Математическая физика

DOI: 10.18721/JPM.12203
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТОМСОНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]
[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Статья продолжает цикл работ, посвященный изучению электронно- и ионно-оптических свойств электрических и магнитных полей, представимых в аналитической форме. Целью исследования является поиск альтернативных рецептов для генерирования новых аналитических решений трехмерного уравнения Лапласа и, в частности, для генерирования трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру. Рассматриваются обобщения широко известной алгебраической формулы Томсона (преобразование Кельвина), которые используют линейные алгебраические формы с частными производными первого порядка. Приведен исчерпывающий список симметризованных однородных дифференцирующих выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Дано обобщение полученных трехмерных формул на случай произвольного (конечного) числа измерений.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, уравнение Лапласа, формула Томсона

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203

GENERALIZATION OF THE THOMSON FORMULA FOR GENERAL HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]
[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;
[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The paper continues the investigation of electron and ion optical properties of electric and magnetic fields which can be represented in an analytical form. The target of this research is new recipes for generating analytical solutions of 3D Laplace equation, in particular, for generating 3D harmonic functions which are homogeneous in Euler terms. Linear algebraic expressions with first order partial derivatives which generalize the widely known Thomson formula (Kelvin transformation), are analyzed. The paper provides an exhaustive list of symmetric and homogeneous first order differentiating expressions that convert an arbitrary 3D harmonic function into some new 3D harmonic functions. The produced 3D expressions are generalized for the *n*-dimensional case.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, Laplace's equation, Thomson formula

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203

Введение

Формула Томсона [1 – 3] для трехмерных гармонических функций является уникальным инструментом. Любая другая формула подобного типа может отличаться от оригинальной формулы Томсона лишь тривиальной заменой переменных, представленной в виде суперпозиции сдвигов, отражений, вращений и пропорциональных растяжений координат. Опишем действие формулы Томсона более подробно.

Если $U(x,y,z)$ есть произвольная гармоническая функция трех переменных, т. е. она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \quad (1)$$

(здесь и далее нижние индексы, составленные из символов x, y, z, обозначают частные производные по соответствующим переменным), то функция

$$V\left(x,y,z\right) = \frac{1}{r} U\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тоже будет гармонической [1, 2]. Повторное использование формулы (2) осуществляет обратный переход от функции $V(x,y,z)$ к функции $U(x,y,z)$. Удостовериться в гармоничности функции V, полученной из уравнения (2) (если функция U будет гармонической), можно с помощью тождества

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv \frac{1}{r^5}\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right),$$

где функция V задается выражением (2), а функция U – произвольная.

Замена переменных, использованная для аргументов функции U в формуле (2), представляет собой инверсию в шаре единичного радиуса с центром в начале координат. Формула (2) известна как формула Томсона по имени ее автора – выдающегося британского физика и механика Уильяма Томсона, лорда Кельвина [3 – 5]; иногда эту формулу также называют преобразованием Кельвина [1, 6 – 10]. Трансформация (2) сохраняет гармоничность функции и может, в частности, использоваться не только при решении краевых задач с условием Дирихле, когда внутренняя задача Дирихле преобразуется во внешнюю и наоборот, но и при генерировании новых аналитических решений для скалярных потенциалов электростатических и магнитостатических полей, которые оказываются полезными при синтезе электронно- и ионно-оптических систем [11 – 13].

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида являются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [14 – 18]. Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [19, 20], откуда и следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц и использующих однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля.

Как правило, такие поля характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом, представляющим собой функцию, однородную (точнее, положительно однородную) по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [21, 22]:

$$\forall\lambda > 0:\; U\left(\lambda x, \lambda y, \lambda z\right) \equiv \lambda^k U\left(x,y,z\right), \quad (3)$$

где k – степень однородности скалярной функции (она не обязательно целочисленная) и, соответственно, степень однородности поля.

Возможные исключения, когда скалярный потенциал однородного поля не является однородной функцией, исследуются в статье [23].

Если $U(x,y,z)$ – гармоническая и однородная по Эйлеру функция со степенью однородности k, то гармоническая функция $V(x,y,z)$, вычисленная согласно правилу (2), также будет однородной по Эйлеру со степенью однородности $(-k-1)$. Повторное использование трансформации (2) осуществляет обратный переход от функции $V(x,y,z)$ к функции $U(x,y,z)$. Поэтому для каждой гармонической функции, однородной по Эйлеру со степенью однородности k, обязательно существует гармонический прототип со степенью однородности $(-k - 1)$, из которого ее можно получить с помощью формулы (2). В сочетании с операцией дифференцирования по переменным x, y, z, которая является универсальным способом получения новых гармонических однородных функций с понижением степени однородности [24, 25], формула Томсона (2) позволяет получать алгебраически-дифференциальные формулы общего вида для трехмерных гармонических однородных функций с любыми целочисленными степенями однородности [24, 26]. В качестве исходной точки используется формула Донкина для трехмерных гармонических однородных функций нулевой степени [16, 17, 24, 27 – 31]. Более подробно этот вопрос исследуется в работах [24, 26].

Для однородных по Эйлеру функций U, удовлетворяющих тождеству (3), общий множитель $1/r^2$ в формуле (2) выносится наружу из-под аргументов функции. Тогда формула (2) принимает упрощенный вид (см. трактат У. Томсона [5], приложение Б к главе 1):

$$V(x,y,z) = r^{-2k-1}U(x,y,z). \tag{4}$$

Можно убедиться, что при подстановке в формулу (4) однородной функции U функция (4) будет однородной. Гармоничность функции V, вычисленной в соответствии с правилом (4), следует из тождества

$$\begin{gathered} V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv r^m(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + \\ + 2mr^{m-2}(xU_x + yU_y + zU_z - kU) + \\ + m(m+2k+1)r^{m-2}U, \end{gathered} \tag{5}$$

справедливого для функций вида $V(x,y,z) = r^mU(x,y,z)$ с произвольным показателем степени m и произвольной функцией U. Действительно, правая часть тождества (5) при $m = 0$ и $m = -2k - 1$ обращается в нуль, так как функция U должна удовлетворять уравнению Лапласа (1) и дифференциальному соотношению Эйлера для однородных функций [21, 22]:

$$xU_x + yU_y + zU_z = kU. \tag{6}$$

Задачей данной работы является поиск альтернативных рецептов для генерирования новых аналитических решений уравнения Лапласа и, в частности, для генерирования трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру.

Уникальность алгебраической формулы Томсона

Рассмотрим трансформацию трехмерной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = S(x,y,z)\times \\ \times U\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big), \end{gathered} \tag{7}$$

где S, f, g, h – некоторые фиксированные функции.

Здесь можно ограничиться линейными по U алгебраическими выражениями, поскольку уравнение Лапласа (1) обладает свойством линейности и линейная суперпозиция его решений с постоянными коэффициентами снова является решением.

Потребуем, чтобы для любых гармонических функций U выражение (7) было гармонической функцией. После подстановки выражения (7) в уравнение Лапласа (1) результат представляет собой линейную комбинацию, составленную из частных производных U, U_x, U_y, U_z, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz}. Поскольку функция U является гармонической, то производная U_{zz} может быть выражена через частные производные U_{xx} и U_{yy}:

$$U_{zz} = -U_{xx} - U_{yy}. \tag{8}$$

Возникает вопрос, можно ли рассматривать остальные частные производные как независимые. Ответ будет положительным: задача Коши для уравнения Лапласа (1) с начальными условиями

$$U(x,y,z_0) = U^{(0)}(x,y),$$
$$U_z(x,y,z_0) = U^{(n)}(x,y),$$

поставленная для плоскости $z = z_0$, разрешима при любых начальных значениях $U^{(0)}(x,y)$ и $U^{(n)}(x,y)$, по крайней мере, в некоторой окрестности плоскости $z = z_0$. Например, таким решением будет ряд Тейлора по переменной z, где все коэффициенты однозначным образом выражаются через функции $U^{(0)}(x,y)$, $U^{(n)}(x,y)$ и их производные по x, y. Поэтому производные от функций $U^{(0)}(x,y)$ и $U^{(n)}(x,y)$ по переменным x и y, вычисленные в фиксированной точке, будут независимыми числами.

Следовательно, если никаких дополнительных ограничений на гармоническую функцию U не накладывается, то в итоговой линейной комбинации частных производных от функции U, получившейся после подстановки условия (8), оставшиеся частные производные следует считать независимыми, а каждый из множителей, сгруппированных перед этими частными производными, обязан быть нулем. В набор независимых частных производных входят смешанные производные любого порядка по x, y, но лишь нулевого и первого порядка по z. Это правило выполняется не только для производных не выше второго порядка, которые используются в рассматриваемой линейной комбинации, но и в общем случае (см. следующий раздел).

В результате для неизвестных функций S, f, g, h в предположении, что $S(x,y,z) \neq 0$, получается система из девяти уравнений в частных производных:

$$
\begin{gathered}
f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = 0, \\
f_x h_x + f_y h_y + f_z h_z = 0, \\
g_x h_x + g_y h_y + g_z h_z = 0, \\
f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \\
g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \\
S\left(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\right) + \\
+2S_x f_x + 2S_y f_y + 2S_z f_z = 0, \\
S\left(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}\right) + \\
+2S_x g_x + 2S_y g_y + 2S_z g_z = 0, \\
S\left(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}\right) + \\
+2S_x h_x + 2S_y h_y + 2S_z h_z = 0, \\
S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Эта система уравнений является переопределенной (уравнений больше, чем неизвестных функций) и поэтому, вообще говоря, может не иметь решений [32 – 38]. Однако факт существования формулы Томсона (2) гарантирует, что у системы (9) имеются интересующие нас невырожденные решения, отличные от нуля.

Первые пять уравнений системы (9) означают, что взаимно-однозначное, непрерывно дифференцируемое отображение

$$
\begin{gathered}
x' = f(x, y, z),\ y' = g(x, y, z), \\
z' = h(x, y, z)
\end{gathered} \tag{10}
$$

является конформным, т. е. локально сохраняет углы между линиями в точке их пересечения независимо от расположения этих линий, и преобразует бесконечно малые отрезки в пропорциональные бесконечно малые отрезки с коэффициентом пропорциональности, который не зависит от направления. Такое отображение сохраняет форму бесконечно малых фигур, но не сохраняет длину линий, их кривизну, а также глобальную форму фигур и, возможно, ориентацию локального базиса [39, 40].

Для двумерной плоскости семейство конформных преобразований весьма разнообразно и, по сути, совпадает с семейством аналитических функций одного комплексного переменного [41 – 45]. Однако для размерности три и выше это не так: теорема Лиувилля о конформных отображениях в евклидовых пространствах (см. работы [46 – 52]) постулирует, что в этих случаях семейство конформных отображений совпадает с группой преобразований Мёбиуса [53 – 55] и что других многомерных конформных отображений не имеется. К сожалению, элементарного доказательства этой важной теоремы найти не удалось; по-видимому, самое простое доказательство содержится в работе [52].

Группа Мёбиуса в общем случае представляет собой группу, порождаемую следующими элементарными преобразованиями и их суперпозициями:

а) сдвиги (параллельный перенос),

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c;$$

б) трехмерные вращения вокруг неподвижной точки [56, раздел 14.10];

в) отражения относительно гиперплоскостей, в частности элементарные симметрии

$$x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z;$$

г) пропорциональное растяжение по всем координатам относительно некоторого центра

$$x' = kx,\ y' = ky,\ z' = kz$$

(здесь в качестве центра используется начало координат);

д) инверсия относительно сферы,

$$
\begin{gathered}
x' = xr_0^2/(x^2+y^2+z^2), \\
y' = yr_0^2/(x^2+y^2+z^2), \\
z' = zr_0^2/(x^2+y^2+z^2)
\end{gathered}
$$

(здесь r_0 – радиус сферы, а в качестве центра сферы используется начало координат).

Не все перечисленные здесь преобразования являются независимыми. Так например, растяжение можно заменить двумя последовательными инверсиями относительно сфер с общим центром, но разными радиусами, а отражения относительно гиперплоскостей $x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$ можно заменить растяжением с коэффициентом масштабирования -1 в комбинации с поворотом на 180° относительно одной из координатных осей.

Для двумерного случая, наиболее типичного для практических приложений, группа Мёбиуса совпадает с группой дробно-линейных конформных преобразований, к которой добавлены комплексно-сопряженные дробно-линейные конформные преобразования (антиконформные, если под конформными преобразованиями понимать такие, которые сохраняют не только значения локальных углов, но и их направление, т. е. ориентацию локального базиса).

Можно показать, что любой элемент группы Мёбиуса приводится к одному из двух возможных видов:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \frac{\lambda A(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2}, \tag{11}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \lambda A(\mathbf{r}-\mathbf{a}), \tag{12}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор (вообще говоря, n-мерный) для исходной точки; $\mathbf{r}'$ – радиус-вектор для преобразованной точки; $\mathbf{a}$ – исходный центр геометрического преобразования; $\mathbf{b}$ – конечное расположение центра геометрического преобразования; λ – коэффициент растяжения (вещественное число); A – ортогональная матрица, удовлетворяющая условию $AA^T = A^TA = E$ и описывающая поворот в n-мерном пространстве относительно начала координат (возможно, с изменением ориентации локального базиса, если определитель матрицы A равен -1).

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что композиция геометрического преобразования (11) либо (12) с каждым из элементарных преобразований группы Мёбиуса, перечисленных выше, снова приводится либо к эталонному виду (11), либо к эталонному виду (12).

Трехмерные геометрические преобразования вида (11) или (12) очевидным образом раскладываются на суперпозицию элементарных преобразований в виде начального сдвига, инверсии с центром в начале координат (для преобразования (11)), трехмерных вращений вокруг начала координат [56, раздел 14.10] (возможно, в комбинации с одной из симметрий, изменяющих ориентацию системы), пропорционального растяжения относительно начала координат и окончательного сдвига к новому центру. При сдвиге, вращении, симметричном отражении и пропорциональном растяжении аргументов гармоническая функция U остается гармонической, так что в этих случаях множитель $S(x,y,z)$ для формулы (7) будет равен единице (точнее, произвольной константе, как это следует из системы уравнений (9)). В случае инверсии с центром в начале координат множитель $S(x,y,z)$ для формулы (7) с точностью до константы-множителя определяется в соответствии с формулой Томсона (2), и система уравнений (9) подтверждает, что этот множитель единственный.

Последовательное выполнение этих преобразований, когда конформное преобразование (10) записано в форме (11) либо (12), дает окончательное решение для проблемы нахождения алгебраических формул вида (7), сохраняющих свойство гармоничности. Если же требуется, чтобы однородная по Эйлеру гармоническая функция преобразовывалась в однородную же гармоническую функцию, то с точностью до поворота и пропорционального растяжения аргументов x, y, z относительно начала координат, а также с точностью до умножения значений потенциала во всех точках пространства на константу, ответом будет либо формула Томсона (2), либо тождественное равенство $V(x,y,z) = U(x,y,z)$. Доказательство уникальности формулы Томсона (2) можно найти также в книгах [8, 10].

Расширенная форма с привлечением первых производных

Отсутствие у чисто алгебраической трансформации (7) других содержательных решений, кроме классической формулы Томсона (2), заставляет искать другие способы генерирования новых гармонических функций. Рассмотрим трансформацию трехмерной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом

$$\begin{aligned} V(x,y,z) = {} & \\ = S(x,y,z)\cdot U\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) & + \\ + P(x,y,z)\cdot U_x\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) & + \\ + Q(x,y,z)\cdot U_y\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) & + \\ + R(x,y,z)\cdot U_z\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) & , \end{aligned} \tag{13}$$

где S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции, U – произвольная гармоническая функция.

Как и раньше, потребуем, чтобы для заданных функций S, P, Q, R, f, g, h и любых гармонических функций U выражение (13) было гармонической функцией. Чтобы гарантировать, что функция (13) будет однородной функцией при однородных функциях U, потребуем, чтобы функции S, P, Q, R, f, g, h тоже были однородными по Эйлеру (легко убедиться, что такое требование будет не только достаточным, но и необходимым). А чтобы избавиться от излишней в нашем случае свободы выбора в виде трехмерных поворотов вокруг начала координат, ограничимся, по аналогии с формулой (2), случаем, когда

$$f(x,y,z) = x\varphi(x,y,z),$$
$$g(x,y,z) = y\varphi(x,y,z),$$
$$h(x,y,z) = z\varphi(x,y,z),$$

где общий множитель $\varphi(x,y,z)$ – это функция, однородная по Эйлеру.

Следует, однако, помнить, что здесь есть опасность отбросить какие-либо по-настоящему интересные решения, а не только вращения.

Однородные функции φ, S, P, Q, R удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= r^m\omega(x/r,\ y/r),\\
S(x,y,z) &= r^n s(x/r,\ y/r),\\
P(x,y,z) &= r^{n+m+1}u(x/r,\ y/r),\\
Q(x,y,z) &= r^{n+m+1}v(x/r,\ y/r),\\
R(x,y,z) &= r^{n+m+1}w(x/r,\ y/r),
\end{aligned} \tag{14}$$

где m – степень однородности общего множителя для аргументов функции U; n – степень однородности множителя перед самой функцией U; $\omega(\chi,\eta)$, $s(\chi,\eta)$, $u(\chi,\eta)$, $v(\chi,\eta)$, $w(\chi,\eta)$ – некоторые, пока неизвестные, функции двух переменных.

Такая форма записи является слегка измененной формой универсального представления [21, 22] для однородных функций степени k:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1^k g\left(x_2/x_1, \ldots x_n/x_1\right) \tag{15}$$

и не приводит к потере допустимых решений. Важно, что замена переменных, использованная при конструировании подстановки (14), является обратимой:

$$\begin{cases}
\chi = x\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\eta = y\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},
\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}
x = \chi\rho,\\
y = \eta\rho,\\
z = \pm\rho\sqrt{1-\chi^2-\eta^2}.
\end{cases}$$

После подстановки формул (13) в уравнение Лапласа (1) результат будет представлять собой линейную комбинацию с некоторыми, не зависящими от U, множителями, составленную из частных производных

$$U,\ U_x,\ U_y,\ U_z,\ U_{xx},$$
$$U_{yy},\ U_{zz},\ U_{xy},\ U_{xz},\ U_{yz},$$
$$U_{xxx},\ U_{xxy},\ U_{xxz},\ U_{xyy},\ U_{xyz},$$
$$U_{xzz},\ U_{yyy},\ U_{yyz},\ U_{yzz},\ U_{zzz}.$$

Поскольку функция U является гармонической, некоторые из этих производных можно выразить через другие:

$$U_{zz} = -U_{xx} - U_{yy},\ U_{xzz} = -U_{xxx} - U_{xyy},$$
$$U_{zzy} = -U_{xxy} - U_{yyy},\ U_{zzz} = -U_{xxz} - U_{yyz}.$$

Рассуждения, использованные в предыдущем разделе, показывают, что оставшиеся частные производные следует рассматривать как независимые. Поэтому после подстановки в полученную линейную комбинацию приведенных выше выражений для зависимых производных

$$U_{zz},\ U_{xzz},\ U_{yzz},\ U_{zzz}$$

и выделения общих множителей перед оставшимися частными производными, каждый из получившихся множителей должен оказаться тождественно равным нулю.

Получающаяся система уравнений в частных производных относительно неизвестных функций

$$\omega(\chi,\eta),\ s(\chi,\eta),\ u(\chi,\eta),\ v(\chi,\eta),\ w(\chi,\eta)$$

оказывается переопределенной. Она имеет достаточно сложный вид, и в связи с этим она здесь не приводится в явном виде. Из тех же соображений нами был опущен анализ совместности полученной системы уравнений и ее решений, так как он является весьма громоздким и, кроме стандартных технических приемов, ничего нового не содержит.

Анализ данной системы с помощью соответствующих методов [32 – 38] приводит к следующим решениям, исчерпывающим все возможные случаи:

а) при $m = 0$ и $n = -1$ либо $m = -2$ и $n = 0$

$$\omega(\chi,\eta) = c,\ s(\chi,\eta) = 0,$$

$$u(\chi,\eta) = c_a,\ v(\chi,\eta) = c_b,\ w(\chi,\eta) = c_c,$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

б) при $m = 0$ и $n = 1$ либо $m = n = -2$

$$\omega(\chi,\eta) = c, s(\chi,\eta) = (c_a / c)\chi + (c_b / c)\eta + (c_c / c)\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

$$u(\chi,\eta) = c_a(-1+2\chi^2) + 2c_b\chi\eta + 2c_c\chi\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

$$\nu(\chi,\eta) = 2c_a\chi\eta + c_b(-1+2\eta^2) + 2c_c\eta\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

$$w(\chi,\eta) = 2c_a\chi\sqrt{1-\chi^2-\eta^2} + 2c_b\eta\sqrt{1-\chi^2-\eta^2} + c_c(1-2\chi^2-2\eta^2),$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

в) при $m = n = 0$ либо $m = -2$ и $n = -1$

$$\omega(\chi,\eta) = c, s(\chi,\eta) = c_e,$$

$$u(\chi,\eta) = c_d\chi + c_c\eta - c_b\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

$$v(\chi,\eta) = -c_c\chi + c_d\eta + c_a\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

$$w(\chi,\eta) = c_b\chi - c_a\eta + c_d\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

где c, c_a, c_b, c_c, c_d, c_e – произвольные константы.

В итоге получается список из базовых формул, которые преобразуют исходные гармонические функции в новые гармонические функции:

$$V(x,y,z) = U(x,y,z), \tag{16}$$

$$V(x,y,z) = U_x(x,y,z), \tag{17}$$

$$V(x,y,z) = U_y(x,y,z), \tag{18}$$

$$V(x,y,z) = U_z(x,y,z), \tag{19}$$

$$V(x,y,z) = xU(x,y,z) + (x^2-y^2-z^2)U_x(x,y,z) + 2xyU_y(x,y,z) + 2xzU_z(x,y,z); \tag{20}$$

$$V(x,y,z) = yU(x,y,z) + 2xyU_x(x,y,z) + (-x^2+y^2-z^2)\times U_y(x,y,z) + 2yzU_z(x,y,z); \tag{21}$$

$$V(x,y,z) = zU(x,y,z) + 2xzU_x(x,y,z) + 2yzU_y(x,y,z) + (-x^2-y^2+z^2)U_z(x,y,z); \tag{22}$$

$$V(x,y,z) = xU_x(x,y,z) + yU_y(x,y,z) + zU_z(x,y,z); \tag{23}$$

$$V(x,y,z) = yU_x(x,y,z) - xU_y(x,y,z); \tag{24}$$

$$V(x,y,z) = zU_x(x,y,z) - xU_z(x,y,z); \tag{25}$$

$$V(x,y,z) = zU_y(x,y,z) - yU_z(x,y,z); \tag{26}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{27}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{28}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{29}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{30}$$

$$V(x,y,z) = \frac{x}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{x^2-y^2-z^2}{r^5}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xy}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xz}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{31}$$

$$V(x,y,z) = \frac{y}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xy}{r^5}U_x(v) + \frac{-x^2+y^2-z^2}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2yz}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{32}$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+ \\ +\frac{2xz}{r^5}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+ \\ +\frac{2yz}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+ \\ +\frac{-x^2-y^2+z^2}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (33)$$

$$V(x,y,z)=\frac{x}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+ \\ +\frac{y}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+\frac{z}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (34)$$

$$V(x,y,z)=\frac{y}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)- \\ -\frac{x}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (35)$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)- \\ -\frac{x}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (36)$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)- \\ -\frac{y}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right), \quad (37)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Формулы (16) − (19) тривиальны, однако по формальным причинам все же включены в этот список. Происхождение формул (20) − (22) на первый взгляд не очевидно, но можно заметить, что они получаются из формулы Томсона (2) после ее дифференцирования по одной из переменных x, y, z и повторного преобразования Томсона (2), которое возвращает аргументы функции U к прежнему виду.

Формулы (24) − (26) упоминаются в монографии [24], но почему-то лишь применительно к однородным гармоническим функциям нулевой степени. Формула (23), как и формулы (20) − (22), до настоящего момента авторам не встречалась (что, конечно, не означает, что таких ссылок нет).

Формулы (27) − (37) получаются из формул (16) − (26) с помощью преобразования Томсона. В частности, формула (27) получается из тождественного преобразования (16) и в силу этого совпадает с формулой (2).

В отличие от оригинальной формулы Томсона, повторное применение дифференцирующих преобразований (16) − (37) не возвращает преобразуемые функции к исходному виду. Однако некоторые комбинации преобразований (16) − (37) могут оказаться тождеством либо снова одной из указанного набора формул. Это связано с тем, что старшие производные от функции U, возникающие при комбинировании дифференцирующих преобразований (16) − (37), могут в конечном итоге сократиться, так как функция U удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для однородных по Эйлеру функций формулы (16) и (23) − (26) сохраняют степень однородности функции. Формулы (17) − (19) понижают степень однородности функции на единицу, а формулы (20) − (22) повышают степень однородности функции на единицу. Соответственно, однородные функции степени k преобразуются формулами (27) и (34) − (37) в однородные функции степени $(-k-1)$, формулами (28) − (30) − в однородные функции степени $(-k)$, а формулами (31) − (33) − в однородные функции степени $(-k-2)$.

Как и формула (16), применительно к гармоническим функциям, однородным по Эйлеру, формулы (23) и (34) вполне бесполезны. Из дифференциального соотношения Эйлера (6) для однородных функций [21, 22] следует, что результатом применения формулы (23) будет та же самая однородная гармоническая функция, только умноженная на константу (степень однородности). Соответственно, результат применения формулы (34) эквивалентен действию формулы (27), умноженной на константу.

Обобщение на случай *n* переменных

Известно, что формула Томсона (2) для трехмерных гармонических функций допускает обобщение на многомерный случай [7, 9]. Если

$$V(x_1,x_2,\dots x_n)=\frac{1}{r^{n-2}}U\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right), \quad (38)$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, а функция U −

гармоническая (удовлетворяет n-мерному уравнению Лапласа), то функция V также будет гармонической. Результатом подстановки в уравнение Лапласа функции

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{1}{r^m}U\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^m}U^*\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

будут цепочка равенств

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m}U^*\right)=U^*\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m}\right)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^m}\right)+\frac{1}{r^m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_i^2};$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{-2x_ix_k}{r^4}\right)+\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{1}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_i^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{-2x_k}{r^4}+\frac{8x_i^2x_k}{r^6}\right)+\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{-2x_i}{r^4}\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_s}\left(\frac{4x_i^2x_kx_s}{r^8}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_i}\left(\frac{-2x_ix_k}{r^6}\right)+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{-2x_i}{r^4}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_i}\left(\frac{-2x_ix_k}{r^6}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}\frac{1}{r^4};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^m}\right)=\frac{-mx_i}{r^{m+2}};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m}\right)=\frac{-m}{r^{m+2}}+\frac{m(m+2)x_i^2}{r^{m+4}},$$

где в качестве аргументов для функции U используются значения

$$x_1/r^2,\ x_2/r^2,\ \dots,\ x_n/r^2.$$

В конечном счете, поскольку $\sum\limits_{i=1,n}x_i^2=r^2$, на выходе получается тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{U^*}{r^m}\right)=\frac{m(m+2-n)}{r^{m+2}}U+$$

$$+\frac{2(m+2-n)}{r^{m+4}}\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial U}{\partial x_k}+\frac{1}{r^{m+4}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2},$$

правая сторона которого для гармонических функций U обращается в нуль при $m = n - 2$. Следует отметить, что формула (38) остается справедливой, в том числе и при $n = 2$, когда она оказывается частным случаем конформного преобразования плоскости (точнее, антиконформного, т. е. с изменением направления отсчета углов):

$$V(x,y)=U\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Формулы с участием частных производных первого порядка из предыдущего раздела также переносятся на многомерный случай:

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right);\quad (39)$$

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_i};\quad (40)$$

$$\begin{gathered}V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=(n-2)x_iU\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)+\\+\left(2x_i^2-r^2\right)\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_i}+\\+\sum_{k\neq i}2x_ix_k\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_k};\end{gathered}\quad (41)$$

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\sum_{k}x_k\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_k};\quad (42)$$

$$\begin{gathered}V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=x_i\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_j}-\\-x_j\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)}{\partial x_i};\end{gathered}\quad (43)$$

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{1}{r^{n-2}}U\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right);\quad (44)$$

$$V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right);\quad (45)$$

$$\begin{gathered}V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{(n-2)x_i}{r^n}U\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right)+\\+\frac{\left(2x_i^2-r^2\right)}{r^{n+2}}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right)+\\+\sum_{k\neq i}\frac{2x_ix_k}{r^{n+2}}\frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right);\end{gathered}\quad (46)$$

$$\begin{gathered}V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\\=\sum_{k}\frac{x_k}{r^n}\frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right);\end{gathered}\quad (47)$$

$$\begin{gathered}V\left(x_1,x_2,\dots x_n\right)=\frac{x_i}{r^n}\frac{\partial U}{\partial x_j}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right)-\\-\frac{x_j}{r^n}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\cdots,\frac{x_n}{r^2}\right),\end{gathered}\quad (48)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

В отличие от трехмерного случая, теперь уже нет уверенности, что приведенные формулы исчерпывают весь список симметрических однородных алгебраических формул с участием первых производных, которые будут преобразовывать произвольную n-мерную гармоническую функцию в новую n-мерную гармоническую функцию.

Формула (46) получается при дифференцировании формулы (38) по переменной x_j. Формула (41) получается из формулы (46) с помощью подстановки (38). Также с помощью подстановки (38) из формулы (42) получается формула (47), а из формулы (43) — формула (48). Наконец, в справедливости формулы (42) можно убедиться с помощью тождества

$$\sum_i \frac{\partial^2 V(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i^2} \equiv \sum_i \frac{\partial^2 U(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i^2} + \sum_k \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_i \frac{\partial^2 U(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i^2} \right) \right),$$

которое выполнено для любых функций V вида (42), а в справедливости формулы (43) − с помощью тождества

$$\sum_k \frac{\partial^2 V(x_1,\dots x_n)}{\partial x_k^2} \equiv \equiv x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_k \frac{\partial^2 U(x_1,\dots x_n)}{\partial x_k^2} \right) - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial^2 U(x_1,\dots x_n)}{\partial x_k^2} \right),$$

которое выполнено для любых функций V-вида (43).

Заключение

В работе приведен исчерпывающий список однородных симметрических дифференцирующих выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Дано обобщение полученных формул на случай произвольного числа измерений.

Существуют аналогичные формулы, в которых используются частные производные более высокого порядка. В частности, такие формулы можно получать при многократном дифференцировании формулы Томсона (2) по переменным x, y и z, а также как результат суперпозиции полученных в данной работе дифференциальных преобразований первого порядка (16) − (37). Составление полного списка трансформирующих формул, которые характеризуются более высокими порядками производных, в них участвующих, выходит за рамки настоящей работы; оно представляет значительные технические трудности и, по нашему мнению, не имеет большого практического смысла.

При обращении к трансформациям с участием производных старшего порядка, следует учитывать, что у гармонической функции некоторые частные производные второго порядка и выше выражаются друг через друга. К любой трансформирующей формуле можно прибавить с произвольным множителем трехмерное уравнение Лапласа (1), в исходной форме либо после дифференцирования по x, y или z нужное число раз. Это не изменит природу трансформирующего преобразования (лишь алгебраическую форму) и, хотя и сохранит в неизменности его базовое свойство преобразовывать исходные гармонические функции в новые гармонические, но и к появлению дополнительных аналитических выражений для трехмерных гармонических функций также не приведет.

Можно заметить, что в процессе выкладок неявным образом использовалось предположение, что подстановка (10) будет невырожденной (обратимой). Возможно, при использовании вырожденных замен переменных существуют какие-либо дополнительные решения, не учтенные в данной работе. Однако большого практического значения такие вырожденные преобразования гармонических функций, даже если они есть, по всей видимости, не имеют. Например, подставив вместо аргументов какой-либо гармонической функции константы, получим на выходе константу, которая, безусловно, является гармонической функцией с формальной точки зрения, но при этом вполне бесполезной для практического использования.

Слабым местом проделанного анализа является предположение, что замена переменных имеет симметризованный вид

$$f(x, y, z) = x\varphi(x, y, z),$$
$$g(x, y, z) = y\varphi(x, y, z),$$
$$h(x, y, z) = z\varphi(x, y, z),$$

а все функции, участвующие в дифференциально-алгебраической формуле (13), являются однородными по Эйлеру. Список решений (16) – (37) сознательно ограничен симметрическими однородными линейными дифференциальными выражениями первого порядка. Возможно, существуют дополнительные дифференциально-алгебраические выражения вида (13), отличные от решений (16) – (37) и свободные от этого ограничения, которые также преобразуют трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Однако полноценный анализ такой расширенной задачи [57 – 60] выходит за рамки целей, поставленных в данном исследовании.

Следует также отметить, что уравнение Лапласа (1) не является единственным уравнением математической физики, для которого описываемый здесь подход оказывается полезным и результативным. Так, в работе [61] исследуются похожие дифференциальные преобразования для многомерного уравнения теплопроводности. К сожалению, результаты работы [61] нельзя прямо перенести на уравнение Лапласа, хотя уравнение Лапласа и является стационарным пределом уравнения теплопроводности. Причина состоит в том, что преобразования, используемые в работе [61], включают в явном виде время, причем таким образом, что стационарные решения преобразуются в нестационарные.

Благодарности

Данная публикация входит в цикл работ, посвященных исследованию электронно- и ионно-оптических свойств электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру и представимых в аналитической форме. Этот цикл продолжает традицию аналитических исследований свойств электронно- и ионно-оптических систем, созданную нашим учителем, выдающимся физиком-теоретиком Юрием Константиновичем Голиковым (1942 – 2013), который работал на кафедре физической электроники СПбГПУ и щедро делился с учениками своими глубокими энциклопедическими знаниями в области фундаментальных математических результатов классиков XVII – XIX и начала XX века, не слишком-то популярных в наше компьютеризированное время.

Авторы считают своей обязанностью выразить глубокую благодарность создателям, сотрудникам и спонсорам сайтов Bibliothique nationale de France [62] и Proceedings of the Royal Society of London [63], благодаря самоотверженной работе которых, в частности, имеется возможность свободно познакомиться с уникальными архивными материалами [3, 28, 29]. Авторы благодарны создателям, сотрудникам и спонсорам цифровой библиотеки Numdam [64] за возможность открытого доступа к раритетным математическим публикациям из французских математических журналов, в частности к статье 1883 года издания [65]. Необходимо также отметить большую пользу для проделанного нами исследования архивных источников, полученных из цифровых библиотек HathiTrust Digital Library [66] и Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) [67], где, в частности, есть возможность ознакомиться с оцифрованной версией журнала «The Cambridge and Dublin Mathematical Journal», издававшегося в конце XIX века и содержащего оригинальные публикации Уильяма Томсона и Джорджа Буля на рассматриваемую тему. Указанным публичным организациям и фондам, бескорыстно занимающимся сохранением уникального исторического научного наследия Европы и обеспечивающих к нему открытый доступ, авторы выражают свою самую искреннюю благодарность.

Вычисления, приводимые в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [68].

Данная работа частично выполнена в рамках государственного задания № 075-00780-19-00 Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.

2. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 165–181.

3. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1847. Tome XII. Pp. 256–264.

4. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

5. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

6. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

7. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

8. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

9. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

10. **Helms L.L.** Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

11. **Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

12. **Голиков Ю.К., Соловьёв К.В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 152 с.

13. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

14. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

15. **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04. СПб.: СПбГПУ, 2013. 259 с.

16. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

17. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

18. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

19. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

20. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

21. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

22. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

23. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.

24. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 476 с.

25. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107–119.

26. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру, с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.

27. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 516 с.

28. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

29. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856 –1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

30. **Голиков Ю.К.** Решение задачи Коши для однородных гармонических потенциалов нулевой кратности // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 59–62.

31. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

32. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравне-

ний в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934. 368 с.

33. **Трикоми Ф.** Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 443 с.

34. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

35. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

36. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

37. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

38. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.

39. **Янушаускас А.** Гармонические по М.А. Лаврентьеву отображения // Partial Differential Equations. Banach Center Publications. 1983. Vol. 10. No. 1. Pp. 213–241.

40. **Янушаускас А.И.** Трехмерные аналон ги конформных отображений. Новосибирск: Наука, 1982. 173 с.

41. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 406 с.

42. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

43. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. В 2 тт. М.: Наука, 1968. Т. 1 – 486 с., Т. 2 – 624 с.

44. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

45. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

46. **Клейн Ф.** Высшая геометрия. Москва, Ленинград: ГОНТИ, 1939. 400 с.

47. **Решетняк Ю.Г.** Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях регулярности // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8. № 4. С. 835–840.

48. **Flanders H.** Liouville's theorem on conformal mapping // Journal of Mathematics and Mechanics. 1966. Vol. 15. No. 1. Pp. 157–161.

49. **Phillips R.** Liouville's theorem // Pacific Journal. 1969. Vol. 28. No. 2. Pp. 397–405.

50. **Blair D.E.** Inversion theory and conformal mapping. Ser. "Student Mathematical Library". Vol. 9 // American Mathematical Society. 2000. 118 p.

51. "Liouville's theorem (conformal_mappings)" // URL: https://en.wikipedia. org/wiki/.

52. **Рашевский П.К.** Введение в Риманову геометрию и тензорный анализ. Москва, Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 199 с.

53. **Kobayashi S.** Transformation groups in differential geometry. Ser. "Classics in Mathematics". Vol. 70. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995. 182 p.

54. **Wilker J.B.** Inversive geometry // Davis C., Grünbaum B., Sherk F.A. (Eds.) The Geometric Vein. New York: Springer, 1981. Pp. 379–442.

55. "Möbius transformation". "Higher dimensions" // URL: https://en. wikipedia.org/wiki/

56. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Пер. со 2-го американского переработанного издания. М.: Наука, 1973. 831 с.

57. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

58. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

59. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

60. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

61. **Brzezina M., Šimůnková M.** On the harmonic morphism for the Kolmogorov type operators // Král J., Lukeš J., Netuka I., Veselý J. (Eds.) Potential Theory – ICPT-94. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996. Pp. 341 –358.

62. Bibliothèque nationale de France // URL: http://gallica.bnf.fr.

63. Proceedings of the Royal Society of London // URL: http://rspl.royalsocietypublishing.org.

64. Numdam, the French digital mathematics library // URL: http://www.numdam.org/.

65. **Floquet G.** Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 2e Serié. 1883. Vol. 12. Pp. 47–88.

66. HathiTrust Digital Library // URL:

https://www.hathitrust.org/.
67. Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) // URL: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/.
68. Wolfram mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.03.2019, принята к публикации 15.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL, 1946.
2. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.
3. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. 12 (1847) 256–264.
4. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.
5. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.
6. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.
7. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.
8. **Kellogg O.D.**, Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
9. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.
10. **Helms L.L.** Potential theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.
11. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheslikh sistem [Design of elements of electron optical systems], Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.
12. **Golikov Yu.K., Solovyov K.V.,** Elektrostaticheskiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2008.

13. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg , 2010.

14. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

15. **Krasnova N.K.,** Theory and synthesis of disperging and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013. (in Russian).

16. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

17. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

18. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

19. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

20. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

21. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.

22. **Smirnov V.I.**, A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.

23. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 5 (1) (2017) 10–27.

24. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

25. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 27 (3) (2017) 107–119.

26. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** General formulas for three-dimensional electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms with an integer order of homogeneity, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 13–30.

27. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

28. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

29. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

30. **Golikov Yu.K.,** Resheniye zadachi Koshy dlya odnorodnykh garmonicheskikh potentsialov nulevoy plotnosty [Solution of the Cauchy problem for homogeneous harmonic potentials of a zero power], Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2 (44)) (2016) 59–62.

31. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

32. **Günther N.M.,** Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.

33. **Tricomi F.G.,** Lezioni sulle equazioni a derivative parziali, Editrice Gherono, Torino, 1954.

34. **Rashevsky P.K.,** Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.

35. **Finikov S.P.,** Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometriy [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.

36. **Cartan É.,** Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles", No. 994, Hermann, Paris, 1945.

37. **Shcherbakov R.N.,** Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometriy [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.

38. **Kaptsov O.V.,** Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Methods for integrating partial differential equations], Fizmatlit, Moscow, 2009.

39. **Janushauskas A.,** Harmonic mappings as

defined by M.A. Laurentiev, In: Partial Differential Equations, Banach Center Publications. 10 (1) (1983) 213–241.

40. **Janushauskas A.I.,** Tryokhmernyye analogui konformnykh otobrazheniy [Three-dimensional analogues of conformal mappings], Nauka, Novosibirsk, 1982.

41. **Koppenfels W., Stallmann F.,** Praxis der Konformen Abbildung, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

42. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

43. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

44. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

45. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

46. **Klein F.,** Vorlesungen über höhere Geometrie, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926.

47. **Reshetnyak Yu.G.,** Teorema Liuvilya o konformnykh otobrazheniyakh pri minimalnykh predpolozheniyakh regulyarnosty [Liouville's theorem on conformal mappings for minimal regularity assumptions], Siberian Mathematical Journal. 8 (4) (1967) 631–634.

48. **Flanders H.,** Liouville's theorem on conformal mapping, Journal of Mathematics and Mechanics. 15 (1) (1966) 157–161.

49. **Phillips R.,** Liouville's theorem, Pacific Journal. 28 (2) (1969) 397–405.

50. **Blair D.E.,** Inversion theory and conformal mapping, Ser. "Student Mathematical Library", Vol. 9, American Mathematical Society, 2000.

51."Liouville's theorem (conformal_ mappings)", URL: https:// en.wikipedia. org/ wiki/.

52. **Rashevsky P.K.,** Introduction to Riemannian geometry and tensor analysis, ONTI NKTP USSR, Moscow, Leningrad, 1936.

53. **Kobayashi S.,** Transformation groups in differential geometry, Ser. "Classics in Mathematics", Vol. 70, New York: Springer-Verlag, Berlin, 1995.

54. **Wilker J.B.,** Inversive geometry, In: Davis C., Grünbaum B., Sherk F.A. (Eds.) The Geometric Vein, Springer, New York (1981) 379–442.

55. "Möbius transformation", Section "Higher dimensions", URL: https://en.wikipedia.org/ wiki/.

56. **Korn G.A., Korn T.M.,** Mathematical handbook for scientists and engineers, Definitions, theorems and formulas for reference and review, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1968.

57. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

58. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

59. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

60. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

61. **Brzezina M., Šimůnková M.,** On the harmonic morphism for the Kolmogorov type operators, In: Král J., Lukeš J., Netuka I., Veselý J. (Eds.), Potential Theory – ICPT-94, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1996) 341–358.

62. Bibliothèque nationale de France, URL: http://gallica.bnf.fr.

63. Proceedings of the Royal Society of London, URL: http://rspl.royalsocietypublishing.org.

64. Numdam, the French digital mathematics library, URL: http://www.numdam.org/.

65. **Floquet G.**, Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2e Serié. 12 (1883) 47–88.

66. HathiTrust Digital Library, URL: https:// www.hathitrust.org/.

67. Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ), URL: https://gdz.sub.uni-goettingen. de/.

68. Wolfram Mathematica, URL: http:// wolfram.com/mathematica/.

Received 21.03.2019, accepted 15.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru