данные устройства позволяют быстро и с высоким качеством получать необходимые данные о геометрических параметрах режущего инструмента. Предел точности таких устройств составляет 5 мкм на каждые 100 мм. Современные средства не позволяют в условиях производства быстро измерять такие величины.

Данная работа направлена на создание устройства и программно-аппаратной технологии, позволяющих быстро и точно измерять такие параметры режущего концевой и расточного микроинструмента, как вылет и диаметр фрезы, сверла, метчика и т. п. перед тем как установить их в шпиндель станка с точностью не хуже 1 мкм.

Технология предназначена для прецизионного бесконтактного оперативного измерения и коррекции режущего микроинструмента вне станка в условиях цеха.

Нами разработано и создано устройство для предварительной настройки инструмента вне станка (пресеттер). Оно представляет собой программно-аппаратный комплекс с оптическим микрометром и линейными энкодерами. Специальное программное обеспечение (ПО) обеспечивает прием сигналов с микрометрических линейных энкодеров и оптического микро-

метра и вычисляет параметры инструмента. Результаты работы программы отображаются на дисплее. Взаимодействие с оператором происходит через интерфейс пользователя ПО.

Подбор компонентов и разработка оптической схемы

Отличительной особенностью разрабатываемой технологии является использование модели строения сетчатки человеческого глаза и применение бителецентрической оптики для формирования диодной подсветки и телецентрического объектива для захвата изображения. Применение указанных средств позволяет снизить влияние дифракционных эффектов на краях теневой картины.

Разработка оптической схемы составляет один из важнейших этапов работы. От ее качества прямо зависят потребительские свойства всего устройства. Как бы ни была совершенна электронная схема, в любом случае необходима высококачественная, точно рассчитанная и изготовленная оптическая система. В противном случае искаженные данные, поступающие с нее после математической обработки, могут вносить существенные погрешности в точность измерения. Поэтому к ее разработке требуются особые подходы как в научном, так и в конструкторском аспектах.

При работе над оптическими схемами для контрольно-измерительной системы прежде всего анализируется и используется информация о необходимом диапазоне и точности измерений, о методах расчета и настройки оптического узла, о приемах по повышению ее разрешающей способности и сведению к минимуму аббераций различного рода.

В основе пресеттера лежит оптический микрометр (рис. 1), использующий бителецентрический объектив и ход лучей, обеспечивающий получение четкой бездифракционной тени края микроинструмента в увеличенном масштабе. Указанная тень анализируется с помощью алгоритма. Последний находит крайние точки проекции и с помощью математической интерполяции (см. следующий раздел) вычисляет координаты точек и значения радиуса и высоты микроинструмента (объект измерения).

В оптической схеме микроскопа необходимо с высокой точностью согласовывать

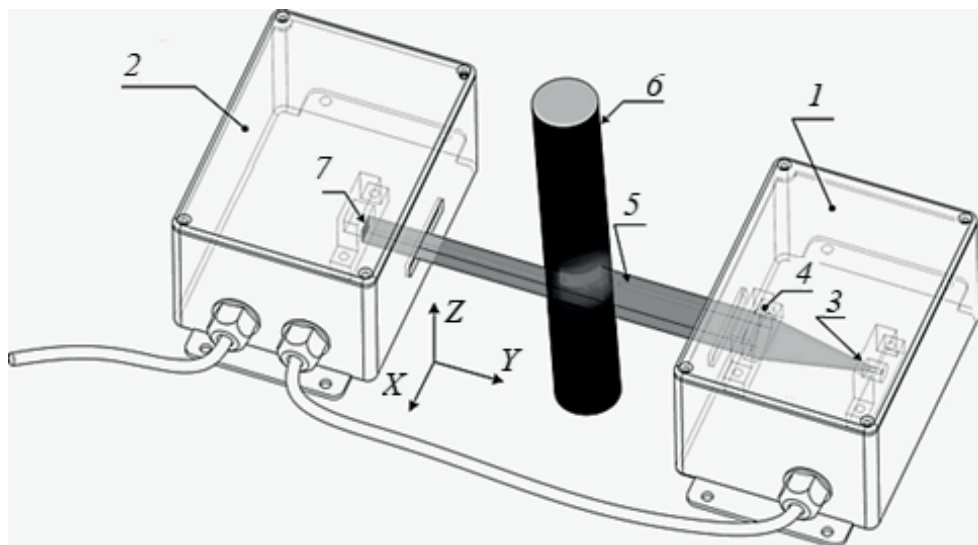


Рис. 1. Функциональная схема оптического микрометра:
1 – излучающий блок, 2 – приемный блок, 3 – источник излучения, 4 – оптическая схема, 5 – сканирующий луч, 6 – объект измерения, 7 – фотоприемник

соосность объектива и источника излучения. Диаметр бителецентрического объектива и луча задней подсветки составляет 16 мм и позволяет создавать точную, практически бездифракционную тень в плоскости изображения фотоприемника. Система предназначена для работы с неподвижными объектами, при этом измеряемая режущая кромка строго соосна со шпинделем системы.

При телецентрическом ходе лучей неточность наводки не влияет на цену деления отсчетных шкал прибора. Наиболее целесообразны объективы с бителецентрическим ходом лучей, свободные от дисторсии и характеризующиеся постоянным линейным увеличением [2].

Оптический микрометр – наиболее важная часть разрабатываемой системы, он состоит из трех основных элементов: КМОП-сенсора (комплементарные полевые транзисторы со структурой металл – оксид – полупроводник, CMOS), бителецентрического объектива и телецентрического излучателя. На данный момент лидерами в производстве телецентрических объективов можно назвать две конкурирующие фирмы: Opto Engineering (Италия) и Sill Optics (Германия).

Бителецентрический объектив выбирается в соответствии с требованиями, налагаемыми на параметры разрабатываемой системы (излагаются ниже).

Для бителецентрического объектива характерна особенность, что он захватывает только лучи, которые идут параллельно

его оптической оси. Ввиду этого отсутствует эффект перспективы (когда дальние объекты кажутся меньше, чем ближние) и в камеру не попадают лучи, падающие под углом и отражающиеся от других поверхностей. Однако такой эффект имеет обратную сторону и накладывает ограничение, а именно – объектив «видит» только область, меньшую или равную площади внешней линзы. Диаметр внешней линзы составляет 16 мм. Таким образом объектив позволяет захватить область площадью примерно 200 мм².

Для эффективной же работы микрометра и его калибровки необходимо, чтобы объектив «видел» площадку размером не менее 8×6 мм (исходя из характеристик объектива).

Вторым важным параметром для поиска точки максимальной фокусировки является глубина резкости объектива. Она должна быть не более 2 мм для настройки режущего инструмента в рассматриваемой системе. Только в этой точке можно корректно измерить вылет инструмента. В противном случае не будет соблюдаться строгая перпендикулярность между линией «ось инструмента – его режущая кромка» и оптической осью микрометра.

Третий важный параметр – это расстояние, на котором начинается диапазон измерения. Данное расстояние можно вычислять путем вычитания глубины резкости объектива из его рабочего расстояния (расстояние, на котором достигается макси-

мальная фокусировка). Этот параметр необходимо учитывать при проектировании конструкции оптического микрометра.

На основе указанных выше требований выбран специальный бителецентрический объектив ТС 23009 итальянской компании Opto Engineering.

Для корректной работы бителецентрического объектива необходим согласованный с ним телецентрический излучатель. Основное требование, к нему предъявляемое, — диаметр внешней линзы бителецентрического объектива должен совпадать с диаметром внешней линзы телецентрического излучателя. Такому требованию удовлетворяет излучатель LTCLHP023-R, также выпускаемый компанией Opto Engineering.

Для получения корректного изображения контуров измеряемого объекта компоненты оптической схемы необходимо разместить следующим образом.

Модуль подсветки располагается напротив объектива, причем ось модуля подсветки совпадает с оптической осью объектива. Расстояние между объективом и модулем подсветки может находиться в пределах от 120 до 150 мм. Нами выбрано расстояние — 125 мм (рис. 2). Измеряемый объект должен располагаться на расстоянии 62,2 мм от объектива.

Важной частью любой оптической схемы является КМОП-сенсор. Как и в случае трехмерного триангуляционного измерителя с линейной подсветкой, использует-

ся промышленная камера, произведенная компанией Basler. В нашем случае нет необходимости в высокой частоте повторения кадров; главное — камера должна обеспечивать изображение кромки инструмента без «подвисаний», т. е. недопустима задержка кадра на дисплее. Для таких целей достаточно использовать камеру, которая давала бы 25 — 30 кадр/с.

Для этой цели выбрана промышленная КМОП-камера acA2500-14um — Basler ace. Для полноты картины приводим характеристику камеры:

- сенсор IMX264 компании Sony, его размер — $8,4 \times 7,1$ мм;
- затвор глобальный;
- разрешение (Д × Ш) — 2448×2048 пикселей, размер пикселя — $3,45 \times 3,45$ мкм;
- максимальная частота — 25 кадр/с;
- тип изображения — монохромный;
- тип крепления — C-mount;
- интерфейс подключения — USB 3.0.

Разработка и реализация программных интерфейсов и алгоритмов

Особенностью предлагаемой нами технологии является использование специального алгоритма обработки изображений. Данный алгоритм представляет собой пространственно-временной фильтр, моделирующий два основных зрительных канала человеческого глаза: фовеальное видение для детализированного цветного зрения и периферийное зрение для детектирования

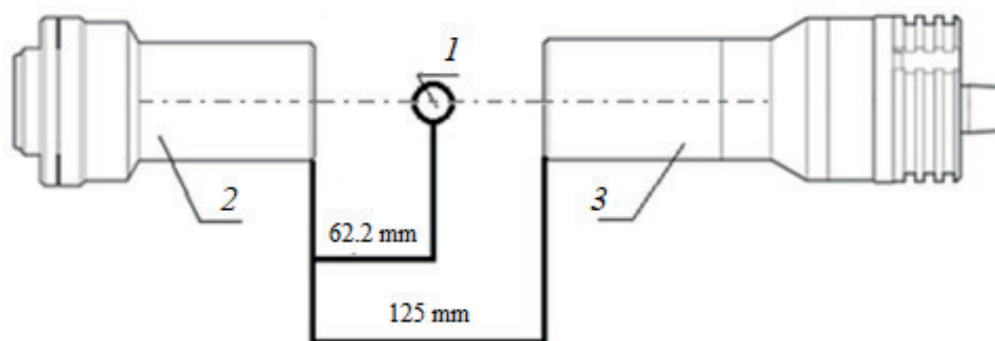


Рис. 2. Схема расположения компонентов оптической системы:
1 — объект измерения, 2 — бителецентрический объектив, 3 — модуль подсветки



быстрых процессов и событий [3].

Сетчатка глаза состоит из слоев взаимосвязанных клеток. Для построения алгоритмической модели человеческого зрения нами выделяется два основных слоя сетчатки: наружный плексиформный и внутренний плексиформный. Каждый из слоев моделируется специальными фильтрами. Выходные данные алгоритма моделируются внутренним плексиформным слоем.

Другим важным свойством алгоритма является способность к удалению пространственно-временного шума с одновременным увеличением детализации изображения. При этом моделируются работа фоторецепторов и процесс восприятия информации мозгом; повышается контрастность краев изображения, улучшаются контуры, реализуется логарифмический фильтр Габора. Разработанный алгоритм позволяет также повысить точность определения контура объекта до субпиксельных единиц.

На рис. 3 представлены изображения, демонстрирующие изменения четкости контура объекта. Например, размытость на краях объекта сильно понижена. Можно также заметить, что перепады интенсивности на элементах объекта практически отсутствуют. Для реализации взаимодействия оптического микрометра с персональным компьютером разработан алгоритм обмена данными. На физическом уровне взаимодействие предусмотрено по интерфейсу USB 3.0. Для построения логического уровня реализован набор функций, позволяющих подключать различные параметры оптического микрометра и управлять ими. Это время экспозиции, усиление,

область интереса, частота кадров. Чтобы получить изображение в режиме реального времени, мы применили функционал с использованием библиотек Pylon и OpenCV. Функции получения кадра и его передачи для дальнейшей обработки выполняются, в соответствии с нашими проектами, в отдельных потоках, что позволяет добиться высокого быстродействия при частоте 25 кадр/с.

Алгоритм также содержит функции для определения (с субпиксельной точностью) контуров режущей кромки инструмента на изображении, полученном с помощью оптического микрометра.

Указанное изображение обладает рядом особенностей, обусловленных применением телецентрической оптики:

- минимально проявляются дифракционные эффекты на краях измеряемой кромки;
- размеры изображения объекта на матрице видеокамеры соответствуют реальным размерам объекта.

Таким образом, имея физический размер пикселя матрицы видеокамеры и количество пикселей, которое занимает контур инструмента, можно вычислять положение краев инструмента (в микрометрах) относительно оптической оси камеры. Такой подход обеспечивает определение положения краев инструмента с точностью до размера пикселя. В большинстве современных видеокамер применяются матрицы, размер пикселя в которых не превышает 3–4 мкм. Такое значение параметра не гарантирует определения требуемых размеров с микронной точностью.

Для более точного нахождения положения краев инструмента, нами разрабо-

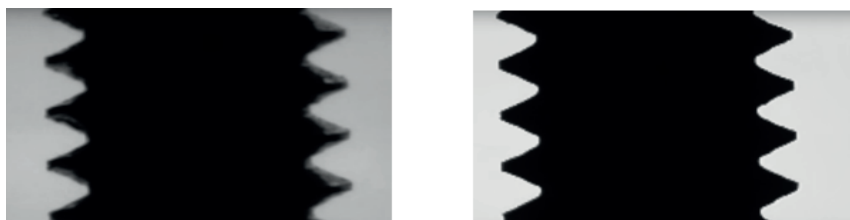


Рис. 3. Сравнение двух изображений объекта: *a* – исходное, *b* – обработанное алгоритмом по удалению пространственно-временного шума

тан алгоритм субпиксельного определения контуров его режущей кромки и использованы возможности этого алгоритма.

Известны три основные группы методов для определения указанных контуров с субпиксельной точностью:

- аппроксимационные;
- основанные на вычислении моментов изображения;
- интерполяционные.

Методы первой группы используют непрерывные функции для подгонки функции изображения. Субпиксельное положение контура определяется как точка перегиба непрерывной функции.

Для второй группы методов используются статистические модели.

Методы третьей группы обеспечивают субпиксельную точность путем интерполяции данных изображения для получения более тонкой сетки пикселей [4].

Разработанный нами алгоритм относится к интерполяционным методам (третья группа).

Алгоритм состоит из следующих операций.

Шаг 1. Исходное изображение подвергается размытию по Гауссу.

Шаг 2. Применяется фильтр с ядром Кэнни отдельно для строк и столбцов; результаты записываются в соответствующие матрицы.

Шаг 3. Определяются точки контура с пиксельной точностью.

Шаг 4. Производится уточнение положения контуров с субпиксельной точностью на основе контуров, полученных на шаге 3, и матриц, записанных на шаге 2.

Субпиксельные координаты контуров вычисляются путем уточнения положения каждой из точек контура в его окрестности 3×3 . Затем определяются собственные векторы и собственные значения матрицы Гессе данной окрестности [5]. Благодаря этому, направление и величина смещения точки контура находятся относительно начальных. Таким образом, при смещении каждой точки контура на определенный вектор, находится субпиксельное значение позиции каждой точки контура.

Разработанная нами методика дает возможность получать искомые значения с точностью до 0,01 пикселя. Такая точность позволяет определять физические размеры измеряемого инструмента с погрешностью не хуже 0,5 мкм.

Геометрические параметры, такие как вылет и диаметр, вычисляются следующим образом. Анализируются субпиксельные координаты точек контура, и производится поиск минимальных и максимальных точек по координатам x и y . Точка с минимальным значением координаты x соответствует точке инструмента, максимально удаленной от оси, а точка с минимальной координатой y — точке инструмента с наибольшей высотой. Затем значения характеристических точек переводятся в мировую систему координат путем умножения значения координаты на размер пикселя в соответствующем направлении и на коэффициент увеличения.

Для получения максимально точных измерений, необходима прецизионная фокусировка изображения. Для ее контроля используется функция, с помощью которой вычисляется значение лапласиана изображения (он представляет собой суммированное значение производных второго порядка). Затем вычисляется среднеквадратическое отклонение для матрицы лапласиана — значение «фокусировки» изображения. Через оценку значения полученного параметра делается заключение о степени фокусировки изображения. В данном алгоритме предусмотрено пороговое значение параметра, разделяющее значения «фокусировки» на допустимые (при них можно выполнять измерения) и недопустимые (при них следует улучшить фокусировку) [6].

Помимо вышеописанного, реализован функционал калибровки системы по заданному шаблону. Разработка программного обеспечения производилась в среде Qt Creator с применением библиотек Qt и OpenCV.

При разработке функционального модуля программы применялась библиотека OpenCV 3.1.0, предназначенная для обработки изображений. Полученное с камеры изображение содержит информацию о контурах объекта. Данное изображение формируется при помощи телецентрической оптической схемы. Последняя обеспечивает возможность получения изображения практически без дифракции на границе объекта. Это свойство позволяет упростить задачу определения контура объекта для дальнейшего измерения.

С целью повышения контрастности применяется алгоритм, основанный на модели человеческого зрения. Далее про-



изводится определение контуров объекта с субпиксельной точностью. Если, например, увеличение объектива равно 1,005, то можно сделать заключение о размере контура на матрице видеокамеры. Он будет равен числу пикселей, которое занимает контур, умноженному на размер пикселя и на коэффициент увеличения.

Например, для вычисления размера контура по горизонтали X

$$X = dNp,$$

где d – коэффициент увеличения объектива; N – количество пикселей между краями контура; p , мкм, – ширина пикселя.

Для выполнения калибровки размера контура измеряется шаблонный объект с известными параметрами. Это дает возможность определять расположение оси вращения инструмента в системе координат матрицы камеры. В качестве шаблона можно использовать, например, конус.

Модуль калибровки позволяет определять положение точки с максимальным значением координаты Z (она соответствует оси вращения). Значение координаты X , соответствующее оси вращения, при выполнении калибровки принимается за нулевое. Другими словами, вершина конуса служит началом координат в системе XZ . Начальное значение координаты Z определяется как разность полученного значения высоты конуса минус фактическое значение высоты конуса (рис. 4, *a*).

Разработанный интерфейс пользователя

для режима измерения (рис. 4, *b*) содержит следующие области: просмотр изображений с оптического микрометра и ввод результатов измерений.

Заключение

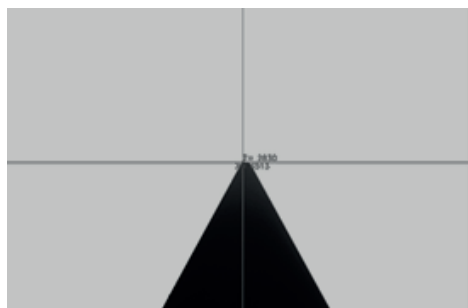
Проведено целевое исследование, направленное на создание устройства и программно-аппаратной технологии, позволяющих быстро и точно измерять базовые параметры режущего инструмента. В ходе исследования получены следующие результаты.

1. Разработаны оптический микроскоп и оптическая схема к нему, включающая бителецентрическую оптику для формирования диодной подсветки и телецентрического объектива для захвата изображения. Разработанный оптический микроскоп обладает глубиной резкости объектива не более 1 мм (с формированием изображения без дифракционной картины).

Показано, что применение такой оптической схемы позволяет снизить влияние дифракционных эффектов на краях теневой картины и измерять в оптическом микроскопе такие параметры режущего инструмента, как вылет и диаметр.

2. Разработан алгоритм, детектирующий быстрые пространственно-временные процессы; он обеспечивает измерение контура режущей кромки инструмента с субпиксельной точностью (до 0,01 пикселя) и физических размеров режущего инструмента с точностью до 0,5 мкм.

a)



b)

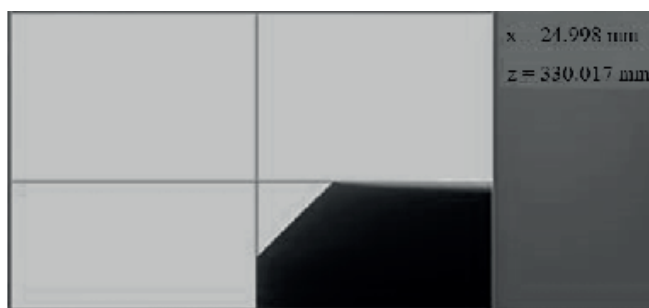


Рис. 4. Пример интерфейсов пользователя в режимах калибровки (*a*) и измерения (*b*) размера контура режущей кромки инструмента.

В качестве шаблона использован конус

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демкин В.Н., Степанов В.А., Шадрин М.В. Системы быстрого прототипирования с лазерным сканированием // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 3 (177). С. 136–143.
2. Venediktov A.Z., Demkin V.N., Dokov D.S., Tireskin V.N. Measurement of wheel pair parameters of a rolling stock during movement // Proceedings of SPIE: The International Society For Optical Engineering. Vol. 05066. The International conference “Lasers for measurement and information transfer. St. Petersburg, Russia (2002)”. 2003. Pp. 48–53.
3. Benoit A., Caplier A., Durette B., Herault J. Using human visual system modeling for bio-inspired low level image processing // Computer Vision and Image Understanding. 2010. Vol. 114. No. 7. Pp. 758–773.
4. Steger C. An unbiased detector of curvilinear structures // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 113–125.
5. Shioiu, F.-J., Chen M.-J. Intermittent process hybrid measurement system on the machining center // International Journal of Production Research. 2003. Vol. 41. No. 18. Pp. 4403–4427.
6. García G.B., Suarez O.D., Aranda J.L.E., et al. Learning image processing with OpenCV. Birmingham: Packt Publishing, 2015. 319 p.
7. Benoit A., Caplier A. Fusing bio-inspired vision data for simplified high level scene interpretation: Application to face motion analysis // Computer Vision and Image Understanding. 2010. Vol. 114. No. 7. Pp. 774–789.
8. Grompone R., Randall G. A sub-pixel edge detector: An implementation of the Canny/Devernay algorithm // Image Processing on Line. 2017. Vol. 7. Pp. 347–372.
9. Spontón H., Cardelino J. A review of classic edge detectors // Image Processing on Line. 2015. Vol. 5. Pp. 90–123.
10. Machilsen B., Wagemans J. Integration of contour and surface information in shape detection // Vision Research. 2011. Vol. 51. No. 1. Pp. 179–186.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018, принята к публикации 05.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

САВИН Владислав Николаевич — инженер кафедры общей и теоретической физики и методики преподавания физики Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация.

390000, Российская Федерация, г. Рязань, ул. Свободы, 46
savin-vladislav@mail.ru

СТЕПАНОВ Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики и методики преподавания физики Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация.

390000, Российская Федерация, г. Рязань, ул. Свободы, 46
vl.stepanov@365.rsu.edu.ru

ШАДРИН Максим Владимирович — инженер кафедры общей и теоретической физики и методики преподавания физики Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация.

390000, Российская Федерация, г. Рязань, ул. Свободы, 46
m.shadrin@kvantron.com

REFERENCES

- [1] V.N. Demkin, V.A. Stepanov, M.V. Shadrin, Rapid phototyping systems with laser scanning, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3(177)) (2013) 136 – 143.
- [2] V.N. Demkin, D.S. Dokov, A.Z. Venediktov, Measurement of wheel pair parameters of a rolling stock during movement, Proceedings of SPIE. 5066 (International conference “Lasers for measurement and information transfer”. St. Petersburg, Russia, 2002) (2003) 48 – 53.
- [3] A. Benoit, A. Caplier, B. Durette, J. Herault,



Using human visual system modeling for bio-inspired low level image processing, *Computer Vision and Image Understanding*. 114 (7) (2010) 758 – 773.

[4] **C. Steger**, An unbiased detector of curvilinear structures, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 20 (2) (1998) 113 – 125.

[5] **F.-J. Shioiu, M.-J. Chen**, Intermittent process hybrid measurement system on the machining center, *International Journal of Production Research*. 41 (18) (2003) 4403–4427.

[6] **G.B. Garcia, O.D. Suarez, J.L.E. Aranda, et al.** Learning image processing with OpenCV, Packt Publishing, Birmingham (2015) 183 – 193.

[7] **A. Benoit, A. Caplier**, Fusing bio-

inspired vision data for simplified high level scene interpretation: Application to face motion analysis, *Computer Vision and Image Understanding*. 114 (7) (2010) 774 – 789.

[8] **R. Grompone, G. Randall**, A sub-pixel edge detector: An implementation of the Canny/Devernay algorithm, *Image Processing on Line*. 7 (2017) 347 – 372.

[9] **H. Spontón, J. Cardelino**, A review of classic edge detectors, *Image Processing on Line*. 5 (2015) 90 – 123.

[10] **B. Machilsen, J. Wagemans**, Integration of contour and surface information in shape detection, *Vision Research*. 51 (1) (2011) 179 – 186.

Received 20.03.2018, accepted 05.12.2018.

THE AUTHORS

SAVIN Vladislav N.

Ryazan State University named for S.A. Yesenin

46 Svobody St., Ryazan, 390000, Russian Federation
savin-vladislav@mail.ru

STEPANOV Vladimir A.

Ryazan State University named for S.A. Yesenin

46 Svobody St., Ryazan, 390000, Russian Federation
vl.stepanov@365.rsu.edu.ru

SHADRIN Maxim V.

Ryazan State University named for S.A. Yesenin

46 Svobody St., Ryazan, 390000, Russian Federation
m.shadrin@kvantron.com

DOI: 10.18721/JPM.12108

УДК 537.534.3:621.384.8 (075.8)

ДВУХЭЛЕКТРОДНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИОННОЙ ЛОВУШКИ, ИНТЕГРИРУЕМОЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

К.В. Соловьев^{1,2}, М.В. Виноградова¹

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе исследовано квадратичное (по одной из координат) электростатическое поле, обеспечивающее интегрируемость уравнений движения заряженной частицы. Найдены условия финитности движения иона в этом поле и тем самым показана возможность построения ионной ловушки. Выявлены значения параметра поля, при которых структура эквипотенциалов поля обеспечивает наличие существенного рабочего пространства между двумя полезадающими электродами. Построен алгоритм оптимального согласования характеристик пучка и конфигурации электродов.

Ключевые слова: масс-спектрометрия, ионная ловушка, идеальная фокусировка

Ссылка при цитировании: Соловьев К.В., Виноградова М.В. Двухэлектродная реализация электростатической ионной ловушки, интегрируемой в полярных координатах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 96–104. DOI: 10.18721/JPM.12108

TWO-ELECTRODE DESIGN FOR ELECTROSTATIC ION TRAP INTEGRABLE IN POLAR COORDINATES

K.V. Solovyev^{1,2}, M.V. Vinogradova¹

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

² Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation

An electrostatic field with a square additive dependence on one of coordinates, also providing integrability of charged particle motion equations has been studied in the paper. The conditions of ion-motion finiteness were found for this field and in doing so it was shown the ion trap constructability. Potential parameter values providing a presence of sufficient workspace between two field-defining electrodes were revealed. An algorithm of optimal matching in beam characteristics and electrodes' configuration was synthesized. To test the operability of the designed algorithm, three-dimensional equipotentials and a trajectory inside the ion-trap workspace were constructed. The ion trap designed in our studies can be put to experimental use as a mass spectrometer, extending the class of electrostatic ion traps presented by well-known Orbitrap and Cassini trap.

Keywords: mass spectrometry, ion trap, ideal focusing

Citation: K.V. Solovyev, M.V. Vinogradova, Two-electrode design for electrostatic ion trap integrable in polar coordinates, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 96–104. DOI: 10.18721/JPM.12108



Введение

Электростатические ионные ловушки с идеальной пространственно-временной фокусировкой (ИПВФ) пучка все шире применяются в современном масс-анализе. Принцип идеальной фокусировки ионов в электростатическом поле как основа синтеза масс-спектрометрических приборов был запатентован Ю.К. Голиковым [1], реализован А.А. Макаровым в промышленно выпускаемой ловушке OrbiTrap (см., например, работу [5]). Интенсивно изучаются так называемые ловушки Кассини (также с ИПВФ) [3, 4 – 6], впервые предложенные Ю.К. Голиковым и изученные его аспиранткой Д.В. Никитиной [7]. В настоящее время исследования идеально фокусирующих систем активно продолжаются. Таким образом, данная тема, безусловно, остается актуальной.

Настоящая статья продолжает серию работ [8 – 11], посвященных исследованию класса интегрируемых электростатических ловушек с ИПВФ. Идеальная фокусировка по направлению z (для определенности) в ловушке обеспечивается аддитивным вхождением в структуру потенциала члена z^2 [8, 9]. Ранее (см. работы [9 – 11]) нами подробно изучены условия существования финитного движения в ловушках, интегрируемых в параболических и эллиптических координатах. В данном случае имеются в виду системы координат, разделяющие переменные в уравнении Гамильтона – Якоби после отделения колебательного движения по z .

В настоящей работе рассмотрен случай интегрирования в полярной системе координат, также указанный в статье [8], но подробно не исследованный. Анализ проведен в безразмерных переменных, которые использовались авторами и ранее [8 – 11].

Условия финитности движения ионов

В работе [8] получено выражение для потенциала, обеспечивающего разделение переменных:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \gamma, z) = \\ = z^2 - \frac{r^2}{2} + \mu \ln(r) + \varepsilon \frac{\cos 2\gamma}{r^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ, ε – параметры поля; $x = r \cos \gamma$, $y = r \sin \gamma$.

Полагая $\mu \neq 0$ (далее мы подтвердим

справедливость этого условия) и вводя замену переменных $r = r_1 \sqrt{\mu}$, $z = z_1 \sqrt{\mu}$, получим из равенства (1) выражение

$$\varphi_1 = z_1^2 - \frac{r_1^2}{2} + \ln r_1 + \varepsilon_1 \frac{\cos 2\gamma}{r^2},$$

$$\text{где } \varphi_1 = \frac{\varphi}{\mu} - \frac{1}{2} \ln \mu, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\mu^2}.$$

Таким образом указанным масштабированием можно избавиться в выражении (1) от параметра μ , приравняв последний единице и сильно упростив дальнейший анализ.

Оставшийся параметр ε существенно влияет на топологию поля (1), определяя как количество его седловых точек в плоскости $z = 0$, так и вид эквипотенциалей. Количество седел соответствует количеству вещественных значений радиуса седла r_s в восьми парах (r_s, γ_s) полярных координат

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 8\varepsilon}} / \sqrt{2}, \pi/2 \right), \\ & \left(\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 8\varepsilon}} / \sqrt{2}, -\pi/2 \right), \\ & \left(\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 8\varepsilon}} / \sqrt{2}, 0 \right), \\ & \left(\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 8\varepsilon}} / \sqrt{2}, \pi \right) \end{aligned}$$

и меняется от двух до шести при прохождении величиной ε в равенстве (1) критических значений $\{-1/8, 0, 1/8\}$. Топология поля (1) весьма важна при выборе системы полежающих электродов, ограничивающих рабочую область ловушки.

Движение иона в плоскости $r\gamma$, ортогональной к направлению идеальной фокусировки z , определяется первыми интегралами

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = E - \left(\ln r - \frac{r^2}{2} + \frac{C}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{r^4 \dot{\gamma}^2}{2} = C - \varepsilon \cos 2\gamma, \quad (3)$$

где E, C – константы разделения переменных;

$$E = \frac{\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\gamma}_0^2}{2} + \ln r_0 - \frac{r_0^2}{2} + \varepsilon \frac{\cos 2\gamma_0}{r_0^2}, \quad (4)$$

$$C = \frac{r_0^4 \dot{\gamma}_0^2}{2} + \varepsilon \cos 2\gamma_0.$$

Как обычно, необходимо определить условия финитности движения в плоскости $r\gamma$. Нетрудно видеть, что характер движения иона по r определяется профилем эффективного потенциала

$$U_{eff}(r) = \ln r - \frac{r^2}{2} + \frac{C}{r^2}$$

и величиной поперечной энергии E .

Заметим, что потенциал U_{eff} имеет яму (рис. 1) в диапазоне значений $0 < C < 1/8$; при этом координаты минимума и максимума $U_{eff}(r)$ определяются как

$$r_{\min, \max} = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-8C}}}{2}, \quad (5)$$

где радиусу минимума соответствует знак минус, а радиусу максимума — плюс.

Минимальное и максимальное значения эффективного потенциала выражаются как

$$U_{eff \min, \max} = \pm \frac{\sqrt{1-8C}}{2} + \ln \frac{1 \mp \sqrt{1-8C}}{2}.$$

При $C \rightarrow 0$ $U_{eff \min} \rightarrow -\infty$, $U_{eff \max} \rightarrow -1/2$;
При $C = 1/8$ максимум и минимум потенциала U_{eff} сливаются:

$$r_{\min} = r_{\max} = 1, U_{eff \min} = U_{eff \max} = -(\ln 2)/2,$$

и яма исчезает.

Для $C \leq 0$ (как и для $\mu = 0$ в равенстве (1)) в выражении эффективного потенциала исчезает член, препятствующий движению частицы к r -сингулярности; соответственно, необходимо выполнение условия $C > 0$.

При $0 < C < 1/8$ значение константы E для обеспечения финитности должно удовлетворять неравенствам

$$U_{eff \min}(C) \leq E < U_{eff \max}(C).$$

С другой стороны, для любого $E < -(\ln 2)/2$ найдется интервал значений параметра C , вложенный в промежуток, $]0, 1/8[$, реализующий финитность движения. При этом верхняя граница C находится из условия $U_{eff \min}(C) = E$, а для $E > -1/2$ имеется и нижняя граница интервала, вычисляемая из условия $U_{eff \max}(C) = E$.

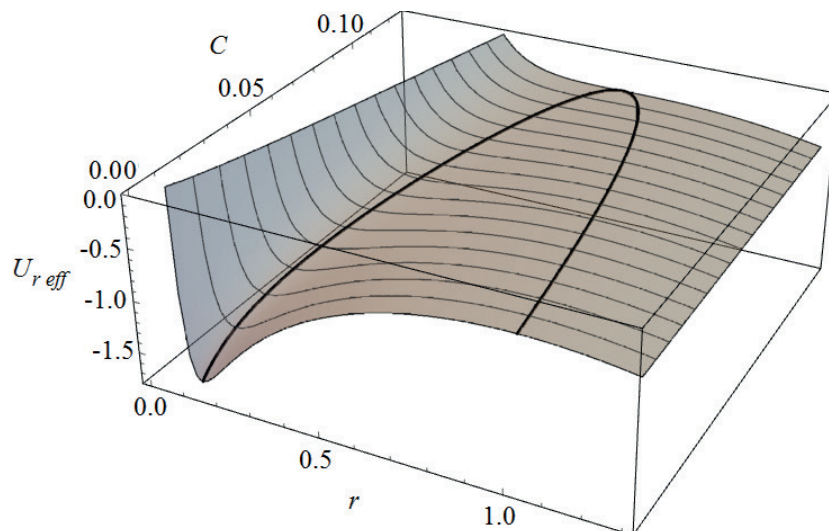


Рис. 1. Графическое представление функции эффективного потенциала $U_{eff}(r, C)$. Линии показывают расположения максимумов и минимумов для различных значений C



Удобно ввести в рассмотрение величину

$$\Delta E = E - U_{\text{eff min}}(C),$$

характеризующую кинетическую энергию иона.

Для постоянной ΔE финитность соблюдается при

$$0 < C < C_{\text{max}} < 1/8,$$

где C_{max} находим из решения уравнения

$$U_{\text{eff max}}(C_{\text{max}}) - U_{\text{eff min}}(C_{\text{max}}) = \Delta E.$$

Заметим, что условие радиальной стабильности здесь полностью совпадает со случаем классического орбитрэпа.

Угловое движение определяется косинусоидальным (с амплитудой $|\varepsilon|$) профилем потенциальной γ -ямы и величиной константы C . Из соображений симметричности колебаний относительно $\gamma = 0$ удобно выбрать ε отрицательным ($\varepsilon < 0$).

Далее, математически обоснованной, с точки зрения ограниченности движения по углу, является величина

$$C \in [-|\varepsilon|, |\varepsilon|],$$

обеспечивающая перемещение частицы в секторе

$$-\gamma_b \leq \gamma \leq \gamma_b, \quad \gamma_b = \frac{\arccos(C|\varepsilon|)}{2}. \quad (6)$$

При $C > |\varepsilon|$ движение по γ не ограничено, траектория иона (при r -финитности) расположена в кольце. Условия радиального удержания требуют выполнения неравенств $0 < C < 1/8$. Соответственно, диапазон угловых перемещений ограничен снизу сегментом

$$-\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/4.$$

При $C < 1/8 < |\varepsilon|$ имеется и ограничение диапазона γ -колебаний сверху. Очевидно, нет никаких препятствий к реализации финитности движения как по радиусу, так и по углу при соответствующем выборе начальных данных частицы. При этом траектория движения иона в плоскости $r\gamma$ будет лежать внутри области

$$\Omega = [r_1, r_2] \times [-\gamma_b, \gamma_b], \quad (7)$$

где r_1, r_2 – решения уравнения $U_{\text{eff}}(r, C) = E$.

Эквипотенциали поля (1) имеют при $r \rightarrow 0$ асимптоты $\gamma = \pm \pi/4$, теоретически ограничивающие угловой размер электрода вблизи точки сингулярности величиной $\pi/2$. В то же время диапазон изменения углов γ -колебаний ионов не может быть мень-

ше, чем $[-\pi/4, \pi/4]$. Это вызывает сомнения в возможности реализации ловушки с помощью двухэлектродной полезадающей конструкции. Иными словами, возникает вопрос, может ли траектория частицы (по крайней мере, при $z = 0$) лежать внутри области конструктивно приемлемого семейства эквипотенциалей. На рис. 2 эта область (поз. 1) выделена серым тоном. Указанная область ограничена проходящей через седловую точку поля сепаратрисой, которая асимптотически приближается к оси z под углами $\gamma = \pm \pi/4$. Под конструктивной приемлемостью здесь подразумевается возможность пары вложенных эквипотенциалей (из области 1 на рис. 2, б) семейства (при реализации конструкции – электродов) замыкать рабочую область – область движения пучка (область 5 на рис. 2, б). Если окажется, что пучок при любых значениях параметров и начальных данных обязательно «протыкает» внешний электрод указанной пары, то конструкция потребует увеличения числа полезадающих фрагментов, что нежелательно.

Для ответа на сформулированный ранее вопрос сначала рассмотрим бесконечно тонкие по r пучки, формируемые траекториями ионов, распространяющимися с нулевой радиальной скоростью по дну потенциальной ямы эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(r)$. В проекции на плоскость $r\gamma$ эти траектории имеют вид дуг, симметричных относительно угла $\gamma = 0$; радиус каждой дуги равен $r_{\text{min}}(C)$, ее угловой размах – $2\gamma_b(C)$. Они определяются формулами (5), (6) и зависят от параметра C , связанного с начальными данными движения. Соответственно, координаты граничных точек дуг формируют для множества допустимых значений C параметрически заданные кривые

$$\begin{aligned} x_b(C) &= r_{\text{min}}(C) \cos(\gamma_b(C)), \\ y_b(C) &= \pm r_{\text{min}}(C) \sin(\gamma_b(C)), \end{aligned} \quad (8)$$

положение которых (см. рис. 2, кривые 3) относительно эквипотенциали-сепаратрисы и представляет для нас интерес.

Для обеспечения теоретической возможности создания двухэлектродной ловушки должен существовать непустой интервал значений C , обеспечивающий расположение точек $(x_b(C), y_b(C))$ в области допустимых эквипотенциалей. Заметим, что ненулевые амплитуды z - и r -колебаний приводят к необходимости наличия зазора между

экипотенциалью-сепаратрисой и точкой границы γ -колебаний (8). Чем больше будет указанный зазор, тем больше фазовый объем ионов, запаасаемых ловушкой. Как положение сепаратрисы, так и вид граничной кривой (8) существенным образом зависят от значений параметра ε . Экипотенциальные структуры с двумя седлами ($|\varepsilon| > 1/8$) не обеспечивают достаточного рабочего пространства внутри экипотенциали-сепаратрисы. Так например, очевидна бесперспективность конфигурации, соответствующей

$$\varepsilon = -0,2 < -1/8$$

(см. рис. 2,а).

Полевые конфигурации с шестью седлами ($-1/8 < \varepsilon < 0$) дают больше возможностей. Наиболее привлекательным выглядит диапазон значений $\varepsilon_c < \varepsilon < 0$, где величина $\varepsilon_c \approx -0,06904$ соответствует наличию сепаратрисы, проходящей одновременно через боковые и вертикальные, ближайшие к центру, седла поля (1) (см. рис. 2,б). Для определения ε_c используется условие равенства потенциала (1) в точках расположения указанных седел:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \varphi \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1+8\varepsilon_c}}{2}}, \frac{\pi}{2}, 0 \right) = \\ &= \varphi \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon_c}}{2}}, 0, 0 \right),\end{aligned}$$

или

$$\sqrt{1-8\varepsilon_c} + \sqrt{1+8\varepsilon_c} + \ln \frac{1-\sqrt{1+8\varepsilon_c}}{1+\sqrt{1-8\varepsilon_c}} = 0.$$

Само значение потенциала сепаратрисы, соответствующей параметру ε_c , составляет

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -\frac{\sqrt{1-8\varepsilon_c}}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon_c}}{2} \approx -0,564977.\end{aligned}$$

При расчете габаритов по z ловушки, содержащей ионы, стартующие с ненулевой скоростью z_0 из плоскости $z = 0$, следует иметь в виду, что трехмерная экипотенциальная поверхность поля (1) «прижима-

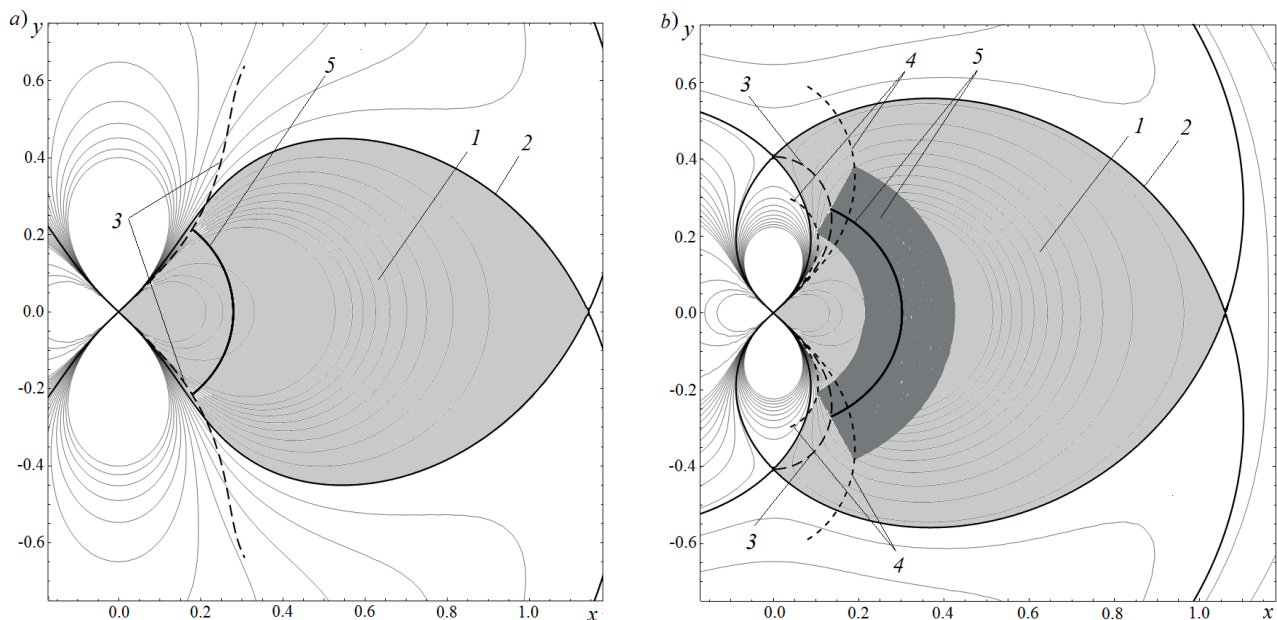


Рис. 2. Траектории иона и экипотенциальная структура поля (1) при значениях $\varepsilon = -0,2$ (а) и $\varepsilon = \varepsilon_c$ (б):

1 – область конструктивно приемлемых экипотенциалей; 2 – экипотенциаль-сепаратриса; 3 – параметрически заданные кривые (8); 4 – границы пучка, имеющего ненулевую радиальную скорость; 5 – проекции на плоскость xy траекторий пучка с нулевой (а, б) и ненулевой (б) радиальными скоростями



ется» к оси z при смещении от плоскости $z = 0$ (рис. 3). Сечение трехмерной эквипотенциали

$$f(x, y) + z^2 = d$$

плоскостью $z = Z$ имеет вид

$$f(x, y) = d - Z^2,$$

т. е. содержится среди эквипотенциалей двумерного поля $f(x, y)$ – сечения трехмерного поля плоскостью $z = 0$ [8].

Следует отметить, что для рассматриваемых областей поля уменьшение значения потенциала с ростом Z соответствует переходу от эквипотенциали-сепаратрисы к внутренним эквипотенциалам области. Соответственно, цилиндр, заполняемый траекториями частиц (его основание есть область (см. формулу (7)), а образующая параллельна оси z), должен быть вложен в поверхность, которая стягивается к оси z при уходе от плоскости $z = 0$. Следовательно, если иметь возможность расположить точки (8) в пределах некоторой эквипотенциали, внутренней относительно сепаратрисы, то можно оценить допустимые габариты пучка и ловушки по координате z , а также определить предельные скорости $\dot{z}_0$ старта иона из плоскости симметрии. Очевидно, что учет ненулевых радиальных скоростей, определяющих радиальный размер области Ω , также требует некоторого простора в размещении пучка внутри межэлек-

тродной области.

Заметим, что при использовании траекторий с $\Delta E = \text{const}$, энергия

$$E = \Delta E + U_{\text{eff min}}(C)$$

оказывается больше $U_{\text{eff max}}(C)$ при некотором C и, следовательно, верхнее допустимое значение C будет меньше $1/8$, поскольку при уменьшении глубины ямы (с ростом C) «выплескивание» из нее траектории происходит еще до исчезновения самой ямы. Фактическое же положение границ области Ω зависит уже от двух параметров: C и E (или ΔE). Каждому C ставится в соответствие не одно значение $r_{\text{min}}(C)$, а два: $r_1(C, \Delta E)$, $r_2(C, \Delta E)$ (см. формулу (7)). Это приводит к замене выражений (8) парами аналогичных параметрически заданных границ (показаны коротким пунктиром на рис. 2, б).

Выбор параметров ловушки

Сформулируем алгоритм выбора параметров поля двухэлектродной ионной ловушки и начальных условий для ионов, удерживаемых в этой ловушке.

Шаг 1. Выбираем значение параметра ε в интервале $\varepsilon_c \leq \varepsilon < 0$. Выбираем значение параметра C , обеспечивающее размещение пучка с нулевым радиальным разбросом в пределах рабочей области границ (8). Пусть потенциал сепаратрисы, окружающей рабочую область, равен ϕ_0 .

Шаг 2. Предполагаем, что протяженность ловушки по z равна $2Z$; находим потенциал

$$\phi_1 = \phi_0 - Z^2 - \delta,$$

где δ обеспечивает необходимый технологический зазор между поверхностью электрода и областью сосредоточения ионов пучка.

Шаг 3. Решаем задачу вложения пучка во внешнюю эквипотенциаль $\phi(x, y, z) = \phi_1$. Выполняем пробный поиск расстояния между точками с потенциалом ϕ_1 вдоль прямой, проходящей через начало координат и точку $(x_d(C), y_d(C))$, для каждой из граничных точек (8). При этом учитываем конфигурацию эквипотенциалей на плоскости $r\gamma$.

Для решения задачи строим распределение поля вдоль указанной прямой, используя выражения (1) и (6):

$$U(r, C) = \phi(r, \gamma_b(C), 0) = -\frac{r^2}{2} + \mu \ln(r) + \varepsilon \frac{\cos(\arccos(C/\varepsilon))}{r^2} = U_{\text{eff}}(r, C).$$

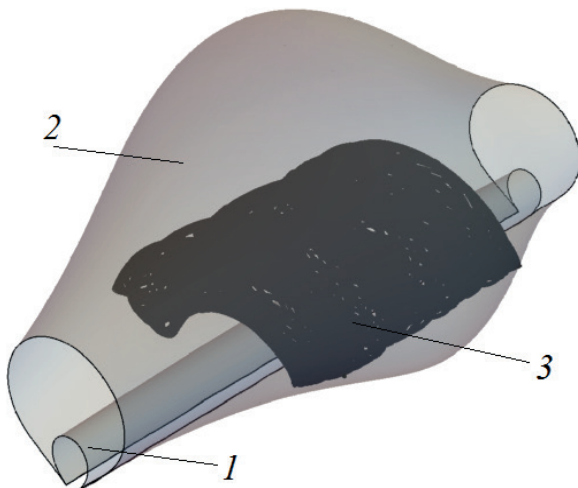


Рис. 3. Пример ионной ловушки на основе поля (1) при $\varepsilon = \varepsilon_c$.

Показаны контуры внутреннего (1) и внешнего (2) электродов и траектория иона (3), вложенная в рабочее пространство ловушки

Факт совпадения распределения поля вдоль граничного луча $\gamma = \gamma_b(C)$ с эффективным потенциалом означает, что координаты точек пересечения луча с эквипотенциалью ϕ_1 и их положение относительно $r_{\min}(C)$ совпадают с координатами и положением радиальных границ пучка сечения Ω (7) для энергии $E = \phi_1$. Критические значения параметра C , ограничивающие диапазон его допустимых значений, определяются уравнением

$$\phi(r_{\min}(C), \gamma_b(C), 0) = \phi_1,$$

задающим точку касания эквипотенциали ϕ_1 и граничного луча $\gamma = \gamma_b(C)$. Для критических значений C реализуется дуговая (в проекции на плоскость $r\gamma$) траектория пучка. Для других значений C из интервала допустимых значений движение происходит в области Ω . Начальные данные движения находятся по заданным значениям параметров E, C с помощью выражений (4). Пучок оптимальным образом вписывается в габариты внешней рабочей эквипотенциали. Связь допустимых значений C и ϕ_1 аналогична связи параметров C и E .

Укажем, что данное рассмотрение определяет лишь граничные ионы пучка в конфигурационном пространстве. А чтобы уменьшить влияние пространственного заряда на работу ловушки, целесообразно увеличить площадь

$$S_{\Omega} = 2\pi(r_2^2(C) - r_1^2(C))\gamma_b(C)$$

области Ω (см. формулу (7)) путем соответствующего выбора C .

Примечание. При выборе внутренней эквипотенциали следует иметь в виду, что ее максимальный размер (максимальный радиус удаления от центра) находится в плоскости $r\gamma$ при $\gamma = 0$. Соответственно, если внутренний радиус пучка равен r_1 , то достаточно выбрать в качестве внутренней границы системы эквипотенциальную по-

верхность

$$\phi(r, \gamma, z) = \phi_2,$$

где $\phi_2 = \phi(r_1 - \delta r, 0, 0)$ (δr — необходимый технологический зазор, см. Шаг 2).

Пример ловушки, построенной по указанной методике и заполненной характерной траекторией иона, приведен на рис. 3.

Заключение

В представленной работе исследован характер движения иона в интегрируемой электростатической ловушке с разделением переменных в полярных координатах.

В процессе исследования найдены условия финитности движения, проанализировано поле ловушки и показано, что лишь один из параметров потенциала является существенным.

Определено влияние указанного параметра на топологию поля; найден диапазон значений параметра, обеспечивающих наличие потенциальной структуры, перспективной для возможного синтеза ионной ловушки.

Показано, что граница рабочего объема ловушки может быть сформирована только двумя электродами, что упрощает конструкцию прибора.

Сформулирована методика выбора согласованной конфигурации электродов и пучка.

Предложенный алгоритм по существу является формулировкой ограничений для последующего решения задачи условной оптимизации. Далее следует провести максимизацию фазового объема пучка по всем фазовым координатам, а затем (дополнительно) — одномерную оптимизацию системы по параметру ϵ .

Часть данной работы выполнена в рамках государственного задания № 075 00780 19 00 для Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галль Л.Н., Печалина Е.Э., Голиков Ю.К. Об одном классе электростатических полей с пространственно-временной фокусировкой // Сб. «Научное приборостроение». Электронно-ионная оптика. Ленинград: Наука, 1989. С. 3–7.
2. Hu Q., Noll R., Li H., Makarov A., Hardman M., Cooks G. The Orbitrap: a new mass spectrometer // J. Mass Spectrom. 2005. Vol. 40. No. 4. Pp. 430–443.
3. Nikolaev E., Sudakov M., Vladimirov G., Velásquez-García L.F., Borisovets P., Fursova A. Multi-electrode harmonized Kingdon traps // J. Am. Soc. Mass Spectrom. 2018. Vol. 29. No. 11. Pp. 2173–2181.
4. Köster C. The concept of electrostatic non-



orbital harmonic ion trapping // Int. J. of Mass Spectrometry. 2009. Vol. 287. No. 1–3. Pp. 114–118.

5. **Köster C.** Twin trap or hyphenation of a 3D Paul- and Cassinian ion trap // J. Am. Soc. Mass Spectrom. 2015. Vol. 26. No. 3. Pp. 390–396.

6. **Raupersa B., Medhath H., Gunzerb F., Grottemeyer J.** Influence of the trap length on the performance of Cassinian ion traps: A simulation study // Int. J. of Mass Spectrometry. 2019. Vol. 438. No. 1. Pp. 55–62.

7. **Никитина Д.В.** Ионные ловушки в динамической масс-спектрометрии. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат.наук. СПб. 2006. 16 с.

8. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Соловьев К.В., Никитина Д.В.** Интегрируемые ионные

ловушки // Прикладная физика. 2006. № 5. С. 50–57.

9. **Голиков Ю.К., Соловьев К.В.** Электростатические ионные ловушки с разделением переменных в параболических координатах // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. Вып. 7. С. 82–88.

10. **Голиков Ю.К., Соловьев К.В.** Критерий поперечной устойчивости в ионных ловушках с интегрируемым в эллиптических координатах движением // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 22. С. 43–49.

11. **Соловьев К.В., Виноградова М.В.** Условия финитности движения иона в электростатической ловушке с разделением переменных в параболических координатах // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 14. С. 34–41.

Статья поступила в редакцию 21.01.2019, принята к публикации 04.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

ВИНОГРАДОВА Мария Валерьевна — студентка Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vinogradova_39@mail.ru

REFERENCES

[1] **L.N. Gall, E.E. Pechalina, Yu.K. Golikov,** Ob odnom klasse elektrostatocheskikh poley s prostranstvenno-vremennoy fokusirovkoj [On one class of electrostatic fields with space-time focusing], Nauchnoe priborostroenie, Elektronno-ionnaya optika, Nauka, Leningrad (1989) 3–7.

[2] **Q. Hu, R. Noll, H. Li, et al.,** The Orbitrap: A new mass spectrometer, J. Mass Spectrom. 40 (4) (2005) 430–443.

[3] **E. Nikolaev, M. Sudakov, G. Vladimirov, et al.,** Multi-electrode harmonized Kingdon traps, J. Am. Soc. Mass Spectrom. 29 (11) (2018) 2173–2181.

[4] **C. Köster,** The concept of electrostatic non-orbital harmonic ion trapping, Int J. of Mass Spectrometry. 287 (1–3) (2009) 114–118.

[5] **C. Köster,** Twin trap or hyphenation of a 3D Paul- and Cassinian ion trap, J. Am. Soc.

Mass Spectrom. 26 (3) (2015) 390–396.

[6] **B. Raupersa, H. Medhath., F. Gunzerb, J. Grottemeyer,** Influence of the trap length on the performance of Cassinian ion traps: A simulation study, Int. J. of Mass Spectrometry. 438 (1) (2019) 55–62.

[7] **D.V. Nikitina,** Ionnyye lovushki v dinamicheskoy mass-spektrometrii [Ion traps in dynamical mass spectrometry], PhD Thesis, autoabstract, St. Petersburg, 2006.

[8] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova, K.V. Solovyev, et al.,** Integrable electrostatic traps, Prikladnaya Fizika (Applied Physics). (5) (2006) 50–57.

[9] **Yu.K. Golikov, K.V. Solov'ev,** Electrostatic ion traps with separation of variables in parabolic coordinates, Tech. Phys. Lett. 36 (4) (2010) 333–336.

[10] **Yu.K. Golikov, K.V. Solov'ev,** Criterion of

transverse stability for ion traps with transverse motion integrable in elliptic coordinates, Tech. Phys. Lett. 37 (11) (2011) 1062–1064.

[11] **K.V. Solov'ev, M.V. Vinogradova,**

Conditions of ion motion confinement in an electrostatic trap with separation of variables in parabolic coordinates, Tech. Phys. Lett. 44 (7) (2018) 618–621.

Received 21.01.2019, accepted 04.02.2019.

THE AUTHORS

SOLOVYEV Konstantin V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

k-solovyev@mail.ru

VINOGRADOVA Maria V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vinogradova_39@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.12109
УДК 662.612.3:661.487.1

КОНВЕРСИЯ ВОДЯНОГО ПАРА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИСПАРЕННОГО РАСТВОРА ФТОРИДА ВОДОРОДА С УГЛЕРОДОМ В РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

**В.В. Капустин¹, Д.С. Пашкевич¹, Д.А. Мухортов²,
В.Б. Петров², Ю.И. Алексеев³**

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Российский научный центр «Прикладная химия»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

³ ООО «Новые химические продукты», Санкт-Петербург, Российская Федерация

Приведены результаты лабораторного исследования конверсии водяного пара при подаче испаренного водного раствора (ИВР) фторида водорода HF и кислорода в стационарный слой гранулированного графита. Установлено, что характерное время конверсии водяного пара при контакте ИВР HF и углерода при температуре около 1500 К составляет величину порядка 10 с. Сравнение результатов эксперимента с литературными данными по высокотемпературному взаимодействию водяного пара и углерода показало, что при указанной температуре присутствие HF практически не влияет на скорость взаимодействия водяного пара с углеродом. Метод, базирующийся на высокотемпературном взаимодействии ИВР HF с углеродом, может служить основой промышленной технологии дегидратации водного раствора HF, в том числе азеотропного.

Ключевые слова: фторид водорода, плавиковая кислота, водяной газ, фильтрационное горение

Ссылка при цитировании: Капустин В.В., Пашкевич Д.С., Мухортов Д.А., Петров В.Б., Алексеев Ю.И. Конверсия водяного пара при взаимодействии испаренного раствора фторида водорода с углеродом в режиме фильтрационного горения // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 105–116. DOI: 10.18721/JPM.12109

THE WATER VAPOR CONVERSION DURING THE INTERACTION BETWEEN AN EVAPORATED HYDROGEN FLUORIDE SOLUTION AND CARBON IN THE FILTRATION COMBUSTION MODE

**V.V. Kapustin¹, D.S. Pashkevich¹, D.A. Mukhortov²,
V.B. Petrov², Yu.I. Alexeev³**

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

² FSUE RSC «Applied Chemistry», St. Petersburg, Russian Federation;

³ «New Chemical Products» Ltd., St. Petersburg, Russian Federation

The results of laboratory studies of the water vapor conversion when an evaporized aqueous solution (EAS) of HF and oxygen is being fed into a stationary layer of granular graphite have been presented. It was established that the characteristic time for the water vapor conversion upon the contact of the EAS of HF with carbon at a temperature of about 1500 K was 10 s.

Comparison of the experimental results with the literature data on high-temperature interaction of water vapor and carbon showed that HF had little or no effect on the rate of this interaction at a temperature of about 1500 K. Our method derived from the high-temperature interaction of the EAS of HF with carbon can serve as the basis of an industrial technology for the dehydration of an aqueous solution of HF, including azeotropic one.

Keywords: hydrogen fluoride, hydrofluoric acid, water gas, filtration combustion

Citation: V.V. Kapustin, D.S. Pashkevich, D.A. Mukhortov, V.B. Petrov, Yu.I. Alexeev, The water vapor conversion during the interaction between an evaporated hydrogen fluoride solution and carbon in the filtration combustion mode, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 105–116. DOI: 10.18721/JPM.12109

Введение

Водный раствор фторида водорода HF (плавиковая кислота) является продуктом целого ряда производств; он, например, образуется при переработке гидролизом обедненного гексафторида урана UF₆ [1, 2].

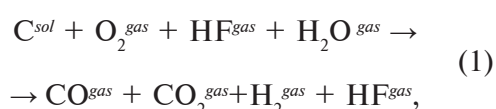
В то же время в промышленности в качестве фторирующего агента используют в основном безводный фторид водорода (БФВ) [3, 4], содержание воды в котором должно быть не выше 0,06 % [5]. Поэтому разработка технологий получения безводного фторида водорода из его водных растворов является актуальной задачей.

Обычно БФВ получают из его водного раствора ректификацией [5]. Однако этот раствор при содержании в нем фторида водорода примерно 35 – 40 % является азеотропным [6], и применение обычной ректификации не позволяет разделить смесь на индивидуальные компоненты. В этом случае при любом составе исходной смеси, подвергаемой ректификации, в качестве одного из компонентов будет выступать азеотроп. Таким образом, извлечь полностью фторид водорода из его водного раствора путем ректификации оказывается невозможным.

Известны работы по дегидратации плавиковой кислоты фторидом натрия [7] и концентрированной серной кислотой [8]. Первый метод в настоящее время не нашел промышленного применения. Во втором в качестве побочного продукта образуется 75 %-я серная кислота в количестве около 30 кг на 1 кг БФВ, поэтому выбор конструкционных материалов для промышленной реализации этого метода затруднителен.

В работе [9] предложен метод дегидратации водного раствора фторида водорода, в том числе азеотропного, высокотемпературным взаимодействием водяных паров с углеродом в режиме фильтрационного

горения по схеме:



где верхние индексы *sol* и *gas* означают твердую и газовую фазы веществ.

С помощью термодинамических расчетов и лабораторных исследований в статье [9] было показано, что при температуре выше 1000 К фторид водорода является единственным фторсодержащим веществом в системе.

Таким образом, была показана принципиальная возможность проведения процесса (1), когда фторид водорода остается инертным по отношению к другим компонентам системы, а водяной пар взаимодействует с углеродом с образованием водорода H₂^{gas} и монооксида углерода CO^{gas}.

Взаимодействие водяного пара с углеродом хорошо изучено в теории газификации твердых топлив. В частности, в работе [10] было показано, что характерное время взаимодействия водяного пара с углеродом различных марок, при температуре 1500 – 1600 К, составляет несколько секунд.

Однако данных о скорости реакции взаимодействия водяного пара с углеродом в присутствии фторида водорода в литературе не обнаружено. При этом известно, что фторид водорода как полярное вещество (его дипольный момент равен 1,88 Д), оказывает на многие химические процессы как каталитическое, так и ингибирующее действие [4].

Цель настоящей статьи – определить глубину конверсии водяного пара при высокотемпературном взаимодействии испаренного водного раствора фторида водорода со слоем гранулированного графита при подаче в слой кислорода.

Таблица 1
Гранулометрический состав исходного графита

Размер ячейки сита, мм	10	7	5	2,0	1,4	0,40	0,25
Массовое содержание графита в засыпке, %	0,0	0,8	20,0	63,7	12,6	2,9	0,0

Характеристика исходных веществ

Для экспериментального исследования в лабораторных условиях использовали графит искусственный измельченный ГИИ-А (ТУ 1916-109-71-2000) с насыпной массой 840 кг/м³ и содержанием основного вещества не менее 99 %; графит имел зольность не более 1 %, содержание влаги и серы – не более 1,0 и 0,05 % соответственно. Гранулометрический состав засыпки приведен в табл. 1. Состав примесей определяли с помощью эмиссионного спектрометра с индуктивно-связанной плазмой ICPE-9000 и инфракрасного Фурье-спектрометра FTIR-8400S. Результаты исследования позволяют заключить, что основными примесями в исходном графите были силикаты кальция и железа.

С помощью выщелачивания графита 0,4 %-м гидроксидом натрия было установлено, что кислотная составляющая в исходном графите отсутствовала.

В данной работе использовали водные растворы фторида водорода с массовым содержанием последнего 40 и 72 %, так как эти растворы образуются в ряде технологических процессов [1, 2].

Лабораторная установка и методика проведения эксперимента

Для проведения экспериментальных исследований по высокотемпературному взаимодействию водяного пара и углерода в присутствии кислорода и фторида водорода была создана лабораторная установка, схема которой представлена на рис. 1.

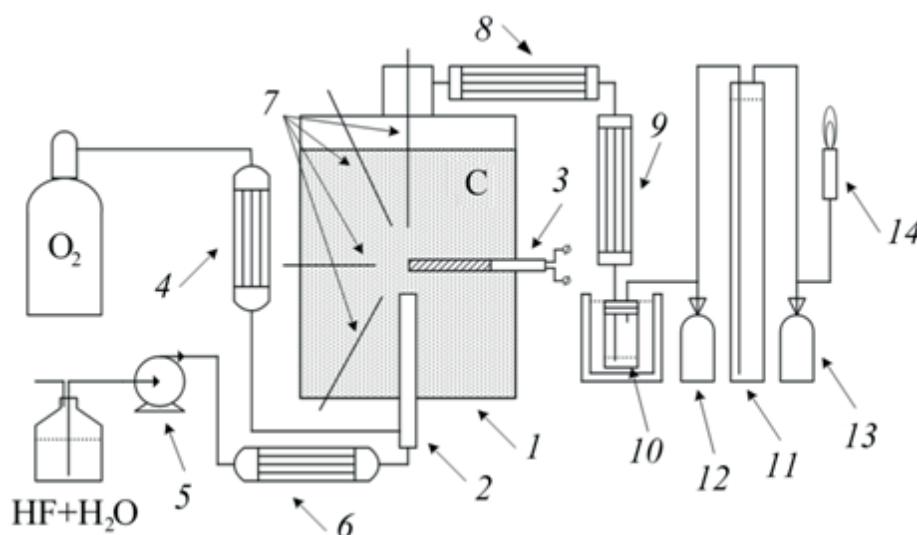


Рис. 1. Схема лабораторной установки:

1 – реактор; 2 – двухкомпонентная форсунка; 3 – съемный электронагреватель; 4 – теплообменник для нагрева O₂; 5 – перистальтический насос; 6 – теплообменник для испарения и перегрева водного раствора HF; 7 – термопары; 8, 9 – никелевые теплообменники; 10 – сборник кислоты; 11 – щелочной абсорбер; 12, 13 – никелевые ампулы; 14 – устройство для сжигания H₂ и CO в кислороде воздуха

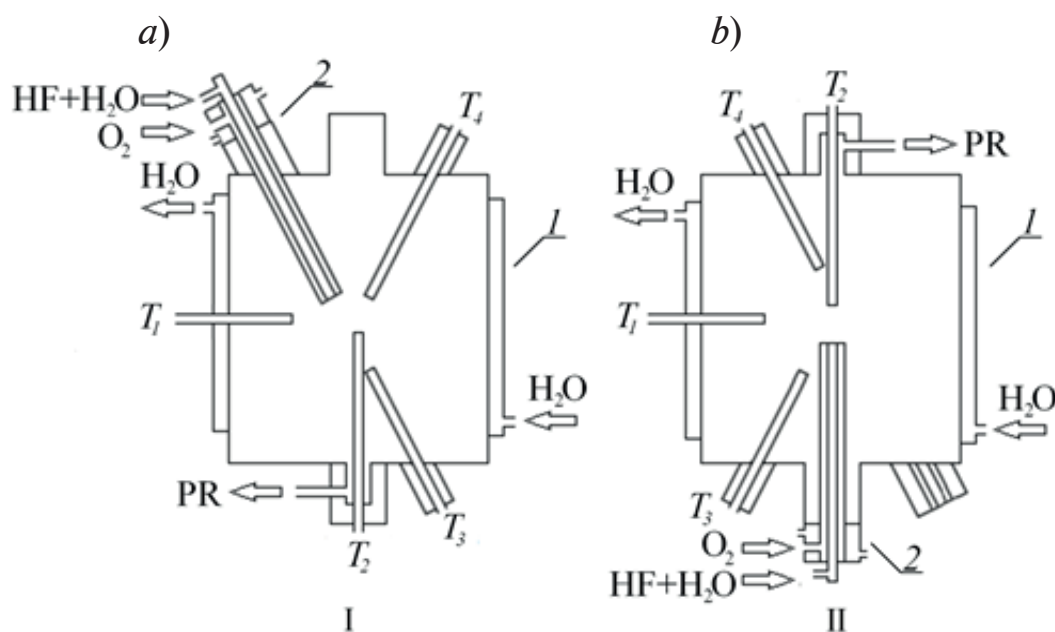


Рис. 2. Схемы двух способов установки форсунки (2) и термопар ($T_1 - T_4$) в реакторе (I); а, б — положения I и II; PR — продукты реакции

Стальной цилиндрический реактор 1 объемом 23 л, высотой 400 мм и внутренним диаметром 273 мм оборудован рубашкой охлаждения и системами подвода компонентов и отвода продуктов реакции. Температура теплоносителя в рубашке охлаждения составляла 370 К.

Толстостенная медная форсунка 2 диаметром 28 мм и толщиной стенки 8 мм служила для подачи кислорода в слой гранулированного углерода и испаренного водного раствора фторида водорода. Для охлаждения форсунки в верхней ее части была смонтирована рубашка охлаждения, в которую подавали воду при температуре 370 К. Опыты проводили при двух способах установки форсунки 2 в реакторе 1.

В положении I (рис. 2, а) форсунка устанавливалась в боковой штуцер верхнего фланца реактора под углом в 45° , при этом срез форсунки располагался на вертикальной оси реактора. В положении II (рис. 2, б) форсунку устанавливали в центральный штуцер верхнего фланца, а сам реактор переворачивали.

Распределение температуры в области выхода газа из форсунки отслеживали с помощью хромель-алюмелевых термопар $T_1 - T_4$, установленных в никелевые чехлы диаметром 6 мм и толщиной стенки чехла 1,5 мм. В начале опыта в реактор загружали

гранулированный графит до уровня верхней крышки, при этом средняя масса засыпки углерода составляла 16 кг. Далее с помощью съемного электронагревателя 3 (см. рис. 1), установленного вблизи среза форсунки, осуществляли предварительный разогрев слоя углерода. После того, как графит вблизи форсунки прогревался до температуры 900 К, съемный электронагреватель извлекали из реактора и через форсунку подавали кислород для дальнейшего разогрева слоя углерода и поддержания температуры выше 1000 К. Для того чтобы исключить возможность конденсации паров воды и фторида водорода на внутренних поверхностях форсунки, кислород перед подачей в реактор разогревали до 500 К в теплообменнике 4 (см. рис. 1).

Затем в слой нагретого углерода вместе с кислородом подавали предварительно испаренный водный раствор фторида водорода. Дозирование раствора осуществляли с помощью перистальтического насоса 5, испарение раствора происходило в теплообменнике 6 при температуре 600 К.

С помощью термопар оценивали границы и характерные размеры области в слое графита, где температура превышала 1000 К. Отметим, что при такой температуре равновесие в реакции (1) сдвинуто вправо.



Для охлаждения газового потока продуктов реакции, на выходе из реактора были последовательно установлены никелевые теплообменники 8 и 9 (см. рис. 1), в которых поддерживали значения температуры 280 К с помощью криостата и 220 К с помощью жидкого азота, соответственно. Сконденсированную жидкость собирали в сборнике 10 (он футерован фторопластом-4), а затем ее анализировали титрованием на содержание фторида водорода и воды. Сборник также охлаждали жидким азотом до температуры 220 К.

Газовый поток после сборника нейтрализовали в щелочном абсорбере 11. Пробы для хроматографического и спектрального анализов газообразных продуктов реакции отбирали до и после абсорбера в никелевые ампулы 12 и 13 соответственно (ампулы были пассивированы фтором). В течение одного опыта пробы для газового анализа отбирали от трех до пяти раз.

Водород и монооксид углерода, образовавшиеся при высокотемпературном взаимодействии углерода и водяного пара, сжигали в кислороде воздуха в устройстве 14 (см. рис. 1).

После проведения опыта реактор продували инертным газом, углеродный материал охлаждали, перемешивали и отбирали

пробу. Методики анализа углерода и продуктов реакции описаны в статье [9].

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Тепловое состояние реактора. Объемный расход кислорода в опытах был выбран максимально возможным. При этом налагалось требование, чтобы при нем не происходило псевдооживления слоя графита. Это значение расхода составляло $90 \text{ н.см}^3/\text{с}$.

Изменение расхода испаренного водного раствора фторида водорода находилось в диапазоне $5 - 85 \text{ мг/с}$.

Измерения показали, что температура графита в слое вблизи выхода газовых потоков из форсунки превышала 1400 К, что достаточно для протекания реакции получения водяного газа. При этом было необходимо учитывать, что никелевые трубки, в которых установлены термопары, искажали температурное поле за счет своих тепловых характеристик (теплоемкость и теплопроводность); вследствие этого измеряемые значения температуры оказывались ниже фактических.

На рис. 3 приведены экспериментальные распределения температуры, зафиксированные термопарами для двух вариантов установки форсунки (см. рис. 2).

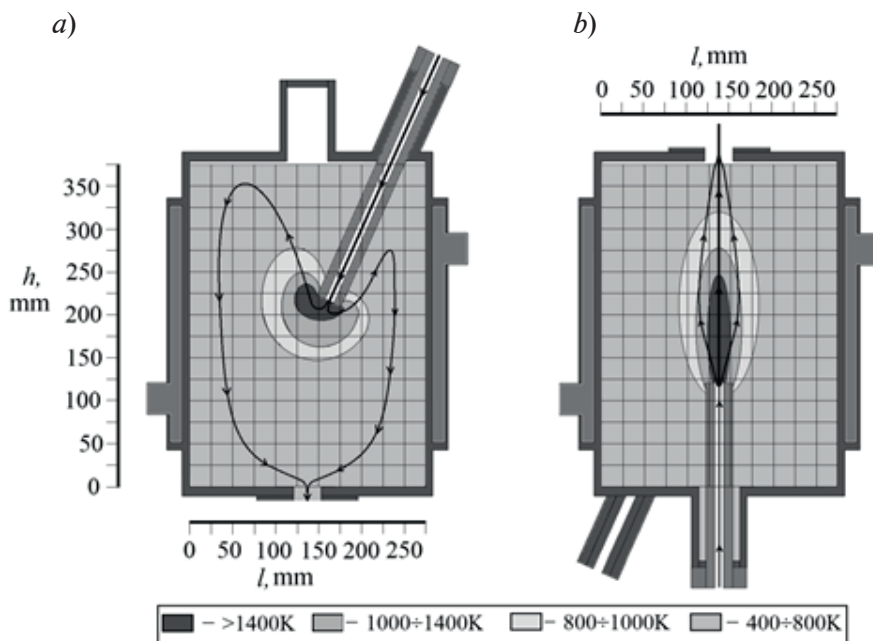


Рис. 3. Экспериментальные распределения температуры в реакторе для положений I (a) и II (b) форсунки (см. рис. 2); показаны также предполагаемые линии тока газа

В положении I в реакторе формировалась асимметричная высокотемпературная зона, форма которой была близка к шарообразной. Асимметрия высокотемпературной зоны связана с взаимодействием вынужденной и естественной конвекции при формировании газового потока сквозь слой углерода. Вследствие вынужденной конвекции формировался поток газа от выхода из форсунки к выходу из реактора; он был направлен сверху вниз. В результате же естественной конвекции формировался поток газа ($T \approx 1300$ К), который двигался от выхода из форсунки вверх, достигал полости между верхним уровнем слоя углерода и верхней крышкой реактора ($T \approx 400$ К) и опускался вдоль стенок реактора к выходу из него.

На формирование описанной структуры течения влияла также зависимость вязкости газа от температуры: с ростом температуры вязкость газа увеличивается, а следовательно, возрастает и гидравлическое сопротивление газа в высокотемпературной области. Это заставляет поток газа огибать высокотемпературную область.

В положении форсунки II в реакторе формировалась симметричная высокотемпературная область в виде эллипсоида, вытянутого в вертикальном направлении. При этом составляющие вынужденной и естественной конвекции были сонаправлены к выходу из реактора.

Характерный размер зоны с температурой выше 1000 К в положении I составлял примерно 7 – 8 см, а в положении II формировалась область с характерными значениями высоты 13 – 15 см и ширины 5 – 6 см.

При одном и том же значении расхода газообразных компонентов время пребывания водяного пара в высокотемпературной ($T > 1000$ К) зоне в положении II было выше примерно на 60 %, чем в положении I.

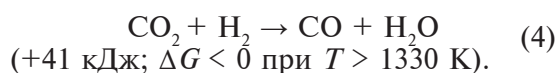
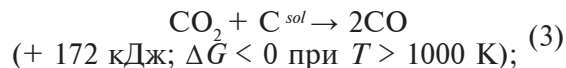
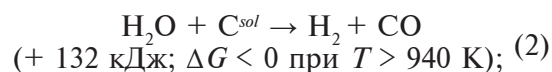
В высокотемпературной реакционной области можно выделить три зоны. Первая – кислородная зона – занимает область от места выхода газа из форсунки до поверхности, где концентрация кислорода становится равной нулю. Вторая – зона взаимодействия водяного пара и углерода – охватывает область от границы кислородной зоны до поверхности, где температура снижается до 940 К. Остальную часть реакционной области занимает третья зона

– область образования вторичной воды, где температура ниже 940 К.

В кислородной зоне происходит высокоэкзотермическая реакция взаимодействия углерода с кислородом [11]. Существенного изменения содержания воды в кислородной зоне практически не происходит, так как водород, образующийся при ее взаимодействии с углеродом, полностью окисляется кислородом.

Оценку длины кислородной зоны мы делали в соответствии с рекомендациями, предложенными в работе [12]. Для расхода кислорода 90 н.см³/с и гранулометрического состава углеродного материала, приведенного в табл. 1, характерный размер кислородной зоны составил 1,5 см.

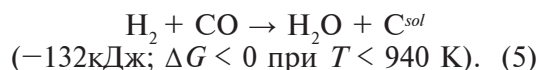
За кислородной следует восстановительная зона, в которой происходит взаимодействие паров воды с углеродом и образуются водород и монооксид углерода при температуре свыше 940 К. Кроме того, в этой зоне возможно протекание следующих эндотермических реакций:



Здесь ΔG – изменение энергии Гиббса.

Для определения области изменения температуры, в которой равновесие в реакциях (2) – (4) (а также в реакции (5), приведенной ниже) сдвинуто вправо, мы рассчитали изменение энергии Гиббса в зависимости от температуры.

В зоне образования вторичной воды температура ниже 940 К. При этом условии реакция взаимодействия водяного пара с углеродом прекращается, но протекает обратная реакция взаимодействия водорода с монооксидом углерода и образуется вторичная вода:



Таким образом, характерный размер кислородной зоны оказывается примерно на порядок меньше такового для высокотемпературной (выше 1000 К) зоны в слое графита. В восстановительной же зоне целесообразно поддерживать температуру в



диапазоне 1000 – 1300 К, при которой водяной пар взаимодействует с углеродом, а реакция (4) термодинамически запрещена ($\Delta G < 0$).

Конверсия водяного пара в зависимости от массового расхода испаренного водного раствора фторида водорода. Одним из параметров, определяющих эффективность предлагаемого метода получения фторида водорода, является конверсия водяного пара при высокотемпературном контакте с углеродом.

Конверсию водяного пара при заданном расходе водного раствора фторида водорода определяли двумя способами: по составу газообразных продуктов на выходе из реактора и по количеству воды, собранной в приемной емкости 10 (см. рис. 1).

Измерения состава газовой фазы на выходе из реактора позволяют рассчитать конверсию водяного пара на основе материального баланса кислорода и водорода, поступающих в реактор в виде водяного пара и молекулярного кислорода и покидающих реактор в виде молекулярного водорода и в составе оксидов углерода.

Расчет конверсии водяного пара по газообразным продуктам реакции K_{gas} произво-

дили по следующей формуле:

$$K_{gas} = \frac{W_{O_2}}{W_{H_2O}} \times \frac{c_{H_2}}{\frac{c_{CO} - c_{H_2}}{2} + c_{CO_2} + c_{O_2}} \cdot 100\%, \quad (6)$$

где W , мг/с, – расход соответствующих компонентов на входе в реактор; c , об.%, – концентрация соответствующих веществ в газовом потоке на выходе из реактора после конденсации воды и фторида водорода.

В табл. 2 приведен характерный состав газовой фазы после конденсатора фтористого водорода 10 (см. рис. 1). Конверсию водяного пара по жидкой фазе K_{flu} определяли как отношение массы воды, собранной в приемной емкости 10 (см. рис. 1), к массе водяного пара, поданной в реактор в составе водного раствора фторида водорода.

На рис. 4 приведены значения конверсии водяного пара K_{gas} и K_{flu} в зависимости от расхода водного раствора фторида водорода для двух концентраций фторида водорода и двух способов установки форсунки в реакторе.

Таблица 2
Характерный состав газообразных
продуктов процесса после конденсатора фторида
да водорода

Продукт	c , об.%	Способ определения
CF ₄	–	Газовая хроматография
CO	70	
CO ₂	20	
H ₂	10	
O ₂	0,5	
CH ₄	0,1	
(HF) _n	0,1 при $n = 4$	Потенциометрия
COF ₂	–	ИКФС

Примечания: точность определения характерной концентрации c составляла 10^{-2} об.%; ИКФС – инфракрасная Фурье-спектроскопия

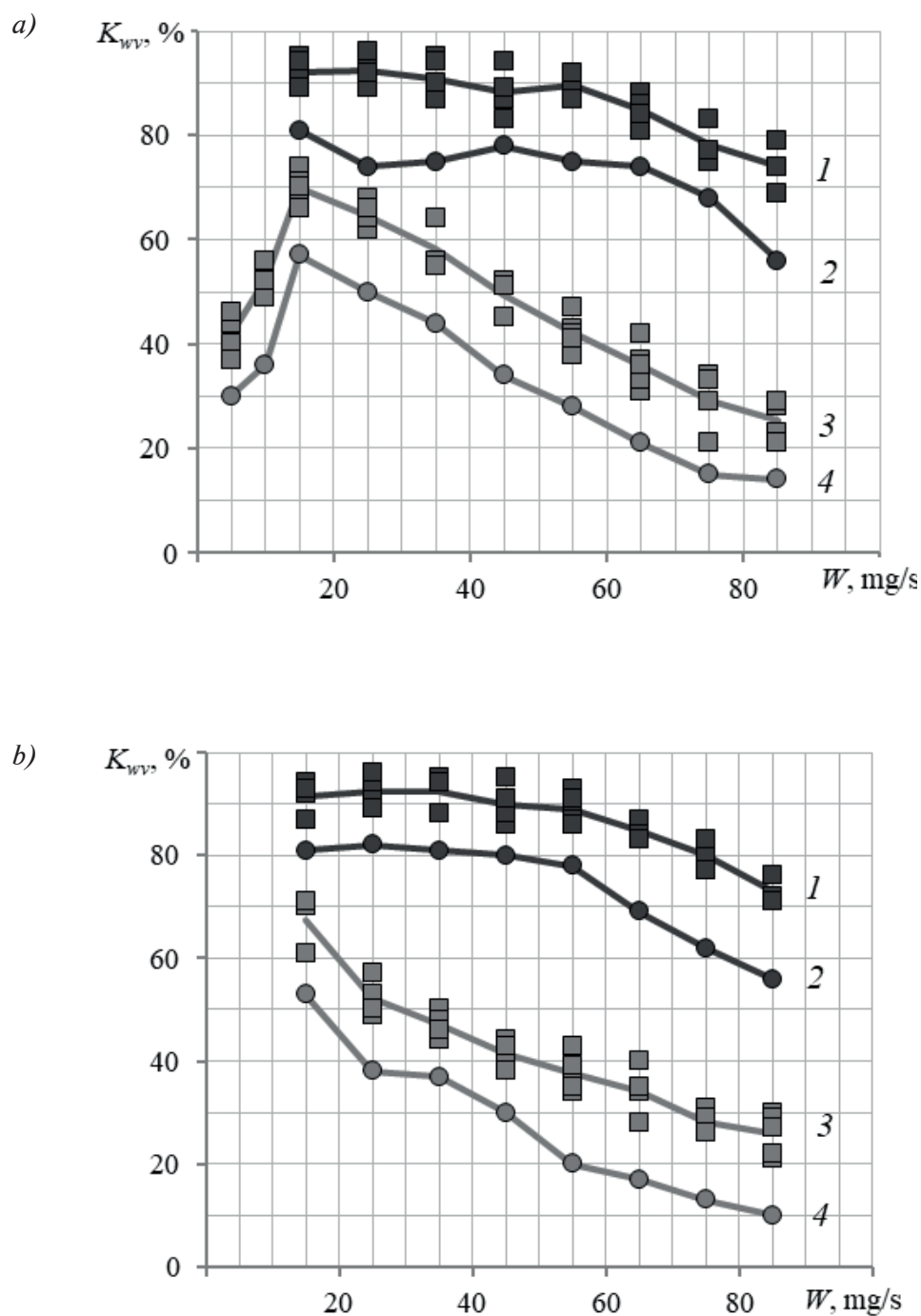


Рис. 4. Зависимости конверсии водяного пара $K_{wv} - K_{gas}$ (кривые 1, 3) и K_{flu} (2, 4) от расхода водного раствора HF при контакте этого испаренного раствора с высокотемпературным слоем углерода; содержание HF в растворе составляло 40% (a) и 72 % (b);

приведены данные для положений форсунки I (3, 4) и II (1, 2) (см. рис. 2)

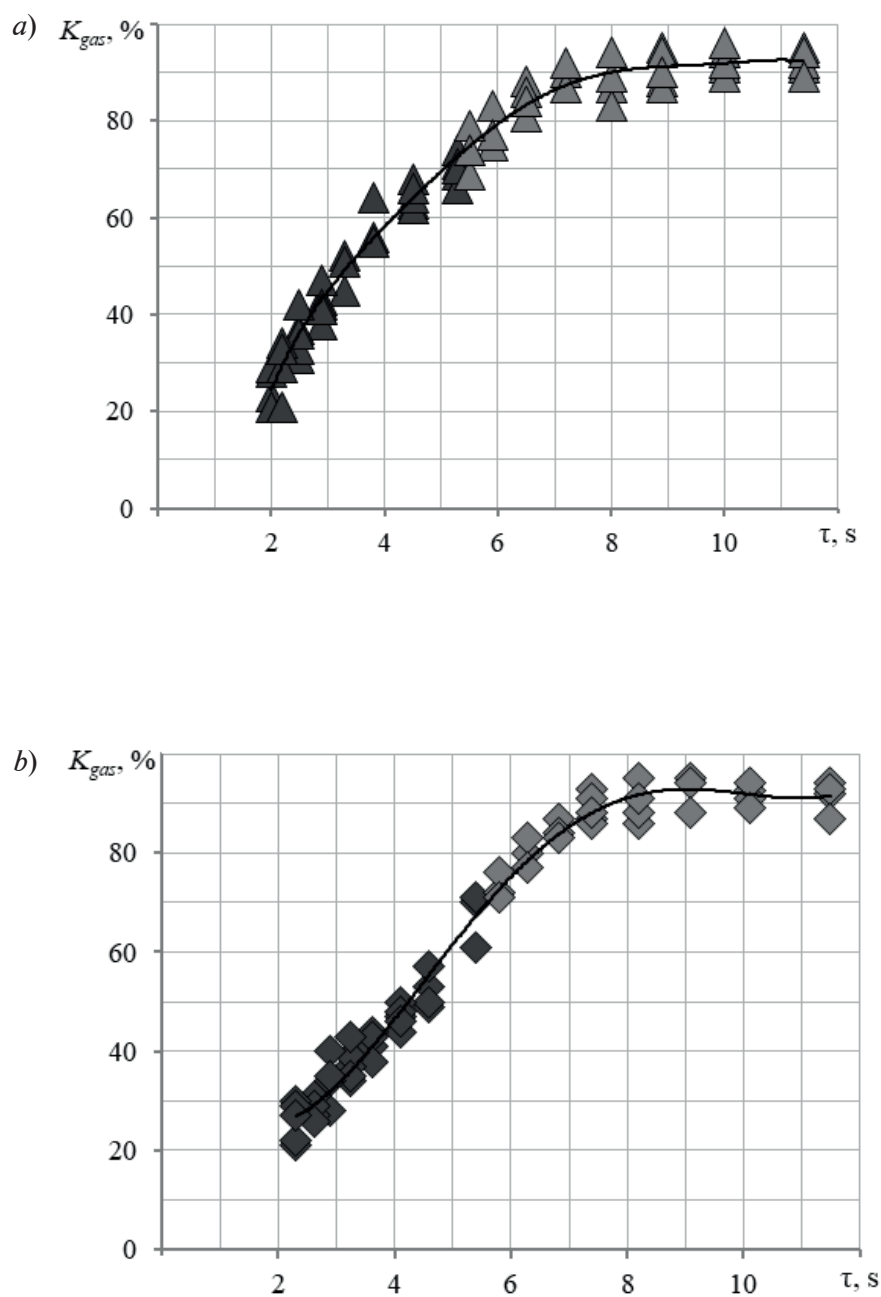


Рис. 5. Зависимости конверсии K_{gas} водяного пара (wv) при подаче испаренного водного раствора HF в высокотемпературный слой графита от времени пребывания wv вне кислородной зоны, в слое с температурой свыше 1000 K; содержание HF в растворе составляло 40% (a) и 72 % (b); приведены данные для положений форсунки I (черные символы) и II (светло-серые символы) (см. рис. 2)

Конверсия водяного пара при изменении расхода водного раствора фторида водорода от 5 до 90 мг/с меняется от 10 до 80 – 90%, проходя через максимум.

Снижение конверсии водяного пара с увеличением расхода раствора от 20 до 90 мг/с связано с сокращением времени пребывания водяного пара в высокотемпературной зоне и снижением температуры слоя углерода в связи с его охлаждением потоками водяного пара и фторида водорода, а также с протеканием эндотермической реакции образования водяного газа.

Рост значения конверсии при увеличении расхода от 5 до 20 мг/с, вероятно, связан с сокращением времени пребывания продуктов реакции в зоне образования вторичной воды.

Конверсия водяного пара K_{flu}^{gas} во всех опытах выше, чем конверсия K_{flu} , в среднем на 14 %. Вероятно, это связано с уносом мелкодисперсных капель воды из сборника 10.

Значения глубины конверсии водяного пара при работе с кислотой, содержащей фторид водорода в концентрации 40 и 72 %, близки между собой.

На конверсию оказывает существенное влияние способ установки форсунки. При осесимметричной установке (в положение II) конверсия водяного пара выше примерно на 40%. Вероятно, что это связано с большим временем пребывания потока в высокотемпературной зоне.

Конверсия водяного пара в зависимости от времени его пребывания в высокотемпературной области. Указанное время пребывания в зоне с температурой выше 1000 К приблизительно оценивали по расходу водного раствора фторида водорода и конфигурации высокотемпературной зоны с учетом расхода кислорода. При этом полагали, что реакция образования водяного газа протекает вне кислородной зоны. Результаты обработки экспериментальных данных приведены на рис. 5. Полученные зависимости

глубины конверсии от времени контакта углерода с водяным паром в высокотемпературной бескислородной зоне позволяют сделать вывод о том, что реакция (1) проходит практически полностью при времени контакта примерно 7 – 10 с и это время не зависит от исходной концентрации плавиковой кислоты.

Полученные значения времени контакта, при которых обеспечена 90 %-я конверсия водяного пара, хорошо согласуются с данными работы [10], в которой рассматривалось взаимодействие водяного пара с различными марками графита в отсутствие фторида водорода. Кроме того, было показано, что концентрация фторида водорода в его исходном растворе не влияет на значение конверсии водяного пара.

На основе проведенного анализа данных можно сделать вывод, что фторид водорода практически не оказывает влияния на скорость высокотемпературного взаимодействия водяного пара с графитом при температуре свыше 1000 К.

Заключение

На основе проведенного лабораторного экспериментального исследования установлено следующее.

При взаимодействии водяного пара с углеродом при температуре свыше 1000 К присутствие фторида водорода практически не оказывает влияния на скорость этой реакции.

Характерное время контакта водяного пара и неподвижного слоя графита при температуре свыше 1000 К в присутствии фторида водорода, при котором достигается 90%-я конверсия водяного пара, составляет величину порядка 10 с.

Метод высокотемпературного взаимодействия водяного пара с углеродом может стать основой промышленной технологии дегидратации водного раствора фторида водорода, в том числе азеотропного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borgard J.M., Herbelet F., Gwinner B. Recycling hydrofluoric acid in the nuclear industry: The overazeotropic flash process (OVAF) // Journal of Fluorine Chemistry. 2016. Vol. 185. May. Pp. 17–23.
2. Morel B., Duperret B. Uranium and fluorine cycles in the nuclear industry // Journal of Fluorine Chemistry. 2009. Vol. 130. No. 1. Pp. 7–10.
3. Тураев Н.С., Жерин И.И. Химия и технология урана. М.: ЦНИИ Атоминформ, 2005. 407 с.
4. Максимов Б.Н., Барабанов В.Г., Серушкин И.Л., Зотиков В.С.,



Семерикова И.А., Степанов В.П., Сагайлакова Н.Г., Каурова Г.И. Промышленные фторорганические продукты. Ленинград: Химия, 1996. 544 с.

5. Зайцев В.А., Новиков А.А., Родин В.И. Производство фтористых соединений при переработке фосфатного сырья. М.: Химия, 1982. 248 с.

6. Коростелев П.П. Реактивы для технического анализа. М.: Металлургия, 1988. 384 с.

7. Троян Н. В., Рябин В. А., Тимошенко А.И., Шубин А.С., Коробицын А.С., Павлович И.В. Кинетика образования бифторида натрия // Цветные металлы. 1985. № 8. С. 71–73.

8. Dahlke T., Ruffiner O., Cant R. Production of HF from H_2SiF_6 // Procedia Engineering.

2016. Vol. 138. Pp. 231–239.

9. Пашкевич Д.С., Алексеев Ю.И., Петров В.Б., Мухортов Д.А., Камбур П.С., Капустин В.В., Марков С.А., Ласкин Б.М., Макотченко В.Г. Стабильность фторида водорода в высокотемпературной зоне восстановления воды углеродом // Химическая промышленность. Т. 92. № 5. 2015. С. 211–220.

10. Федосеев С.Д., Чернышев А.Б. Полукоксование и газификация твердого топлива. М.: Гостоптехиздат, 1960. 327 с.

11. Канторович Б.В. Основы теории горения и газификации твердого топлива. М: Изд-во АН СССР, 1958. 601 с.

12. Михеев В.П. Газовое топливо и его сжигание. Ленинград: Недра, 1966. 328 с.

Статья поступила в редакцию 01.10.2018, принята к публикации 29.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КАПУСТИН Валентин Валерьевич — аспирант кафедры гидродинамики, горения и теплообмена Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Valentin.Kapustin.2014@yandex.ru

ПАШКЕВИЧ Дмитрий Станиславович — доктор технических наук, профессор кафедры гидродинамики, горения и теплообмена Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
pashkevich-ds@yandex.ru

МУХОРТОВ Дмитрий Анатольевич — кандидат технических наук, начальник лаборатории Российского научного центра «Прикладная химия», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

193232, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Крыленко, 26А
dmukhortov@mail.ru

ПЕТРОВ Валентин Борисович — старший научный сотрудник Российского научного центра «Прикладная химия», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

193232, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Крыленко, 26А
valentinpetrov46@mail.ru

АЛЕКСЕЕВ Юрий Иванович — кандидат технических наук, главный конструктор ООО «Новые химические продукты», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 11.
alexeev-588@yandex.ru

REFERENCES

[1] J.M. Borgard, F. Herbelet, B. Gwinner, Recycling hydrofluoric acid in the nuclear industry: The overazeotropic flash process (OVAF), Journal of Fluorine Chemistry. 185 (May) (2016) 17–23.

[2] B. Morel, B. Duperret, Uranium and

fluorine cycles in the nuclear industry, Journal of Fluorine Chemistry. 130 (1) (2009) 7–10.

[3] N.S. Turayev, I.I. Zherin, Khimiya i tekhnologiya urana [Chemistry and technology of uranium], Atominform, Moscow, 2005.

- [4] **B.N. Maksimov, V.G. Barabanov, I.L. Serushkin, et al.**, Promyshlennyye fluororganicheskiye produkty [Industrial fluororganic products], Khimiya, Leningrad, 1996.
- [5] **V.A. Zaytsev, A.A. Novikov, V.I. Rodin**, Proizvodstvo fluoristykh soyedineniy pri pererabotke fosfatnogo syrya [Production of fluoride compounds in the processing of phosphate raw materials], Khimiya, Moscow, 1982.
- [6] **P.P. Korostelev**, Reaktivы dlya tekhnicheskogo analiza [Reagents for technical analysis], Metallurgiya, Moscow, 1988.
- [7] **N.V. Troyan, V.A. Ryabin, A.I. Timoshenko, et al.**, Kinetika obrazovaniya biftorida natriya [Sodium bifluoride formation kinetics] Tsvetnyye metally. 8 (1985) 71–73.
- [8] **T. Dahlke, O. Ruffiner, R. Cant**, Production of HF from H_2SiF_6 , Procedia Engineering. 138 (2016) 231–239.
- [9] **D.S. Pashkevich, Yu.I. Alekseyev, V.B. Petrov, et al.**, Stabilnost florida vodoroda v vysokotemperaturnoy zone vosstanovleniya vody uglerodom [Stability of hydrogen fluoride in the high-temperature zone of water reduction by carbon], Khimicheskaya promyshlennost. 92 (5) (2015) 211–220.
- [10] **S.D. Fedoseyev, A.B. Chernyshev**, Polukoksovaniye i gazifikatsiya tverdogo topliva [Semicoking and gasification of solid fuel], Gostoptekhizdat, Leningrad, 1960.
- [11] **B.V. Kantorovich**, Osnovy teorii goreniya i gazifikatsii tverdogo topliva [Fundamentals of the theory of combustion and gasification of solid fuel], SA of the USSR, Moscow, 1958.
- [12] **V.P. Mikheyev**, Gazovoye toplivo i yego szhiganiye [Gas fuel and its combustion], Nedra, Leningrad, 1966.

Received 01.10.2018, accepted 29.12.2018.

THE AUTHORS

KAPUSTIN Valentin V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
Valentin.Kapustin.2014@yandex.ru

PASHKEVICH Dmitrii S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
pashkevich-ds@yandex.ru

MUKHORTOV Dmitrii A.

FSUE RSC "Applied Chemistry"
26A Krylenko St., St. Petersburg, 193232, Russian Federation
dmukhortov@mail.ru

PETROV Valentin B.

FSUE RSC "Applied Chemistry"
26A Krylenko St., St. Petersburg, 193232, Russian Federation
valentinpetrov46@mail.ru

ALEXEEV Yury I.

«New Chemical Products» Ltd.
11 Moyka River Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
alexeev-588@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.12110

УДК 534.2

РЕГИСТРАЦИЯ ИНФРАЗВУКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТАЙФУНОВ ЛАЗЕРНЫМИ ДЕФОРМОГРАФАМИ

В.А. Чупин, Г.И. Долгих, Е.С. Гусев

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева
Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Российская Федерация

В статье приводится описание натурных наблюдений мощных инфразвуковых возмущений в диапазоне «голоса моря» (7 – 9 Гц), вызванных прохождением тропических циклонов (тайфунов) в юго-восточном районе Дальневосточного федерального округа России и акватории Японского моря. Регистрация каждого события выполняется с помощью лазерно-интерференционного измерительного комплекса, стационарно расположенного на юге Приморского края. Проанализированы динамические спектрограммы наблюдаемых событий и прослежена их связь с метеорологическими явлениями, такими как ветер и морские волны. При использовании спутниковых данных найдена взаимосвязь распределения области влияния тайфунов в регионе с наблюдаемым инфразвуковым возбуждением. Сделаны выводы о взаимосвязи проявления микросейсм «голоса моря» с возникновением первичных и вторичных микросейсм, а также хорошей корреляции между исчезновением первичных микросейсм «голоса моря» и соответствующим прекращением первичных микросейсм. Установлено отсутствие зависимости уровня сигнала от скорости ветра в области расположения измерительного полигона.

Ключевые слова: инфразвуковая волна, лазерный деформограф, тайфун, голос моря

Ссылка при цитировании: Чупин В.А., Долгих Г.И., Гусев Е.С. Регистрация инфразвуковых возмущений тайфунов лазерными деформографами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 117–127. DOI: 10.18721/JPM.12110

RECORDING TYPHOONS' INFRASONIC DISTURBANCES BY LASER STRAINMETERS

V.A. Chupin, G.I. Dolgikh, E.S. Gusev

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Vladivostok, Russian Federation

In the paper, the field studies of powerful infrasonic disturbances in the range of “voice of the sea” (7 – 9 Hz) caused by tropical cyclones (typhoons) in the southeastern region of the Far Eastern Federal District (Russia) and the water area of the Sea of Japan have been presented. Event monitoring was carried out using the laser-interference measuring complex located permanently in the South of Primorski Krai. The dynamic spectrograms of the observable events were analyzed and their connection with various meteorological phenomena, such as wind and sea waves, was followed. Using the satellite data, a connection between the distribution of the area of typhoons influence in the region and the observed infrasound excitation was found. The conclusions were drawn regarding the correlation between the exhibition of the “voice of the sea” microseisms and the initiation of primary and secondary microseisms, as well as the one between the “voice of the sea” microseisms' disappearance and the corresponding end of primary microseisms. No dependence of the signal level on the wind speed in the area of the measuring range location was established.

Keywords: infrasonic wave, laser strainmeter, typhoon, voice of sea

Citation: V.A. Chupin, G.I. Dolgikh, E.S. Gusev, Recording typhoons' infrasonic disturbances by laser strainmeters, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 117–127. DOI: 10.18721/JPM.12110

Введение

На морской экспериментальной станции (МЭС) «Мыс Шульца» Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук (ТОИ ДВО РАН) ведется постоянное исследование целого комплекса показателей сейсмоакустико-гидрофизического цикла. Регистрируются вариации деформации земной коры (с помощью берегового лазерного деформографа), вариации атмосферного давления (с помощью лазерного нанобарографа), вариации гидросферного давления (используется специальный лазерный измеритель) и вариации скорости ветра (на метеостанции). При обработке синхронных экспериментальных данных, полученных при такой регистрации, было обнаружено, что в прибрежной области Приморского края наблюдается низкочастотное сейсмоакустическое возмущение в диапазоне 7–9 Гц (частотная полоса так называемого «голоса моря»).

Возбуждение сейсмического сигнала в данном диапазоне частот связано с прохождением тропических циклонов в окрестности измерительного полигона. Эти природные явления существенно влияют на жизнедеятельность Дальневосточного региона Российской Федерации.

Впервые на существование голоса моря — высокочастотного инфразвука (от единиц до десяти и более герц) было указано в работе [1]. В качестве механизма возникновения указанного феномена рассматривается обтекание больших океанских волн ветровым потоком. Альтернативный механизм возникновения этого инфразвука предлагается в работе [2], где рассматривается акустический шум от морских волн, разбивающихся о скалистые берега. В статье [3] высказано предположение об общей генерации инфразвука стоячими поверхностными волнами и, как следствие, — стратификации свойств атмосферы, таких как скорость ветра и температура, на наблюдаемые параметры инфразвуковых волн. Такие стоячие волны образуются в результате нелинейного взаимодействия между прогрессивными поверхностными волнами.

Множеством авторов, в том числе авторами статьи [4], регистрировались первичные и вторичные микросейсмы, возникающие в результате действия прогрессивных и стоячих морских волн на океанское дно. Механизм генерации вторичных микро-

сейсм, т. е. колебаний земной поверхности малой амплитуды, период которых равен полупериоду прогрессивных морских волн, был описан в работе [5]. Подобный акустический сигнал в атмосфере был назван микробаромами [6], теория возникновения которых была разработана в работах [7–9]. Микробаромы и вторичные микросейсмы образуются в результате нелинейных эффектов, возникающих при взаимодействии двух встречных прогрессивных морских волн с удвоенным периодом. В работе [10] анализируются экспериментальные данные, относящиеся к штормам; они дают основания заключить, что микробаромы и вторичные микросейсмы имеют один источник. В работе [11] впервые сообщается о регистрации деформационных возмущений, вызванных прохождением тайфуна и лежащих в частотном диапазоне голоса моря.

В связи с серьезной угрозой, которую представляют собой описанные природные явления, существует острая необходимость в проведении всесторонних исследований физики возникновения подобных процессов, а также изучения их динамических особенностей.

Измерительный комплекс и перечень экспериментальных данных

В настоящей статье рассматриваются как наши собственные экспериментальные данные, так и полученные японскими исследователями. Собраны и изучены следующие сведения:

исследования Японского метеорологического агентства о движении тропических циклонов за 2010 – 2018 гг. [12];

снимки с японского спутника Himawari-8 [13], позволяющие с точностью до 1 ч визуально проследить область распределения циклонического вихря;

результаты наших измерений с помощью лазерного деформографа;

экспериментальные данные с нашей метеостанции.

Регистрация вариаций деформации земной коры с помощью лазерных деформографов была произведена с аппаратно-программного комплекса, расположенного на полигоне ТОИ ДВО РАН «Мыс Шульца». Комплекс был развернут с целью изучения природы возникновения, развития и трансформации колебаний и волн звукового и инфразвукового диапазонов, их взаимо-



действия друг с другом и с неоднородностями геосфер различных масштабов [14].

Два лазерных деформографа находились на мысе Шульца Японского моря. Координаты объектов были $42,58^\circ$ с.ш. и $131,157^\circ$ в.д. Эти два устройства располагались так, что представляли собой двухкоординатный лазерный деформограф с (почти) взаимно перпендикулярными измерительными плечами [15]. Каждый лазерный деформограф собран по схеме неравноплечего интерферометра Майкельсона с использованием частотно-стабилизированного гелий-неонового лазера. Один из них имел длину измерительного плеча 52,5 м и был ориентирован под углом 18° (198°) к линии север-юг; другой имел соответствующую длину 17,5 м и ориентирован под углом 110° (290°) к этой линии. Первый находился на глубине 3–5 м от поверхности Земли в гидротермоизолированном помещении, на высоте 67 м над уровнем моря, а второй – на удалении 70 м от первого на глубине 3–4 м от поверхности Земли в подобном помещении. Угол между измерительными плечами лазерных деформографов составлял 92° . Применяемые методы интерферометрии позволяют регистрировать изменение длины l измерительного плеча каждого лазерного деформографа с точностью $\Delta l = 0,01$ нм в частотном диапазоне от 0 (условно) до 1000 Гц. При этом чувствительность лазерного деформографа с длиной плеча $l = 52,5$ м составляет $\Delta l / l \approx 0,2 \cdot 10^{-12}$, а лазерного деформографа с длиной плеча $l = 17,5$ м – примерно $0,6 \cdot 10^{-12}$.

На метеорологической станции измеряются температура и влажность воздуха, атмосферное давление, скорость и направление ветра. Данные по вариациям

указанных величин регистрируются с дискретностью 1 Гц.

Результаты измерений лазерных деформографов и с метеостанции поступают в лабораторное помещение, где выполняется предварительная обработка (фильтрация и децимация) полученных данных, затем информация записывается на твердые носители программно-вычислительного комплекса с последующей организацией базы экспериментальных данных.

Первоначально был проведен анализ базы данных тайфунов, проходящих в северо-западной части Тихого океана и оказавших непосредственное влияние на дальневосточный регион России. В качестве характерных примеров этого влияния нами были выбраны четыре тайфуна. Названия исследуемых тайфунов и интервалы времени их действия приведены в таблице. На основе данных Японского метеорологического агентства была составлена комплексная карта траекторий движения рассматриваемых тайфунов (рис. 1), с обозначением полусуточных интервалов времени их движения по японскому стандартному времени JST (Japan Standard Time), которое соответствует UTC+09, т. е. смещению +9 ч относительно всемирного координированного времени (UTC – Universal Time Coordinated).

Траектории выбранных тайфунов, как следует из рисунка, проходили вблизи измерительного полигона и вызывали генерацию наблюдаемого сейсмоакустического возмущения в диапазоне «голоса моря». Снимки с японского спутника Himawari-8 использовались для визуального отслеживания места расположения «глаз» тайфунов, их передних фронтов и «хвостов».

Таблица

Использованные временные интервалы обработки данных наблюдений за тайфунами

Обозначение	Название тайфуна	Период времени
B	Болавен	28.08. 2012 – 31.08. 2012
S	Санба	17.09. 2012 – 20.09. 2012
M	Матмо	26.07. 2014 – 27.07. 2014
Ch	Чан-Хом	12.07. 2015 – 15.07. 2015

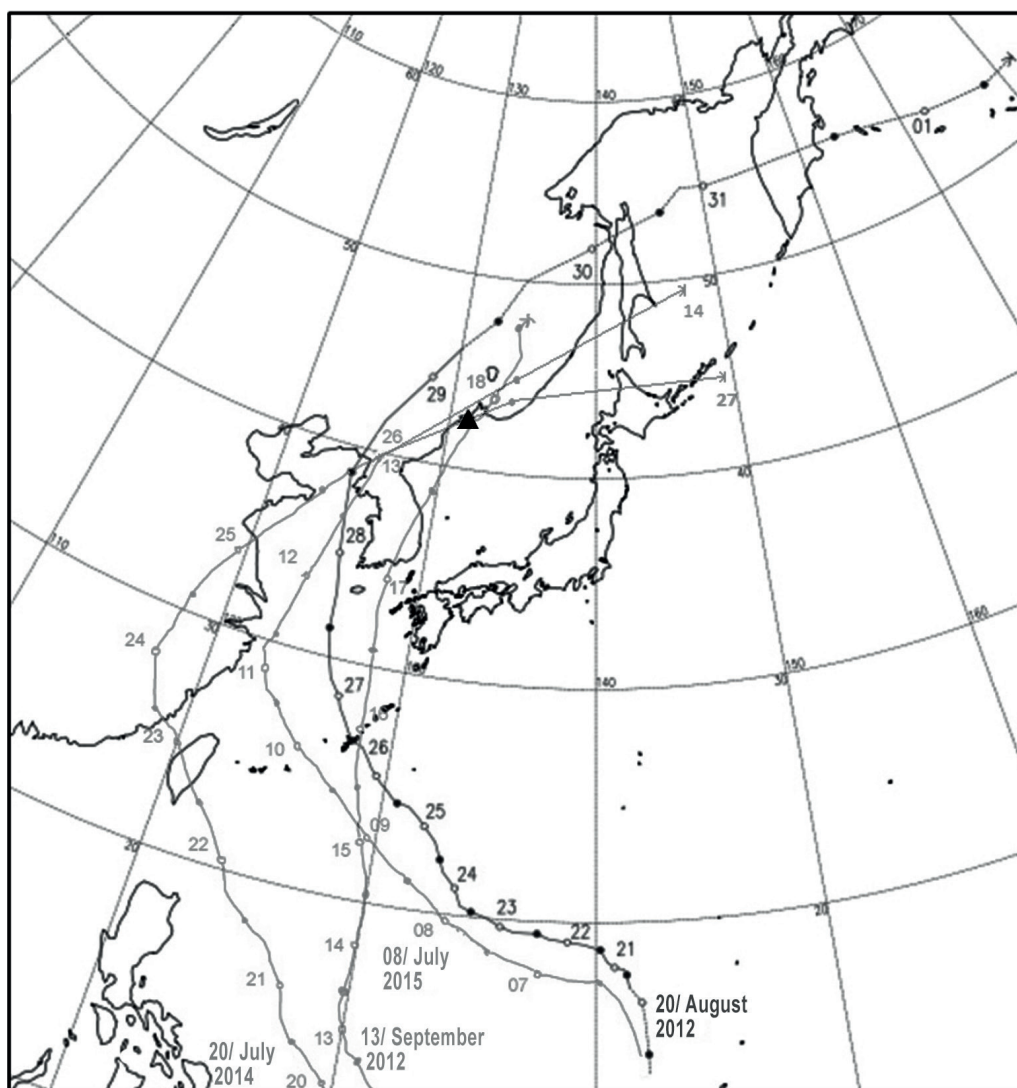


Рис. 1. Комплексная карта траекторий движения рассматриваемых тайфунов, составленная нами на основе данных Японского метеорологического агентства. Обозначены полусуточные интервалы времени движения тайфунов по японскому стандартному времени JST, цифры соответствуют датам регистрации (см. таблицу и пояснения в тексте); треугольником обозначено местоположение измерительного полигона

Экспериментальные данные и их анализ

В ходе выполнения работ использовались данные с одного лазерного деформографа как наиболее репрезентативные, а также результаты измерений вариации величины скорости ветра, полученные на метеостанции. После обработки информации с лазерного деформографа, поступившей за указанные интервалы наблюдений, были получены спектрограммы диапазона «голос моря» (рис. 2). Кроме того, были получены спектрограммы диапазона микросейсм, вызванных воздействием на дно морских

ветровых волн и волн зыби (рис. 3). На рис. 4 приведены данные по изменению скорости ветра в рассматриваемые интервалы наблюдений. Далее представлен детальный анализ информации, приведенной для каждого тайфуна на рис. 1 – 4. Используются также снимки с японского спутника Himawari-8.

Тайфун Болавен (В). Согласно данным лазерного деформографа, 28 августа 03:25 (далее везде время всемирное координированное (UTC)) возникает шум в диапазоне 1,0–2,5 Гц, а также узкополосные колеба-

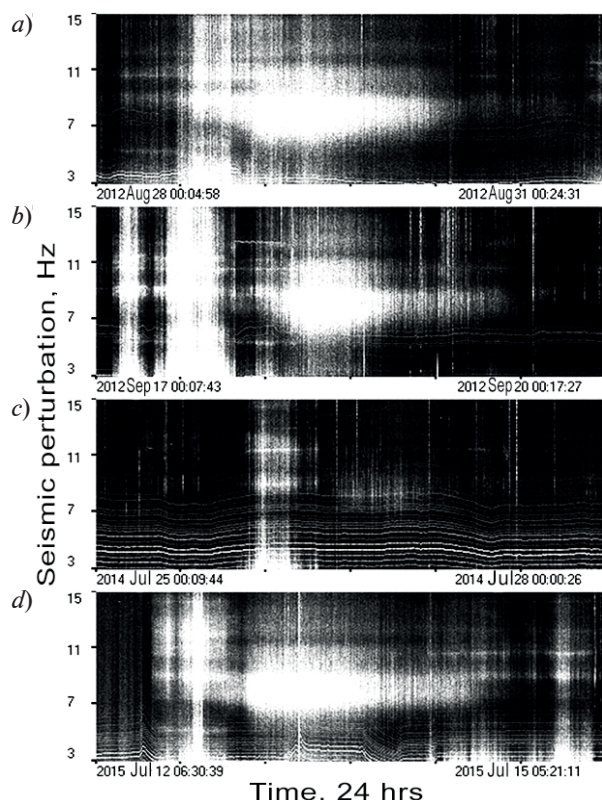


Рис. 2. Спектрограммы (динамика сейсмоакустических возмущений) диапазона «голос моря», полученные с помощью берегового лазерного деформографа, для тайфунов В (а), S (b), М (c), Ch (d) (см. таблицу)

ния с центральными частотами около 5,3, 9,1 и 10,7 Гц. «Глаз» тайфуна находится в Желтом море и выходит на Корейский полуостров. На мысе Шульца регистрируется южный/юго-западный ветер со скоростью 1 – 2 м/с.

После появления шума его диапазон постепенно расширяется до значений 1,0–4,5 Гц, с ростом уровней сигналов, и достигает своего максимума в 14:53 (28 августа). Наблюдается усиление колебаний с центральными частотами 9,1 и 10,7 Гц. Тайфун выходит на Приморский край (Россия); его мощный хвост теперь расположен на севере Желтого моря; разреженные же хвосты тайфуна расположены над Японским морем. На мысе Шульца ветер сменяется на юго-восточный, приобретая скорость 14 – 16 м/с.

До 19:26 28 августа уровень шума в диапазоне 1,0 – 4,5 Гц сохраняется постоянным. Но теперь происходит периодическое

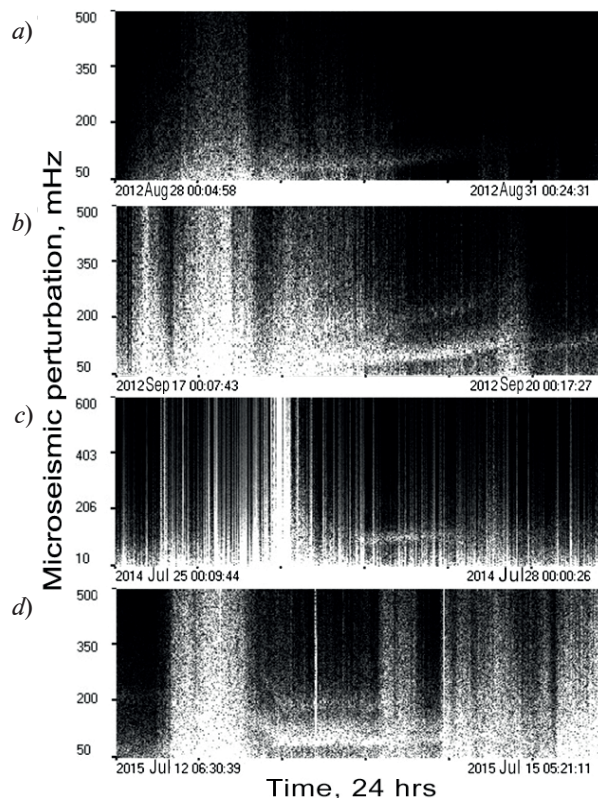


Рис. 3. Спектрограммы (зависимости колебаний морского волнения от времени) диапазона микросейсм, вызванных воздействием на дно морских ветровых волн и волн зыби, полученные с помощью берегового лазерного деформографа, для тайфунов В (а), S (b), М (c) и Ch (d) (см. таблицу)

усиление-ослабление интенсивности сигналов с теми же центральными частотами (9,1 и 10,7 Гц). Основная же, центральная часть тайфуна почти ушла из Приморского края на территории Китая и Хабаровского края. Остается лишь небольшой хвост тайфуна на юге Приморского края и северо-востоке Японского моря. На мысе Шульца регистрируется юго-восточный ветер со скоростью 16 – 18 м/с.

До 22:10 28 августа уровень шума падает, его частотный диапазон 1,0 – 4,5 Гц сужается обратно к значениям 1,0 – 2,5 Гц. Падает уровень колебаний с центральными частотами 9,1 и 10,7 Гц, однако возникают мощные колебания в частотном диапазоне 6,5 – 9,3 Гц с центральной частотой порядка 8,0 Гц (в дальнейшем мы будем их называть микросейсмами «голоса моря»). Север Приморского края, Китай и Хабаровский край находятся под действием тайфуна. Хвосты тайфуна оказываются на

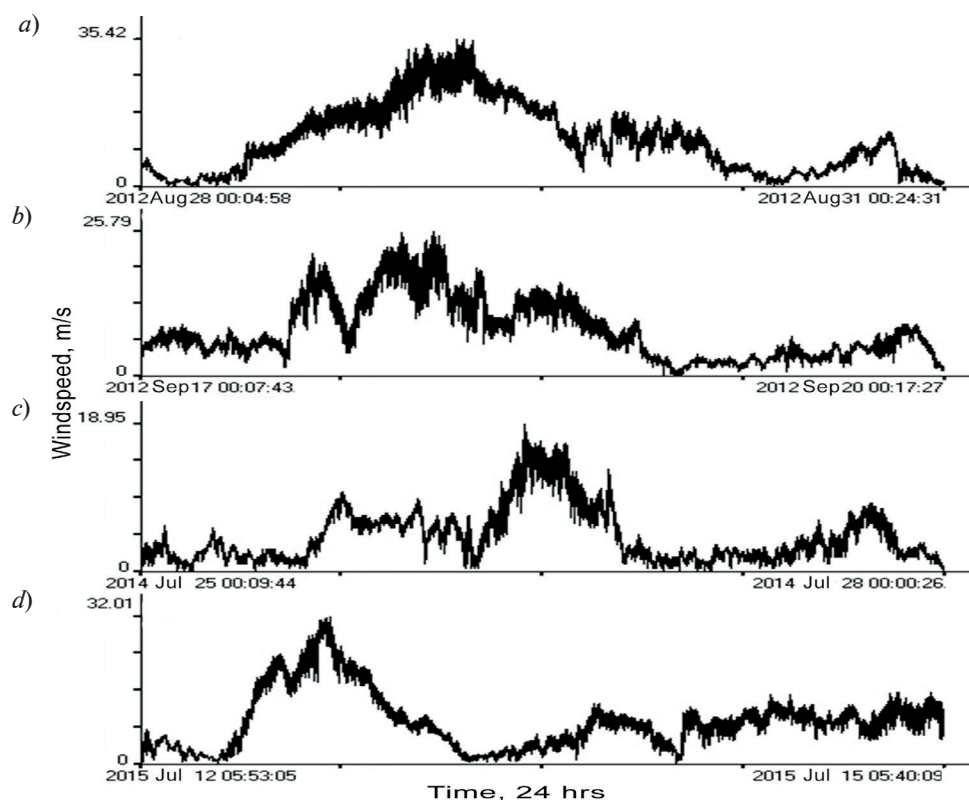


Рис. 4. Изменение скорости ветра в зависимости от времени. Экспериментальные данные получены на метеостанции для тайфунов В (a), S (b), М (c) и Ch (d) (см. таблицу)

востоке и северо-востоке Японского моря. Через Корейский полуостров в Японское море проникает мощный передний фронт очередного тайфуна, «глаз» которого находится над Тайванем. На мысе Шульца дует юго-восточный ветер со скоростью 20 – 25 м/с.

Наибольший размах по частотному диапазону микросейсмы голоса моря достигли в 06:00 29 августа (6,5 – 9,5 Гц, белое ядро). В это время тайфун бушует над Китаем, Монголией, Хабаровским краем. Приморский же край почти целиком оказывается вне зоны его действия. Небольшие хвосты тайфуна наблюдаются у берегов Японии и на севере Японского моря. На мысе Шульца регистрируется максимальный юго-восточный ветер со скоростью 33 м/с.

29 августа в 18:00 не наблюдается основного ядра микросейсма голоса моря. Приморский край находится вне зоны тайфуна; то же для Японского моря. На юге же Желтого моря наблюдается глаз нового тайфуна, передний фронт которого проходит над Корейским полуостровом. На мысе Шульца дует западный ветер со скоростью 8 – 10 м/с.

В диапазоне 1,0 – 2,5 Гц низкочастотный шум не регистрируется. Интенсивность колебаний в диапазоне 6,5 – 9,3 Гц падает со временем, их частотный диапазон также сужается до значений 7,5 – 8,5 Гц. К моменту 23:30 30 августа указанные колебания затухают почти полностью. Тайфун находится в Охотском море. На мысе Шульца дует северо-западный ветер со скоростью 2 – 4 м/с.

Лазерный деформограф уверенно регистрировал первичные и вторичные микросейсмы. Первичные микросейсмы с периодом около 12 с начали регистрироваться прибором примерно с 23:00 28 августа, далее их период постепенно уменьшался до 5 с (20:30 30 августа). Вторичные микросейсмы с периодом около 6 с уверенно регистрировались лазерным деформографом примерно в то же время (23:00 28 августа). Период и интенсивность вторичных микросейсм постепенно снижались, и их регистрация практически прекращалась с 00:30 30 августа. До этого момента их период составлял около 4 с, тогда как период первичных микросейсм был равен примерно 8 с.



Таким образом, момент возникновения мощных колебаний в частотном диапазоне 6,5 – 9,3 Гц почти совпадает со временем прихода мощных первичных микросейсм. Период и мощность первичных микросейсм снижаются и едва регистрируются прибором уже в 20:30 30 августа. Несколько позже (23:30) практически не регистрируются колебания в диапазоне 7,5 – 8,5 Гц. Следует отметить, что диапазон скорости местного ветра за этот же период наблюдений (28 августа 22:10 – 30 августа 23:30), т.е. за период возникновения и исчезновения микросейсм голоса моря, возрастает от 20 – 25 до 32 – 33 м/с, а затем постепенно падает до 2 – 4 м/с. При этом 29 августа в 6:00 наблюдается наибольший размах микросейсм голоса моря по частотному диапазону. В этот же период наблюдений в районе мыса Шульца регистрируются только хвосты тайфуна.

Тайфун Санба (S). 17 сентября в 02:20 усиливается шум, что приводит к возрастанию всех спектральных компонент и расширению отдельных частотных диапазонов. Так, диапазон от 1,0 – 2,5 Гц постепенно расширяется до диапазона 1,0 – 4,5 Гц. Наблюдаются колебания в узких частотных диапазонах с центральными частотами 9,1, 10,7 и 11,3 Гц. В 11:00 того же дня глаз тайфуна вышел на юг Корейского полуострова. Передний фронт тайфуна занимает весь Корейский полуостров, Приморский край, север и северо-запад Японского моря, остров Сахалин, Охотское море с выходом на Камчатку. При падении уровня шума интенсивность данных возмущений падает и почти пропадает 17 сентября в 07:15. В 07:00 глаз тайфуна выходит на север Корейского полуострова. На мысе Шульца регистрируется северо-восточный ветер со скоростью 6 – 8 м/с (2:20).

17 сентября в 08:20 появляется шум с центральной частотой 5,3 Гц. Глаз тайфуна локализуется на шельфе Японского моря, у побережья Южной Кореи. Передний фронт тайфуна покрывает Приморский край, остров Сахалин, Охотское море, Камчатку, северную и западную части Японского моря. На мысе Шульца дует северо-восточный ветер со скоростью 5–6 м/с.

17 сентября 20:00 основная область тайфуна перемещается на Хабаровский край, Китай, Монголию, север и центральную часть Приморского края. Глаз тайфуна покинул юг Приморского края. В центре Японского моря наблюдается хвост тай-

фуна; на шельфе Корейского полуострова остается только его небольшой хвост. На мысе Шульца поднимается северо-восточный ветер со скоростью 13 – 16 м/с.

17 сентября в 22:35 возникают шум в диапазоне 1,0 – 4,5 Гц и колебания в узких полосах с центральными частотами 5,3, 9,1 и 10,7 Гц. Слабо проявляются колебания с центральной частотой 11,3 Гц. Тайфун «освободил» почти весь Приморский край. Глаз тайфуна расположился на Сахалине. В центре Японского моря находится его хвост, и небольшой хвост наблюдается у побережья Корейского полуострова. На мысе Шульца бушует северо-восточный ветер со скоростью 20 – 23 м/с.

18 сентября, примерно в 00:10, возникают микросейсм голоса моря; частотный диапазон в его максимуме регистрируется в диапазоне от 6,0 до 9,5 Гц с центральной (по интенсивности) частотой 8 Гц. Колебания микросейсм голоса моря сильно затухают к 18:00 18 сентября и слабо прослеживаются до 10:00 19 сентября (их центральная частота составляет около 8,5 Гц). Местоположения глаза тайфуна и его переднего фронта почти не изменяются, а его хвост находится в центре Японского моря. При этом вдоль побережья Корейского полуострова с выходом на мыс Шульца простирается слабый хвост тайфуна. В Желтом море наблюдается небольшая атмосферная депрессия, которая через север Корейского полуострова достигает юга Приморского края. На мысе Шульца бушует северо-восточный ветер со скоростью 18 – 21 м/с (00:10), а затем дует северо-западный, со скоростью 6 – 9 м/с (18 сентября, 18:00) и северный, со скоростью 3 – 4 м/с (19 сентября, 10:00).

18 сентября в 18:00 снижается интенсивность центральной части микросейсм голоса моря. Хвост тайфуна покрывает север Корейского полуострова, южные берега Приморского края, Японское море вблизи Кореи; в дальнейшем этот хвост распадается, образуя вихрь. Через остров Хоккайдо на север и затем на остров Сахалин распространяется передний фронт нового тайфуна.

19 сентября в 10:00 микросейсм голоса моря практически не регистрируются.

17 сентября, примерно в 23:30, возникают мощные первичные микросейсм с периодом около 12 с и вторичные микросейсм с периодом около 6 с. Затем их период уменьшается. Примерно в 03:50 19 сентября на записи лазерного деформографа плохо

прослеживались вторичные микросейсмы. При этом их период упал до 4,2 с, а период первичных микросейсм в это время составил примерно 8,5 с. Амплитуда первичных микросейсм сильно уменьшилась на записи лазерного деформографа в 07:30 19 сентября. При этом их период стал равным около 7,5 с.

Таким образом, время возникновения микросейсм голоса моря (18 сентября 00:10) почти совпало со временем прихода первичных микросейсм с максимальным периодом 12 с (17 сентября 23:30). Вторичные микросейсмы характеризуются максимальным периодом в 6 с. На мысе Шульца скорость ветра составила около 18 – 21 м/с. Микросейсмы голоса моря сильно затухают к 18:00 18 сентября. Скорость ветра к этому времени падает до 6 – 9 м/с. Окончательно затухают микросейсмы голоса моря к 10:00 19 сентября. На мысе Шульца скорость ветра падает до 2 – 3 м/с. К 7:30 19 сентября частота первичных микросейсм понижается до 7,5 Гц, и они плохо прослеживаются. Вторичные микросейсмы не наблюдаются.

Тайфун Матмо (М). На спектрограммах инфразвуковых возмущений, генерируемых этим тайфуном, мы наблюдаем самые слабые проявления исследуемых сигналов в низкочастотном диапазоне, которые начали развиваться 26 июля 2014 года около 10:00 и имели примерно одинаковую интенсивность в течение всего временного промежутка его проявления. Центр тайфуна в этот период находился в Японском море ближе к острову Хоккайдо на широте 45° с.ш. Пиковая частота составляла 7,8 Гц. Полное затухание возмущений произошло 26 июля в 23:00.

Тайфун Чан-Хом (Ch). 11 июля, в 15:00, возникает шум в диапазоне 1,0 – 2,5 Гц. Глаз тайфуна находится на юге Желтого моря, его передний фронт занимает Корейский полуостров и выходит на юг Приморского края. На мысе Шульца дует южный ветер со скоростью 6–8 м/с.

12 июля, в 14:00, шум в диапазоне 1,0–2,5 Гц усиливается и расширяется до диапазона 1,0 – 4,5 Гц. Глаз тайфуна покрывает север Корейского полуострова, а его передний фронт (вихрь) простирается от севера Желтого моря до Китайской народной республики, Хабаровского и Приморского краев, центра Японского моря и через южные острова Японии проходит в Тихий океан. На мысе Шульца

дует юго-восточный ветер со скоростью 10 – 12 м/с.

12 июля, в 14:30, продолжается шум в частотном диапазоне 1,0 – 4,5 Гц. Возникают колебания с центральными частотами 5,3, 9,1 и 10,7 Гц. На мысе Шульца усиливается юго-восточный ветер до скорости 15 – 19 м/с.

12 июля, в 17:20, глаз тайфуна находится на юге Приморского края. Японское море вдоль побережья Корейского полуострова не затрагивается тайфуном. На мысе Шульца бушует юго-восточный ветер со скоростью 17 – 20 м/с.

13 июля, в 02:50, возникают мощные микросейсмы голоса моря в частотном диапазоне от 7 до 9 Гц (других колебаний не наблюдается). Далее частотный диапазон микросейсм голоса моря быстро расширяется до диапазона 6 – 11 Гц (13 июля, 06:00). 14 июля, в 10:00, частотный диапазон микросейсм голоса моря сужается до 7 – 9 Гц и исчезает в 10:00. Глаз тайфуна расположен на севере Приморского края, тогда как центр, юг и запад Японского моря находятся вне зоны тайфуна. Хвост тайфуна простирается по дуге Желтое море – Корейский полуостров – центр Приморского края – восточная часть Японского моря – Японские острова и уходит на юг в Тихий океан. На мысе Шульца дует юго-восточный ветер со скоростью 9 – 11 м/с.

14 июля, в 04:20, возникают слабые сигналы с центральными частотами 9,1 и 10,7 Гц. Хвост тайфуна расположен на севере Приморского края, тогда как юг Приморского края лежит вне зоны тайфуна. На мысе Шульца дует северо-западный ветер со скоростью 9 – 11 м/с.

14 июля, в 23:18, окончательно пропадает слабый фон микросейсм голоса моря. Тайфун покинул Приморский край и Японское море. Вдоль Корейского полуострова, в Японском море, простирается незначительная атмосферная депрессия. На мысе Шульца регистрируется северо-восточный ветер со скоростью 8 – 11 м/с.

15 июля, в 03:45, пропадают сигналы с центральными частотами 9,1 и 10,7 Гц, однако время от времени сигналы с центральными частотами 9,1 Гц появляются вновь. Атмосферная ситуация остается практически неизменной. На мысе Шульца дует северо-восточный ветер со скоростью 10 – 14 м/с.

13 июля, примерно в 03:00, с помощью лазерного деформографа регистрируются



первичные микросейсмы с периодом около 7,2 с и вторичные с периодом около 3,7 с. Их периоды постепенно растут со временем, и 13 июля, примерно в 05:30, эти значения составляют, соответственно, 10,5 и 5,3 с. Они уверенно регистрируются деформографом, и их периоды остаются неизменными до 20:00 13 июля. Затем в шумах исчезают вторичные микросейсмы, а первичные с периодом около 10 с прослеживаются до 04:30 14 июля. К этому времени их период немного снижается до 9,3 с.

Таким образом, время возникновения микросейсм голоса моря (13 июля 02:50) почти совпадает со временем прихода первичных микросейсм с максимальным периодом 7,2 с (13 июля 03:00). Вторичные микросейсмы характеризуются периодом 3,7 с. На мысе Шульца скорость ветра составляет примерно 9 – 11 м/с. Далее частотный диапазон микросейсм голоса моря быстро расширяется до 6 – 11 Гц (13 июля, 06:00), что связано с ростом периодов первичных и вторичных микросейсм. Периоды этих микросейсм к 05:30 13 июля, достигли значений 10,5 и 5,3 с, соответственно. Вторичные микросейсмы не регистрируются уже примерно в 20:00 13 июля. Первичные микросейсмы уверенно

регистрируются лазерным деформографом до 04:30 14 июля. Микросейсмы голоса моря пропадают примерно в 10:00 14 июля.

Заключение

Анализ информации, полученной нами для каждого тайфуна, а также снимков с японского спутника Himawari-8 позволил нам сформулировать следующие выводы.

Время регистрации микросейсм голоса моря лазерным деформографом почти точно (с учетом сложности визуального определения по спектрограммам) совпадает со временем регистрации первичных и вторичных микросейсм этим же прибором.

Исчезновение микросейсм голоса моря коррелирует с исчезновением первичных микросейсм и плохо коррелирует с исчезновением вторичных микросейсм.

Момент максимального значения скорости ветра не всегда совпадает во времени с достижением максимума микросейсм голоса моря.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-05-80011_Опасные явления) и программы «Дальний Восток».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шулейкин В.В. О голосе моря // Доклады Академии наук СССР. 1935. Т. 3. № 8. С. 259–263.
2. Garces M., Aucan J., Fee D., Caron P., Merrifield M., Gibson R., Bhattacharyya J., Shah S. Infrasound from large surf // *Geophys. Res. Lett.* 2006. Vol. 33. L05611. Pp. 1–4.
3. Перепёлкин В.Г., Куличков С.Н., Чунчужов И.П., Репина И.А. Об опыте регистрации «голоса моря» в акватории Черного моря // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2015. Т. 51. № 6. С. 716–728.
4. Dolgikh G.I., Dolgikh S.G., Kovalev S.N., Ovcharenko V.V., Chupin V.A., Shvets V.A., Yakovenko S.V. Experimental estimate of a relation between sea wave energies and the Earth's crust microdeformations // *Acta Geophysica.* 2017. Vol. 55. No. 4. Pp. 607–618.
5. Longuet-Higgins M.S. A theory of the origin of microseism // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences.* 1950. Vol. 243. No. 857 Pp. 1–35.
6. Benioff H., Gutenberg B. Waves and currents recorded by electromagnetic barographs // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 1939. Vol. 20. No. 10. Pp. 421–426.
7. Posmentier E.S. A theory of microbaroms // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1967. Vol. 13. Pp. 487–501.
8. Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Куртепов В.М., Наугольных К.А. К вопросу об излучении инфразвука в атмосферу поверхностными волнами в океане // *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1973. Т. 9. № 9. С. 899–907.
9. Waxler R., Gilbert K.E. The radiation of atmospheric microbaroms by ocean waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 119. No. 5. Pp. 2651–2664.
10. Donn W.L., Naini B. Sea wave origin of microbaroms and microseisms // *J. Geophys. Res.* 1973. Vol. 78. No. 21. Pp. 4482–4488.
11. Долгих Г.И., Гусев Е.С., Чупин В.А. Деформационные проявления «голоса моря» // *Доклады Академии наук.* 2018. Т. 148. № 1.

C. 95–98.

12. Данные Японского метеорологического агентства о движении тропических циклонов за 2010 – 2018. http://www.jma.go.jp/jma/jma-eng/jma-center/rsmc-hp-pub-eg/besttrack_viewer_2010s.html.

13. Himawari 8. Data Archive. GMS/GOES9/MTSAT Data Archive for Research and Education.

<http://weather.is.kochi-u.ac.jp/archive-e.html>.

14. Долгих Г.И., Привалов В.Е. Лазерная физика. Фундаментальные и прикладные исследования. Владивосток: Дальнаука, 2016. 352 с.

15. Долгих Г.И., Ковалев С.Н., Корень И.А., Овчаренко В.В. Двухкоординатный лазерный деформограф // Физика Земли. 1998. № 11. С. 76–81.

Статья поступила в редакцию 14.11.2018, принята к публикации 28.11.2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЧУПИН Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Российская Федерация. 690041, Российская Федерация, г. Владивосток, Балтийская ул., 43
chupin@poi.dvo.ru

ДОЛГИХ Григорий Иванович – доктор физико-математических наук, заведующий отделом Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Российская Федерация. 690041, Российская Федерация, г. Владивосток, Балтийская ул., 43
dolgikh@poi.dvo.ru

ГУСЕВ Егор Сергеевич – инженер Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичёва Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Российская Федерация. 690041, Российская Федерация, г. Владивосток, Балтийская ул., 43
gusev.e.s.95@gmail.com

REFERENCES

[1] V.V. Shuleykin, O golose morya [On the voice of the sea], Doklady of the USSR Academy of Sciences. 3 (8) (1935) 259–263.

[2] M. Garces, J. Aucan, D. Fee, et al., Infrasound from large surf, Geophys. Res. Lett. 33 (2006) L05611(1–4).

[3] V.G. Perepelkin, S.N. Kulichkov, I.P. Chunchuzov, I.A. Repina, On experience in recording the voice of the sea in the water area of the Black Sea, Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics. 51 (6) (2015) 716–728.

[4] G.I. Dolgikh, S.G. Dolgikh, S.N. Kovalev, et al., Experimental estimate of a relation between sea wave energies and the Earth's crust microdeformations, Acta Geophysica. 55 (4) (2017) 607–618.

[5] M.S. Longuet-Higgin, A theory of the origin of microseism, Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A: Math. Phys. Sci. 243 (857) (1950) 1–35.

[6] H. Benioff, B. Gutenberg, Waves and currents recorded by electromagnetic barographs, Bull. Am. Meteorol. Soc. 20(10) (1939) 421–426.

[7] E.S. Posmentier, A theory of microbaroms, Geophys. J. R. Astron. Soc. 13 (1967) 487–501.

[8] L.M. Brekhovskikh, V.V. Goncharov, V.M. Kurtepov, K.A. Naugolnykh, The radiation of infrasound into the atmosphere by surface waves in the ocean, Izv. Acad. Sci. USSR, Atmos. Oceanic Phys. 9(9) (1973) 899–907.

[9] R. Waxler, K.E. Gilbert, The radiation of atmospheric microbaroms by ocean waves, J. Acoust. Soc. Am. 119 (5) (2006) 2651–2664.

[10] W.L. Donn, B. Naini, Sea wave origin of microbaroms and microseisms, J. Geophys. Res. 78 (21) (1973) 4482–4488.

[11] G.I. Dolgikh, E.S. Gusev, V.A. Chupin, The nature of the “Voice of the sea”, Doklady Earth Sciences. 481 (1) (2018) 912–915.

[12] Data of the Japan meteorological agency on the movement of tropical cyclones for 2010–2018, URL: http://www.jma.go.jp/jma/jma-eng/jma-center/rsmc-hp-pub-eg/besttrack_viewer_2010s.html.

[13] Himawari 8 Data Archive, GMS/



GOES9/MTSAT Data Archive for Research and Education, URL: <http://weather.is.kochi-u.ac.jp/archive-e.html>.

[14] **G.I. Dolgikh, V.E. Privalov**, Lazernaya fizika. Fundamentalnyye i prikladnyye issledovaniya [Laser physics. Fundamental

and applied research], Dalnauka, Vladivostok (2016).

[15] **G.I. Dolgikh, S.N. Kovalev, I.A. Koren, V.V. Ovcharenko**, A two-coordinate laser strainmeter, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 34 (11) (1998) 946–950.

Received 14.11.2018, accepted 28.11.2018.

THE AUTHORS

CHUPIN Vladimir A.

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute

43 Baltiyskaya St., Vladivostok, 690041, Russian Federation
chupin@poi.dvo.ru

DOLGIKH Grigory I.

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute

43 Baltiyskaya St., Vladivostok, 690041, Russian Federation
dolgikh@poi.dvo.ru

GUSEV Egor S.

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute

43 Baltiyskaya St., Vladivostok, 690041, Russian Federation
gusev.e.s.95@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.12111

УДК 519.63

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ВЕРИФИКАЦИЯ РЕАЛИЗАЦИЙ АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЛАСТИН РЕЙССНЕРА – МИНДЛИНА

К.В. Киселев, М.Е. Фролов, О.И. Чистякова

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе рассматривается апостериорная оценка точности приближенных решений задачи об изгибе пластин Рейсснера – Миндлина. Оценка построена при помощи функционального подхода, основанного на строгих математических методах, в частности методах функционального анализа. Она справедлива для любых конформных аппроксимаций точных решений, что делает ее надежной. Она также является гарантированной, и неравенство не нарушается при практической реализации. Эти свойства делают данный метод контроля точности решений привлекательным для использования в инженерных расчетах, где некоторые вычислительные детали могут быть скрыты. В статье исследованы две независимые реализации оценки. Использование вычислительного эксперимента показало корректность работы алгоритмов и близость полученных результатов. Установлено, что для широкого диапазона значений толщины степень переоценки истинной величины погрешности остается приемлемой.

Ключевые слова: апостериорная оценка погрешности, метод конечных элементов, пластина Рейсснера – Миндлина

Ссылка при цитировании: Киселев К.В., Фролов М.Е., Чистякова О.И. Вычислительный эксперимент и верификация реализаций апостериорной оценки для пластин Рейсснера – Миндлина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 128–141. DOI: 10.18721/JPM.12111

A POSTERIORI ERROR ESTIMATE FOR REISSNER – MINDLIN PLATES: VERIFICATION OF IMPLEMENTATIONS AND NUMERICAL TESTING

K.V. Kiselev, M.E. Frolov, O.I. Chistiakova

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A posteriori error estimate for accuracy control of approximate solutions for the problem of Reissner – Mindlin plates bending has been analyzed in the paper. The estimate was constructed using the functional approach based on rigorous mathematical grounds, in particular, on methods of functional analysis. It is valid for all conforming approximations of exact solutions, and therefore, it is robust. The estimate is guaranteed in practical implementations due to reliability of the respective inequality. The above-mentioned properties of the method of error control are very desirable for engineering analysis, where some details of computations might be hidden. Our paper investigated two independent implementations of the estimate. Using specially constructed numerical tests, correctness of both implementation algorithms and similarity of the obtained results for all examples were shown. An overestimation of the true error was established to remain acceptable for a wide range of plate thickness values.

Keywords: a posteriori error estimate, finite element method, Reissner – Mindlin plate

Citation: K.V. Kiselev, M.E. Frolov, O.I. Chistiakova, A posteriori error estimate for Reissner – Mindlin plates: verification of implementations and numerical testing, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 128–141. DOI: 10.18721/JPM.12111



Введение

Работа посвящена апостериорному контролю точности решений в задачах теории пластин, которые нередко возникают в различных инженерных расчетах. Чем адекватнее выбранная модель описывает реальные физические процессы, происходящие при деформировании рассматриваемого объекта, тем ближе к эксперименту будут результаты проведенного расчета.

В настоящей работе исследуется проблема контроля точности метода конечных элементов (МКЭ) для модели линейно-упругих деформируемых пластин Рейсснера – Миндлина [1]. Такая модель обычно применяется для пластин малой и средней толщины. В отличие от классической модели Кирхгоффа – Лява, описывающей пластины с малым отношением толщины к характерному размеру, модель Рейсснера – Миндлина позволяет рассматривать пластины средней толщины благодаря уходу от предположения о том, что волокна, перпендикулярные срединной плоскости пластин, сохраняют это свойство после приложения нагрузки.

Система уравнений равновесия для модели Рейсснера – Миндлина имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -\text{Div}(C\varepsilon(\theta)) = \gamma, \\ -\text{div}\gamma = g, \\ \gamma := \lambda t^2 (\nabla u - \theta), \end{cases} \quad \text{в области } \Omega, \quad (1)$$

где u – скалярное поле прогиба срединной плоскости; θ – векторное поле поворотов вектора нормали к срединной плоскости при деформировании; γ – векторное поле, соответствующее паре (u, θ) ; ε – тензор деформаций; t – толщина пластины; gt^3 – распределенная поперечная нагрузка; C – симметричный тензор четвертого ранга; Ω – плоская область, занимаемая пластиной;

$$\lambda = \frac{1}{2} Ek / (1 + \nu)$$

(E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, k – корректировочный коэффициент; во многих расчетах берется $k = 5/6$).

В настоящее время существует ряд известных коммерческих пакетов для проведения расчетов в рамках данной модели при помощи МКЭ. Поскольку программная реализация подобных продуктов, таких как ANSYS (популярный среди инженеров

вычислительный пакет), является закрытой, оказывается, как правило, невозможным узнать во всех деталях, каким образом производился необходимый расчет. В итоге трудно оценить величину ошибки, если не разработан соответствующий строгий математический аппарат или не реализована оценка погрешности, полученная с его помощью. Существенные отклонения от экспериментальных данных могут быть обусловлены и неправильно выбранной моделью, и ошибками при ее применении, и низким качеством расчета при вполне адекватной модели.

Таким образом, возникает необходимость получения и численного исследования апостериорной оценки точности приближенного решения, которая являлась бы гарантированной и надежной, то есть не допускала бы недооценки погрешности при практической реализации и не зависела бы от скрытых деталей процедуры вычисления.

Первый вариант такой оценки был получен в работе [2] на основе функционального подхода и модифицирован в работе [3]. Обзор последних результатов, касающихся ее численной реализации, содержится в работе [4]. Историю развития функционального подхода с 1996 года по настоящее время можно проследить по источникам, указанным в монографиях [5 – 7] и недавно опубликованных статьях [8, 9]. Обзоры других подходов в применении к рассматриваемой задаче можно найти, например, в статьях [10, 11] и цитируемой там литературе.

Общее представление подобных апостериорных оценок имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\| &\leq \\ &\leq M(\tilde{u}, D, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, c_1, c_2, \dots), \end{aligned} \quad (2)$$

где в левой части рассматривается норма отклонения неизвестного точного решения u от полученного приближенного решения $\tilde{u}$; она выбирается исходя из постановки задачи; в правой находится функционал M – мажоранта отклонения. Аргументами функционала являются приближенное решение $\tilde{u}$, параметры задачи D , набор постоянных $(c_1, c_2, \dots)$. Важно, что значение этих констант определяется свойствами задачи, но не свойствами разбиения. Наконец, $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots)$ представляет собой набор свободных элементов.

Функционал M должен удовлетворять естественному условию — давать нулевое значение тогда и только тогда, когда приближенное решение совпадает с точным решением.

В то же время знание не только величины глобальной ошибки приближенного решения, но также локального распределения ошибки на элементах разбиения представляется не менее полезным и важным. Оно позволяет выделить области с наибольшим отклонением приближенного решения от точного. Далее, вместо дробления всей сетки, производится необходимое улучшение лишь на тех элементах, где ошибка велика. Подобный подход называется адаптивным; он способствует сокращению вычислительных ресурсов, требуемых для получения решения необходимого качества.

Таким образом, полный цикл проведения расчета с использованием адаптивного подхода принимает следующий вид:

начальное разбиение области →
 получение решения →
 оценка глобальной ошибки
 (выход из цикла расчета
 при достижении требуемой
 точности) →
 определение областей
 с наибольшими локальными
 ошибками →
 дробление сетки
 в выделенных областях →
 расчет на новой сетке →
 получение более точного решения.

(3)

Для внедрения данного цикла в процесс решения реальных инженерных задач необходима уверенность в свойствах исследуемой оценки, а также определение набора параметров, при котором достигается надежный результат.

Ранее авторами данной статьи М.Е. Фроловым, а затем О.И. Чистяковой были выполнены две независимые реализации апостериорной оценки для пластин Рейсснера — Миндлина (см. обзор в работе [4]): на языке FORTRAN и в пакете MATLAB. Было проведено начальное исследование надежности результатов работы каждого из алгоритмов, дающих численную величину оценки. На данный момент необходимо расширить исследование поведения апостериорной

оценки путем рассмотрения большего числа примеров, чтобы оценить корректность использования данного инструмента, достоверность результатов и создать основу для развития метода.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ двух реализаций вычисления апостериорной оценки точности приближенного решения задачи об изгибе пластины Рейсснера — Миндлина. Анализ включает построение примеров, имеющих различные особенности, проведение расчетов для разных значений толщины и сравнение как величин оценки, так и сопутствующих вспомогательных параметров.

Математическая постановка задачи

Обратимся к системе уравнений, описывающей модель Рейсснера — Миндлина для линейно-упругих пластин толщины t . Постановка записывается в терминах скалярной функции $u = u(x)$ — прогиба срединной плоскости в точке x и векторной функции $\theta = \theta(x)$ — углов поворота вектора нормали к срединной плоскости. Срединная плоскость изначально занимает ограниченную связную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ , непрерывной по Липшицу.

Постановка задачи: Найти пару (u, θ) и соответствующее этой паре векторное поле $\gamma = \gamma(x)$, удовлетворяющие системе уравнений (1).

Решение ищется в обобщенном смысле. Считаем, что $g \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, тензор C симметричен, существует пара констант ξ_1 и ξ_2 такая, что выполняется двусторонняя оценка

$$\xi_1 |k|^2 \leq Ck : k \leq \xi_2 |k|^2$$

$\forall k \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{2 \times 2}, |k|^2 = k : k$, где $\mathbb{M}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ — пространство симметричных тензоров ранга 2 размерности 2.

В данном исследовании рассматриваются пластины из однородного изотропного материала, хотя это и не является принципиальным ограничением.

Рассмотрим границу Γ области Ω и представим ее в виде двух составляющих: $\Gamma_D, \Gamma_D \neq \emptyset$, на которой пластина жестко заделана, т. е. заданы условия на перемещение $u = 0$ и поворот $\theta = 0$, и $\Gamma_S = \Gamma \setminus \Gamma_D$, где пластина имеет свободные граничные условия (можно рассматривать и другие типы граничных условий).



Обобщенная постановка задачи об изгибе пластин Рейсснера – Миндлина:
Найти такую тройку $(u, \theta, \gamma) \in U \times \Theta \times Q$, где

$$\begin{cases} U = \{ \omega \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid \omega = 0 \text{ на } \Gamma_D \}, \\ \Theta = \{ \varphi \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_D \}, \\ Q = \mathbb{L}_2(\Omega) \times \mathbb{L}_2(\Omega), \end{cases}$$

которая удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \int_{\Omega} C\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \gamma \cdot \varphi d\Omega = 0, \quad \forall \varphi \in \Theta; \\ \int_{\Omega} \gamma \cdot \nabla \omega d\Omega = \\ = \int_{\Omega} g \omega d\Omega, \quad \forall \omega \in U; \\ \int_{\Omega} (\lambda^{-1} t^2 \gamma - (\nabla u - \theta)) \cdot \tau d\Omega = 0, \\ \forall \tau \in Q. \end{cases} \quad (4)$$

Функционал энергии в задаче имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J(u, \theta) = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} C\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda t^{-2} |\nabla u - \theta|^2 - g u \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Соответствующая задача минимизации ставится на пространстве

$$S := U \times \Theta.$$

Перейдем непосредственно к виду исследуемой апостериорной оценки. Пусть имеется пара конформных аппроксимаций $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ точного решения задачи (u, θ) в S , тогда векторное поле

$$\gamma = \lambda t^{-2} (\nabla u - \theta)$$

аппроксимируется в пространстве Q элементом

$$\tilde{\gamma} = \lambda t^{-2} (\nabla \tilde{u} - \tilde{\theta}).$$

Введем в рассмотрение тройку отклонений каждой из компонент решения:

$$e_{\tilde{u}} = u - \tilde{u},$$

$$e_{\tilde{\theta}} = \theta - \tilde{\theta},$$

$$e_{\tilde{\gamma}} = \gamma - \tilde{\gamma}.$$

Введем квадрат ошибки, выраженной через разность значений функционала энергии:

$$\tilde{\varepsilon}^2 = J(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - J(u, \theta).$$

Показано (см. работу [2]), что $\forall (\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in S$ имеет место соотношение

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} (\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1} t^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega}^2),$$

где

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 := \int_{\Omega} C\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) d\Omega,$$

$$\|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega}^2 := \int_{\Omega} |e_{\tilde{\gamma}}|^2 d\Omega.$$

Далее введем в рассмотрение необходимые для построения апостериорной оценки свободные элементы: векторное поле $\tilde{y}$ и несимметричный тензор $\tilde{k}$, представленный в виде его составляющих $\tilde{k} = [\tilde{k}^1, \tilde{k}^2]$. Они выбираются так, что

$$\tilde{y}, \tilde{k}^1, \tilde{k}^2 \in \mathbb{H}(\Omega, \text{div}) :=$$

$$:= \{ y \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \text{div} y \in \mathbb{L}_2(\Omega) \}.$$

После тождественных преобразований и применения известных неравенств, представленных в работе [3], итоговое неравенство принимает вид:

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1} t^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega}^2 \leq \hat{a}^2 + \lambda^{-1} t^2 \hat{b}^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a} = & \|C^{-1} \text{sym}(\tilde{k}) - \varepsilon(\tilde{\theta})\| + \\ & + c_1 \|\text{skew}(\tilde{k})\|_{\Omega} + c_2 c_3 (|\Omega| \|g + \text{div} \tilde{y}\|_{\Omega}^2 + \\ & + |\Gamma_S| \|\tilde{y} \cdot n\|_{\Gamma_S}^2)^{1/2} + \\ & + c_4 (|\Omega| \|\tilde{y} + [\text{div} \tilde{k}^1, \text{div} \tilde{k}^2]\|_{\Omega}^2 + \\ & + |\Gamma_S| \|[\tilde{k}^1 \cdot n, \tilde{k}^2 \cdot n]\|_{\Gamma_S}^2)^{1/2}, \\ \hat{b} = & \|\tilde{y} - \tilde{\gamma}\|_{\Omega} + \\ & + c_3 (|\Omega| \|g + \text{div} \tilde{y}\|_{\Omega}^2 + \\ & + |\Gamma_S| \|\tilde{y} \cdot n\|_{\Gamma_S}^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Константы в последней строке зависят только от геометрии области Ω , граничных условий и свойств материала, и возникают из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi\|_{\Omega}^2 &\leq c_1^2 \|\varphi\|^2, \\ \|\varphi\|_{\Omega}^2 &\leq c_2^2 \|\varphi\|^2, \\ \frac{1}{|\Omega|} \|\omega\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{|\Gamma_s|} \|\omega\|_{\Gamma_s}^2 &\leq \\ &\leq c_3^2 \|\nabla \omega\|_{\Omega}^2, \\ \frac{1}{|\Omega|} \|\varphi\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{|\Gamma_s|} \|\varphi\|_{\Gamma_s}^2 &\leq \\ &\leq c_4^2 \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Методология реализации вычислительного эксперимента

Рассмотрим детально шаги адаптивного алгоритма (3), который обычно используется для более эффективного уточнения приближенного решения.

На первом этапе задаются геометрия исследуемой области, толщина пластины, параметры материала, строится начальное разбиение. Далее производится расчет в подходящем вычислительном пакете, например ANSYS.

После получения значений перемещения и поворотов в узлах сетки можно переходить к следующему блоку – применению исследуемой апостериорной оценки и определению величины глобальной ошибки. Она на всем решении определяется как корень из суммы квадратов локальных ошибок на каждом элементе, именуемых индикаторами. Если значение глобальной ошибки неудовлетворительно в рамках поставленной задачи, то рассматривается распределение индикаторов на элементах разбиения.

При наличии картины распределения локальных ошибок появляется возможность выделить области с наибольшим значением погрешности. Существует несколько стратегий выделения элементов (см., например, работы [12, 13]); они сводятся к определению порога значения индикатора, при котором глобально не допускается выделения слишком малого или слишком большого числа элементов.

Финальной частью каждого цикла адаптивного алгоритма выступает дробление сетки (а в общем случае – и ее укруп-

нение) в выбранных областях. Задача не является тривиальной и второстепенной, поскольку качество сетки влияет на точность расчета. Необходимо сохранить конформность сетки; углы сетки должны лежать в определенном диапазоне – наличие слишком малых и слишком больших углов негативно влияет на точность расчета; при наличии симметрии также крайне желательно сохранить ее характер. Варианты алгоритмов, решающих данную проблему для четырехугольных элементов рассмотрены, в частности, в работе [14].

Далее производится перерасчет решения задачи на новом разбиении. Данный адаптивный итерационный алгоритм подразумевает, что результат, полученный на измененной сетке, снова может быть оценен с точки зрения точности и распределения погрешности по расчетной области

Численные результаты и их обсуждение

В данном исследовании сравнительный анализ проводился на четырех примерах, проявляющих различные вычислительные особенности: круглая пластина, косоугольная пластина, квадратная пластина с крупным квадратным отверстием, квадратная пластина с малым круглым отверстием.

Каждый рассмотренный случай обладает своим набором особенностей, которые могут выявить несовершенства реализаций. Например, квадратная пластина с большим квадратным отверстием имеет области концентраций напряжения вблизи вершин отверстия. Для круглой пластины известно аналитическое решение. Во всех примерах рассматривается равномерно распределенная нагрузка. Косоугольная пластина также встречается в литературе по апостериорным оценкам [15, 4]. В нашем исследовании она использовалась для демонстрации поведения ошибки при наложении жестких граничных условий только на верхнюю и нижнюю грани (две оставшиеся свободны), в отличие от других примеров, где рассматривается заделка по всей границе области.

Перейдем к описанию двух примеров. Отметим, что хотя объем статьи не позволяет включить результаты всех проведенных исследований, выводы, сделанные в итоге, ими полностью подтверждаются.

Создание геометрии области, наложение граничных условий, построение сетки и непосредственное решение производились



в пакете ANSYS Mechanical (APDL). Для проверки также использовался решатель, реализованный в MATLAB.

Для анализа эффективности оценки вводится понятие индекса эффективности I_{eff} , общепринятое в теории апостериорного контроля точности и определяемое как отношение мажоранты к норме отклонения приближенного решения от точного,

$$I_{eff} = M / \|u - \tilde{u}\|.$$

Таким образом, I_{eff} показывает степень переоценки ошибки. Соответственно, чем его значение ближе к единице справа, тем лучше. Если аналитическое решение задачи неизвестно, за точное решение u принимается приближенное решение, вычисленное на очень мелкой сетке. Этот прием всегда чуть завышает значение I_{eff} и в действительности оценивание происходит даже лучше, чем мы можем это показать.

Реализации сопоставляются по наиболее важным параметрам. Сначала рассматриваются константы c_1, c_2, c_3, c_4 . Для вычисления c_1 дополнительно рассматривается константа в неравенстве Корна c_k . На важную роль данной константы в апостериорных оценках для задач теории упругости указывается, в частности, в монографии [6]. Тогда

$$c_1 = c_k \sqrt{12(1+\nu)} / E$$

(для задач, где $\Gamma_s = \emptyset$, $c_k = \sqrt{2}$).

Далее сравнивается ошибка e – корень квадратный из левой части оценки (6); мажоранта M – корень квадратный из правой части оценки (6) и ее составляющие D, S, R , где

$$\begin{aligned} D &= \| \| C^{-1} \text{sym}(\tilde{\mathbf{k}}) - \varepsilon(\tilde{\theta}) \| \| + \\ &\quad + \lambda^{-1/2} t \| \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\gamma} \|_{\Omega}, \\ S &= c_1 \| \text{skew}(\tilde{\mathbf{k}}) \|_{\Omega}, \\ R &= c_2 c_3 \left(\| \Omega \| \| g + \text{div} \tilde{\mathbf{y}} \|_{\Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + | \Gamma_s | \| \tilde{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} \|_{\Gamma_s}^2 \right)^{1/2} + \\ &\quad + \lambda^{-1/2} t c_3 \left(\| \Omega \| \| g + \text{div} \tilde{\mathbf{y}} \|_{\Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + | \Gamma_s | \| \tilde{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} \|_{\Gamma_s}^2 \right)^{1/2} + \\ &\quad + c_4 \left(\| \Omega \| \| \tilde{\mathbf{y}} + [\text{div} \tilde{\mathbf{k}}^1, \text{div} \tilde{\mathbf{k}}^2] \|_{\Omega}^2 + \right. \\ &\quad \left. + | \Gamma_s | \| [\tilde{\mathbf{k}}^1 \cdot \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{k}}^2 \cdot \mathbf{n}] \|_{\Gamma_s}^2 \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

последняя сравниваемая величина – индекс эффективности I_{eff} .

Степень дробления сетки обозначается как R_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, где нулевой индекс соответствует начальному разбиению.

Для вычисления мажоранты M первоначально запускается процесс приближенного расчета констант (7). Их вычисление происходит один раз для каждого примера и далее может использоваться при получении распределения ошибки на всех сетках и толщинах. Вычисление констант носит асимптотический характер относительно дробления сетки R_i , а удовлетворительные значения получаются даже на относительно грубых сетках, что важно для перспектив практического применения метода.

Вспомогательный второй блок включает в себя поиск эталонного решения на мелких сетках и вычисление на его основе значения функционала энергии. Этот расчет производится только в целях постановки вычислительного эксперимента и в реальных инженерных задачах не требуется. Он просто заменяется расчетом функциональной апостериорной оценки на текущей сетке, что в вычислительном плане несравнимо менее трудоемкая задача.

Заключительный третий блок отвечает за непосредственное вычисление мажоранты M , где на вход поступают определенные c_1, c_2, c_3, c_4 , которые несколько переоцениваются для надежности.

Приведем полученные результаты сравнения на примере круглой пластины и квадратной пластины с крупным квадратным отверстием.

Пример 1. Круглая пластина. Начнем с классического примера (см. ANSYS Verification Manual), для которого известно аналитическое значение прогиба в центре пластины.

На рис. 1 представлены результаты расчета деформации круглой пластины средней толщины t в пакете ANSYS на сетке R_1 . Параметры модели приведены в табл. 1.

Табл. 2 содержит значения вычисленных вспомогательных констант и позволяет сравнить результат работы обеих реализаций на различных сетках. Как было указано выше, наблюдается сеточная сходимость значений констант при уменьшении размеров элементов сетки. В силу нулевых граничных условий, точное значение константы c_k известно и равно $\sqrt{2}$. Для дальнейших расчетов используются константы,

полученные на сетке R_2 , для надежности оцененные сверху с запасом (см. графу R_2^*).

Табл. 3 содержит основные расчетные результаты для сравнения, а именно мажоранту M и ее составляющие. Обратимся к верхней части таблицы, т. е. к случаю, когда $Rad/t = 250$. Видно, что определяющим является слагаемое D , так как в эту компоненту входят те части оценки, которые соответствуют слагаемым ошибки. Компоненты S и R должны быть близкими к нулю на полях, близких к точным, что и наблюдается. В шестой и двенадцатой строках таблицы приводятся значения I_{eff} позволяющие оценить степень переоценки для обеих реализаций. Видно, что значения, вычисленные по двум алгоритмам (в шестой строке $I_{eff} = 1,60$), совпали, а само это значение оказывается удовлетворительным, т. е. критической переоценки (на порядок или в несколько раз) не наблюдается.

Рис. 2 иллюстрирует распределение локальных индикаторов ошибки в области круглой пластины на сетке R_2 . Индикаторы идентичны и указывают на то, что ошибка распределена не только в зоне максимального прогиба пластины, но и вблизи границы области. Это соответствует структуре энергетической нормы в данной задаче (эта норма определена через градиенты, которые у края рассчитываются с меньшей точностью). Отсутствие полной симметрии связано с особенностями построения сетки.

Далее приведем расчетные результаты для тонкой круглой пластины толщиной $t = 0,00005$ м ($Rad/t = 5000$), где параметры материала и тип граничных условий остались прежними (см. табл. 1). Это позволяет оценить эффективность метода в зависимости от ключевого в данном случае параметра — толщины пластины.

На рис. 3 представлено приближенное решение. Видно, что максимальное значение прогиба срединной плоскости увеличилось, по сравнению с таковым на рис. 1. Изменение толщины пластины не влияет на геометрию области, следовательно, и на результат вычисления констант (7). Из сравнения значений в шестой и двенадцатой строках табл. 3 можно также заключить, что для тонкой пластины значение индекса I_{eff} снизилось с 1,60 до 1,42, т. е. приблизилось к оптимальному — единице.

Расчетные распределения локальных индикаторов ошибки по области круглой пластины малой толщины $t = 0,00005$ м

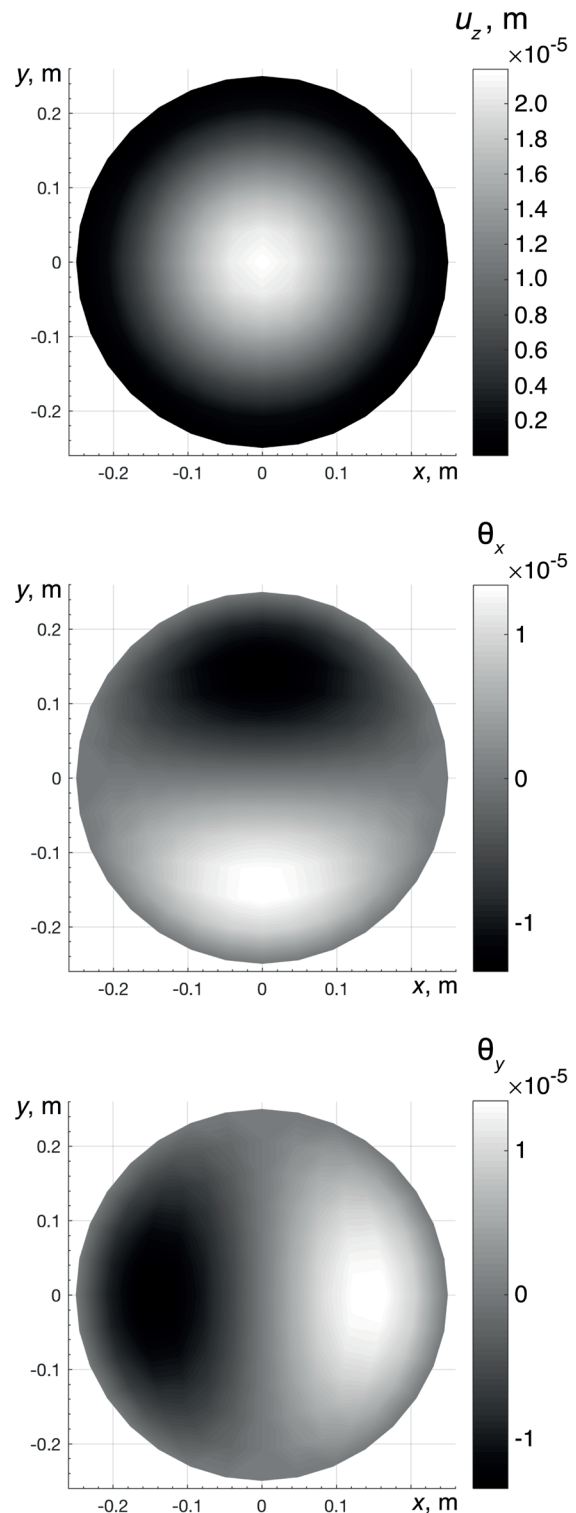


Рис. 1. Результаты расчета деформации круглой пластины средней толщины в пакете ANSYS на сетке R_1 ;

u_z — распределение прогиба срединной плоскости; θ_x , θ_y — распределения полей поворота вектора нормали к ней. $Rad/t = 250$ (см. данные табл. 1)

Таблица 1

Описание модели круглой пластины

Параметр	Значение	Особенность
Модуль Юнга E , Н/м ²	$2 \cdot 10^{11}$	1. Пластина жестко закреплена по всей границе 2. Построенная на области сетка имеет структуру общего вида
Коэффициент Пуассона ν	0,3	
Нагрузка, Н/м ²	6585,175	
Радиус Rad , м	0,25	
Толщина t , м	10^{-3} ; $5 \cdot 10^{-5}$	

Таблица 2

Результаты вычисления констант для круглой пластины в реализациях FORTRAN и MATLAB

Сетка	Число элементов	Значение константы				
		c_k	c_1	c_2	c_3	c_4
R_0	32	<u>1,39</u> 1,42	<u>1,23e – 05</u> 1,25e – 05	<u>9,15e – 07</u> 9,01e – 07	0,23	<u>2,09e – 06</u> 2,06e – 06
R_1	128	<u>1,41</u> 1,42	1,25e – 05	<u>9,36e – 07</u> 9,32e – 07		<u>2,12e – 06</u> 2,11e – 06
R_2	512	1,42		<u>9,42e – 07</u> 9,41e – 07		2,13e – 06
R_2^*	512	–	1,30e – 05	9,50e – 07	0,30	2,20e – 06

Примечания. 1. Верхние числа в клетках таблицы относятся к реализации FORTRAN, нижние – к MATLAB; при совпадении данных здесь и далее указывается одно число. 2. Данные для сетки, помеченной звездочкой, относятся к оценке сверху с запасом (для надежности). 3. $Rad/t = 250$.

Таблица 3

Контрольные значения неравенства (6) для круглых пластин средней и малой толщины в двух реализациях на сетке R_2

Составляющая мажоранты (и мажоранта)	Контрольное значение	
	FORTRAN	MATLAB
<i>Rad/t = 250</i>		
<i>e</i>	0,712e + 02	
<i>M</i>	0,114e + 03	
<i>D</i>	0,111e + 03	
<i>S</i>	0,271e + 01	0,272e + 01
<i>R</i>	0,723e + 00	
<i>I_{eff}</i>	1,60	
<i>Rad/t = 5000</i>		
<i>e</i>	0,114e + 12	
<i>M</i>	0,162e + 12	
<i>D</i>	0,162e + 12	
<i>S</i>	0,217e + 08	
<i>R</i>	0,568e + 07	
<i>I_{eff}</i>	1,42	

($Rad/t = 5000$) на сетке R_2 имеют вид, близкий представленному на рис. 2, поэтому в данной статье не приведены. На основе полученных данных можно сделать вывод о корректности работы алгоритмов для достаточно широкого диапазона значений толщины, что подтверждается и другими выполненными исследованиями.

Пример 2. Квадратная пластина с крупным квадратным отверстием. Следующий пример (табл. 4) был рассмотрен для того, чтобы проследить поведение оценки в областях концентрации напряжений. Естественно, что при данной конфигурации пластины подобные области образуются в районе вершин внутреннего отверстия.

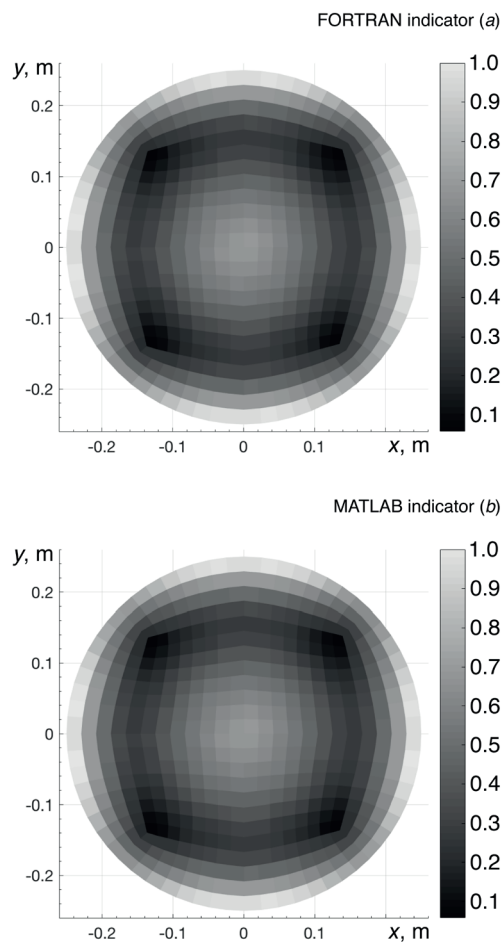


Рис. 2. Расчетные распределения локального индикатора ошибки на элементах области круглой пластины в реализациях FORTRAN (a) и MATLAB (b) на сетке R_2 ; $Rad/t = 250$ (см. Пример 1)

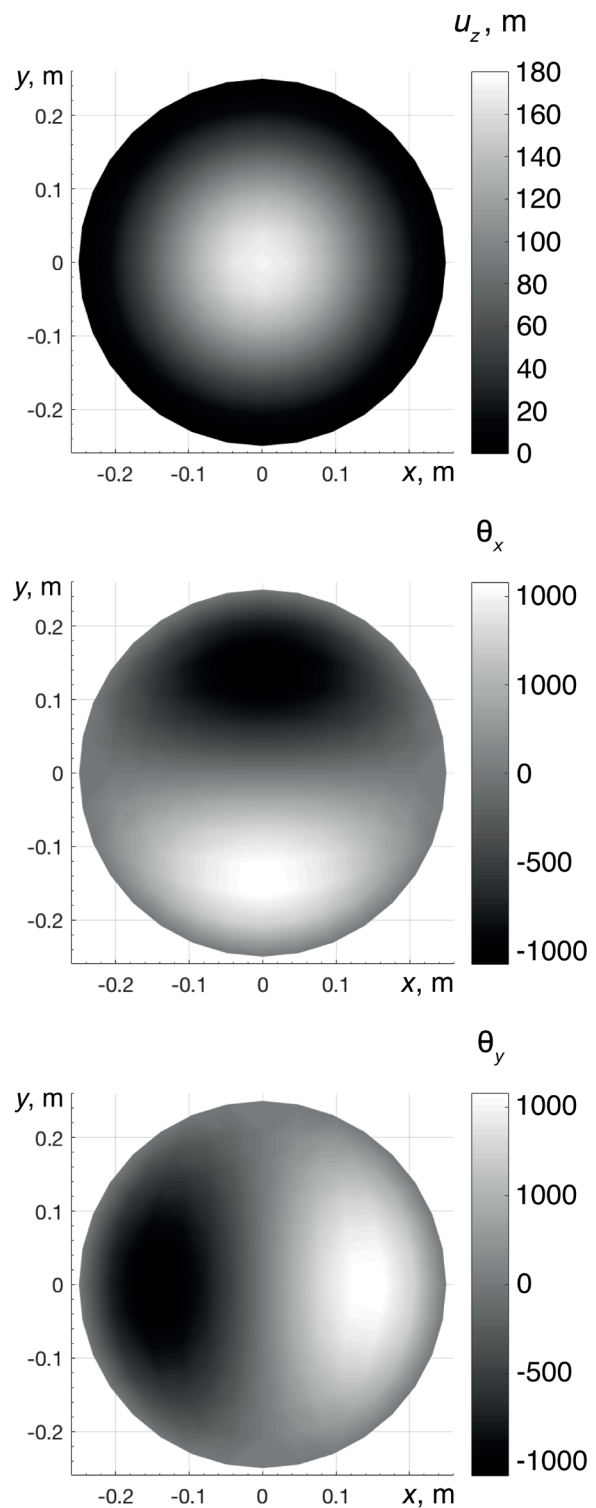


Рис. 3. Расчетные результаты, аналогичные представленным на рис. 1, но для круглой пластины малой толщины; $Rad/t = 5000$ (см. табл. 1).

Таблица 4

**Описание модели квадратной пластины
с крупным квадратным отверстием**

Параметр	Значение	Особенность
Модуль Юнга E , Н/м ²	$2 \cdot 10^9$	1. Пластина жестко закреплена по внешней и внутренней границе 2. Элементы сетки имеют форму квадрата 3. Решение имеет зоны концентрации напряжения
Коэффициент Пуассона ν	0,3	
Нагрузка, Н/м ²	6585,175	
Сторона квадрата, м внешняя A внутренняя a	$12 \cdot 10^{-3}$ $4 \cdot 10^{-3}$	
Толщина t , м	10^{-4}	

Таблица 5

**Результаты вычисления констант в двух реализациях для
квадратной пластины с крупным квадратным отверстием**

Сетка	Число элементов	Реализация	Значение константы				
			c_k	c_1	c_2	c_3	c_4
R_1	512	FORTAN	1,41	1,25e – 04	1,46e – 07	0,12	1,29e – 05
		MATLAB	1,42				1,28e – 05
R_1^*			–	1,30e – 04	1,50e – 07	0,15	1,30e – 05

Примечания. 1. Данные для сетки, помеченной звездочкой, относятся к оценке сверху с запасом (для надежности). 2. Геометрический параметр $A/t = 120$.

Таблица 6

**Контрольные значения неравенства (6) в двух
реализациях на сетке R_2 для квадратной
пластины с крупным квадратным отверстием**

Составляющая мажоранты (и мажоранта)	Контрольное значение	
	FORTAN	MATLAB
e	0,313e + 04	
M	0,529e + 04	0,534e + 04
D	0,519e + 04	0,515e + 04
S	0,413e + 02	0,348e + 02
R	0,567e + 02	0,161e + 03
I_{eff}	1,69	1,70

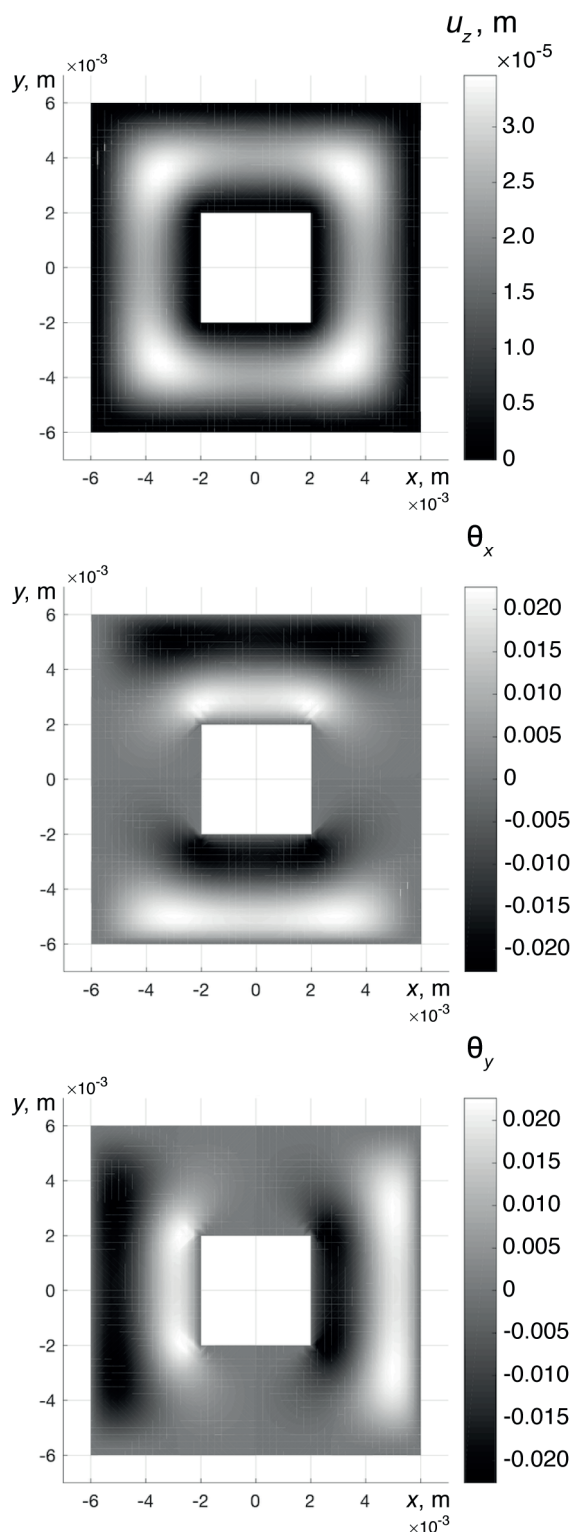


Рис. 4. Результаты расчета деформации квадратной пластины с крупным квадратным отверстием; использован пакет ANSYS на сетке R_1 .

Обозначения величин те же, что на рис. 1

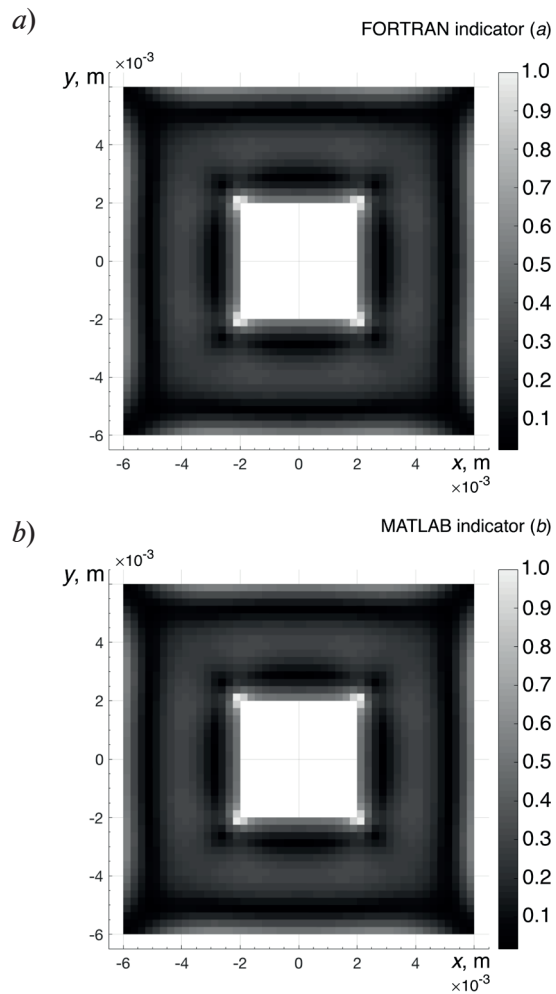


Рис. 5. Расчетные распределения локального индикатора ошибки на элементах области в реализациях FORTRAN (a) и MATLAB (b) на сетке R_2 ; $A/t = 120$ (см. Пример 2)

На рис. 4 изображены результаты расчета деформации квадратной пластины с крупным квадратным отверстием. Расчет выполнен в пакете ANSYS на сетке R_1 . Представлены распределения величин u_z , θ_x и θ_y по области пластины. Как и в Примере 1, u_z — прогиб срединной плоскости; θ_x , θ_y — распределения полей поворота.

Табл. 5 содержит значения вычисленных вспомогательных констант. Для дальнейших расчетов используются константы, полученные на сетке R_1 , которые берутся с запасом (данные в строке R_1^*).

Рассмотрим результаты сравнения контрольных значений оценки на сетке R_2 . Из данных табл. 6 видно, что значения I_{eff} для двух реализаций практически совпали, су-



щественной переоценки не наблюдается.

Обратимся к данным, изображенным на рис. 5. Результаты реализаций совпадают, распределения индикатора практически идентичны. Зоны с минимальной ошибкой располагаются в углах внешней границы. В силу граничных условий, в этих местах узлы имеют минимальное перемещение. Зоны с максимальной ошибкой расположены в областях, где напряжения при приложении нагрузки имеют сингулярность.

Заключение

В рамках представленного исследования, для пластин Рейсснера – Миндлина было проведено сравнение результатов, полученных при помощи существующих на данный момент реализаций алгоритмов вычисления функциональной апостериорной оценки [3]. Проведен вычислительный эксперимент в применении к моделям пластин различных геометрических конфигураций области, значений толщины, параметров

материалов и структуры сетки.

На основе полученных результатов сделаны следующие выводы.

1. Для всех примеров с краевыми условиями жесткой заделки по всей границе, обе реализации дали близкие значения индекса эффективности; при этом величина переоценки ошибки удовлетворительная.

2. Распределения индикатора ошибки по расчетной области оказались практически идентичными для обеих реализаций, что также является подтверждением их корректности.

В дальнейшем представляет интерес применить подход к адаптивному решению прикладных задач с использованием ресурса суперкомпьютерного центра «Политехнический».

Работа М.Е. Фролова и О.И. Чистяковой выполнялась при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МД-1071.2017.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Falk R.S.** Finite elements for the Reissner – Mindlin plate // *Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications*. D. Boffi, L. Gastaldi (Eds). Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. Pp. 195–232.
2. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Об оценке отклонений от точного решения задачи о пластине Рейсснера – Миндлина // *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Записки научных семинаров ПОМИ*. СПб, 2004. Т. 310. С. 145–157.
3. **Фролов М.Е.** Надежный апостериорный контроль точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера – Миндлина // *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой международной конференции*. Казань, 2014. С. 610–615.
4. **Frolov M., Chistiakova O.** Adaptive algorithm based on functional-type a posteriori error estimate for Reissner-Mindlin plates // *Advanced Finite Element Methods with Applications. Selected papers from the 30th Chemnitz Finite Element Symposium, Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE)*. 2019. Vol. 128. Ch. 7.
5. **Neittaanmäki P., Repin S.** Reliable methods for computer simulation: Error control and a posteriori estimates. Amsterdam: Elsevier, 2004. 304 p.
6. **Repin S.** A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: de Gruyter, 2008. 316 p.
7. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.** Accuracy verification methods: Theory and algorithms. Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014. XIII+355 p.
8. **Langer U., Repin S., Samrowski T.** A posteriori estimates for a coupled piezoelectric model // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 32. No. 4. Pp. 259–266.
9. **Repin S., Valdman J.** Error identities for variational problems with obstacles // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 98. No. 4. Pp. 635–658.
10. **Bösing P.R., Carstensen C.** Discontinuous Galerkin with weakly over-penalized techniques for Reissner – Mindlin plates // *Journal of Scientific Computing*. 2015. Vol. 64. No. 2. Pp. 401–424.
11. **Kumar B., Somireddy M., Rajagopal A.** Adaptive analysis of plates and laminates using natural neighbor Galerkin meshless method // *Engineering with Computers*. 2018. Vol. 35. No. 1. Pp. 201–214.
12. **Dörfler W.** A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1996. Vol. 33. No. 3. Pp. 1106–1124.

13. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. John Wiley & Sons, 1996. 127 p.

14. **Караваяев А.С., Копысов С.П.** Перестроение неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Механика.

Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 62–78.

15. **Carstensen C., Xie X., Yu G., Zhou T.** A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner – Mindlin plates // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2011. Vol. 200. No. 9–12. Pp. 1161–1175.

Статья поступила в редакцию 29.12.2018, принята к публикации 02.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КИСЕЛЕВ Кирилл Владимирович — магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
kvladimirovich10@gmail.com

ФРОЛОВ Максим Евгеньевич — доктор физико-математических наук, директор Института прикладной математики и механики, заведующий кафедрой прикладной математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
frolov_me@spbstu.ru

ЧИСТЯКОВА Ольга Игоревна — аспирантка кафедры прикладной математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Chistiakova.Olga@gmail.com

REFERENCES

[1] **R.S. Falk**, Finite elements for the Reissner – Mindlin plate, Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications, Springer, Berlin, Heidelberg (2008) 195–232.

[2] **S.I. Repin, M.E. Frolov**, Estimation of deviations from the exact solution for the Reissner – Mindlin plate problem, Journal of Mathematical Sciences. 132 (3) (2006) 331–338.

[3] **M.E. Frolov**, Reliable a posteriori error control for solutions to problems of Reissner – Mindlin plates bending, Proceedings of 10th International Conference Mesh methods for boundary-value problems and applications, Kazan University Publishing House, Kazan, Russia (2014) 610–615.

[4] **M. Frolov, O. Chistiakova**, Adaptive algorithm based on functional-type a posteriori error estimate for Reissner-Mindlin plates // Advanced Finite Element Methods with Applications. Selected papers from the 30th Chemnitz Finite Element Symposium, Lecture

Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE). 128, Ch. 7 (2019).

[5] **P. Neittaanmäki, S. Repin**, Reliable methods for computer simulation: Error control and a posteriori estimates, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[6] **S. Repin**, A posteriori estimates for partial differential equations, de Gruyter, Berlin, 2008.

[7] **O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin**, Accuracy verification methods: Theory and algorithms, Springer Science+Business Media Dordrecht, 2014.

[8] **U. Langer, S. Repin, T. Samrowski**, A posteriori estimates for a coupled piezoelectric model, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 32 (4) (2017) 259–266.

[9] **S. Repin, J. Valdman**, Error identities for variational problems with obstacles, ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 98 (4) (2018) 635–658.



- [10] **P.R. Busing, C. Carstensen**, Discontinuous Galerkin with weakly over-penalized techniques for Reissner – Mindlin plates, *Journal of Scientific Computing*. 64 (2) (2015) 401–424.
- [11] **B. Kumar, M. Somireddy, A. Rajagopal**, Adaptive analysis of plates and laminates using natural neighbor Galerkin meshless method, *Engineering with Computers*. 35 (1) (2018) 201–214.
- [12] **W. Dörfler**, A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 33 (3) (1996) 1106–1124.
- [13] **R. Verfürth**, A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. John Wiley & Sons, 1996.
- [14] **A.S. Karavaev, S.P. Kopysov**, A refinement of unstructured quadrilateral and mixed meshes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. (4) (2013) 62–78.
- [15] **C. Carstensen, X. Xie, G. Yu, T. Zhou**, A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner–Mindlin plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 200 (9–12) (2011) 1161–1175.

Received 29.12.2018, accepted 02.02.2019.

THE AUTHORS

KISELEV Kirill V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
kvladimirovich10@gmail.com

FROLOV Maxim E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
frolov_me@spbstu.ru

CHISTIAKOVA Olga I.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
Chistiakova.Olga@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.12112

УДК 531.391+681.5.01

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ

А.В. Федотов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представленная статья продолжает работы автора, в которых рассматривалась задача об управлении вынужденными изгибными колебаниями металлической балки с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. При этом все результаты управления были получены экспериментально. Однако для того, чтобы процесс проектирования систем управления был наиболее эффективным, необходима разработка численной модели, позволяющей получать результаты для разных вариантов таких систем, что и является задачей данной работы. В данном исследовании численно на основе конечно-элементной модели объекта воспроизводятся основные экспериментальные результаты, а также проектируются более эффективные модальные системы управления, приводящие к большему снижению амплитуды резонансных колебаний балки, по сравнению с системами, рассмотренными ранее в эксперименте.

Ключевые слова: управление колебаниями, мехатроника, модальное управление, пьезоэлемент, конечно-элементная модель

Ссылка при цитировании: Федотов А.В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155. DOI: 10.18721/JPM.12112

THE DAMPING OF THE DISTRIBUTED SYSTEM VIBRATIONS USING PIEZOELECTRIC TRANSDUCERS: SIMULATION

A.V. Fedotov

Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS,
St. Petersburg, Russian Federation

The present paper continues the author's studies where the problem of the control of forced bending vibrations of a metal beam using piezoelectric sensors and actuators has been investigated. In those studies, all the control results were obtained experimentally. However, in order to make the design of the control systems the most effective, it was necessary to develop a numerical model, which would allow one to get the results for different variants of such systems, and that was the objective of the present study. In this study, the main experimental data were reproduced numerically on a basis of the finite element model of the object. In addition, new modal control systems were designed, providing a more efficient reduction of the amplitude of resonance vibrations of a beam compared to the systems considered experimentally.

Keywords: active vibration control, mechatronics, modal control, piezoelectric transducer, finite element model

Citation: A.V. Fedotov, The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 142–155. DOI: 10.18721/JPM.12112



Введение

Сложность управления колебаниями распределенных механических систем состоит в том, что такие системы имеют бесконечное количество форм колебаний, поэтому они не являются полностью управляемыми и наблюдаемыми. Однако на практике для рассмотрения динамики таких систем можно, как правило, ограничиться некоторым конечным набором собственных форм объекта. В работе [1] было экспериментально показано, что в таких случаях большую эффективность, по сравнению с локальным управлением, имеет модальное, причем по тем формам, которые преимущественно задействованы в работе рассматриваемой конструкции.

Модальный подход к управлению колебаниями упругих систем был впервые сформулирован в статье [2], а развитие данного подхода представлено в монографии [3]. Для отслеживания и регулирования отдельных форм колебаний упругого объекта в модальной системе управления могут использоваться как распределенные сенсоры и актуаторы в качестве модальных фильтров [4, 5], так и массивы дискретных элементов управления [6 – 8]. В последнем случае возникает проблема идентификации объекта управления, которая обычно решается либо с помощью конечно-элементного (КЭ) моделирования объекта [9 – 11], либо аналитически [12, 13]. Экспериментальная процедура идентификации объекта с целью создания модальной системы управления предложена нами в статье [14]. В задачах управления колебаниями распределенных систем широко применяются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы, которые просты в использовании и обладают высокими эксплуатационными характеристиками.

Настоящая работа является логическим продолжением экспериментального исследования, изложенного в статьях [1, 14]. В данных публикациях подробно описан эксперимент по созданию систем управления, снижающих вынужденные колебания консольно закрепленной металлической балки. В полученных системах управления используется набор дискретных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. В рамках эксперимента были созданы как локальные системы, так и модальная система управления; при этом самой эффективной из рассмотренных оказалась именно модальная.

Целью данной работы является числен-

ное воспроизведение основных экспериментальных результатов, а также создание более эффективных систем управления, по сравнению с системами, полученными в рамках эксперимента.

В первой части статьи рассматривается постановка экспериментального исследования по управлению вынужденными изгибными колебаниями балки; далее описываются результаты КЭ-моделирования объекта управления, которые сравниваются с результатами эксперимента. Затем излагаются теоретические основы модального управления колебаниями распределенной механической системы, а также выводятся критерии устойчивости замкнутой системы с двумя контурами обратной связи. Наконец, в заключительном разделе статьи рассматривается работа различных систем управления, снижающих амплитуду резонансных колебаний балки.

Постановка эксперимента

Постановка, процедура проведения и результаты рассматриваемого здесь экспериментального исследования подробно изложены в статьях [1, 14].

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1, *а*. В качестве объекта управления выбрана алюминиевая балка 1 длиной 70 см с прямоугольным сечением 3×35 мм, закрепленная в вертикальном положении в одной точке на расстоянии 10 см от нижнего конца. Данная балка испытывает вынужденные изгибные колебания, вызванные продольной вибрацией пьезоэлектрического стержня-толкателя 2, входящего в состав конструкции закрепления, соединяющей балку с неподвижным основанием 3.

Основное назначение созданной экспериментальной установки заключалось в том, чтобы отработать модальный подход к управлению вынужденными колебаниями балки. Для этого проектировалась система управления с двумя контурами, включающая два актуатора и два сенсора. Пьезоэлектрические актуаторы 4 и сенсоры 5 расположены попарно по обеим сторонам балки. На рис. 1, *б* показан фрагмент КЭ модели балки, включающий конструкцию закрепления с пьезотолкателем 2 и один из актуаторов 4. В отличие от упрощенной схемы, представленной на рис. 1, *а*, в конечно-элементной модели присутствует полная конструкция закрепления балки,

используемая в экспериментальной установке. Конструкция включает (помимо пьезотолкателя) стальную пластину и болты, воспринимающие вес балки и освобождающие таким образом пьезотолкатель от поперечной нагрузки.

Сигналы, измеряемые сенсорами, преобразуются в управляющие, подаваемые на актуаторы, с помощью дискретного контроллера 6. Задача системы управления состоит в том, чтобы снижать амплитуду вынужденных резонансных колебаний балки с первой и со второй собственными частотами. Таким образом, модальное управление ведется по первой и по второй формам изгибных колебаний балки. Данные формы представлены на рис. 1,с. Качество подавления вынужденных колебаний определяется по показаниям лазерного виброметра, измеряющего скорость колебаний точки на верхнем конце балки. Амплитуда колебаний данной точки максимальна среди всех точек балки как для первой, так и для второй формы.

Актуаторы и сенсоры представляют собой одинаковые прямоугольные пластинки из пьезоматериала размерами $50 \times 30 \times 0,5$ мм, покрытые с двух сторон электрода-

ми и помещенные внутрь тонкой изоляции. Работа таких пьезоэлементов рассмотрена в книге [15]. При приложении к электродам актуатора электрического напряжения слой пьезоматериала растягивается или сжимается, приводя к изгибной деформации того участка балки, к которому приклеен актуатор. Таким образом, действие актуатора на балку эквивалентно приложению к двум сечениям балки (концевым сечениям актуатора) пары противоположных изгибающих моментов. Работа пьезосенсора аналогична: при изгибе участка балки, к которому прикреплен сенсор, материал сенсора растягивается или сжимается в продольном направлении, что приводит к появлению на электродах сенсора разности потенциалов, измеряемой в качестве сигнала сенсора. Для максимальной эффективности управления первой и второй формами изгибных колебаний балки сенсоры и актуаторы расположены в тех местах балки, где данные формы имеют наибольшую кривизну:

$$110,5 \leq x \leq 160,5 \text{ мм}$$

для первой пары сенсор-актуатор и

$$377,5 \leq x \leq 427,5 \text{ мм}$$

для второй пары (координата x отсчитывается от нижнего конца балки).

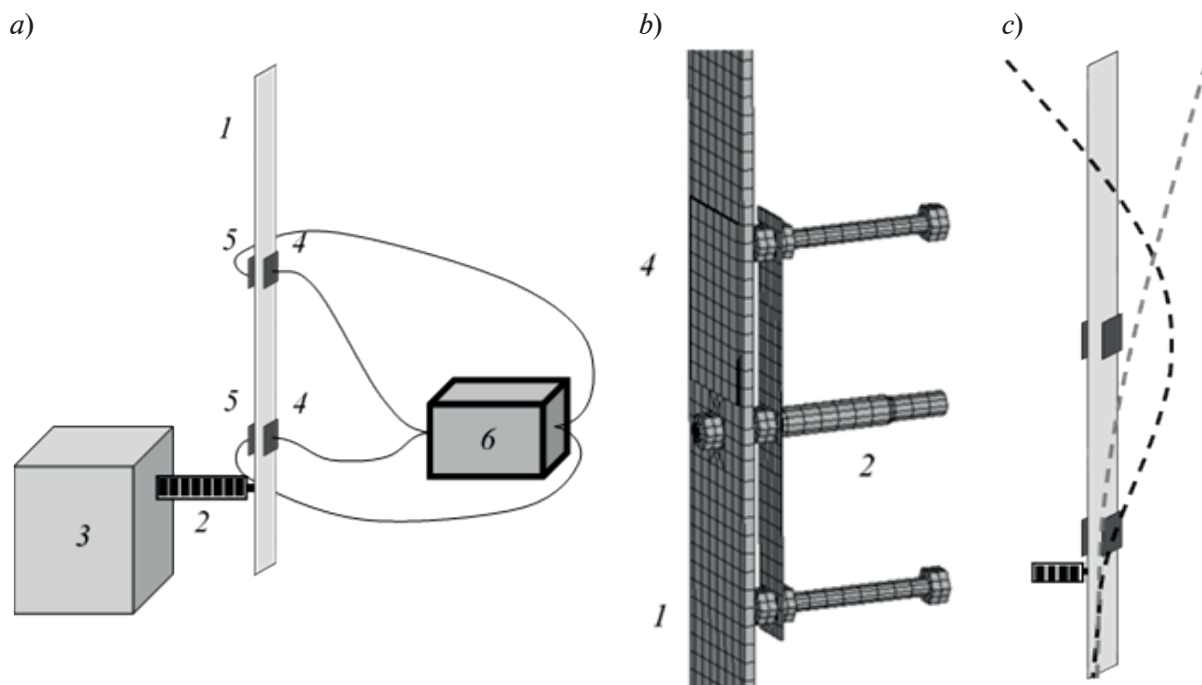


Рис. 1. Схема экспериментальной установки (а), а также фрагмент конечно-элементной модели объекта (b) и две нижних формы изгибных колебаний балки (с):

1 – алюминиевая балка; 2 – пьезоэлектрический толкатель; 3 – неподвижное основание; 4 – актуаторы;
5 – сенсоры; 6 – контроллер



Помимо основных элементов (см. рис. 1), в систему управления входят также дополнительные:

усилитель, увеличивающий в 25 раз амплитуду управляющего сигнала перед его подачей на актуаторы;

фильтры нижних частот с частотой среза 1 кГц, сглаживающие высокочастотную составляющую электрического сигнала и предохраняющие оборудование от высоких значений входного напряжения.

Через фильтр проходит как измеренный сигнал перед подачей на контроллер, так и управляющий сигнал перед подачей на актуаторы.

Для того чтобы проектировать системы управления, необходимо измерить ряд характеристик объекта управления.

Во-первых, измерялись амплитудно- и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) балки при воздействии на каждый из актуаторов и при измерении сигнала каждым из сенсоров.

Во-вторых, снимались также АЧХ и ФЧХ балки при воздействии на пьезотолкатель и измерении сигнала с помощью вибromетра. Таким образом, всего было получено девять амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для каждого из трех вариантов внешнего воздействия (актуаторы, пьезотолкатель) и каждого из трех вариантов измерения (сенсоры, вибromетр). При этом все характеристики измерялись в присутствии фильтров и усилителей.

В-третьих, анализировались колебания балки в резонансных режимах (резонансные колебания с первой и второй собственными частотами) для того, чтобы определить модальные матрицы T и F , в соответствии с идентификационной процедурой, изложенной в статье [14].

После этого на основании измеренных характеристик объекта методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАХ) синтезировались и затем тестировались экспериментально законы управления, позволяющие наиболее эффективно снижать вынужденные резонансные колебания балки.

В результате были получены как локальные системы, так и модальная система управления.

Наиболее эффективной оказалась модальная система; она позволила снизить амплитуды резонансных колебаний на первом резонансе на 83,5 %, а на втором

— на 87,2 %. Спроектированные локальные системы управления показали хороший результат либо на первом резонансе (снижение на 78,0 %), либо на втором (снижение на 88,9 %), однако в рамках локального подхода не удалось получить систему управления, работающую одновременно и одинаково эффективно на обоих резонансах. Результаты тестирования полученных систем управления подробно изложены в статье [1].

Конечно-элементная модель системы

Одной из задач данной работы является численное воспроизведение результатов, полученных в эксперименте, описанном в предыдущем разделе статьи. Для этого исследуемая система была смоделирована в КЭ-пакете ANSYS. Фрагмент КЭ-модели балки с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами представлен на рис. 1, *b*.

КЭ-модель состоит из трехмерных 20-узловых элементов Solid186 (используется для обычных материалов: алюминий балки, сталь конструкции опоры и изоляция пьезоэлементов) и Solid226 (для пьезоэлектрических материалов сенсоров, актуаторов и пьезотолкателя). Всего модель содержит 3534 элемента и 21088 узлов. В качестве механических граничных условий задано жесткое закрепление точек конструкции опоры, которые в экспериментальной установке прикреплены к неподвижному основанию; в качестве электрических граничных условий заданы электрические потенциалы на электродах актуаторов и пьезотолкателя.

Для задания коэффициента демпфирования в КЭ-модели экспериментальной установки были проанализированы результаты эксперимента, а именно — для всех снятых АЧХ, на каждом из резонансов по ширине резонансного пика был определен коэффициент демпфирования ξ в соответствии с формулой

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f_0}, \quad (1)$$

где f_0 — резонансная частота; Δf — ширина резонансного пика, ограниченная значениями частоты, на которых резонансная амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз.

Полученные таким образом значения коэффициентов демпфирования приведены в табл. 1 (обозначения представлены в примечании к табл. 1). В итоге в КЭ-модели для всех форм колебаний был задан

одинаковый коэффициент демпфирования $\xi = 0,0020$.

В пакете ANSYS производился гармонический анализ системы при трех вариантах воздействия: с помощью каждого из двух актуаторов или пьезоэлектрического толкателя. Для каждого варианта отслеживалось по три АЧХ и ФЧХ, которые соответствовали либо измерению сигнала одним из двух сенсоров, либо поперечному смещению точки на верхнем конце балки. После получения данных характеристик в комплексе ANSYS, они подвергались модификации: к ним были добавлены характеристики фильтров и усилителей, отдельно измеренные в рамках эксперимента. Таким образом, были получены амплитудно- и фазочастотные характеристики, аналогичные измеренным экспериментально.

На рис. 2 проведено сравнение АЧХ, полученных численно и экспериментально для каждого из двух актуаторов и каждого из двух сенсоров. Видно, что резонансные частоты в эксперименте и в КЭ-модели совпадают хорошо, но по амплитуде кривые, соответствующие эксперименту, оказываются несколько выше кривых, получен-

ных в результате моделирования. К тому же присутствует некоторое несовпадение в величинах резонансных пиков кривых, объясняемое тем, что в реальности демпфирование является разным для разных форм колебаний и отличается от значения, выбранного в модели. Однако в целом данные, полученные численно, достаточно хорошо соответствуют результатам эксперимента.

Модальное управление колебаниями упругой системы

Рассмотрим работу модальной системы управления колебаниями упругого объекта, состоящей из n сенсоров и n актуаторов. Основной принцип модального управления состоит в раздельном управлении различными формами колебаний объекта; при этом каждый контур управления соответствует своей форме колебаний. Пусть система управления содержит m контуров, и управление ведется по m низшим формам колебаний объекта. Очевидно, что число используемых сенсоров и актуаторов должно быть не меньше количества независимо управляемых форм, т. е. $n \geq m$.

Таблица 1

Коэффициенты демпфирования, полученные из экспериментальных АЧХ на разных резонансных частотах f_0

Номер формы	f_0 , Гц	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
1	7,125	0,0044	0,0044	0,0055	0,0055
2	42,55	0,0022	0,0021	0,0026	0,0026
3	113,9	0,0031	0,0031	0,0034	0,0034
4	175,2	0,0022	0,0025	0,0031	0,0031
5	249,5	0,0018	0,0019	0,0019	0,0019
6	390,9	0,0010	0,0010	0,0012	0,0010
7	579,4	0,0013	0,0012	0,0016	0,0016
8	790,5	0,0010	0,0009	0,0014	0,0014
9	1073	0,0016	0,0016	0,0018	0,0017
10	1338	0,0015	0,0014	0,0019	0,0019
11	1471	0,0016	0,0017	0,0025	0,0025
12	1763	0,0022	0,0023	0,0034	0,0033

Обозначения: $\xi_1 - \xi_4$ – коэффициенты демпфирования, полученные из разных АЧХ: актуатор-сенсор (ξ_1), актуатор-виброметр (ξ_2), пьезотолкатель-сенсор (ξ_3), пьезотолкатель-виброметр (ξ_4).

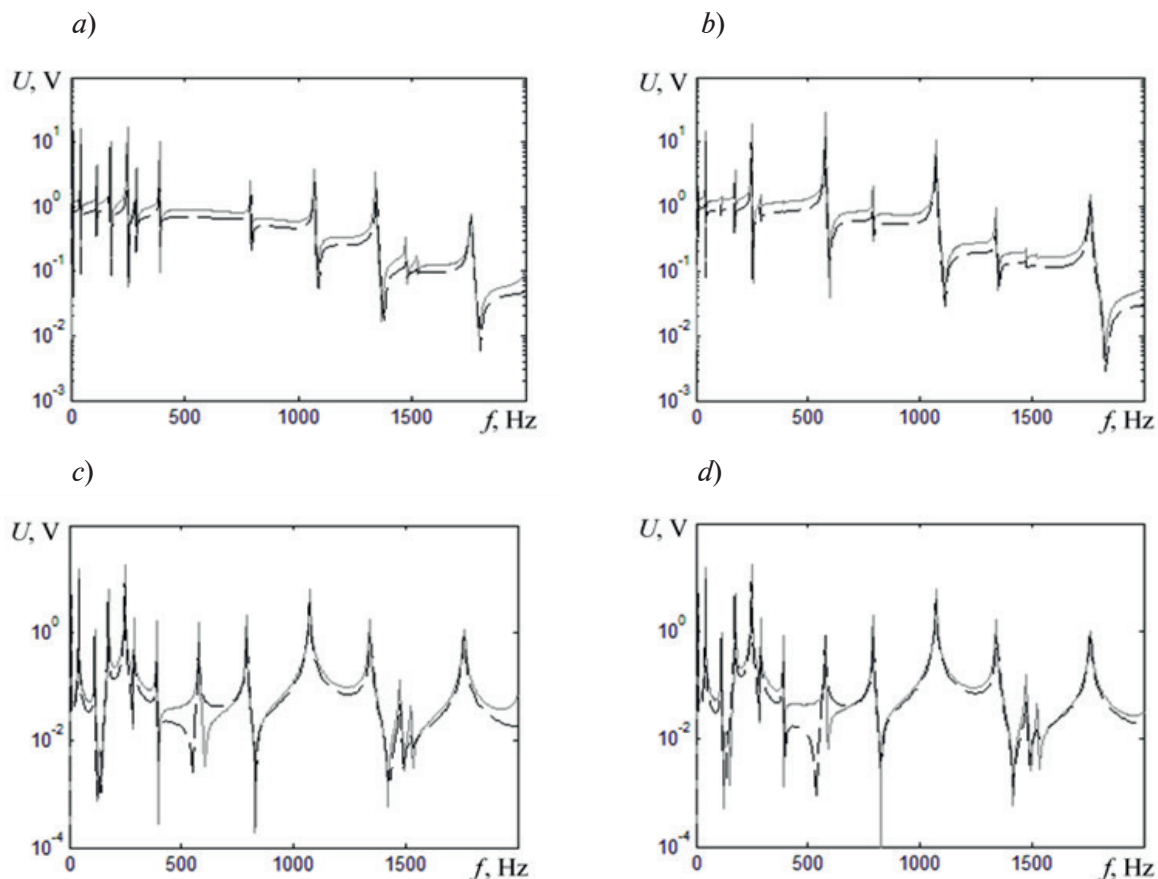


Рис. 2. Сравнение АЧХ, полученных экспериментально (сплошные линии) и численно (пунктиры) при воздействии на актуаторы $A1$ (a, c), $A2$ (b, d) и измерении сигналов сенсоров $S1$ (a, d) и $S2$ (b, c)

Будем считать, что динамика распределенной системы может быть описана с помощью разложения перемещения $u(r, t)$ в ряд по собственным формам колебаний системы:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(r) \beta_k(t), \quad (2)$$

где $\beta_k(t)$ — обобщенные координаты, $w_k(r)$ — формы колебаний.

Пусть формы колебаний не зависят друг от друга; в таком случае динамика каждой из форм описывается уравнением

$$\ddot{\beta}_k(t) + 2\xi_k \lambda_k \dot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) = f_k + y_k, \quad (3)$$

где λ_k — k -я собственная частота объекта; ξ_k — k -ый коэффициент демпфирования; f_k — k -я внешняя обобщенная сила; y_k — управляющее воздействие, соответствующее k -ой форме колебаний объекта.

Управляющее воздействие прикладывается к объекту с помощью n актуаторов и является для каждой формы колебаний линейной комбинацией управляющих сигна-

лов U_i , подаваемых на актуаторы:

$$y_k = \sum_{i=1}^n \theta_{ki}^a U_i, \quad (4)$$

где θ_{ki}^a — коэффициент влияния i -го актуатора на k -ую форму колебаний.

Разделение первых m форм колебаний объекта в системе управления обеспечивается за счет следующей структуры управляющего воздействия:

$$U_{n \times 1} = F K_{m \times m} T Y_{n \times 1}, \quad (5)$$

где $K_{m \times m}$ — диагональная матрица законов управления, каждый элемент которой K_{ii} соответствует одному из контуров управления и является функцией комплексной переменной s ; $F_{n \times m}$, $T_{m \times n}$ — модальные матрицы (синтезатор и анализатор форм), осуществляющие линейное преобразование векторов управляющих и измеряемых сигналов; $Y_{n \times 1}$ — вектор сигналов сенсоров.

Вектор $Y_{n \times 1}$ связан с вектором первых m обобщенных координат $\beta_{m \times 1}$ следующим образом:

$$Y_{n \times 1} = \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \tilde{Y}, \quad (6)$$

где $\theta_{n \times m}^s$ – весовая матрица, определяющая, как каждый из n сенсоров реагирует на каждую из m форм колебаний; $\tilde{Y}$ – слагаемое, зависящее только от высших собственных форм объекта, по которым не ведется управление.

Подставляя выражения (4) – (6) в уравнение (3), получим уравнение движения для m первых обобщенных координат в матричном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{m \times 1} + 2\xi_{m \times m} \Lambda_{m \times m} \dot{\beta}_{m \times 1} + \\ + \Lambda_{m \times m}^2 \beta_{m \times 1} = \\ = f_{m \times 1} + \theta_{m \times n}^a F_{n \times m} K_{m \times m} \times \\ \times T_{m \times n} \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \Delta_{m \times 1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Lambda_{m \times m}$, $\xi_{m \times m}$ – диагональные матрицы собственных частот и коэффициентов демпфирования, соответственно; $\Delta_{m \times 1}$ – вектор, содержащий только высшие гармоники.

Очевидно, что для раздельного управления m низшими формами колебаний объекта необходимо обеспечить диагональную структуру матрицы

$$M = \theta^a F K T \theta^s.$$

Для этого модальные матрицы F и T должны быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{m \times n} &= (\theta_{m \times n}^{sT} \theta_{n \times m}^s)^{-1} \theta_{m \times n}^{sT}, \\ F_{n \times m} &= \theta_{n \times m}^{aT} (\theta_{m \times n}^a \theta_{n \times m}^{aT})^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, для создания модальной системы управления необходимо, во-первых, задать модальные матрицы F и T в соответствии с формулой (8), а во-вторых, выбрать законы управления для каждого контура $K_{ii}(s)$.

Устойчивость замкнутой системы с двумя контурами обратной связи

Для начала рассмотрим работу системы управления с одним контуром обратной связи. Пусть на вход объекта управления с передаточной функцией $H(s)$ подается возмущение d , а выходной сигнал объекта y преобразуется в контуре обратной связи с передаточной функцией $R(s)$ в управляющее воздействие u , которое также подается со знаком «минус» на вход объекта. Таким образом, выходной и управляющий сигналы оказываются связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y &= H(s)(d - u), \\ u &= R(s)y. \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничимся рассмотрением передаточных функций $H(s)$ и $R(s)$, не имеющих полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости переменной s . Таким образом, разомкнутая система является устойчивой. Из соотношений (9) выводится связь между входным и выходным сигналами системы:

$$y = \frac{H(s)}{1 + H(s)R(s)} d = \frac{H(s)}{1 + H_0(s)} d. \quad (10)$$

Для того чтобы определить устойчивость замкнутой системы, необходимо проанализировать функцию, стоящую в знаменателе полученной дроби. Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы все нули данной функции лежали в левой полуплоскости s . Однако на практике удобнее ограничиться анализом передаточной функции разомкнутой системы

$$H_0(s) = H(s)R(s).$$

Согласно критерию Найквиста, при устойчивости разомкнутой системы замкнутая система устойчива в том случае, если годограф функции $H_0(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ не охватывает на комплексной плоскости точку $(-1; 0)$. Теперь получим аналогичный критерий для системы с двумя обратными связями.

Пусть объект управления имеет два входа и два выхода, при этом на входы подаются возмущающие воздействия d_1 и d_2 , а выходные сигналы y_1 и y_2 измеряются системой управления, преобразуются с помощью передаточных функций $R_1(s)$ и $R_2(s)$ в управляющие воздействия u_1 и u_2 , которые также подаются со знаком «минус» на входы объекта:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1(s)y_1, \\ u_2 &= R_2(s)y_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Для описания поведения объекта в рассматриваемой системе необходимо использовать четыре передаточных функции – $H_{11}(s)$, $H_{12}(s)$, $H_{21}(s)$ и $H_{22}(s)$, каждая из которых соответствует одному из двух входов и одному из двух выходов:

$$\begin{aligned} y_1 &= H_{11}(s)(d_1 - u_1) + H_{21}(s)(d_2 - u_2), \\ y_2 &= H_{12}(s)(d_1 - u_1) + H_{22}(s)(d_2 - u_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь также будем считать, что все передаточные функции $H_{ij}(s)$ и $R_i(s)$ не имеют полюсов в правой полуплоскости s . Из равенств (11) и (12) путем несложных ма-



тематических преобразований получаются выражения, связывающие входные и выходные сигналы системы при замкнутых контурах управления:

$$y_1 = \left((H_{11}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_2(s))d_1 + H_{21}(s)d_2 \right) / \left((1 + H_{11}(s)R_1(s)) \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times (1 + H_{22}(s)R_2(s)) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s) \right);$$

$$y_2 = \left((H_{22}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_1(s))d_2 + H_{12}(s)d_1 \right) / \left((1 + H_{11}(s)R_1(s)) \times \right. \quad (14)$$

$$\left. \times (1 + H_{22}(s)R_2(s)) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s) \right).$$

Для определения устойчивости данной системы необходимо проанализировать знаменатель полученных дробей (у обеих дробей он одинаков). Можно заметить, что данная функция не имеет полюсов в правой полуплоскости s . Поэтому, как и в случае системы управления с одним контуром, замкнутая система будет устойчивой, если все нули данной функции лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости переменной s .

Знаменатель дробей (13) и (14) может быть переписан в виде

$$1 + H_0(s),$$

где функция $H_0(s)$ определяется следующим образом:

$$H_0(s) = H_{11}(s)R_1(s) + H_{22}(s)R_2(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s) \times \quad (15)$$

$$\times H_{21}(s))R_1(s)R_2(s).$$

Следовательно, для рассматриваемой системы также можно применить критерий, аналогичный критерию Найквиста: для устойчивости данной системы необходимо, чтобы годограф функции $H_0(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ не охватывал на комплексной плоскости точку $(-1; 0)$.

Создание систем управления

Первый этап создания модальной системы управления — это задание модальных матриц F (синтезатор форм) и T (анализа-

тор форм). Соответствующая экспериментальная процедура, включающая исследования на резонансных режимах, приведена в статье [14].

При численном решении задачи для вычисления модальных матриц необходимо проанализировать высоту первого и второго резонансных пиков на АЧХ пьезотолкатель-сенсор и актуатор-вибромметр. Синтезатор форм F задается таким образом, чтобы первый контур управления не вызывал колебаний балки по второй форме, а второй — по первой форме. Аналогично, анализатор форм T задается таким образом, чтобы первый контур не реагировал на активизацию второй формы колебаний, а второй — на активизацию первой формы.

При анализе АЧХ было получено, что первый и второй актуаторы возбуждают первую форму изгибных колебаний балки в пропорциях 3,08 : 1,00 а вторую форму — в пропорциях — 0,97 : 1,00. Первый и второй сенсоры реагируют на активизацию первой формы в пропорциях 3,07 : 1,00, а второй — в пропорциях — 0,95 : 1,00. Отсюда были получены модальные матрицы:

$$F = \begin{bmatrix} 1,01 & -0,49 \\ 0,98 & 1,50 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1,01 & 0,96 \\ -0,49 & 1,49 \end{bmatrix}.$$

Данные значения достаточно близки к значениям матриц, полученным в рамках эксперимента:

$$F^{(\text{exp})} = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,500 \\ 1,035 & 1,525 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$T^{(\text{exp})} = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,01 \\ -0,49 & 1,52 \end{bmatrix}.$$

Результаты разделения форм в модальных контурах управления с помощью матриц T и F показаны на рис. 3. На данном рисунке приведены модули передаточных функций H_{ij}^m , соответствующие возбуждению колебаний с помощью i -го модального контура управления и измерению с помощью j -го модального контура. Данные функции получаются из передаточных функций H_{ij} , соответствующих возбуждению колебаний с помощью i -го актуатора и измерению с помощью j -го сенсора, по следующей формуле:

$$H_{ij}^m = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 T_{jl} F_{ki} H_{kl}.$$

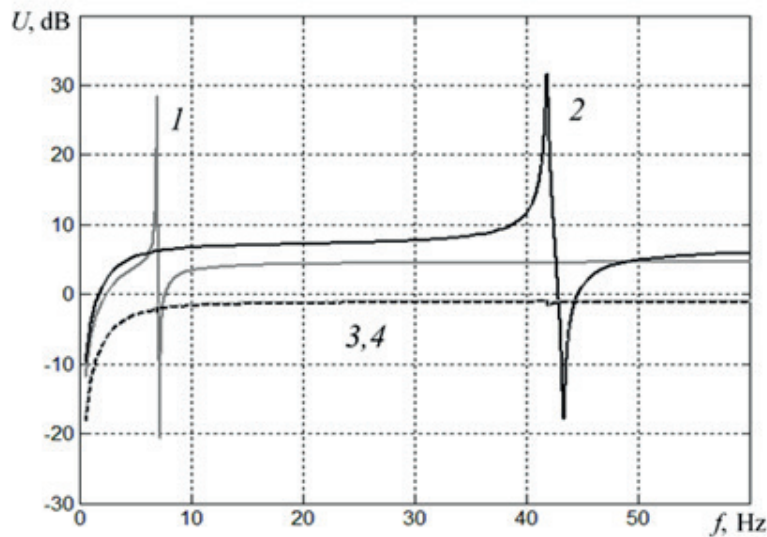


Рис. 3. АЧХ системы, соответствующие возбуждению колебаний с помощью i -го модального контура управления и измерению с помощью j -го модального контура; $ij = 11$ (кривая 1), 22 (2), 12 (3) и 21 (4)

Как видно из рисунка, выбранные модальные матрицы обеспечивают качественное разделение первой и второй форм колебаний: на амплитудно-частотной характеристике H_{11}^m , соответствующей первому модальному контуру управления, присутствует только первый резонансный пик; на АЧХ H_{22}^m — только второй резонансный пик, а на перекрестных АЧХ H_{12}^m и H_{21}^m отсутствуют оба резонанса. Таким образом, взаимное влияние контуров управления оказывается минимальным.

В рамках численного исследования колебаний балки с управлением необходимо как спроектировать системы управления, так и получить результаты использования данных систем. В качестве результата использования систем управления анализируются амплитудно-частотные характеристики балки, полученные при возбуждении колебаний с помощью пьезотолкателя и при измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки. Для определения эффективности созданных систем управления сравниваются данные АЧХ при включенной и отключенной системе управления в области первой и второй резонансных частот изгибных колебаний балки. АЧХ балки с управлением получаются из имеющихся АЧХ и ФЧХ балки без управления в соответствии с математической процедурой, изложенной ниже.

Пусть на балку одновременно действуют три источника возбуждения, а именно — напряжения:

- U_d , подаваемое на пьезотолкатель;
- U_1 , подаваемое на первый актуатор;
- U_2 , подаваемое на второй актуатор.

При этом измеряются поперечное смещение y точки на верхнем конце балки, напряжения Y_1 на первом сенсоре и Y_2 на втором. Измеряемые величины выражаются через приложенные воздействия с использованием передаточных функций $H_d, H_d^{(1)}, H_d^{(2)}, H_a^{(1)}, H_a^{(2)}, H_{as}^{(11)}, H_{as}^{(12)}, H_{as}^{(21)}, H_{as}^{(22)}$:

$$\begin{cases} y = H_d U_d + H_a^{(1)} U_1 + H_a^{(2)} U_2, \\ Y_1 = H_d^{(1)} U_d + H_{as}^{(11)} U_1 + H_{as}^{(21)} U_2, \\ Y_2 = H_d^{(2)} U_d + H_{as}^{(12)} U_1 + H_{as}^{(22)} U_2. \end{cases} \quad (19)$$

Пусть управляющие воздействия U_1 и U_2 зависят от измеряемых сигналов Y_1 и Y_2 сенсоров следующим образом:

$$\begin{cases} U_1 = -R_{11} Y_1 - R_{12} Y_2, \\ U_2 = -R_{21} Y_1 - R_{22} Y_2. \end{cases} \quad (20)$$

В таком случае путем несложных математических преобразований можно выразить смещение точки на верхнем конце балки y через подаваемое на пьезотолкатель напряжение U_d :

$$\begin{cases} y = H_d U_d + H_a^{(1)} U_1 + H_a^{(2)} U_2, \\ U_1 = U_d \left(-R_{21} H_d^{(1)} - R_{22} H_d^{(2)} + \right. \\ \left. + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \right. \\ \left. \times (H_{as}^{(12)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(11)} H_d^{(2)}) \right) / (1 + \\ + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + R_{21} H_{as}^{(21)} + \\ + R_{22} H_{as}^{(22)} + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \\ \times (H_{as}^{(11)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})), \\ U_2 = U_d \left(-R_{11} H_d^{(1)} - R_{12} H_d^{(2)} - \right. \\ \left. - (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \right. \\ \left. \times (H_{as}^{(22)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(21)} H_d^{(2)}) \right) / (1 + \\ + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + \\ + R_{21} H_{as}^{(21)} + R_{22} H_{as}^{(22)} + \\ + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \\ \times (H_{as}^{(11)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})). \end{cases}$$

Таким образом, на основании известных передаточных функций системы без управления и выбранных законов управления вычисляются передаточные функции системы с управлением.

В рамках данного численного исследования была протестирована в первую очередь модальная система управления I, синтезированная в рамках эксперимента. Затем была спроектирована модальная система управления II, отличающаяся от системы I передаточными функциями в контурах управления. При создании системы II ставилась цель получить систему управления, наиболее эффективно снижающую амплитуду вынужденных изгибных колебаний балки на первом и на втором резонансах. Система I, тестируемая в численном исследовании, отличается от модальной системы, используемой в эксперименте, только коэффициентами усиления в контурах управления, которые были подобраны из условия наибольшей эффективности работы системы.

Передаточные функции и коэффициенты усиления для обоих контуров систем управления I и II представлены в Приложении.

На рис. 4,а представлена диаграмма Найквиста для системы управления I, полученная для обоих контуров управления в соответствии с формулой (15). На рис. 4,б показан участок данной диаграммы вблизи точки $(-1; 0)$. Поскольку годограф не охватывает на комплексной плоскости точку $(-1; 0)$, данная система управления является устойчивой. Диаграмма Найквиста для системы управления II выглядит аналогичным образом.

На рис. 5 изображены АЧХ балки, полученные при воздействии пьезотолкателем и измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с управлением и без него для систем управления I и II. Видно, что обе рассматриваемые системы управления достаточно эффективно снижают амплитуду колебаний балки как на первом, так и на втором резонансе. Система управления I приводит к снижению амплитуды колебаний на первом резонансе на 87,8 %, а на втором — на 89,1 %. Система управления II снижает амплитуду колебаний на первом резонансе на 92,4 %, а на втором — на 90,7 %. Таким образом, система управления II несколько эффективнее системы I. Однако в случае использования системы управления II, вблизи первой и второй резонансных частот балки образуются два резонанса вместо одного.

Результаты управления в эксперименте и при численном моделировании приведены в табл. 2. Для каждой из систем управления представлены коэффициенты усиления в первом и втором контурах K_{p1} и K_{p2} , а также отношение максимальной амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с включенным управлением к амплитуде резонансных колебаний данной точки без управления на первом резонансе $y_1/y^{(0)}_1$ и на втором резонансе $y_2/y^{(0)}_2$. Из данных табл. 2 видно, что эффективность модальной системы управления I в эксперименте близка к ее эффективности в численном исследовании, а результаты системы II превосходят результаты системы I, особенно для первой резонансной частоты.

Заключение

В рамках настоящей работы была построена конечно-элементная модель экспериментальной установки [1, 14] с учетом пьезоэффекта. Данная модель позволила численно получить амплитудно-частотные

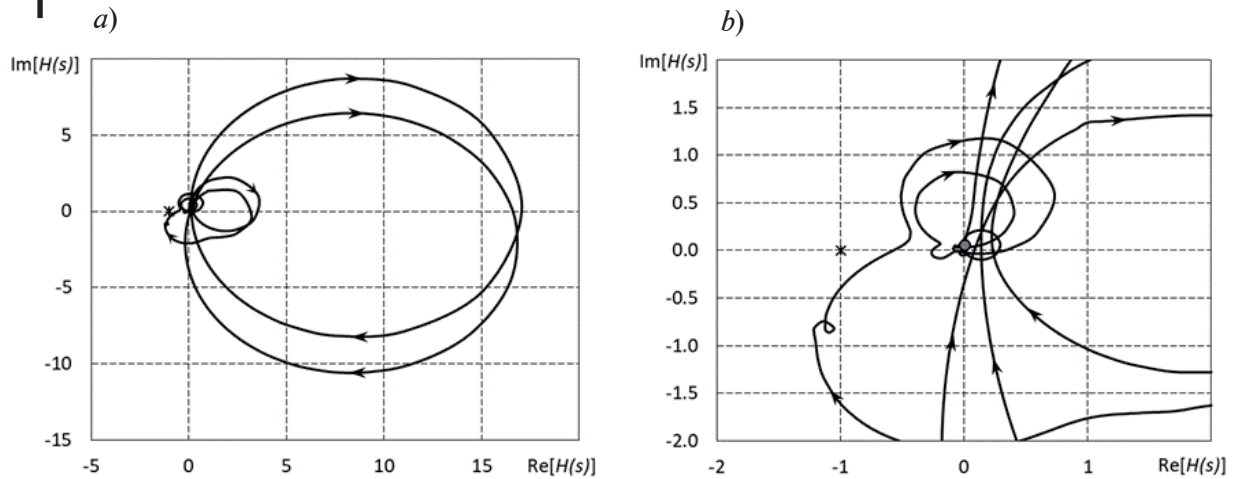


Рис. 4. Диаграмма Найквиста для обоих контуров системы управления I: общий вид (a) и увеличенный фрагмент (b)

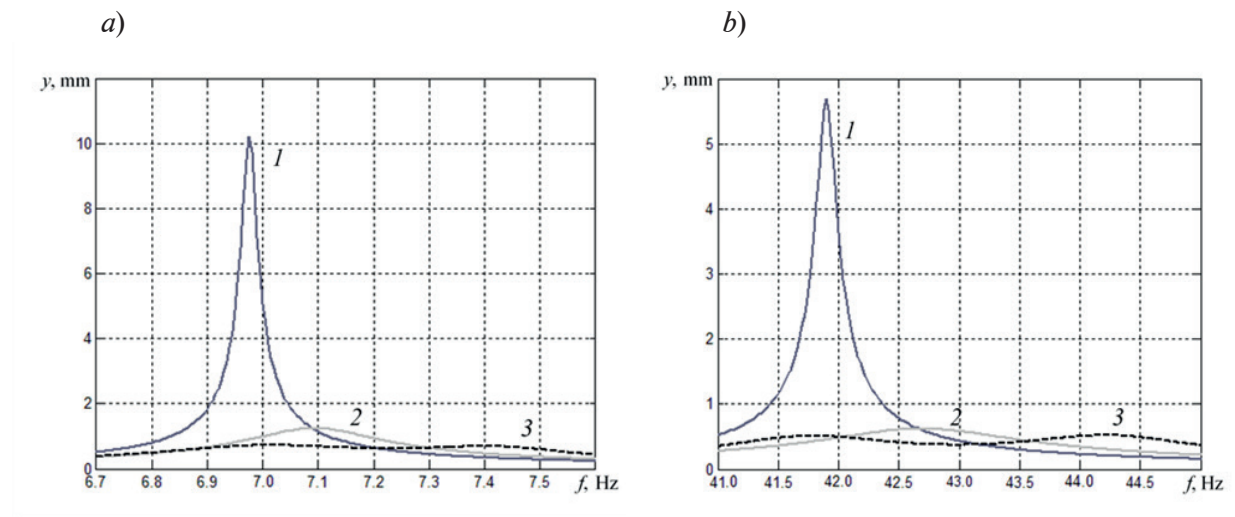


Рис. 5. АЧХ балки без управления (кривая 1) и с управлением для систем I (2) и II (3) вблизи первого (a) и второго (b) резонансов

Таблица 2

Результаты работы различных систем управления,
полученные численно и экспериментально

Система управления	K_{p1}	K_{p2}	$y_1/y^{(0)}_1, \%$	$y_2/y^{(0)}_2, \%$
I (эксперимент)	0,100	0,020	16,5	12,8
I (расчет)	0,170	0,044	12,2	10,9
II (расчет)	0,530	0,650	7,6	9,3

Обозначения: K_{p1} , K_{p2} – коэффициенты усиления в первом и втором контурах; $y_1/y^{(0)}_1$, $y_2/y^{(0)}_2$ – отношения максимальной амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с включенным управлением к амплитуде резонансных колебаний данной точки без управления на первом и втором резонансах соответственно.



характеристики (АЧХ) для различных случаев воздействия на балку и измерения выходного сигнала. Результаты расчета оказались достаточно близкими к характеристикам, полученным экспериментально. Различия в значениях высоты резонансных пиков между расчетом и экспериментом обусловлены отличием коэффициентов демпфирования реальной системы от соответствующих значений конечно-элементной модели.

На основании АЧХ и ФЧХ системы, полученных численно, были построены решения задачи о колебаниях балки при наличии модального управления для различных законов управления. Результаты численного моделирования наиболее эффективной системы управления, созданной в рамках эксперимента (снижение резонансных амплитуд на первом и на втором резонансах 87,8 и 89,1 % соответственно), оказались близкими к экспериментальным (снижение на 83,5 и 87,2 %). В качестве развития исследования были получены и протестированы более эффективные законы управления для обоих контуров, приводящие к более низким значениям амплитуд резонансных колебаний балки, чем системы, рассмотренные в эксперименте (снижение резонансных амплитуд на 92,4 и 90,7 %).

Приложение

Передаточные функции контуров управления

Передаточная функция первого контура системы управления I:

$$R_1^{(1)}(s) = (44s^6 + 7,2 \cdot 10^3 s^5 + 1,3 \cdot 10^8 s^4 + 1,4 \cdot 10^{10} s^3 + 5,5 \cdot 10^{13} s^2 + 4,8 \cdot 10^{15} s + 1,1 \cdot 10^{17}) / (s^7 + 668s^6 + 3,1 \cdot 10^6 s^5 + 7,4 \cdot 10^8 s^4 + 1,3 \cdot 10^{12} s^3 + 1,8 \cdot 10^{14} s^2 + 7,1 \cdot 10^{15} s + 6,3 \cdot 10^{17}).$$

Коэффициент усиления $K_{p1}^{(1)} = 0,170$.
Передаточная функция второго контура системы управления I:

$$R_2^{(1)}(s) = (1,4 \cdot 10^5 s^5 + 9,3 \cdot 10^7 s^4 + 2 \cdot 10^{11} s^3 + 1,1 \cdot 10^{14} s^2 + 2,9 \cdot 10^{16} s + 1,92 \cdot 10^{18}) / (s^7 + 1,1 \cdot 10^3 s^6 + 2,1 \cdot 10^6 s^5 + 1,8 \cdot 10^9 s^4 + 1,1 \cdot 10^{12} s^3 + 6 \cdot 10^{14} s^2 + 1,1 \cdot 10^{17} s + 4,36 \cdot 10^{19}).$$

Коэффициент усиления $K_{p2}^{(1)} = 0,044$.
Передаточная функция первого контура системы управления II:

$$R_1^{(2)}(s) = (403s^4 + 2,9 \cdot 10^4 s^3 + 9,7 \cdot 10^8 s^2 + 8,6 \cdot 10^9 s + 1,88 \cdot 10^{12}) / (s^5 + 1,1 \cdot 10^3 s^4 + 2,7 \cdot 10^6 s^3 + 1,5 \cdot 10^9 s^2 + 7,8 \cdot 10^9 s + 3,54 \cdot 10^{12}).$$

Коэффициент усиления $K_{p1}^{(2)} = 0,530$.
Передаточная функция второго контура системы управления II:

$$R_2^{(2)}(s) = (2,2 \cdot 10^5 s^4 + 8 \cdot 10^6 s^3 + 2,7 \cdot 10^{11} s^2 + 4,2 \cdot 10^{12} s + 1,7 \cdot 10^{16}) / (s^6 + 372s^5 + 1,5 \cdot 10^6 s^4 + 4,1 \cdot 10^8 s^3 + 4,2 \cdot 10^{11} s^2 + 3,4 \cdot 10^{13} s + 2,6 \cdot 10^{16}).$$

Коэффициент усиления $K_{p2}^{(2)} = 0,650$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev A.K., Fedotov A.V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring. 2017. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
2. Gould L.A., Murray-Lasso M.A. On the

modal control of distributed parameter systems with distributed feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 4. Pp. 729–737.

3. Meirovitch L. Dynamics and control of structures. New York: John Wiley & Sons, 1990. 425 p.

4. **Lee C.-K., Moon F.C.** Modal sensors/actuators // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57. No. 2. Pp. 434–441.
5. **Donoso A., Bellido J.C.** Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 38. No. 4. Pp. 347–356.
6. **Stoebener U., Gaul L.** Modal vibration control for PVDF coated plates // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2000. Vol. 11. No. 4. Pp. 283–293.
7. **Hurlebaus S., Stoebener U., Gaul L.** Vibration reduction of curved panels by active modal control // *Computers and Structures*. 2008. Vol. 86. No. 3–5. Pp. 251–257.
8. **Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M.** Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // *Smart Structures and Systems*. 2013. Vol. 12. No. 5. Pp. 547–577.
9. **Braghin F., Cinquemani S., Resta F.** A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control // *Journal of Vibration and Control*. 2012. Vol. 19. No. 2. Pp. 163–182.
10. **Cinquemani S., Ferrari D., Bayati I.** Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators // *Smart Materials and Structures*. 2015. Vol. 24. No. 8. P. 085006.
11. **Canciello G., Cavallo A.** Selective modal control for vibration reduction in flexible structures // *Automatica*. 2017. Vol. 75. January. Pp. 282–287.
12. **Biglar M., Gromada M., Stachowicz F., Trzepieciniski T.** Optimal configuration of piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm // *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. No. 10. Pp. 3451–3462.
13. **Song Z.-G., Li F.-M., Carrera E., Hagedorn P.** A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects // *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 414. 3 February. Pp. 218–232.
14. **Беляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В.** Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 2. С. 69–81.
15. **Preumont A.** *Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*. Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019, принята к публикации 18.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ФЕДОТОВ Александр Васильевич – младший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.
199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.
alvafed@yandex.ru

REFERENCES

- [1] **A.K. Belyaev, A.V. Fedotov, H. Irschik, et al.**, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, *Structural Control and Health Monitoring*. 25(8) (2017) e2105.
- [2] **L.A. Gould, M.A. Murray-Lasso**, On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*. 11(4) (1966) 729–737.
- [3] **L. Meirovitch**, *Dynamics and control of structures*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [4] **C.-K. Lee, F.C. Moon**, Modal sensors/actuators, *ASME Journal of Applied Mechanics*. 57(2) (1990) 434–441.
- [5] **A. Donoso, J.C. Bellido**, Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 38(4) (2009) 347–356.
- [6] **U. Stoebener, L. Gaul**, Modal vibration control for PVDF coated plates, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 11(4) (2000) 283–293.
- [7] **S. Hurlebaus, U. Stoebener, L. Gaul**, Vibration reduction of curved panels by active modal control, *Computers and Structures*. 86(3–5) (2008) 251–257.
- [8] **G. Zenz, W. Berger, J. Gerstmayr, et al.**, Design of piezoelectric transducer arrays for



passive and active modal control of thin plates, *Smart Structures and Systems*. 12(5) (2013) 547–577.

[9] **F. Braghin, S. Cinquemani, F. Resta**, A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control, *Journal of Vibration and Control*. 19(2) (2012) 163–182.

[10] **S. Cinquemani, D. Ferrari, I. Bayati**, Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators, *Smart Materials and Structures*. 24(8) (2015) 085006.

[11] **G. Canciello, A. Cavallo**, Selective modal control for vibration reduction in flexible structures, *Automatica*. 75 (January) (2017) 282–287.

[12] **M. Biglar, M. Gromada, F. Stachowicz, T. Trzepieciński**, Optimal configuration of

piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm, *Acta Mechanica*. 226 (10) (2015) 3451–3462.

[13] **Z.-G. Song, F.-M. Li, E. Carrera, P. Hagedorn**, A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects, *Journal of Sound and Vibration*. 414 (3 Febr.) (2018) 218–232.

[14] **A.K. Belyaev, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, A.V. Fedotov**, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 10 (2) (2017) 69–81.

[15] **A. Preumont**, *Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*, Springer, Dordrecht, 2006.

Received 17.01.2019, accepted 18.02.2019.

THE AUTHOR

FEDOTOV Aleksandr V.

Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS

61 Bolshoi Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

alvafed@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.12113

УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

С.В. Полянский¹, А.К. Беляев^{1,2}

¹ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлено решение нестационарной задачи термоупругости вращающихся тел на примере определения оптимальных температурных полей и полей напряжений в прокатных валках систем горячего проката, что представляет собой актуальную проблему. Используется пространственное описание, позволяющее уменьшить число независимых переменных и рассматривать поля температуры и напряжений как квазистатические. Для процессов, происходящих в теле вала, характерны большие градиенты температуры и связанные с ними напряжения, а также вращающийся характер полей. Для решения задачи моделирования указанных процессов предлагается использовать ряды Фурье, которые позволяют при довольно большом количестве рассматриваемых членов ряда получать решение с достаточной точностью. Особенностью полученного решения является локализация максимальных напряжений на незначительной глубине от поверхности вала.

Ключевые слова: температурное напряжение, прокатный валок, вращающаяся система, ряд Фурье

Ссылка при цитировании: Полянский С.В., Беляев А.К. Квазистатический подход к решению задачи термоупругости вращающихся тел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 156–166. DOI: 10.18721/JPM.12113

A QUASISTATIC APPROACH TO THE THERMOELASTICITY PROBLEM OF ROTATING BODIES

S.V. Polyanskiy¹, A.K. Belyaev^{1,2}

¹ Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS,
St. Petersburg, Russian Federation;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The non-stationary problem of thermoelasticity for rotating bodies has been solved through determining the optimal temperature and stress fields in the rolling mills of hot rolling systems, this determination being an issue of the day. The Eulerian approach was applied, it allowed us to reduce the number of independent variables and consider these fields as quasistatic ones. The heavy temperature gradients and stresses bound up with them, as well as the rotating nature of these fields are typical for the processes taking place in the roll core. To solve the problem of simulation of these processes, we proposed to use Fourier series, which allowed us to obtain a solution with a sufficient accuracy for the large number of terms of the series being considered. The peculiarity of the solution obtained is that the stress maximum locates at an insignificant depth beneath the roll surface.

Keywords: temperature stress, mill roll, rotating system, Fourier series

Citation: S.V. Polyanskiy, A.K. Belyaev, A quasistatic approach to the thermoelasticity problem of rotating bodies, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 156–166. DOI: 10.18721/JPM.12113



Введение

В настоящее время задачи термоупругости вращающихся тел, подверженных тепловым ударам, часто требуют рационального решения в различных практических приложениях и не теряют своей актуальности.

Ярким примером одного из таких приложений является моделирование процессов, имеющих место при горячей прокатке листового металла, где вращающиеся валки прокатного стана работают в условиях тяжелого механического и температурного воздействия. На валки действует совокупность циклических, механических и температурных напряжений, в результате наблюдается характерное, связанное с образованием blisterных отколов, разрушение поверхностного слоя валков типа «апельсиновая корка».

Целью данного исследования является разработка метода, позволяющего эффективно решать задачи термоупругости вращающихся тел, подверженных тепловым ударам.

Рассмотрение задачи несвязанной термоупругости проводится в несколько этапов. Первый этап требует решения нестационарной граничной задачи теплопроводности, доставляющей поле температур; последнее зависит как от времени, так и от пространственных координат. Второй шаг нацелен на определение напряженно-деформированного состояния вращающегося тела. Предлагается математический подход, позволяющий свести уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными к обыкновенным дифференциальным уравнениям и получить решение в виде одинарного ряда.

Универсальность предлагаемого подхода демонстрируется на примере полного решения задачи нахождения температурных напряжений во вращающихся валках при горячем прокате листового металла. В процессе эксплуатации прокатных валков замечено, что характер разрушения его поверхности имеет чешуйчатую структуру и формирование трещин происходит не на поверхности, а на относительно небольшой глубине (1 – 2 мм) от поверхности валка. Исследование характера трещин позволило предположить, что одним из определяющих факторов их появления выступает возникновение нестационарных температурных напряжений в результате резких перепадов

температур. Данные эффекты физики металлов объясняются значительными градиентами температуры, вызванными тепловыми ударами.

Предлагаемый метод аналитического вычисления локализованного температурного поля предпочтительнее численных, так как не требует итерационного подбора размера сеток, неизвестного заранее.

Актуальность вышеописанной проблемы для промышленности подтверждается большим числом работ, посвященных исследованию как отдельно поля температур, так и температурных полей и механических напряжений, возникающих при прокатке.

При исследовании температурных полей применяют три основных подхода:

- прямое экспериментальное измерение полей поверхностной температуры [1];

- вычисление температурных полей методом конечных элементов (МКЭ) или сеточным методом с учетом вращения валка или граничных условий [2 – 10];

- вычисление температурных полей методом Фурье в виде суммы ряда по собственным функциям [11 – 14].

Особое место занимают работы [15 – 17], в которых развивается теория гармонического конечного элемента. В этом случае решается последовательность одномерных МКЭ-задач для каждой из амплитуд гармоник ряда Фурье отдельно, затем полученные амплитуды умножаются на соответствующую гармоническую функцию и складываются.

Исследование полей механических напряжений производится только методами конечных элементов [3, 5, 6, 8 – 10, 16 – 18]. В качестве нагрузки принимается поле температур, затем решается плоская задача теории упругости. Практически все решения, за исключением приведенных в работе [17], дают максимальные напряжения (по норме Мизеса) на поверхности валков, в пятне контакта с прокатываемым металлом. Этот результат считается общепризнанным, поэтому в работе [14] после вычисления температуры методом Фурье, с помощью температурного потенциала вычисляются не напряжения, а модуль кинематического упрочнения поверхности.

Вместе с тем характер разрушения валков показывает, что максимальные механические напряжения находятся на небольшой глубине внутри тела валков. Стандартный МКЭ-подход не позволяет описать

указанный характер адекватно. Это касается и «гармонических» конечных элементов [15 – 17], авторы которых отмечают, что использовать эти элементы для расчета напряжений нельзя, так как они дают напряжения в полтора раза выше, чем «стандартный» МКЭ.

В настоящей статье предлагается использовать пространственное описание, что позволяет свести нестационарную задачу теплопроводности к квазистационарной и тем самым разработать математическую модель теплопроводности вращающегося упругого тела. Появляется возможность найти поле распределения температур, и с использованием термоупругого потенциала получить температурные напряжения, которые представляют собой частные решения задачи термоупругости. Граничные условия будут удовлетворены с помощью функции Эри на примере тривиальных условий нагружения.

Определение поля температур в валках

На рис. 1 представлена схема нагрева и охлаждения прокатного вала. В процессе работы прокатный валок контактирует с раскаленным слябом в узком секторе контакта, а затем проходит сложный цикл охлаждения в различных средах. В нашем случае мы рассматриваем поочередное охлаждение водой и воздухом, но возможны варианты охлаждения пароводяной смесью, или только водой (воздухом). Секторами показаны участки различного охлаждения.

В предположении, что поле температуры не зависит от продольной координаты, уравнение нестационарной теплопрово-

дности имеет вид

$$\lambda \Delta T - \gamma \dot{T} = 0, \quad (1)$$

где T – температура; λ , γ – теплопроводность и теплоемкость материала вала, соответственно; Δ – двумерный оператор Лапласа; точка означает материальную производную по времени.

Используется пространственное (эйлерово) описание, что позволяет уменьшить число независимых переменных. При условии, что прокатный валок вращается с постоянной угловой скоростью ω , выражение для материальной производной поля температуры упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{T}(r, \varphi, t) = & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \\ & + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где r , φ – радиус и угол в полярной системе координат.

В силу стационарности задачи,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

В результате получаем уравнение стационарной теплопроводности с двумя независимыми переменными:

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) - \gamma \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

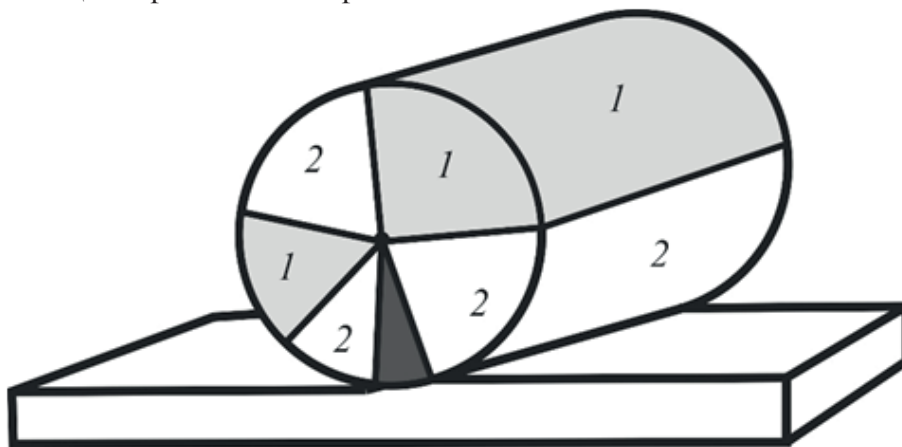


Рис. 1. Схема прокатки (показан только верхний валок), а также охлаждения прокатного вала водой (1) и воздухом (2); черным сектором показана зона контакта



Температура поверхности вала в узкой зоне непосредственного контакта вала и проката, где $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (см. рис. 1), принята равной $T_c = 600^\circ\text{C}$, как средней между температурой горячего проката и температурой вала. В остальной зоне ($\varphi_0 < \varphi \leq 2\pi$) ставится граничное условие третьего рода:

$$r = R, \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \beta(T - T_m) = 0,$$

где R – радиус вала; $T = T_m(\varphi)$ – температура воздушно-водяной смеси системы охлаждения поверхности вала.

Эти два условия можно записать в виде единого граничного условия третьего рода:

$$r = R, \eta \frac{\partial T}{\partial r} + T - T_e = 0, \quad (4)$$

где

$$T_e = T_e(\varphi) = \begin{cases} T_c, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ T_m(\varphi), & \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi; \end{cases} \\ \eta = \frac{\lambda}{\beta} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \eta(\varphi), & \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (5)$$

причем параметры $\lambda(\varphi)$, $\beta(\varphi)$, $T_m(\varphi)$ есть кусочно-постоянные функции угла φ .

Для решения граничной задачи (3) – (5) применим метод интегральных преобразований:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = T_n(r),$$

и затем будем искать решение в виде двустороннего ряда:

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N T_n(r) e^{in\varphi}.$$

После интегрального преобразования уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^2 T_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_n}{dr} + \left(-\frac{n^2}{r^2} - \frac{in\omega\gamma}{\lambda} \right) T_n = 0. \quad (7)$$

Для $n \neq 0$ решение уравнения (7) выражается через функции Бесселя J_n и Y_n :

$$T_n(r) = A_n J_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right) + \\ + B_n Y_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right). \quad (8)$$

Поскольку $Y_n(0) = \infty$, то $B_n = 0$ в силу ограниченности температуры в центре вала. Тогда

$$T_n(r) = A_n J_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right) = \\ = A_n J_n \left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} a \sqrt{n\xi} \right), \quad (9)$$

где $a = \sqrt{\frac{\omega\gamma}{\lambda}} R$ и введен безразмерный

радиус $\xi = r/R$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Отдельного рассмотрения требует случай $n = 0$. При этом уравнение (7) имеет вид

$$\frac{d^2 T_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_0}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_0}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда $T_0 = C \ln r + A_0$, а из условия ограниченности при $r = 0$ следует, что $C = 0$, т. е. $T_0 = \text{const}$.

Теперь проведем интегральное преобразование граничного условия (4):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\eta(\varphi) \frac{\partial T}{\partial r} + T - T_e(\varphi) \right] e^{-in\varphi} d\varphi = 0. \quad (10)$$

Представим $\eta(\varphi)$ в виде ряда Фурье и введем следующие обозначения:

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=0}^k \eta_k e^{ik\varphi}, \\ \eta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad (11) \\ \tau_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_e(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Особого вычисления требует первое слагаемое в уравнении (10):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \frac{\partial T}{\partial r} e^{-in\varphi} d\varphi = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^k \eta_k \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r} e^{-i(n-k)\varphi} d\varphi = \\ = \sum_{k=0}^k \eta_k \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T e^{-i(n-k)\varphi} d\varphi \right) = \\ = \sum_{k=0}^k \eta_k \frac{d}{dr} T_{n-k}(r) = \sum_{k=0}^k \eta_k T'_{n-k}.$$

Подставляя явное выражение для T_n и вычисляя производную от функции Бесселя по правилу

$$J'_n(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = 0,$$

получаем следующую форму записи граничного условия:

$$\begin{cases} A_0 - \tau_0, n = 0; \\ \sum_{k=0}^K \left(\frac{\eta_k}{r} A_{n-k} \left[\frac{1-i}{\sqrt{2}} a\sqrt{n-k} J_{n-k-1}(\chi_{n-k}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (n-k) J_{n-k}(\chi_{n-k}) \right] + \right. \\ \left. + A_n J_n(\chi_{n-k}) \right) - \tau_n = 0, n \neq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\chi_{n-k} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} a\sqrt{n-k}$.

В результате получена система из n уравнений с n неизвестными коэффициентами A_n . Для ее решения будем использовать асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

так как для реальных параметров горячего проката ($a = 201,6$) аргумент функций Бесселя принимает значения

$$\left| \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right| a\sqrt{n} \approx 201,6\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставив эти значения аргумента, получим:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-i)a\sqrt{n}}} \cdot e^{\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}}} \cdot e^{i\left[\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в результате решения системы уравнений для коэффициентов A_n и их подстановки в формулы (9) и (6) для $T(r, \varphi)$, мы получаем распределение температуры в прокатном валке.

Поскольку коэффициенты в уравнении (12) содержат экспоненциальные множители, матрица системы имеет плохую обусловленность. Поэтому требуется оценить необходимое количество членов ряда для каждой функции и использовать специаль-

ный алгоритм решения.

Характер уравнений (12) позволяет использовать алгоритм с выбором ведущего элемента. При несимметричном задании матрицы (η_k) (см. выражение (11)), матрица системы становится треугольной, что позволяет последовательно рассчитать все коэффициенты A_n . Ниже в качестве примера вычислений представлен график поля температур на поверхности прокатного валка в зависимости от угловой координаты (рис. 2) для следующих числовых значений параметров системы:

1. $T_c = 600^\circ\text{C}$, $\varphi_0 = 12,68^\circ = 0,2213$ рад (в зоне контакта);

2. $T_e = 25^\circ\text{C}$, $\beta = 41700$ Вт/($^\circ\text{C} \cdot \text{м}^2$) (для воды);

$T_0 = 25^\circ\text{C}$, $\beta = 1500$ Вт/($^\circ\text{C} \cdot \text{м}^2$) (для воздуха);

3. $\lambda = 31$ Вт/($^\circ\text{C} \cdot \text{м}$), $\gamma = 0,673$ кДж/($^\circ\text{C} \cdot \text{кг}$) (для валков).

Вычисление температурных напряжений

Для вычисления поля температурных напряжений используем термоупругий потенциал перемещений Φ , который вводится равенством $\underline{u} = \nabla \Phi$. В задаче о плоской деформации термоупругий потенциал Φ удовлетворяет уравнению [19]:

$$\Delta \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T. \quad (14)$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по времени и подставляя dT/dt из уравнения (1), имеем:

$$\frac{d}{dt} \Delta \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} \Delta T. \quad (15)$$

Поскольку термоупругий потенциал доставляет лишь частное решение уравнения термоупругости, в обеих частях уравнения (15) можно опустить знак оператора Δ . В результате имеем:

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} T. \quad (16)$$

Материальная производная термоупругого потенциала во вращающейся системе координат вычисляется по аналогии с вычислением по выражению (2):

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} T, \quad (17)$$

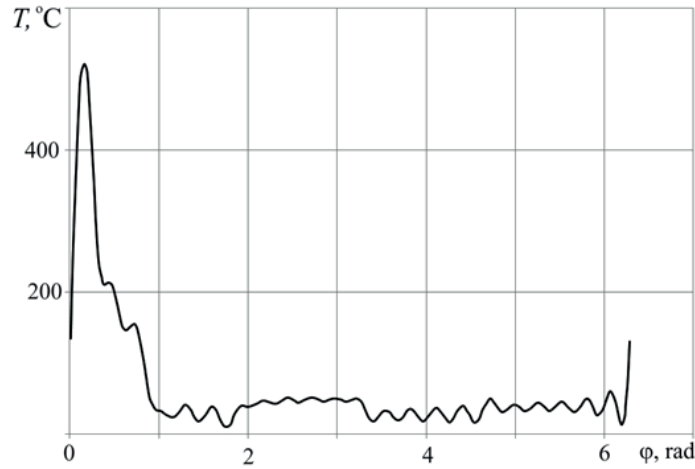


Рис. 2. Расчетная температура на поверхности прокатного валка как функция угловой координаты ($r = R$); параметры расчета приведены в тексте

откуда получается явное выражение для термоупругого потенциала:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\omega} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} \int T d\varphi = \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\gamma} \left[\sum_{n=-N}^N T_n(r) \frac{1}{in} e^{in\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Температурные напряжения, соответствующие полученному термоупругому потенциалу, находятся прямым дифференцированием (см. работу [19]):

$$\begin{aligned} \sigma_r^\Phi &= -2G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right], \\ \sigma_\varphi^\Phi &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi}^\Phi &= 2G \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right], \\ \sigma_z^\Phi &= -2G \Delta \Phi = -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T, \\ \tau_{zr}^\Phi &= \tau_{z\varphi}^\Phi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция Эри для удовлетворения граничным условиям

Представленные температурные напряжения есть частные решения, и в общем случае они не удовлетворяют граничным условиям. Ниже мы покажем, как добиться

выполнения тривиальных силовых условий на всей поверхности валка. Для корректировки решения с целью удовлетворения тривиальным граничным условиям, введем полные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^\Phi + \sigma_r^U, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^\Phi + \sigma_\varphi^U, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}^\Phi + \tau_{r\varphi}^U \end{aligned}$$

и т. д.

Здесь верхний индекс означает напряжения, определяемые через функцию Эри в плоской задаче $U(r, \varphi)$.

Она удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta \Delta U = 0$ и позволяет определить напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r^U &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi^U &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi}^U &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_z^U &= \nu (\sigma_r^U + \sigma_\varphi^U), \\ \tau_{zr}^U &= \tau_{z\varphi}^U = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

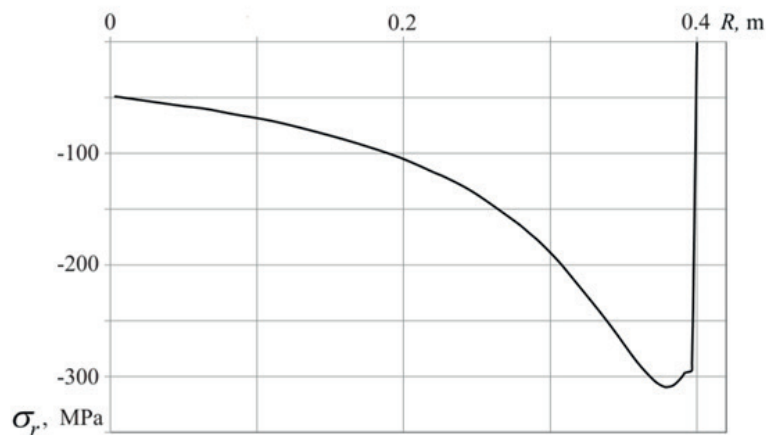


Рис. 3. Радиальное распределение напряжений σ_r в теле прокатного вала при значении $\varphi = 0,1$ рад

Общий вид функции Эри в виде ряда Фурье имеет следующий вид (см. работы [19, 20]):

$$U(\xi, \varphi) = [\alpha \xi^3 + \beta \xi^{-1} + \lambda \xi + \gamma \xi \ln \xi + \chi \varphi \xi] e^{i\varphi} + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n \xi^n + Q_n \xi^{n+2}) e^{in\varphi}, \quad (20)$$

причем коэффициенты $\alpha, \beta, \lambda, \gamma, \chi, P_n, Q_n$ можно найти из граничного условия отсутствия напряжений на всей поверхности вала:

$$r = R, \quad \sigma_r^\Phi + \sigma_r^U = 0, \quad \tau_{r\varphi}^\Phi + \tau_{r\varphi}^U = 0. \quad (22)$$

На рис. 3 представлено распределение напряжений по радиусу вала при значении угла $\varphi = 0,1$ рад.

На рис. 4 представлено семейство распределений радиальных напряжений по угловой координате в теле прокатного вала при разных значениях его радиуса.

На рис. 3 хорошо заметен быстрый рост напряжений на малой глубине от поверхности и плавное уменьшение к центру вала. Максимум напряжений достигается на глубине h около 4 мм от поверхности (см. рис. 4).

Обсуждение результатов

Полученное нами распределение радиальных напряжений в теле вала существенно отличается от известных результатов, вычисленных с помощью МКЭ. Макси-

мальные радиальные напряжения 350 МПа оказываются близкими к пределу текучести и имеют специфический «ныряющий» характер. Зона этих напряжений находится в теле вала на глубине 2 – 4 мм от поверхности, что хорошо объясняет blisterное усталостное разрушение, когда от поверхности вала при прокатке отваливаются блистеры толщиной 1 – 4 мм.

В работе [9] максимум напряжений под поверхностью получен за счет моделирования многослойной системы с разными механическими характеристиками вблизи поверхности вала.

«Ныряющие» напряжения были получены в работе [17] в результате учета контактных напряжений (помимо температурных) в зоне прокатки. В отличие от нашего решения, там глубина залегания максимума напряжений по норме Мизеса составляла 5 % от радиуса, что не позволяло объяснять блистерные отколы. В нашем же случае эта глубина равна около 3 см.

Таким образом, предложенный и использованный нами подход позволяет получить новые результаты, которые в состоянии объяснить экспериментально наблюдаемое блистерное разрушение поверхности «ныряющими» циклическими радиальными напряжениями.

Вероятно, огромные градиенты радиальных напряжений, возникающие в подповерхностном слое, не дают возможности решить задачу методом МКЭ. Этот слой составляет около 0,1 % от радиуса вала, и осреднение напряжений, которое автоматически происходит внутри конечных эле-

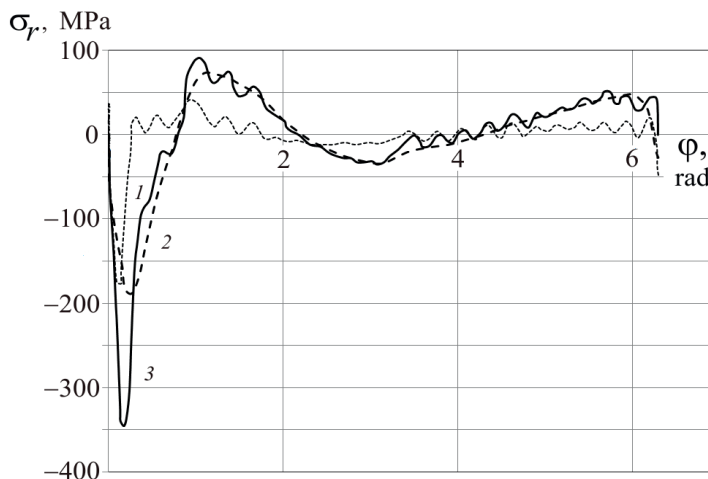


Рис. 4. Распределение радиальных напряжений σ_r по угловой координате φ на разной глубине от поверхности вала h , мм: 0,5 (1), 4 (2), 100 (3)

ментов, не позволяет адекватно моделировать эти градиенты.

Необходимо отметить, что функции Бесселя в ряде Фурье при асимптотическом представлении содержат в качестве множителей экспоненты вида $\exp(\lambda r/R)$, где множители λ имеют характерное значение около 1000. Поэтому оказалось, что нет смысла брать более сорока членов ряда Фурье, так как даже в случае применения специальной нормировки не удастся определить коэффициенты ряда Фурье при заданной двойной точности. С этим обстоятельством связаны «колебания» всех функций, видимые на графиках угловых распределений. Естественное, что численное МКЭ-решение сталкивается с аналогичной проблемой плохой обусловленности задачи, о чем пишут авторы цитируемых работ.

Заключение

Путем перехода к пространственному описанию в задаче термоупругости вращающихся тел удалось уменьшить число независимых переменных и получить точные решения для поля температур и напряжений в виде одинарного ряда Фурье. Выведены формулы для температурных напряжений через термоупругий потенциал; с его помощью вычислены температурные напряжения на поверхности и в теле вала. Продemonстрировано, как следует подобрать функцию Эри для удовлетворения граничным условиям на поверхности вала. Рассмотрение было ограничено случаем тривиальных силовых граничных условий на всей поверхности вала, хотя данный подход позволяет удовлетворять любым, наперед

заданным граничным условиям.

В качестве примера практического применения было найдено поле температурных напряжений в прокатных валах при горячем прокате листового металла.

На основании проведенных исследований сделан вывод, что температурные напряжения вносят весомый вклад в напряженное состояние прокатных валков, а величина температурной составляющей напряжений и цикличность их возникновения говорят о возможности разрушения поверхности валков исключительно за счет температурного «шока», который возникает при прогреве и охлаждении поверхности валков.

Впервые удалось получить эффект температурных напряжений, «ныряющих» на малую глубину под поверхность вала. Важно, что полученный эффект адекватно объясняет блистерный характер разрушения вала. Выбранный для примера объект исследования оказался удачной моделью для описания процессов, происходящих при работе вращающихся систем, подверженных сложному температурному нагружению.

Таким образом, предложенный подход к решению задачи может иметь другие важные практические приложения при анализе режимов работы подобных указанных систем, в частности в металлургической и машиностроительной отраслях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-08-00783 и 18-08-00201.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Keanini R.G.** Inverse estimation of surface heat flux distributions during high speed rolling using remote thermal measurements // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. No. 2. Pp. 275–285.
2. **Khan O.U., Jamal A., Arshed G.M., Arif A.F.M., Zubair S.M.** Thermal analysis of a cold rolling process – a numerical approach // *Numerical Heat Transfer. Part A: Applications*. 2004. Vol. 46. No. 6. Pp. 613–632.
3. **Benasciutti D.** On thermal stress and fatigue life evaluation in work rolls of hot rolling mill // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2012. Vol. 47. No. 5. Pp. 297–312.
4. **Saxena A., Sahai Y.** Modeling of fluid flow and heat transfer in twin-roll casting of aluminum alloys // *Materials Transactions*. 2002. Vol. 43. No. 2. Pp. 206–213.
5. **Lai W.B., Chen T.C., Weng C.I.** Transient thermal stresses of work roll by coupled thermoelasticity // *Computational Mechanics*. 1991. Vol. 9. No. 1. Pp. 55–71.
6. **Saxena A., Sahai Y.** Modeling of thermo-mechanical stresses in twin-roll casting of aluminum alloys // *Materials Transactions*. 2002. Vol. 43. No. 2. Pp. 214–221.
7. **Serajzadeh S.** Effects of rolling parameters on work-roll temperature distribution in the hot rolling of steels // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2008. Vol. 35. No. 9–10. Pp. 859–866.
8. **Benasciutti D., Brusa E., Bazzaro G.** Finite elements prediction of thermal stresses in work roll of hot rolling mills // *Procedia Engineering*. 2010. Vol. 2. No. 1. Pp. 707–716.
9. **Toparli M., Sen F., Culha O., Celic E.** Thermal stress analysis of HVOF sprayed WC–Co/NiAl multilayer coatings on stainless steel substrate using finite element methods // *Journal of Materials Processing Technology*. 2007. Vol. 190. No. 1. Pp. 26–32.
10. **Li C., Yu H., Deng G., Liu X., Wang G.** Numerical simulation of temperature field and thermal stress field of work roll during hot strip rolling // *Journal of Iron and Steel Research International*. 2007. Vol. 14. No. 5. Pp. 18–21.
11. **Tudor A., Radulescu C., Petre I.** Thermal effect of the brake shoes friction on the wheel/rail contact // *Tribology in Industry*. 2003. Vol. 25. No. 1–2. Pp. 27–32.
12. **Johnson R.E., Keanini R.G.** An asymptotic model of work roll heat transfer in strip rolling // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. No. 6. Pp. 871–879.
13. **Dünckelmeyer M., Krempaszky C., Werner E., Hein G., Schörkhuber K.** Analytical modeling of thermo-mechanically induced residual stresses of work rolls during hot rolling // *Steel Research International. Metal Forming*. 2010. Vol. 81. No. 9. Pp. 697–802.
14. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** A semi-analytical finite element approach in machine design of axisymmetric structures // *Intech Open Access Publisher*. 2011. Pp. 71–96.
15. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** Work roll in hot strip rolling: A semianalytical approach for estimating temperatures and thermal stresses // *Proceedings of 9th International Conference on Advanced Manufacturing Systems and Technology (AMST 11)*. 2011. Pp. 395–406.
16. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** An harmonic 1d-element for nonlinear analysis of axisymmetric structures: The case of hot rolling // *Pan-American Congress on Computational Mechanics “PANACM 2015”. XI Argentine Congress on Computational Mechanics “MECOM 2015”*. S. Idelsohn, V. Sonzogni, A. Coutinho, et al. (Eds). 2015. Pp. 1–12.
17. **Sun C.G., Yun C.S., Chung J.S., Hwang S.M.** Investigation of thermomechanical behavior of a work roll and of roll life in hot strip rolling // *Metallurgical and Materials Transactions. A*. 1998. Vol. 29. No. 9. Pp. 2407–2424.
18. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Н.** Теория упругости. Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1975. 263 с.
19. **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

Статья поступила в редакцию 04.10.2018, принята к публикации 26.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПОЛЯНСКИЙ Сергей Владимирович — стажер-исследователь Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.

svpolyanskiy@gmail.com



БЕЛЯЕВ Александр Константинович — доктор физико-математических наук, директор Института проблем машиноведения Российской академии наук; профессор кафедры механики и процессов управления Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vice.ipme@gmail.com

REFERENCES

- [1] **R.G. Keanini**, Inverse estimation of surface heat flux distributions during high speed rolling using remote thermal measurements, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 41 (2) (1998) 275–285.
- [2] **O.U. Khan, A. Jamal, G.M. Arshed, et al.**, Thermal analysis of a cold rolling process – A numerical approach, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 46 (6) (2004) 613–632.
- [3] **D. Benasciutti**, On thermal stress and fatigue life evaluation in work rolls of hot rolling mill, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 47 (5) (2012) 297–312.
- [4] **A. Saxena, Y. Sahai**, Modeling of fluid flow and heat transfer in twin-roll casting of aluminum alloys, *Materials Transactions*. 43 (2) (2002) 206–213.
- [5] **W.B. Lai, T.C. Chen, C.I. Weng**, Transient thermal stresses of work roll by coupled thermoelasticity, *Computational Mechanics*. 9 (1) (1991) 55–71.
- [6] **A. Saxena, Y. Sahai**, Modeling of thermo-mechanical stresses in twin-roll casting of aluminum alloys, *Materials Transactions*. 43 (2) (2002) 214–221.
- [7] **S. Serajzadeh**, Effects of rolling parameters on work-roll temperature distribution in the hot rolling of steels, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 35 (9–10) (2008) 859–866.
- [8] **D. Benasciutti, E. Brusa, G. Bazzaro**, Finite elements prediction of thermal stresses in work roll of hot rolling mills, *Procedia Engineering*. 2 (1) (2010) 707–716.
- [9] **M. Toparli, F. Sen, O. Culha, E. Celic**, Thermal stress analysis of HVOF sprayed WC–Co/NiAl multilayer coatings on stainless steel substrate using finite element methods, *Journal of Materials Processing Technology*. 190 (1) (2007) 26–32.
- [10] **C. Li, H. Yu, G. Deng, et al.**, Numerical simulation of temperature field and thermal stress field of work roll during hot strip rolling, *Journal of Iron and Steel Research, International*. 14 (5) (2007) 18–21.
- [11] **A. Tudor, C. Radulescu, I. Petre**, Thermal effect of the brake shoes friction on the wheel/rail contact, *Tribology in Industry*. 25 (1–2) (2003) 27–32.
- [12] **R.E. Johnson, R.G. Keanini**, An asymptotic model of work roll heat transfer in strip rolling, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 41 (6) (1998) 871–879.
- [13] **M. Dünckelmeyer, C. Krempaszy, E. Werner, et al.**, Analytical modeling of thermo-mechanically induced residual stresses of work rolls during hot rolling, *Steel Research International, Metal Forming*. 81 (9) (2010) 697–802.
- [14] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, A semi-analytical finite element approach in machine design of axisymmetric structures, *Intech Open Access Publisher*. (2011) 71–96.
- [15] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, Work roll in hot strip rolling: a semianalytical approach for estimating temperatures and thermal stresses, *Proceedings of 9th International Conference on Advanced Manufacturing Systems and Technology (AMST 11)* (2011) 395–406.
- [16] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, An harmonic 1d-element for nonlinear analysis of axisymmetric structures: The case of hot rolling, *Pan-American Congress on Computational Mechanics – PANACM 2015*, In conjunction with the 11th Argentine Congress on Computational Mechanics – MECOM 2015, S. Idelsohn, V. Sonzogni, A. Coutinho, et al. (Eds). (2015) 1–12.
- [17] **C.G. Sun, C.S. Yun, J.S. Chung, S.M. Hwang**, Investigation of thermomechanical behavior of a work roll and of roll life in hot strip rolling, *Metallurgical and Materials Transactions A*. 29 (9) (1998) 2407–2424.
- [18] **S.P. Timoshenko, J.N. Goodier**, *Theory of elasticity*. New-York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Comp., Inc. 1951.
- [19] **A.I. Lurie**, *Theory of elasticity*, Springer, 2010.

THE AUTHORS

POLYANSKIY Sergey V.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS

61 Bolshoi Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

svpolyanskiy@gmail.com

BELYAEV Alexander K.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vice.ipme@gmail.com



АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алексеев Ю.И.	105	Пашкевич Д.С.	105
Аниконов Д.С.	50	Петров В.Б.	105
Беляев А.К.	156	Политова Г.А.	28
Веневцев И.Д.	11	Полянский С.В.	156
Виноградова М.В.	96	Прудников Д.В.	73
Ганин М.А.	28	Рави Кумар	28
Гарибин Е.А.	11	Родный П.А.	11
Гусев Е.С.	117	Савин В.Н.	87
Давыдов Ю.И.	11	Самодуров О.Ю.	73
Долгих Г.И.	117	Серебров А.П.	61, 73
Зайцев Д.К.	39	Смирнов Е.М.	39
Каминская Т.П.	28	Соловьев К.В.	96
Капустин В.В.	105	Степанов В.А.	87
Карпенков А.Ю.	28	Федотов А.В.	142
Киселев К.В.	128	Филимонов А.В.	28
Коновалова Д.С.	50	Фролов М.Е.	128
Коптюхов А.О.	73	Чистякова О.И.	128
Лямкин В.А.	61,73	Чупин В.А.	117
Мухортов Д.А.	105	Шадрин М.В.	87
Онегин М.С.	61, 73		

Научное издание

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

**«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL.
PHYSICS AND MATHEMATICS»
TOM 12, № 1, 2019**

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-51457 от 19.10.2012 г.

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.М. Капранова* – ответственный секретарь
канд. физ.-мат. наук *О.А. Яцуржинская* – научный редактор, корректор
А.С. Колгатина – переводчик
Н.А. Бушманова – технический секретарь

Телефон редакции 294-22-85

Сайт <http://ntv.spbstu.ru>

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *Н.А. Бушмановой*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать 25.03.2019. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 21,6. Уч.-изд. л. 21,6. Тираж 1000. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного
Отделом научных изданий в Издательско-полиграфический центр
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
Адрес университета: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ
в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под двойными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 01.02.04, 01.02.05, 01.04.01, 01.04.02, 01.04.03, 01.04.04, 01.04.05, 01.04.06, 01.04.07, 01.04.10, 01.04.15, 01.04.21.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНТИ РАН, а также в международную систему по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word**.

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Рисунки представляются только в черно-белом варианте. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без переносов. Абзацный отступ – 1 см.

2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (<http://journals.spbstu.ru>). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

2.3. Рассмотрение материалов

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться ДОСРОЧНО.

Более подробную информацию можно получить по телефону редакции:

(812) 294-22-85 с 10.00 до 18.00 – Бушманова Наталья Александровна

или по e-mail: physics@spbstu.ru