DOI: 10.18721/JPM.12205
УДК 531

ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ТИПИЧНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КРОККО С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.Р. Петриченко, Е.В. Котов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для верификации решения типичной предельной задачи Крокко проведен численный эксперимент с использованием неявной разностной схемы второго порядка. Вычислительный эксперимент показал равномерную на промежутке $0 \le x \le 1$ сходимость численной аппроксимации решения к слабому решению при небольшой плотности дискретизации промежутка (порядка $N = 10^4$ узлов). Показано, что численное решение аппроксимирует слабое решение типичной предельной задачи Крокко, кроме правого конца промежутка интегрирования – точки $x = 1$. Решение предельной задачи Крокко может быть продолжено левее точки $x = 0$ с сохранением непрерывности и гладкости решения в этой точке. Точка $x = 1$ представляет естественную верхнюю границу области определения решения.

Ключевые слова: типичная предельная задача Крокко, неявная разностная схема, слабое решение, гомотопия

Ссылка при цитировании: Петриченко М.Р., Котов Е.В. Численная верификация слабых решений типичной предельной задачи Крокко с помощью неявной разностной схемы второго порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 63–72. DOI: 10.18721/JPM.12205

NUMERICAL VERIFICATION OF WEAK SOLUTIONS OF THE CROCCO TYPICAL BOUNDARY PROBLEM USING AN IMPLICIT SECOND ORDER DIFFERENCE SCHEME

M.R. Petrichenko, E.V. Kotov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

To verify the solution of a typical Crocco boundary problem, a numerical experiment has been performed using an implicit second-order difference scheme. The computational experiment showed uniform convergence in the $0 \le x \le 1$ interval for the numerical approximation of the solution to a weak solution with a small interval discrete sampling (of the order of $N = 10^4$ nodes). It was shown that a numerical solution approximated a weak solution of the typical Crocco limit problem, except for the right end of the integration interval. The solution of the Crocco boundary problem could be continued to the left of the point $x = x_0$ while preserving the continuity and smoothness of the solution at this point. The point $x = 1$ represents the natural upper bound of the solution domain.

Keywords: Crocco's typical boundary problem, implicit difference scheme, weak solution, homotopy

Citation: Petrichenko M.R., Kotov E.V. Numerical verification of weak solutions of the Crocco typical boundary problem using an implicit second order difference scheme, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 63–72. DOI: 10.18721/JPM.12205

Введение

Как известно, типичная предельная задача Крокко ставится следующим образом [1]:

$$yy'' + \gamma x = 0, D(y) = (x : 0 \le x_0 < x < 1);$$
$$\mathrm{Im}(y) = (y : y_0 > y > 0); \qquad (1)$$
$$y'(x_0) = y(1) = 0,$$

где $y_0 := y(x_0) > 0$.

В классическом случае типичной предельной задачи

$$\gamma = 1/2, x_0 = 0, y_0 := y(0).$$

В настоящей статье рассматривается именно этот классический случай.

Можно доказать, что двухточечные предельные условия (1) равносильны условию Коши:

$$y(0) - a = y'(0) = 0.$$

Пусть $a = 0$. Тогда $y(x) = \pm\sqrt{2/3(-x)^3}$ есть решение однородной одноточечной задачи для уравнения Крокко на отрицательной полуоси $x < 0$.

В гидродинамических приложениях $y(x)$ – обезразмеренное трение, x – обезразмеренная продольная компонента скорости в пограничном слое на пластине, обдуваемой плоским потоком в продольном направлении.

Тогда $y(0) = a$ представляет собой касательное напряжение трения на стенке (константа Блазиуса) [2]. В гидравлической теории фильтрации x – обезразмеренная глубина фильтрационного потока сквозь скалярную (однородную и изотропную) пористую среду, y – потенциал Крокко, определяемый как

$$y(x) = \int_x^1 s dx', \quad y(1) = y'(0) = 0,$$

где s – продольная координата, отсчитываемая вдоль фильтрационного потока.

В задачах фильтрации постоянная $y_0 = y(x_0)$ пропорциональна фильтрационному расходу в сечении выхода потока на границу среды [3].

Стационарные решения для безнапорной фильтрации в скалярной среде выполнены в терминах аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Современные результаты таких решений приводятся в работах [4 – 6].

Для типичной задачи Крокко (1) справедливы следующие утверждения.

1. Уравнение Крокко имеет две ветви решения: положительную $y_+(x)$ и отрицательную $y_-(x)$. Отрицательная ветвь определяется как решение предельной задачи:

$$2y_- y_-'' + \gamma x = 0, \quad D(y_-) = (x : x_0 < x < 1),$$
$$y_-'(0) = y(1) = 0, \quad \mathrm{Im}(y_-) = (y_- : -y_0 > y_- > 0);$$

при этом

$$y_+(x) + y_-(x) = 0, \quad \forall x \in (0,1).$$

Доказательство тривиальное.

Далее будет рассматриваться только положительная ветвь решения уравнения Крокко, т. е. $y(x) := y_+(x)$.

2. Решение типичной предельной задачи Крокко (1) обладает следующими свойствами:

$$y'(x) < 0, \quad y''(x) < 0;$$
$$y'(x) \xrightarrow[x \to 1-0]{} -\infty,$$

поэтому $y_0 = a > y(x)$, $0 < x < 1$.

Для доказательства утверждения 2 формально понизим порядок уравнения Крокко и сведем его к интегральному уравнению:

$$2y' = -\int_0^x \frac{tdt}{y(t)} \to y' \le 0, \quad 0 \le x < 1.$$

Интеграл в правой части можно рассчитать, если использовать теорему Бонне о среднем значении. Получим:

$$2yy' = -1/2x^2\left(1 - \theta^2\right), \qquad (2)$$

где θ – правильная дробь, $0 < \theta < 1$.

Остается перейти к пределу при $x \to 1-0$, что и требовалось доказать.

Решение уравнения (2), такое, чтобы значение $y(1)$ было равно нулю, $y(1) = 0$, имеет следующий вид:

$$y^2(x, \theta) = 1/6(1 - \theta^2)(1 - x^3). \qquad (3)$$

Это решение (3) непрерывно зависит от величины дроби θ. Его среднее по θ значение представляет собой так называемое слабое решение типичной предельной задачи Крокко, трактуемое как распределение по θ с плотностью распределения $y(x; \theta)$ [7].

С учетом выражения (3), слабое решение типичной предельной задачи Крокко имеет вид:

$$y(x) = 1/3\sqrt{1 - x^3}, \qquad (4)$$

и тогда $y_0 = y(0) = 1/3$, что является неплохим рациональным приближением для постоянной Блазиуса.

Точное значение постоянной Блазиуса вычислено в работе В.П. Варина [8]. Как видно из формулы (4), слабое решение можно продолжить на отрицательные значения x с сохранением непрерывности и гладкости решения в точке $x = 0$.

Решение типичной предельной задачи Крокко связано с решением нелинейного интегрального уравнения:

$$y(x) = (1/2)\left\{\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y(s)}\right\}, \quad (5)$$

которое дает следующее выражение для постоянной Блазиуса:

$$y_0 := y(0) = (1/2)\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)}.$$

Решение уравнения (5) можно также получить в виде ряда Лагранжа [9]. В указанной работе доказано, что радиус сходимости ряда Лагранжа меньше единицы и ряд расходится при $x \to 1-0$.

Альтернативой решению в виде ряда Лагранжа может служить формирование итерационного процесса:

$$y_k(x) = (1/2)\left\{\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y_{k-1}(s)}\right\},$$
$$k = 1(1)\infty,$$

где нижний индекс k указывает номер итерации.

Значения постоянной Блазиуса, полученные в процессе итерации, определяются из последовательности

$$y_k(0) = (1/2)\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)}.$$

Для разных k последовательно находим следующие значения.

$$k = 1: y_0(x) = y_0 = \sqrt{1/12} = 0,2887;$$
$$k = 2: y_1(x)\cdot y_0 = (1/12)(1-x^3),$$
$$y_1(x) = (1-x^3)/\sqrt{12},\ y_1(0) = 1/\sqrt{12};$$

$$k = 3:$$
$$y_2(x) = \sqrt{3}\left(\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{1-s^3} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{1-s^2}\right) -$$
$$-\sqrt{3}\left\{\begin{array}{l} \ln\sqrt{3}\,\dfrac{x+2}{3}\ln\sqrt{1+x+x^2} + \\ +(1/3)(1-x)\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}} + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\},$$
$$y_2(0) = \sqrt{3}\left(\ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$$

и т. д.

Соответственно первые три итерированных значения постоянной Блазиуса образуют последовательность

$$y_0(0) = 1/\sqrt{12} = 0,2887...,$$
$$y_1(0) = 0,2887...,$$
$$y_3(0) = 0,4278...,$$

и, в среднем, за первые три итерации $y(0)$ лежит в диапазоне

$$0,3299 < y(0) < 0,3344.$$

Итерационный процесс приводит к тривиальным и длительным вычислениям, что становится ясным уже на третьей итерации. Очевидно, любое итерированное решение обладает всеми основными свойствами решения предельной задачи (1):

$$\forall x \in (0,1),\ \forall k = 1(1)\infty,$$
$$y_k'(x) < 0,\ \ y_k''(x) < 0,$$
$$y'(x) \xrightarrow[x\to 1-0]{} -\infty.$$

Неудобство итерационного процесса состоит в громоздкости выражений для итерированных решений и в отсутствии доказательства его сходимости. Оба этих препятствия можно обойти, если использовать разностную аппроксимацию предельной задачи (1).

Интерес к численным решениям уравнения Блазиуса появился сразу же после публикации его работы в 1908 году [2] и связан с разочарованием в методе интегрирования с помощью степенных рядов (см. работу [8] и ее препринт, содержащий историю вопроса). Современные исследования [10, 11, 13 – 21] посвящены, в основном, улучшению сходимости предикт-коррекшн-методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений пограничного слоя. Исключение составляет работа [22], содержащая развитие метода С. Каплуна, трактуемого в терминах гомотопических отображений промежутка интегрирования на компакт. В случае предельной задачи (1) отображения компактны.

Пусть линейная гомотопия

$$F(t,x): ((0 < t < 1) \times (0 < x < 1)) \to (0, a)$$

изображает решение предельной задачи (1).

Тогда $F(0, x)$ изображает решение в окрестности точки $x = 0$, а $F(1, x)$ – в окрестности точки $x = 1$. Например, для слабого решения

$$F(0,x) = (1/3)\left(1 - x^3/2 - x^6/8\right),$$
$$F(1,x) = \left(1/\sqrt{3}\right)\sqrt{1-x}.$$

Линейное гомотопическое отображение имеет вид:

$$y(x) = F(t,x) = (1-t)F(0,x) + tF(1,x) =$$
$$= (1-t)/3\left(1 - x^3/3 - x^6/8\right) + t\sqrt{\frac{1-x}{3}}.$$

Слабое решение также представляет некоторую гомотопию с параметром $\theta \in (0,1)$. Действительно:

$$y^2(x,\theta) = (1/6)\left(1-\theta^2\right)\left(1-x^3\right),$$
$$y^2(x,1) = 0,\ y^2(x,0) = (1/6)\left(1-x^3\right).$$

Наконец, работа [12] посвящена возрождению метода степенных разложений. Но ее результаты перекрываются данными работы [8] по плоским рядам, а также препринтами этой публикации в трудах Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, которые были опубликованы ранее.

При численном решении задачи (1) на интервале $x \in (0, 1)$ расчетная область состоит из N участков с постоянным шагом $h = 1/N$ ($x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N$). При дискретизации уравнения (1) используется разностная схема второго порядка:

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + \gamma\frac{x_j}{y_j} = 0. \qquad (6)$$

Равенство (6) представляет собой дискретный аналог точного равенства

$$y'' = -\gamma\frac{x}{y}.$$

Это выражение линейно относительно компоненты y_{j+1}, и поэтому, если известны компоненты y_{j-1}, y_j (где $j = 1(1)$) вектора $\mathbf{y}$, то для вычисления y_{j+1} получается линейная система алгебраических уравнений.

Граничные условия в предельной задаче (1) при дискретизации принимают следующий вид:

$$\frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{2h} = 0,\ y_N = 0. \qquad (7)$$

Если для разностей в равенствах (6), (7) ввести обозначения

$$\begin{cases} f_0 = 3y_0 - 4y_1 + y_2, \\ f_j = y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} + \gamma h^2\dfrac{x_j}{y_j}, \\ f_N = y_N, \end{cases} \qquad (8)$$

то задачу (6) – (8) можно записать в эквивалентной форме линейной алгебраической системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{y}$ – векторы, имеющие вид

$$F = [f_0 f_1 \ldots f_N]^T,$$
$$y = [y_0 y_1 \ldots y_N]^T.$$

Для решения полученной нелинейной системы используется итеративный метод Ньютона:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)},$$

где $\Delta y^{(k)}$ – вектор невязок,

$$\Delta y^{(k)} = [\Delta y_0^{(k)}\ \Delta y_1^{(k)} \ldots\ \Delta y_N^{(k)}]^T.$$

Он получается как решение линеаризованного матричного уравнения с матрицей Якоби $\mathbf{J}_F(\mathbf{y})$ порядка $N + 1$:

$$J_F(y^{(k)})\Delta y^{(k)} = -F(y^{(k)}), \qquad (9)$$

$$J_F(\mathbf{y}^{(k)}) = \frac{\partial(f_0, \ldots, f_N)}{\partial(y_0, \ldots, y_N)}. \qquad (10)$$

Предполагается, что матрица $\mathbf{J}_F(\mathbf{y})$ хорошо обусловлена. Тогда система (10) корректна и однозначно разрешима:

$$\Delta\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{J}_F^{-1}\left(\mathbf{y}^{(k)}\right)\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^{(k)}\right).$$

Подставляем равенство (8) в уравнение (9), и тогда с учетом равенства (10) получаем следующие выражения:

$$3\Delta y_0^{(k)} - 4\Delta y_1^{(k)} + \Delta y_2^{(k)} = -f_0^{(k)}, \quad f_0^{(k)} = 3y_0^{(k)} - 4\Delta y_1^{(k)} + y_2^{(k)}, \tag{11}$$

$$f_j^{(k)} = y_{j-1}^{(k)} - 2y_j^{(k)} + y_{j+1}^{(k)} + \gamma h^2 \frac{x_j}{y_j^{(k)}}, \tag{12}$$

$$a_j\Delta y_{j-1}^{(k)} + b_j\Delta y_j^{(k)} + c_j\Delta y_{j+1}^{(k)} = -f_j^{(k)}, \tag{13}$$

$$a_j = 1,\ b_j = -2 - \gamma h^2 \frac{x_j}{\left(y_j^{(k)}\right)^2},\ c_j = 1, \quad \Delta y_N^{(k)} = -y_N^{(k)}. \tag{14}$$

Очевидно, что система уравнений (11) – (14) содержит три неизвестных в каждом из уравнений и похожа на тридиагональную систему. Обычно в подобных системах первое и последнее уравнения содержат лишь два неизвестных. Однако в данной системе первое уравнение содержит три неизвестных: $\Delta y_0^{(k)}, \Delta y_1^{(k)}, \Delta y_2^{(k)}$.

Для исключения неизвестного $\Delta y_0^{(k)}$ уравнение (11) можно представить в следующем виде:

$$\Delta y_0^{(k)} = \frac{1}{3}\left[4\Delta y_1^{(k)} - \Delta y_2^{(k)} - f_0^{(k)}\right]. \tag{15}$$

Далее, подставляя выражения (13) и (14) в уравнение (15) при $j = 1$, получаем выражение:

$$\hat{b}_1\Delta y_1^{(k)} + \hat{c}_1\Delta y_2^{(k)} = -\hat{f}_1^{(k)}, \tag{16}$$

где

$$\hat{b}_1 = b_1 + 4/3a_1, \quad \hat{c}_1 = c_1 - 1/3a_1, \quad \hat{f}_1^{(k)} = f_1^{(k)} - 1/3 f_0^{(k)}. \tag{17}$$

Матрица системы уравнений (11), (15), (16) является тридиагональной. Эту систему можно решить с прогонкой по индексам j:

$$\Delta y_j^{(k)} = p_j - q_j\Delta y_{j+1}^{(k)}. \tag{18}$$

Из равенства (16) следует, что

$$p_1 = -\hat{f}_1^{(k)}/\hat{b}_1, q_1 = \hat{c}_1/\hat{b}_1. \tag{19}$$

Из уравнений (15), (19) вытекает равенство:

$$a_j\left(p_{j-1} - q_{j-1}\Delta y_j^{(k)}\right) + b_j\Delta y_j^{(k)} + c_j\Delta y_{j+1}^{(k)} + f_j^{(k)} = 0. \tag{20}$$

С учетом граничного условия $y_N = 0$, для всех k получаются равенства

$$y_N^{(k)} = \Delta y_N^{(k)} = 0.$$

После вычисления p_j и q_j для $j = 1, 2, ..., N - 1$ при помощи выражений (18) и (19), можно вычислить $\Delta y_j^{(k)}$ для $j = N - 1, N - 2, ..., 0$ при помощи выражения (18).

Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет достигнута заранее заданная точность ε:

$$\left\|\Delta\mathbf{y}^{(k)}\right\| \le \varepsilon,$$

где ‖*‖ означает, например, sup – норму вектора невязки или любую эквивалентную норму матрицы.

На рис. 1 представлено численное решение задачи (4), (5) на интервале $x \in [0, 1]$ при $\gamma = 1$ с различным количеством шагов N при $\varepsilon = 10^{-6}$. В масштабе рисунка расслоение численных решений невелико даже при изменении числа N узлов дробления промежутка интегрирования $0 < x < 1$ на 4(!) порядка, $10^2 \le N \le 10^6$. В качестве начального приближения рассматривается следующее выражение:

$$y_0 = (1/2)\,(1 - x^2)^{1/2}.$$

Сплошной жирной линией на этом рисунке показано слабое решение (4) с постоянной Блазиуса 0,4714 (точное значение равно 0,4696).

Таблица содержит результаты вычисления постоянной Блазиуса $y(0)$ при $\gamma = 1$ и различных количествах шагов N, а также значения, полученные другими авторами [12 – 16].

Из данных таблицы следует, что три первые точные значащие цифры постоянной Блазиуса вычисляются уже при небольшом числе узлов, при $N > 10000$. На правом конце промежутка интегрирования, т. е. при $x = 1 - 0$, производная численного решения ограничена снизу и график ни одного численного решения не обладает вертикальной касательной (см. рис. 1). Ограниченность значений численных производных ожидаема, так как используются односторонние разности.

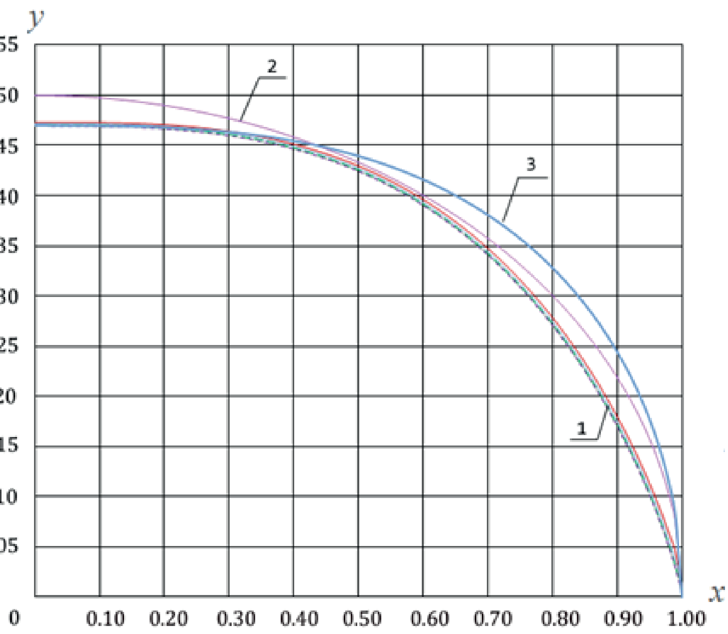

Рис. 1. Численное решение задачи Крокко на интервале $x \in [0, 1]$ при $\gamma = 1$ с различным количеством шагов N: 100, 1000, 10 000, 100 000, 10^6 (расслоенный пучок линий *1*); линия *2* – начальное приближение $y_0 = 1/2$, линия *3* – слабое решение (4) с постоянной Блазиуса $y_0 = 0{,}4714$

Таблица

Расчетные значения постоянной Блазиуса $y(0)$ при варьировании параметров и числа разбиений промежутка интегрирования

Источник	Число шагов N	Значение $y(0)$	
		$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 1{,}0$
Настоящая статья	100	0,339566	0,472865
	1000	0,335198	0,471984
	10000	0,332051	0,470430
	100000	0,332053	0,469855
	1000000	0,332053	0,469676
[13]	–	0,332057	0,469600
[14]		0,3320573362	0,4695999889
[15]		0,332057	0,469599

Для продолжения решения задачи (1) в область $x < 0$ используется разностная схема второго порядка (6) со следующими предельными условиями:

$$y(0) - \tilde{y}_0 = y'(0) = 0, \qquad (21)$$

где $\tilde{y}_0$ – значение $y(0)$ из решения, полученного на интервале $x \in [0, 1]$, т. е. постоянная Блазиуса численного решения.

При дискретизации граничные условия (21) принимают вид

$$y_0 - \tilde{y}_0 = (y_0 - y_{-1}) / h = 0,$$

откуда следует $y_0 = \tilde{y}_0 = y_{-1}$.

Таким образом,

$$y_j = 2y_{j+1} - y_{j+2} - \gamma h^2 x_{j+1} / y_{j+1},$$
$$j = -2, -3, \ldots, -M,$$

где M – количество расчетных шагов в области $x < 0$ (натуральное число).

На рис. 2 представлено положительное численное решение предельной задачи (1), продолженной на отрицательную полуось. В точке контакта $x = -0$ сохраняется непрерывность и гладкость продолженного решения.

Продолжение положительной и отрицательной ветвей слабого решения на отрицательную полуось имеет следующий вид:

$$y(x) = \pm a\sqrt{1 - (-x)^3}, \; a = 1/\left(3\sqrt{\gamma}\right)$$

Очевидно, что при $-x >> 1$ слабое решение имеет порядок, совпадающий с порядком точного решения предельной задачи (1):

$$y(x) \sim (-x)^{3/2}.$$

Выводы

Проведенное исследование привело нас к следующим выводам.

1. Слабое решение предельной задачи Крокко обладает всеми свойствами точного решения: нулевой производной в точке $x = 0$, неограниченной производной в точке $x = 1$, возможностью продолжения решения на отрицательную полуось $x < 0$ с сохранением непрерывности и гладкости в точке $x = 0$.

2. Полученные нами значения постоянной Блазиуса в слабом решении составили: $y(0) = 1/3$ при $\gamma = 1/2$ и $y(0) = 0{,}4717$ при $\gamma = 1$; приближенное значение постоянной Блазиуса отличается от точного значения

$$(y(0) = 0{,}332059, \gamma = 1/2 \text{ и}$$
$$y(0) = 0{,}4696, \gamma = 1)$$

меньше, чем на 0,4%.

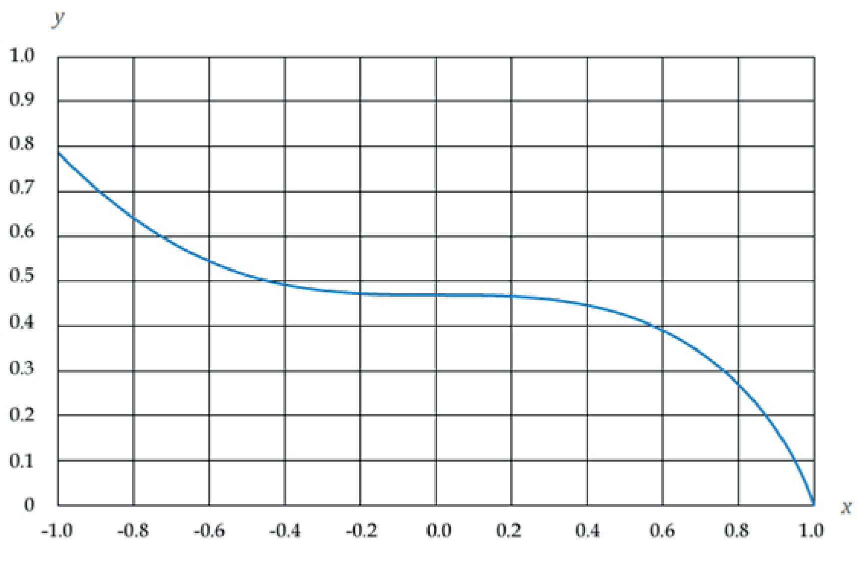

Рис. 2. Решение задачи Крокко на интервале $x \in [-1, 1]$ при $\gamma = 1$

3. Вычислительный эксперимент показал равномерную на промежутке $0 \le x \le 1$ сходимость численной аппроксимации решения к слабому решению при небольшой плотности дискретизации промежутка (порядка $N = 10^4$ узлов).

4. На правом конце промежутка интегрирования, $x = 1 - 0$, производная численного решения ограничена снизу и график численного решения не обладает вертикальной касательной. Ограниченность значений численных производных ожидаема, так как используются односторонние разности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crocco L.** Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana // Rend. Math. Appl. Ser. 5. 1941. Vol. 21. No. 2. Pp. 138–152.

2. **Blasius H.** Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung // Zeitschrift fьr Mathematik und Physik. 1908. Band 56. S. 1–37.

3. **Muskat M.** Seepage of water through dams with vertical faces // Journal of General and Applied Physics. 1935. Vol. 6. Pp. 402–415.

4. **Анахаев К.Н.** Расчет фильтрации через перемычку на непроницаемом основании // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1990. № 7. С. 78–82.

5. **Анахаев К.Н.** О фильтрационном расчете перемычки // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 2. С. 148–158.

6. **Анахаев К.Н.** О развитии аналитических методов расчета фильтрации // Природообустройство. 2014. № 1. С. 72–75.

7. **Петриченко М.Р., Котов Е.В., Заборова Д.Д., Мусорина Т.А.** Слабые решения предельных задач Крокко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 27–38.

8. **Варин В.П.** Асимптотические разложения решения Крокко и ряд Блазиуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 530–540.

9. **Петриченко М.Р.** Интегральное уравнение предельной задачи Крокко // Вестник Кыргызско-Российского славянского университета. Естественные и физико-математические науки. 2017. Т. 17. № 12. С. 8–11.

10. **Azizi A., Latifizadeh H.** On the efficiency of collocation method for solution of the Falkner – Skan boundary layer equation // Journal of Mathematical and Computational Science. 2014. Vol. 4. No. 2. Pp. 128–147.

11. **Kuo B-L.** Heat transfer analysis for the Falkner – Skan wedge flow by the differential transformation method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2005. Vol. 48. No. 23–24. Pp. 5036–5046.

12. **Paul M.** An accurate Taylor's series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation // Journal of Applied Fluid Mechanics. 2014. Vol. 7. No. 4. Pp. 557–564.

13. **Liao S-J.** An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999. Vol. 34. No. 4. Pp. 759–778.

14. **Liu C-S.** An SL(3,R) shooting method for solving the Falkner – Skan boundary layer equation // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 49. March. Pp. 145–151.

15. **Ding Xu, Xin Guo**. Fixed point analytical method for nonlinear differential equations // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 8. No. 1. P. 011005 (9 p.)

16. **Aminikhah H.** Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM // International Scholarly Research Network. ISRN Mathematical Analysis. 2012. Vol. 2012. Article ID 957473 (10 p.).

17. **Asaithambi A.** Numerical solution of the Falkner – Skan equation using piecewise linear functions // Applied Mathematics and Computation. 2004. Vol. 159. No. 1. Pp. 267–273.

18. **Asaithambi A.** Solution of the Falkner – Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 176. No.1. Pp. 203–214.

19. **Boyd J.P.** The Blasius function in the complex plane // Experimental Mathematics. 1999. Vol. 8. No. 4. Pp. 381–394.

20. **Варин В.П.,** Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса. Препринты ИПМ им. Келдыша РАН. № 106, 20 с. http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016_106.pdf.

21. **Zhang J., Chen B.** An iterative method for solving the Falkner – Skan equation //Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 210. No. 1. Pp. 215–222.

22. **Asaithambi A.** Numerical solution of the Blassius equation with Crocco – Wang transformation // Journal of Applied Fluid Mechanics. 2014. Vol. 9. No. 5. Pp. 2595–2603.

23. **Zhao Y., Lin Z., Liao S.** A modified homotopy analysis method for solving boundary layer equations // Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. No. 1. Pp. 11–15.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 20.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

КОТОВ Евгений Владимирович – *ассистент кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
ekotov.cfd@gmail.com

REFERENCES

1. **Crocco L.,** Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana, Rend. Math. Appl., Ser. 5. 21 (2) (1941) 138–152.
2. **Blasius H**., Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 56 (1908) 1–37.
3. **Muskat M.,** Seepage of water through dams with vertical faces, Journal of General and Applied Physics. 6 (1935) 402–415.
4. **Anakhayev K.N.,** Raschet filtratsii cherez peremychku na nepronitsayemom osnovanii [The design of an impenetrable-based crosspiece filtration], News of Higher Educational Institutions. Construction. (7) (1990) 78–82.
5. **Anakhayev K.N.,** About filtration account the crosspiece, Matem. Mod. 23 (2) (2011) 148–158.
6. **Anakhayev K.N.,** About development of analytical methods of filtration calculation, Prirodoobustroystvo. (1) (2014) 72–75.
7. **Petrichenko M.R., Kotov E.V., Zaborova D.D., Musorina T.A.,** Weak solutions of the Crocco boundary problems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11(3) (2018) 27–38.
8. **Varin V.P**., Asymptotic expansion of Crocco solution and the Blasius constant, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 58 (4) (2018) 517–528.
9. **Petrichenko M.R**., The integral equation of the Crocco boundary problem, Vestnik KRSU, Natural, Physical and Mathematical Sciences. 17 (12) (2017) 8–11.
10. **Azizi A., Latifizadeh H.,** On the efficiency of collocation method for solution of the Falkner – Skan boundary layer equation, Journal of Mathematical and Computational Science. 4 (2) (2014) 128–147.
11. **Kuo B-L.,** Heat transfer analysis for the Falkner – Skan wedge flow by the differential transformation method, International Journal of Heat and Mass Transfer. 48 (23–24) (2005) 5036–5046.
12. **Paul M.,** An accurate Taylor's series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation, Journal of Applied Fluid Mechanics. 7 (4) (2014) 557–564.
13. **Liao S-J.,** An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems, International Journal of Non-Linear Mechanics. 34 (4) (1999) 759–778.
14. **Liu C-S.,** An SL(3,R) shooting method for solving the Falkner – Skan boundary layer equation, International Journal of Non-Linear Mechanics. 49 (March) (2013) 145–151.
15. **Ding Xu, Xin Guo**, Fixed point analytical method for nonlinear differential equations, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 8 (1) (2013) 011005.
16. **Aminikhah H.,** Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM, International Scholarly Research Network, ISRN Mathematical Analysis. 2012 (2012) ID 957473.
17. **Asaithambi A.,** Numerical solution of the Falkner – Skan equation using piecewise linear functions, Applied Mathematics and Computation. 159 (1) (2004) 267–273.

18. **Asaithambi A.,** Solution of the Falkner – Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics. 176 (1) (2005) 203–214.

19. **Boyd J.P.,** The Blasius function in the complex plane, Experimental Mathematics. 8 (4) (1999) 381–394.

20. **Varin V.P.,** Asymptotic expansion of Crocco solution and Blasius constant, Keldysh Institute preprints, Moscow, 106 (2016) 20 p.

21. **Zhang J., Chen B.,** An iterative method for solving the Falkner – Skan equation, Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 210 (1) (2009) 215–222.

22. **Asaithambi A.,** Numerical solution of the Blassius equation with Crocco – Wang transformation, Journal of Applied Fluid Mechanics. 9 (5) (2014) 2595–2603.

23. **Zhao Y., Lin Z., Liao S.,** A modified homotopy analysis method for solving boundary layer equations, Applied Mathematics. 4 (1) (2013) 11–15.

Received 20.03.2019, accepted 20.04.2019.

THE AUTHORS

PETRICHENKO Mikhail R.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fonpetrich@mail.ru

KOTOV Eugeniy V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
ekotov.cfd@gmail.com