

DOI: 10.18721/JPM.12211

УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ ВЕРШИНЫ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ КЛИНЬЕВ

В.В. Тихомиров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В рамках антиплоской задачи рассмотрено замкнутое соединение двух различных изотропных клиньев, из вершины которого выходит трещина конечной длины под произвольным углом к оси симметрии структуры. Путем сведения проблемы к скалярному уравнению Винера – Хопфа получено ее точное решение. Изучена зависимость коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины от структурных параметров. Проанализированы эффекты увеличения и уменьшения КИН, по сравнению со случаем однородной среды. Показано, что асимптотика напряжений вблизи вершины соединения может иметь одно или два сингулярных слагаемых, определяющих как сильную, так и слабую особенности в этой особой точке.

Ключевые слова: антиплоская трещина, замкнутый биматериальный клин, сильная сингулярность, слабая сингулярность

Ссылка при цитировании: Тихомиров В.В. Точное решение задачи для трещины, выходящей из вершины двух разнородных клиньев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 130–139. DOI: 10.18721/JPM.12211

THE EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM ON A CRACK EMERGING FROM THE TOP OF TWO DISSIMILAR WEDGES

V.V. Tikhomirov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A closed connection of two different isotropic wedges has been considered within the scope of the antiplane problem. A finite-length crack emerges from the top of this connection at an arbitrary angle to the symmetry axis of the structure. The exact solution of the problem was obtained through the problem's reducing to the Wiener – Hopf scalar equation. The dependence of the stress intensity factor (SIF) at the crack tip on the structural parameters was studied. The effects of an increase and a decrease in SIF were compared with those known for the case of a homogeneous medium. It was shown that the stress asymptotics near the junction vertex could have one or two singular terms determining both strong and weak singularities at this singular point.

Keywords: antiplane crack, closed bimaterial wedge; strong singularity, weak singularity

Citation: V.V. Tikhomirov, The exact solution of the problem on a crack emerging from the top of two dissimilar wedges, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 130–139. DOI: 10.18721/JPM.12211



Введение

В неоднородных структурах часто имеются особые точки, в которых геометрические параметры и механические свойства компонент структуры претерпевают резкие изменения. Такими точками являются, например, вершины интерфейсных соединений нескольких клиновидных областей, состоящих из разных материалов. Подобные структуры могут быть замкнутыми в случае, когда все границы связаны между собой, или разомкнутыми, когда имеются вырезы. Напряжения, определяемые на основе линейной теории упругости, в угловых точках имеют неограниченный рост и, следовательно, такие точки сингулярности являются источниками инициализации трещин.

Начиная с работ М.Вильямса и Д.Б.Боджи [1, 2], исследованию упругих полей в биматериальных и многоматериальных клиньях посвящено большое число публикаций, ориентированных, в основном, на плоские задачи. Классу антиплоских проблем этого направления внимание уделено в значительно меньшей степени.

В работах [3 – 6] в рамках антиплоской задачи исследовались показатели особенности напряжений для полубесконечной трещины, упирающейся в вершину двух или трех изотропных клиньев. Установлено, что сингулярность напряжений в этой особой точке (симметричная задача) имеет степенной характер, отличный от классического, при котором показатель степени равен 0,5 [3, 6]. В несимметричном случае асимптотика напряжений вблизи вершины может содержать два сингулярных слагаемых [5, 6].

Сингулярность напряжений в вершине полубесконечной трещины продольного сдвига, расположенной в трехкомпонентной среде, имеющей функционально градиентные свойства, анализировалась в работе [7], где также отмечалось наличие двух вещественных собственных чисел, определяющих особенности упругих полей.

Трещина конечной длины, исходящая из вершины острого выреза, содержащегося в составной клиновидной области, рассматривалась в статьях [8 – 11]. При этом в работах [8, 9] было показано, что решение для анизотропных материалов структуры можно получить на основе решения, построенного для изотропного случая, с помощью линейного преобразования координат.

Оценке критической нагрузки для возникновения трещин в вершине острого выреза при его антиплоском нагружении посвящены работы [12, 13].

Однако вопрос об инициализации трещин в вершине замкнутого соединения клиновидных областей в условиях их антиплоской деформации до сих пор остается открытым.

В качестве первого шага к решению этой проблемы в настоящей работе рассматривается задача о трещине конечной длины, выходящей из вершины двух связанных клиньев, состоящих из разных материалов. Ее точное решение построено путем сведения проблемы к скалярной задаче Римана. Получено аналитическое представление для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины и изучена его зависимость от параметров структуры.

Помимо самостоятельного значения, полученное точное решение проблемы является одним из базовых элементов анализа хрупкого разрушения структуры на основе так называемой финитной механики разрушения [14], где для плоских задач, ввиду отсутствия точных решений, использовались приближенные аналитические.

Постановка задачи и ее сведение к уравнению Винера – Хопфа

Рассмотрим прямолинейную трещину моды III длиной ε , выходящую из вершины соединения двух клиновидных областей (рис. 1). Материалы клиньев в областях Ω_k ($k = 1, 2, 3$) будем считать изотропными, однородными и имеющими модули сдвига μ_1 и μ_2 ($\mu_3 = \mu_2$). Контакт материалов предполагается идеальным. К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка $g(r)$ (r – полярный радиус).

Геометрию рассматриваемой упругой композиции удобно определять двумя параметрами: углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$) области Ω_1 и углом β между направлением трещины и осью симметрии области Ω_1 . Очевидно, что $|\beta| \leq \pi - \alpha/2$. Изменение угла β при фиксированном значении α приводит к повороту области Ω_1 вокруг ее вершины. Таким образом, угол β характеризует взаимную ориентацию трещины и области Ω_1 . Например, при $\beta = 0$ задача будет симметричной. Значениям $\beta = \pm(\pi - \alpha/2)$ соответствует интерфейсная трещина, а $\beta = \pm \alpha/2$ – случаи, когда трещина выходит

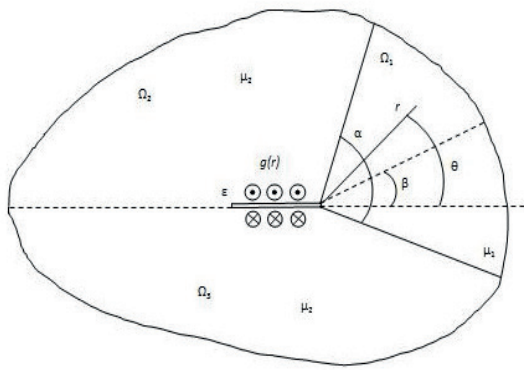


Рис. 1. Трещина, выходящая из вершины соединения двух разнородных клиньев: $g(r)$ – нагрузка на берегах трещины; μ_1, μ_2 – модули сдвига материалов; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – клиновидные области; ε – расстояние от вершины соединения до вершины трещины; α, β – углы раствора клиньев; r, θ – полярные координаты

из вершины вдоль границ раздела фаз.

Как известно, перемещения w_k в областях Ω_k в рассматриваемом случае являются гармоническими функциями:

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

а напряжения в полярных координатах r и θ определяются формулами

$$\tau_{\theta zk} = \frac{\mu_k}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \theta}, \quad \tau_{rzk} = \mu_k \frac{\partial w_k}{\partial r}.$$

Упругие поля на интерфейсах должны удовлетворять условиям совершенного контакта:

$$w_1 = w_2, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z2} \quad \text{при } \theta = \beta + \alpha/2, \quad (2)$$

$$w_1 = w_3, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z3} \quad \text{при } \theta = \beta - \alpha/2,$$

а на линии трещины – следующим смешанным условиям:

$$\tau_{\theta z2}(r, \pi) = \tau_{\theta z3}(r, -\pi) = g(r) \quad (0 \leq r \leq \varepsilon), \quad (3)$$

$$\tau_{\theta z2}(r, \pi) = \tau_{\theta z3}(r, -\pi) = \tau(r),$$

$$w_2(r, \pi) = w_3(r, -\pi) \quad (\varepsilon < r < \infty). \quad (4)$$

Здесь $\tau(r)$ – неизвестная функция.

Как и в работе [15], решение задачи ищем в виде интегралов Меллина:

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp,$$

$$\tau_{\theta zk}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta zk}(p, \theta) r^{-p-1} dp \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где трансформанты перемещений и напряжений определяются следующими формулами:

$$W_k(p, \theta) = A_k(p) \sin p\theta + B_k(p) \cos p\theta, \quad (6)$$

$$T_{\theta zk}(p, \theta) = \mu_k p [A_k(p) \cos p\theta - B_k(p) \sin p\theta] \quad (\mu_3 = \mu_2).$$

С учетом условий регулярности решения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, контур интегрирования L расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2 \quad (\delta_1, \delta_2 > 0).$$

Смешанные условия (3) и (4) приводят к равенствам

$$T_{\theta z2}(p, \pi) = T_{\theta z3}(p, -\pi) = [T_-(p) + G_+(p)] \varepsilon^{p+1}, \quad (7)$$

$$-p[W_2(p, \pi) - W_3(p, -\pi)] = U_+(p) \varepsilon^p,$$

где

$$T_-(p) = \int_1^\infty \tau(\varepsilon \rho) \rho^p d\rho, \quad G_+(p) = \int_0^1 g(\varepsilon \rho) \rho^p d\rho, \quad (8)$$

$$U_+(p) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} [w_2(\varepsilon \rho, \pi) - w_3(\varepsilon \rho, -\pi)] \rho^p d\rho.$$

Функция $T_-(p)$ регулярна и не имеет нулей в левой от контура L полуплоскости Ω_- , а функции $G_+(p)$ и $U_+(p)$ – в правой полуплоскости Ω_+ [16].

Подставляя выражения (6) в левые части равенств (7) и преобразованные по Меллину условия (2), после исключения величин $A_k(p)$ и $B_k(p)$ придем к скалярному уравнению Винера – Хопфа:

$$F(p)[T_-(p) + G_+(p)] + \frac{\mu_2}{2\varepsilon} U_+(p) = 0 \quad (p \in L). \quad (9)$$

Здесь в качестве контура L может быть взята мнимая ось, а функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = f(p)/\Delta(p), \quad (10)$$

$$f(p) = 2[\sin^2 \pi p - m^2 \sin^2(\pi - \alpha)p], \quad (11)$$

$$\Delta(p) = \sin 2\pi p + 2m \sin \alpha p \cos 2\beta p - m^2 \sin 2(\pi - \alpha)p. \quad (12)$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную

$$m = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) = (\mu - 1)/(\mu + 1),$$

где $\mu = \mu_1/\mu_2$ представляет собой относительную жесткость включения ($0 \leq \mu < \infty$).

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству $|m| \leq 1$. Если материал включения является более жестким по сравнению с

материалом матрицы, то $0 < m < 1$; в противном случае (для мягкого включения) этот параметр лежит в интервале $-1 < m < 0$. Значение $m = 0$ отвечает однородной среде, а значения $m = \pm 1$ определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Заметим, что нули функции (11) есть собственные числа антиплоской задачи для соединения двух клиновидных областей при симметричном и антисимметричном (относительно луча $\theta = 0$) распределениях напряжений. Нули функции (12) определяют показатели особенности напряжений в вершине полубесконечной трещины, упирающейся в упругое клиновидное включение [6].

Решение уравнения Винера – Хопфа

Факторизация коэффициента уравнения (9) осуществляется аналогично проделанной в работе [15]:

$$F(p) = pF_+(p)F_-^{-1}(p), \quad (13)$$

$$F_{\pm}(p) = \Phi_{\pm}(p)X_{\pm}^{-1}(p),$$

$$X_{\pm}(p) = \left[\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)} \right]^{\pm 1},$$

$$\Phi_{\pm}(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi(t)}{t-p} dt \right] \\ (p \notin L),$$

где

$$\Phi(p) = [1 - m^2 \sin^2(\pi - \alpha) p \sin^{-2} \pi p] \times \\ \times [1 + 2m \sin \alpha p \cos 2\beta p \sin^{-1} 2\pi p - \\ - m^2 \sin 2(\pi - \alpha) p \sin^{-1} 2\pi p]^{-1},$$

а $\Gamma(p)$ – гамма-функция.

Отсюда с помощью формул (13) и применения теоремы Лиувилля [16] из уравнения (9), с учетом поведения слагаемых на бесконечности, получаем:

$$\Phi_-^{-1}(p)X_-(p)T_-(p) + Q_-(p) = \\ = -\frac{\mu_2}{2\varepsilon p} U_+(p)\Phi_+^{-1}(p)X_+(p) - Q_+(p) = 0, \quad (14)$$

где

$$Q_{\pm}(p) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-p} dt, \quad (15)$$

$$Q(t) = \frac{1}{t} X_+(t)\Phi_+^{-1}(t)F(t)G_+(t).$$

Тогда из равенств (14) находим:

$$T_-(p) = -\Phi_-(p)X_-^{-1}(p)Q_-(p). \quad (16)$$

Учитывая, что при $p \rightarrow \infty$

$$X_-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}}, \quad Q_-(p) \sim -\frac{C}{p}, \quad (17)$$

$$C = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X_+(t)G_+(t)}{t\Phi_+(t)} F(t) dt,$$

получаем асимптотику

$$T_-(p) \sim -C/(i\sqrt{p}).$$

Отсюда, по теореме Абелева типа [16], заключаем, что асимптотика напряжений при $r \rightarrow \varepsilon + 0$ имеет вид

$$\tau(r) \sim -\frac{C}{i\sqrt{\pi(1-\rho)}} = C\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{r-\varepsilon}}. \quad (18)$$

Коэффициент интенсивности напряжений

Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины $r = \varepsilon$ формулой

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \varepsilon+0} \sqrt{2\pi(r-\varepsilon)\tau(r)}.$$

Тогда, используя асимптотику (16), получаем, что

$$K_{III}(\alpha, \beta, m, \varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon} C. \quad (19)$$

Пусть к берегам трещины приложены самоуравновешенные сосредоточенные силы T_0 на расстоянии r_0 от вершины соединения клиньев, т. е.

$$g(r) = T_0 \delta(r - r_0),$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака, а $\varepsilon < r_0 < \infty$.

Тогда, вычисляя по формуле (8) функцию $G_+(t)$, совмещая в формуле (17) контур интегрирования с мнимой осью и используя теорему о вычетах в области Ω_+ , согласно равенству (19), будем иметь:

$$K_{III} = -T_0 \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \sum_{k=1}^n \frac{X_+(p_k) f(p_k)}{p_k \Phi_+(p_k) \Delta'(p_k)} \left(\frac{r_0}{\varepsilon} \right)^{p_k}. \quad (20)$$

Здесь штрих означает производную по переменной p , а p_k – положительные нули функции (12).

В случае геометрически симметричной структуры, когда $\beta = 0$, при некоторых значениях биупругой постоянной m ряд (20) суммируется и выражения для КИН можно представить в простой замкнутой форме. Для разных случаев они имеют следующий вид:

$$K_{III}^0 = T_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon}} \sqrt{\frac{r_0/\varepsilon}{1-r_0/\varepsilon}} \quad (21)$$

для трещины в однородной среде ($m = 0$);

$$K_{III}^S = T_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon a}} \frac{1}{\sqrt{1-(r_0/\varepsilon)^{1/a}}}$$

для трещины, выходящей из вершины выреза ($\beta = 0, m = -1$);

$$K_{III}^H = T_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon a}} \sqrt{\frac{(r_0/\varepsilon)^{1/a}}{1-(r_0/\varepsilon)^{1/a}}}$$

для трещины, выходящей из вершины абсолютно твердого включения ($\beta = 0, m = 1$).

В этих формулах

$$a = 1 - \alpha/(2\pi), r_0/\varepsilon < 1.$$

Используя формулы (20) и (21), введем в рассмотрение нормализованный коэффициент интенсивности напряжений (НКИН), характеризующий изменение КИН в неоднородной композиции, по сравнению с КИН в вершине такой же трещины, находящейся в однородной среде:

$$N = \frac{K_{III}}{K_{III}^0} = -\sqrt{\pi \left(1 - \frac{r_0}{\varepsilon}\right)} \times \sum_{k=1}^n \frac{X_+(p_k) f(p_k)}{p_k \Phi_+(p_k) \Delta'(p_k)} \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^{p_k-0,5} \quad (22)$$

Корни характеристического уравнения

$$\Delta(p) = 0, \quad (23)$$

расположенные в полосе $0 < \text{Re } p < 1$, детально анализировались в работе [6]. Установлено, что в зависимости от параметров композиции α, β и m , уравнение (23) в этой полосе может иметь один корень $p_1 < 0,5$ или $p_1 > 0,5$, а также два корня:

$$0 < p_1 < 0,5 < p_2 < 1,0$$

или

$$0,5 < p_1 < p_2 < 1,0.$$

В случае симметричной структуры ($\beta = 0$) характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta_*(p) = \cos \pi p + m \cos (\pi - \alpha) p = 0$$

и имеет в интервале $(0, 1)$ единственный корень.

При этом для $m > 0$ этот корень превышает значение $0,5$, а для $m < 0$ лежит в интервале $0 < p_1 < 0,5$.

В этом случае НКИН показывает типичное поведение в зависимости от параметра m при различных значениях угла α и является монотонно убывающей функцией на всем интервале изменения биупругой постоянной (рис. 2). При этом эффект увеличения НКИН по сравнению с однородной средой наблюдается при нахождении трещины в более жестком материале, когда $\mu_2 > \mu_1$ и, следовательно, $m < 0$. Напротив,

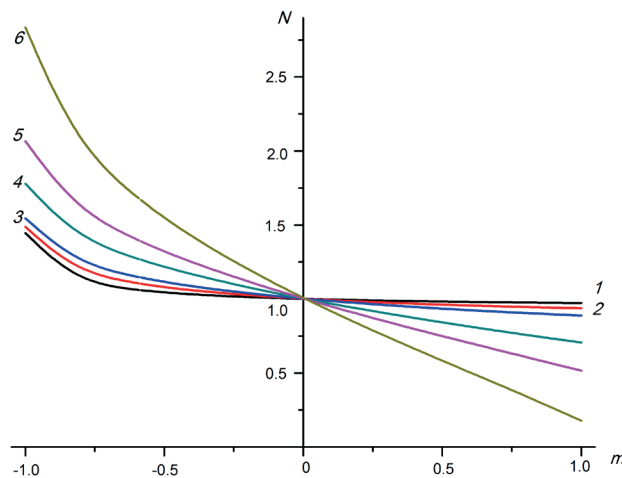


Рис. 2. Зависимости нормализованного коэффициента интенсивности напряжений (НКИН) от параметра m при $\beta = 0$ и $r_0/\varepsilon = 0,5$ для различных углов α : $\pi/4$ (1), $\pi/2$ (2), $3\pi/2$ (3); $3\pi/4$ (4), $5\pi/4$ (5), $7\pi/4$ (6)

для трещины, расположенной в относительно более мягком материале ($m > 0$) имеет место снижение НКИН. Данные эффекты становятся все более выраженными по мере возрастанием угла раствора α области Ω_1 . Отсюда вытекает, что «симметричная» трещина, выходящая из вершины соединения, всегда будет распространяться в относительно более жесткой среде.

В случае структуры несимметричного строения ($\beta \neq 0$) поведение НКИН не оказывается столь однозначным. Если безразмерный параметр r_0/ε , характеризующий близость расположения нагрузки к вершине клиньев, не слишком мал, то НКИН в вершине трещины имеет в качественном плане аналогичное поведение, как и в симметричном случае. На рис. 3 показано изменение НКИН для угла $\alpha = \pi/2$ и $r_0/\varepsilon = 0,5$ в зависимости от величины m при различных значениях параметра асимметрии β . Приведенные данные показывают, что усиливающие и ослабляющие НКИН эффекты увеличиваются с возрастанием угла β .

Однако при $r_0/\varepsilon \rightarrow 0$ доминирующим членом ряда (22) является его первое слагаемое. Асимптотика НКИН в этом случае имеет вид

$$N \sim -\sqrt{\pi \left(1 - \frac{r_0}{\varepsilon}\right)} \frac{X_+(p_1) f(p_1)}{p_1 \Phi_+(p_1) \Delta'(p_1)} \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^{p_1-0,5}. \quad (24)$$

Отсюда вытекает, если $p_1 > 0,5$ и $r_0/\varepsilon \ll 1$, то величина $(r_0/\varepsilon)^{p_1-0,5} < 1$, что вызывает ослабляющее влияние на НКИН. Если же $p_1 < 0,5$, то при малых значениях относительного расстояния r_0/ε в выражении (24) множитель $(r_0/\varepsilon)^{p_1-0,5} > 1$, что приводит к усиливающему влиянию на НКИН.

Пример эффекта увеличения НКИН для малых значений r_0/ε представлен на рис. 4 для случая $\alpha = \beta = \pi/2$. При этих значениях углов первый корень уравнения (23) будет меньше 0,5 как в случае $m < 0$, так и в случае $m > 0$ [6, 15]. Анализ поведения кривых показывает, что зависимость $N(m)$ – не монотонная. Возрастание НКИН становится все более значимым по мере уменьшения приведенного расстояния r_0/ε . Кроме того, если трещина находится в более мягкой среде, то значения КИН при достаточно малом отношении r_0/ε могут превышать таковые для аналогичной трещины, расположенной в однородной среде, за счет влияния неоднородности и геометрии структуры (в противоположность симметричному случаю).

Сингулярность напряжений в вершине соединения клиньев

На основе формул (6) – (8) нетрудно получить представления для напряжений в областях Ω_j ($j = 1, 2, 3$):

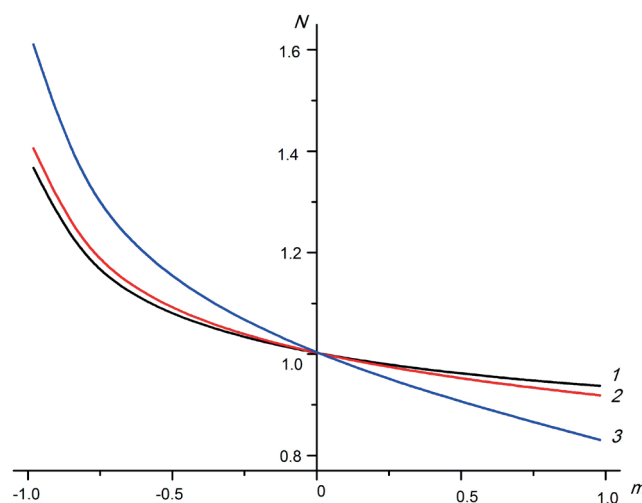


Рис. 3. Зависимости величины НКИН от параметра m при $\alpha = \pi/2$ и $r_0/\varepsilon = 0,5$ для различных углов β : 0 (1), $\pi/4$ (2), $\pi/2$ (3)

$$\tau_{\theta z_j}(r, \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\tau_j(p, \theta)}{\Delta(p)} [T_-(p) + G_+(p)] \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp, \quad (25)$$

где

$$\tau_j(p, \theta) = a_j(p) \cos p\theta - b_j(p) \sin p\theta;$$

$$a_1(p) = (1+m)[\sin p\pi - m \cos 2p\beta \sin p(\pi - \alpha)];$$

$$b_1(p) = (1+m)m \sin 2p\beta \sin p(\pi - \alpha);$$

$$a_n(p) = \sin p\pi + m \sin p\alpha \cos[p(\pi + (-1)^n 2\beta)] - m^2 \cos p\alpha \sin p(\pi - \alpha);$$

$$b_n = (-1)^n m \sin p\alpha \{\sin p(\pi - \alpha) - \sin[p(\pi + (-1)^n 2\beta)]\} \quad (n = 2, 3).$$

Подставляя в подынтегральную функцию (25) представления (15), (16) и учитывая, что трансформанта сосредоточенной нагрузки на берегах трещины имеет вид

$$G_+(p) = T_0/\varepsilon(r_0/\varepsilon)^p,$$

придем к следующему выражению для напряжений:

$$\tau_{\theta z_j}(r, \theta) = \frac{T_0}{\varepsilon \pi i} \int_L \frac{\tau_j(p, \theta)}{\Delta(p)} \left[\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^p - \frac{\Phi_-(p)}{X_-(p)} Q_-^*(p) \right] \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp, \quad (26)$$

где

$$Q_-^*(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t(t-p)} \frac{X_+(p)}{\Phi_+(p)} \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^t dt.$$

В результате применения к интегралу (26) теоремы о вычетах, вычисляемых в нулях p_k функции (12), расположенных в левой от контура L полуплоскости, при $r < r_0$ получаем:

$$\tau_{\theta z_j}(r, \theta) = \frac{2T_0}{r_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_j(-p_k, \theta)}{\Delta'(-p_k)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{p_k-1} - \frac{r_0}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_j(-p_k, \theta)}{\Delta'(-p_k)} \frac{\Phi_-(-p_k)}{X_-(-p_k)} \times Q_-^*(-p_k) \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{p_k-1} \right]. \quad (27)$$

Заметим, что первая сумма в этой формуле определяет распределение напряжений в случае полубесконечной трещины, выхо-

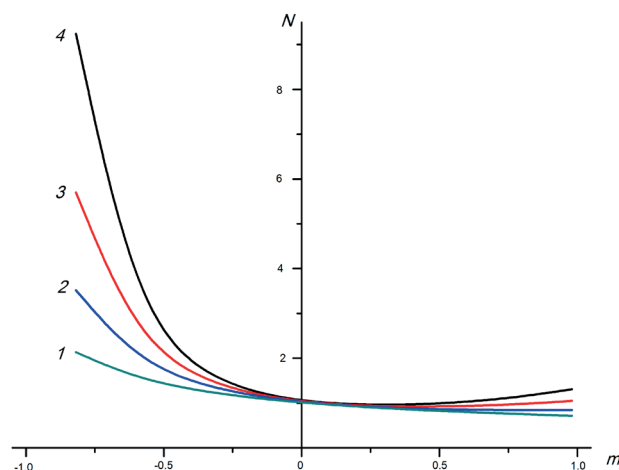


Рис. 4. Зависимости НКИН от параметра m при $\alpha = \beta = \pi/2$ для малых значений относительного расстояния r_0/ε : 0,1 (1); 0,01 (2); 0,001 (3); 0,0001(4)



дущей из вершины замкнутого соединения клиньев [6]. Вторая сумма обусловлена конечностью длины рассматриваемой трещины.

Из представления (27) вытекает, что напряжения в вершине соединения имеют степенную особенность. В зависимости от параметров структуры асимптотика напряжений при $r \rightarrow 0$ может иметь один или два сингулярных члена, определяемых корнями уравнения (23), расположенными в интервале (0, 1). При этом показатели сингулярности $\lambda_k = 1 - p_k$ ($k = 1, 2$) могут быть как больше, так и меньше значения 0,5 и, следовательно, порождать как сильную, так и слабую сингулярность в этой особой точке.

Заключение

В статье на основе интегрального преобразования Меллина и метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи об антиплоской трещине, выходящей из вершины замкнутого соединения двух клиновидных областей. Проанализировано

поведение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины при изменении упругих свойств и геометрии структуры, которые могут вызывать эффекты увеличения или уменьшения КИН, по сравнению с однородной средой. Показано, что при отсутствии геометрической симметрии структуры, при некоторых значениях параметров композиции и сосредоточенной нагрузке, приложенной на достаточно малом расстоянии от вершины соединения, может иметь место не характерная для симметричного случая зависимость КИН от относительной жесткости материалов. В частности, КИН для трещины, расположенной в относительно более мягком материале, может превосходить КИН для такой же трещины в однородной среде. Исследована сингулярность напряжений в угловой точке соединения и показано, что эта сингулярность может быть как сильной, так и слабой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Williams M. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 74. No. 4. Pp. 526–528.
2. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1971. Vol. 38. No. 2. Pp. 377–386.
3. Schovanec L. A mode III crack problem in a bonded composite material // *Eng. Fract. Mech.* 1988. Vol. 31. No. 3. Pp. 437–449.
4. Pageau S.S., Joseph P.F., Biggers S.B. Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions // *Eng. Fract. Mech.* 1995. Vol. 52. No. 5. Pp. 821–832.
5. Misuris G., Kuhn G. Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // *Archive Appl. Mech.* 2001. Vol. 71. No. 11. Pp. 764–780.
6. Тихомиров В.В. Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2014. № 2 (194). С. 110 – 119.
7. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 61. No. 1. Pp. 87–93.
8. Beom H.G., Jang H.S. A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear // *Int. J. Eng. Sci.* 2011. Vol. 49. No. 9. Pp. 869–880.
9. Beom H.G., Jang H.S. Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 56. No. 1. Pp. 49–62.
10. Beom H.G., Jang H.S. A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *Int. J. Fract.* 2012. Vol. 177. No. 2. Pp. 191–198.
11. Shen M.H., Lin C.P., Hung S.Y. Edge crack in front of anisotropic wedge interacting with anti-plane singularity // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2012. Vol. 58. No. 1. Pp. 1–8.
12. Trefi M., Oyadiji O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bimaterial V-notches // *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50. No. 14–15. Pp. 2196–2212.
13. Тихомиров В.В. Критерии разрушения острого выреза в условиях антиплоской деформации // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2018. Т. 11. № 3. С. 99–107.
14. Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A. On the most dangerous V-notch // *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. No. 7–8. Pp. 887–893.
15. Тихомиров В.В. Трещина моды III,

приближающаяся к упругому клиновидному включению // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 99–109.

16. **Noble B.** Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations. Oxford: Pergamon Press, 1958.

Статья поступила в редакцию 15.03.2019, принята к публикации 19.03.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru

REFERENCES

1. **Williams M.**, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 74 (4) (1952) 526–528.
2. **Bogy D.B.**, Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 38 (2) (1971) 377–386.
3. **Schovanec L.**, A mode III crack problem in a bonded composite material, Eng. Fract. Mech. 31 (3) (1988) 437–449.
4. **Pageau S.S., Joseph P.F., Biggers S.B.**, Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions, Eng. Fract. Mech. 52 (5) (1995) 821–832.
5. **Misuris G., Kuhn G.**, Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models, Archive Appl. Mech. 71 (11) (2001) 764–780.
6. **Tikhomirov V.V.**, Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2(194)) (2014) 110–119.
7. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.**, Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges, Int. J. Eng. Sci. 61 (1) (2012) 87–93.
8. **Beom H.G., Jang H.S.**, A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear, Int. J. Eng. Sci. 49 (9) (2011) 869–880.
9. **Beom H.G., Jang H.S.**, Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, Int. J. Eng. Sci. 56 (1) (2012) 49–62.
10. **Beom H.G., Jang H.S.**, A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, Int. J. Fract. 177 (2) (2012) 191–198.
11. **Shen M.H., Lin C.P., Hung S.Y.**, Edge crack in front of anisotropic wedge interacting with anti-plane singularity, Theor. Appl. Fract. Mech. 58 (1) (2012) 1–8.
12. **Trefi M., Oyadiji O.**, Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bimaterial V-notches, Int. J. Solids Struct. 50 (14–15) (2013) 2196–2212.
13. **Tikhomirov V.V.**, Sharp V-notch fracture criteria under antiplane deformation, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 99–107.
14. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.**, On the most dangerous V-notch, Int. J. Solids Struct. 47 (7–8) (2010) 887–893.
15. **Tikhomirov V.V.**, Mode III crack approaching to the wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 10 (2) (2017) 99–109.
16. **Noble B.**, Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1958.

Received 15.03.2019, accepted 19.03.2019.



THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

victikh@mail.ru