DOI: 10.18721/JPM.12304
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДОНКИНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]

[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение операторов Донкина для однородных гармонических функций. Ранее был получен базисный список таких операторов первого порядка для трехмерных гармонических функций. Задача настоящего исследования – доказать, что любые линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина, – тоже операторы Донкина. Ввиду того, что свойство обратимости есть фундаментальный признак таких операторов, и поскольку из обратимости каждого из линейных дифференциальных операторов по отдельности не следует автоматически обратимость их линейной комбинации, указанное утверждение является нетривиальным и требует строгого доказательства. Оно представлено в данной статье.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, однородная функция, гармоническая функция

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304

DONKIN'S DIFFERENTIAL OPERATORS FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]

[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The work continues the study of the Donkin's operators for homogeneous harmonic functions. Previously, a basic list of such first-order operators for three-dimensional harmonic functions was obtained. The objective of this study is to prove that any linear combinations with constant coefficients made up of the Donkin's basic operators are again Donkin's operators. Since the reversibility property is fundamental for such operators, and since the reversibility of each of the linear differential operators taken separately does not automatically imply the reversibility of their linear combination, this statement is nontrivial and requires a strict proof. This proof has been given in this paper.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304

Постановка задачи

Данная публикация является прямым продолжением работ [1 – 3], посвященных исследованию преобразований Томсона и операторов Донкина для трехмерных гармонических (т. е. удовлетворяющих уравнению Лапласа) функций, однородных по Эйлеру.

Электрическое или магнитное поле называется однородным по Эйлеру со степенью однородности, равной k, если напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и/или индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ удовлетворяют тождествам

$$\forall\lambda > 0:\ \mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{E}(x, y, z),$$

$$\forall\lambda > 0:\ \mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\mathbf{B}(x, y, z)$$

в каждой точке пространства.

Как правило, такие поля характеризуются скалярными потенциалами $U(x, y, z)$, представляющими собой однородные (точнее, положительно однородные, то есть при $\lambda > 0$) по Эйлеру функции в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [4, 5]:

$$\forall\lambda > 0:\ U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k} U(x, y, z).$$

Более подробно вопрос об однородности скалярных и векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлеру, исследуется в работе [6]. Важно, что для дифференцируемых функций U, которые являются однородными (по Эйлеру) степени k, в каждой точке пространства выполняется дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций [4, 5]:

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} - kU = 0. \qquad (1)$$

Данное соотношение является и необходимым, и достаточным. Это включает следующие утверждения:

а) если функция будет однородной со степенью однородности k и при этом всюду дифференцируемой, то для нее в каждой точке пространства выполнено равенство (1);

б) если для всюду дифференцируемой функции в каждой точке пространства выполнено равенство (1), то она является однородной по Эйлеру, со степенью однородности, равной k.

Утверждение а) имеет силу при дифференцировании тождества

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) - \lambda^k U(x, y, z) = 0$$

по параметру λ в точке $\lambda = 1$. Изящное доказательство утверждения б) можно найти, например, в книге [4].

Строгие определения терминов «преобразование Томсона» и «оператор Донкина» приводятся в статье [3] этого выпуска журнала и поэтому здесь не дублируются. Следует, однако, подчеркнуть принципиальную разницу между преобразованиями Томсона и операторами Донкина: преобразования Томсона гарантируют гармоничность и однородность функции, получаемой на выходе, но, в отличие от операторов Донкина, не гарантируют обратимость преобразоввания. Операторы же Донкина обратимы в том смысле, что для любой однородной гармонической функции найдется функция-прототип (также однородная и гармоническая), из которой с помощью рассматриваемого оператора получается заданная однородная гармоническая функция.

Термин «преобразование Томсона» используется, чтобы не смешивать рассматриваемые здесь линейные дифференциальные операторы общего вида с оригинальной алгебраической формулой Томсона (преобразованием Кельвина) [9 – 16]. Формула Томсона трансформирует трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции в соответствии с правилом

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r} U\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \qquad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (здесь и далее).

Дополнительно к тому, что формула (2) преобразует трехмерные гармонические функции U общего вида в новые трехмерные гармонические функции V (это можно проверить с помощью прямой подстановки), она также преобразует однородные функции U степени k в новые однородные функции V степени $(-k - 1)$. Для однородных функций общий множитель $1/r^2$ в формуле (2) может быть вынесен из-под знака функции, так что формулу (2) можно записать в упрощенном виде как

$$V(x, y, z) = r^{-2k-1} U(x, y, z). \qquad (3)$$

Однородность математического выражения (3) очевидна, а его гармоничность для гармонических и однородных функций U следует из равенства (см. [17, 18 (приложение Б к главе 1)]):

$$\begin{gathered}V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}\equiv r^m\left(U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}\right)+\\+2mr^{m-2}\left(xU_x+yU_y+zU_z-kU\right)+\\+m\left(m+2k+1\right)r^{m-2}U,\end{gathered} \tag{4}$$

которое выполнено для любых функций вида

$$V(x, y, z) = r^m U(x, y, z)$$

с произвольным показателем степени m, для произвольного параметра k и при произвольной функции U.

Однако преобразование (3) больше не будет преобразовывать гармонические функции общего вида в новые гармонические функции; гармоничность выражения (3) гарантируется только для тех гармонических функций, которые будут однородными по Эйлеру со степенью однородности, равной k (т. е. которые удовлетворяют дифференциальному соотношению Эйлера (1)).

Из результатов, опубликованных в статьях [1 – 3], следует, что полный список элементарных преобразований Томсона для однородных гармонических функций степени k, когда преобразование Томсона имеет вид линейного дифференциального оператора первого порядка, состоит из следующих выражений:

$$V\left(x,y,z\right)=U\left(x,y,z\right), \tag{5}$$

$$V\left(x,y,z\right)=U_x\left(x,y,z\right), \tag{6}$$

$$V\left(x,y,z\right)=U_y\left(x,y,z\right), \tag{7}$$

$$V\left(x,y,z\right)=U_z\left(x,y,z\right), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\\=\left(2k+1\right)xU\left(x,y,z\right)-r^2U_x\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\\=\left(2k+1\right)yU\left(x,y,z\right)-r^2U_y\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\\=\left(2k+1\right)zU\left(x,y,z\right)-r^2U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{11}$$

$$V\left(x,y,z\right)=yU_x\left(x,y,z\right)-xU_y\left(x,y,z\right), \tag{12}$$

$$V\left(x,y,z\right)=zU_x\left(x,y,z\right)-xU_z\left(x,y,z\right), \tag{13}$$

$$V\left(x,y,z\right)=zU_y\left(x,y,z\right)-yU_z\left(x,y,z\right); \tag{14}$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2k+1}}U\left(x,y,z\right), \tag{15}$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2k-1}}U_x\left(x,y,z\right), \tag{16}$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2k-1}}U_y\left(x,y,z\right), \tag{17}$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2k-1}}U_z\left(x,y,z\right), \tag{18}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{\left(2k+1\right)x}{r^{2k+3}}U\left(x,y,z\right)-\\-\frac{1}{r^{2k+1}}U_x\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{\left(2k+1\right)y}{r^{2k+3}}U\left(x,y,z\right)-\\-\frac{1}{r^{2k+1}}U_y\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{\left(2k+1\right)z}{r^{2k+3}}U\left(x,y,z\right)-\\-\frac{1}{r^{2k+1}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{y}{r^{2k+1}}U_x\left(x,y,z\right)-\\-\frac{x}{r^{2k+1}}U_y\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{z}{r^{2k+1}}U_x\left(x,y,z\right)-\\-\frac{x}{r^{2k+1}}U_z\left(x,y,z\right)\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{z}{r^{2k+1}}U_y\left(x,y,z\right)-\\-\frac{y}{r^{2k+1}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \tag{24}$$

где нижние индексы x, y, и z обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В статье [3] показано, что каждое из элементарных преобразований (5) – (24), если его рассматривать отдельно, будет обратимым на множестве однородных гармонических функций, т. е. является базисным оператором Донкина.

Очевидно, что любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами, составленная из базисных формул (5) – (24), соответствующих одной и той же степени однородности, будет преобразовывать однородные гармонические функции в новые однородные гармонические функции и тем самым будет принадлежать классу преобразований Томсона. Однако обратимость таких преобразований на подмножестве однородных гармонических функций с соответствующей степенью однородности не очевидна и требует изучения.

Задача данного исследования состоит в том, чтобы установить, являются ли линейные суперпозиции с постоянными коэффициентами, составленные из элементарных операторов Донкина (5) – (24), композитными операторами Донкина в смысле данных ранее определений.

Связь между трехмерными однородными гармоническими функциями и двумерными эллиптическими уравнениями

Для дальнейших выкладок потребуется переход от трехмерных однородных гармонических функций к двумерным функциям, которые удовлетворяют некоторым вспомогательным двумерным эллиптическим уравнениям. Этот прием представляет отдельный научный интерес, поэтому рассмотрим его подробнее.

Для трехмерных гармонических функций нулевой степени и степени –1 имеются формулы Донкина [7, 8, 19 – 24]:

$$V_0(x,y,z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \qquad (25)$$

$$V_{-1}(x,y,z) = \frac{1}{r} H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \qquad (26)$$

которые устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями $H(p, q)$ двумерного уравнения Лапласа

$$H_{pp} + H_{qq} = 0$$

и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и –1. По аналогии, любую однородную функцию $U(x, y, z)$ степени m с помощью замены координат Донкина

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ q = \dfrac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \qquad (27)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2pr}{1+p^2+q^2}, \\ y = \dfrac{2qr}{1+p^2+q^2}, \\ z = \pm\dfrac{r\left(1-p^2-q^2\right)}{1+p^2+q^2}. \end{cases}$$

можно выразить в виде

$$U(x,y,z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \qquad (28)$$

Эта запись есть слегка модифицированная форма универсального представления

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k h(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1)$$

для однородных функций степени k [4, 5].

Для того чтобы функция (28) была гармонической (удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа), необходимо и достаточно, чтобы функция $F(p, q)$ удовлетворяла двумерному эллиптическому дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2} + \\ + \frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} F(p,q) = 0. \qquad (29)$$

Подстановки (28), (34) являются взаимно-однозначными. Здесь подразумевается следующее:

а) если $U(x, y, z)$ есть однородная гармоническая функция степени m, то существует такая функция $F(p, q)$, с помощью которой функцию U можно представить в виде (28), причем функция F обязана будет подчиняться уравнению (34);

б) если функция $F(p, q)$ подчиняется уравнению (34), то функция $U(x, y, z)$, вычисленная в соответствии с правилом (28), будет однородной гармонической функцией степени m;

в) разным функциям $U(x, y, z)$ соответствуют разные функции $F(p, q)$ и наоборот. Например, если требуется проанализировать дифференциальное соотношение между однородной гармонической функцией $U(x, y, z)$ степени m и однородной гармонической функцией $V(x, y, z)$ степени k, то подстановка

$$U(x,y,z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \tag{30}$$

$$V(x,y,z) = r^k G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right) \tag{31}$$

позволяет без потери общности свести задачу к анализу дифференциального соотношения между функциями двух переменных $F(p, q)$ и $G(p, q)$, которые подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} F(p,q) = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial q^2} + \frac{4k(k+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} G(p,q) = 0. \tag{33}$$

Подстановка (28) не является единственно возможной. В равной степени можно использовать подстановки

$$\begin{cases} U(x,y,z) = (z+r)^m F\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \\ \left(1+p^2+q^2\right)\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2}\right) - \\ -4mp\dfrac{\partial F}{\partial p} - 4mq\dfrac{\partial F}{\partial q} + 4m^2 F = 0; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} U(x,y,z) = r^m F\left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}\right), \\ \left(1-p^2\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} - 2pq\dfrac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \\ +\left(1-q^2\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2} - 2p\dfrac{\partial F}{\partial p} - \\ -2q\dfrac{\partial F}{\partial q} + m(m+1)F = 0; \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} U(x,y,z) = z^m F\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right), \\ \left(1+p^2\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2pq\dfrac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \\ +\left(1+q^2\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial q^2} - 2(m-1)p\dfrac{\partial F}{\partial p} - \\ -2(m-1)q\dfrac{\partial F}{\partial q} + m(m-1)F = 0 \end{cases} \tag{36}$$

и так далее.

Выбор, какую именно подстановку следует использовать для решения конкретной задачи, определяется удобством манипулирования тем или иным двумерным эллиптическим уравнением в частных производных с точки зрения рассматриваемой задачи, а также эстетическими предпочтениями исследователя.

Полные системы уравнений в частных производных первого порядка

Теорема, рассматриваемая в этом разделе, используется как вспомогательная (лемма) для доказательства основной теоремы об обратимости линейных суперпозиций базисных операторов Донкина с общей степенью однородности; она приводится в следующем разделе.

Пусть имеются m функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, зависящих от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим систему из mn уравнений в частных производных, у которой в левой части используются все возможные частные производные первого порядка от функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а в правой находятся непрерывно дифференцируемые функции Φ_i^k, зависящие от неизвестных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ и независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \Phi_i^k\left(f_1, \ldots, f_m, x_1, \ldots, x_n\right). \tag{37}$$

Будем считать, что как функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, так и функции $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_n^m$ являются непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько необходимо для безопасного выполнения последующих операций дифференцирования и для справедливости соответствующих теорем о существовании и единственности решения системы уравнений. Смешанные частные производные непрерывно дифференцируемых функций $f_1, f_2, ..., f_m$ по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ не зависят от порядка дифференцирования:

$$i, j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right). \qquad (38)$$

Из тождества (38) следуют условия, которым необходимым образом должны удовлетворять правые части уравнений (37) и которые должны быть выполнены, если у системы уравнений (37) имеется непустое множество решений:

$$L_{ij}^k = \left(\frac{\partial \Phi_j^k}{\partial f_1}\Phi_i^1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial f_m}\Phi_i^m + \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x_i}\right) - \\ - \left(\frac{\partial \Phi_i^k}{\partial f_1}\Phi_j^1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial f_m}\Phi_j^m + \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x_j}\right) = 0. \qquad (39)$$

При этом возможны следующие варианты:

а) все условия, выраженные формулой (39), тождественно равны нулю;

б) среди условий (39) имеется одно или несколько алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $f_1, f_2, ..., f_m$, которые не равны тождественно нулю и которые совместимы друг с другом, так что некоторые из функций $f_1, f_2, ..., f_m$ можно алгебраически выразить через оставшиеся функции и независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$;

в) среди условий (39) имеется одно или несколько алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $f_1, f_2, ..., f_m$, которые не равны тождественно нулю и которые совместимы друг с другом, так что все функции $f_1, f_2, ..., f_m$ можно выразить алгебраически через независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$;

г) среди условий (39) имеются алгебраические уравнения относительно неизвестных функций $f_1, f_2, ..., f_m$, которые не совместимы друг с другом;

д) среди условий (39) найдется алгебраическое соотношение, не равное тождественно нулю и не содержащее неизвестные функции $f_1, f_2, ..., f_m$, которое устанавливает алгебраическую связь между независимыми переменными $x_1, x_2, ..., x_n$.

Фактически условия г) и д) можно объединить в один и тот же класс вариантов. Несовместимость между собой условий (39) означает, что после того, как с помощью подмножества совместимых между собой условий (39) некоторые или все функции $f_1, f_2, ..., f_m$ будут алгебраически выражены через оставшиеся функции и независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ и подставлены в оставшиеся уравнения, образуется, по крайней мере, одно алгебраическое уравнение, не равное тождественно нулю, которое устанавливает алгебраическую связь между независимыми переменными $x_1, x_2, ..., x_n$. Точно так же алгебраическое соотношение, не содержащее неизвестные функции $f_1, f_2, ..., f_m$ и устанавливающее алгебраическую связь между независимыми переменными $x_1, x_2, ..., x_n$, может рассматриваться как алгебраическое уравнение относительно неизвестных функций $f_1, f_2, ..., f_m$, не совместимое с остальными алгебраическими уравнениями.

Очевидно, что в случаях г) либо д) система уравнений (37) решений иметь не может.

В случае в) из полученных алгебраических уравнений можно найти неизвестные функции $f_1, f_2, ..., f_m$, подставить их в систему (37) и либо убедиться, что найденные функции $f_1, f_2, ..., f_m$ действительно удовлетворяют уравнениям (37), либо убедиться, что у системы уравнений (37) решений нет.

Точно так же в случае б). После того, как некоторые из функций $f_1, f_2, ..., f_m$ алгебраически выражены через оставшиеся функции и независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, их можно подставить в уравнения (37); затем либо получить полную систему дифференциальных уравнений вида (37) относительно меньшего числа неизвестных функций, либо, кроме дифференциальных уравнений, получить еще и новые алгебраические соотношения для неизвестных функций. Это позволит продолжить процесс алгебраического исключения функций $f_1, f_2, ..., f_m$ из системы уравнений (37). В частности, если будет получено отличное от нуля алгебраическое выражение, не содержащее неизвестные функции $f_1, f_2, ..., f_m$, а только независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, то это будет означать, что у системы уравнений (37) решений не существует.

Наконец, в случае а), когда все условия (39) тождественно равны нулю, система тождественно выполненных равенств (39) оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для существования решений у системы уравнений (37).

Лемма 1. *Если все соотношения (39) тождественно равны нулю, то у полной системы уравнений (37) имеются решения, причем эти решения определены с точностью до m констант c_1, c_2, ..., c_m, выбираемых произвольным образом.*

Доказательство этой леммы можно найти в книге [25] (см. там гл. IV).

Случай, когда система дифференциальных уравнений в частных производных не является полной (для каких-то частных производных от неизвестных функций уравнения не заданы), будет гораздо более сложным для анализа. Соответствующую теорию можно найти в книгах [26 – 29].

Обратимость линейных комбинаций базисных операторов Донкина

Исследуем обратимость линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, составленными из формул (5) – (14) и (15) – (24) с одинаковой степенью однородности для выходной функции. Перечисленные ниже группы элементарных преобразований из списка (5) – (24) преобразуют однородные гармонические функции степени m в однородные гармонические функции одинаковой степени:

1) формулы (5), (12) – (14) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени m;

2) формулы (6) – (8) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени $m - 1$;

3) формулы (9) – (11) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени $m + 1$;

4) формулы (15), (22) – (24) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени $-m - 1$;

5) формулы (16) – (18) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени $-m$;

6) формулы (19) – (21) преобразуют однородную функцию степени m в новую однородную функцию степени $-m - 2$.

Эти правила определяют, какие именно формулы из списка (5) – (24) могут объединяться в одной линейной комбинации с постоянными коэффициентами, чтобы на выходе получилась однородная гармоническая функция.

Теорема. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5), (12) – (14), либо из базисных операторов Донкина (6) – (8), либо из базисных операторов Донкина (9) – (11), либо из базисных операторов Донкина (15), (22) – (24), либо из базисных операторов Донкина (16) – (18), либо из базисных операторов Донкина (19) – (21), являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.*

Доказательство распадается на серию независимых доказательств для каждой из групп базисных операторов Донкина по отдельности.

Лемма 2. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (6) – (8) для степени однородности m* – 1, *являются обратимыми на подмножестве однородных гармонических функций степени m* – 1.

Доказательство. Линейная комбинация с постоянными коэффициентами формул (6) – (8) имеет вид

$$L[U] = aU_x + bU_y + cU_z$$

и соответствует дифференцированию функции U по фиксированному направлению (a, b, c). При коэффициентах, одновременно не равных нулю, она является оператором Донкина в соответствии с данным ранее определением.

Для доказательства достаточно применить поворот системы координат относительно начала координат, при котором ненулевой вектор (a, b, c) совпадет с одной из координатных осей, и воспользоваться теоремой о дифференцировании однородных гармонических функций [23, 30]:

а) поворот относительно начала координат сохраняет и однородность, и гармоничность заданной функции V;

б) оператор дифференцирования по одной из новых координатных осей есть базисный оператор Донкина, поэтому у преобразованной однородной и гармоничной функции V найдется однородный и гармоничный прототип U;

в) обратный поворот относительно начала координат возвращает систему координат и функцию V к прежнему состоянию, а также сохраняет гармоничность и однородность у преобразованной функции U, одновременно устанавливая между этими функциями связь, т. е.

$$V(x, y, z) = aU_x(x, y, z) + \\ + bU_y(x, y, z) + cU_z(x, y, z)$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (9) – (11) для степени однородности* $m + 1$*, либо из базисных операторов Донкина (16) – (18) для степени однородности* $-m$*, либо из базисных операторов Донкина (19) – (21) для степени однородности* $-m - 2$*, являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.*

Доказательство. Данное утверждение следует из тесной связи, устанавливаемой посредством формулы Томсона (3) между этими операторами и операторами дифференцирования (6) – (8), для которых, как только что было показано, линейные комбинации с постоянными коэффициентами будут обратимыми преобразованиями однородных гармонических функций.

Действительно, обратимость линейных комбинаций, составленных из формул (16) – (18), следует из обратимости линейных комбинаций, составленных из формул (6), (8), и того факта, что формула Томсона (3) является обратимой (повторное применение формул (2), (3) возвращает функцию к исходному виду). Точно так же линейные комбинации, составленные из формул (19) – (21), будут обратимыми тогда и только тогда, когда обратимыми будут линейные комбинации, составленные из формул (9) – (11). Последние, по сути, являются продуктом последовательного применения преобразования (3), преобразований (6) – (8) и еще одного преобразования (3). Например, доказательство обратимости линейных комбинаций, составленных из формул (9) – (11), выглядит следующим образом:

а) у заданной однородной гармонической функции $V(x, y, z)$ степени $m + 1$ имеется однородный и гармонический прототип $V^*(x, y, z)$ степени $-m - 2$, из которого, в соответствии с формулой Томсона (3), эта функция вычисляется как

$$V(x,y,z) = V^*(x,y,z)\, r^{2m+3};$$

б) у однородной гармонической функции $V^*(x, y, z)$ степени $-m - 2$ имеется однородный и гармонический прототип $U^*(x, y, z)$ степени $-m - 1$, из которого ее можно получить посредством дифференцирования по фиксированному направлению (a, b, c):

$$V^*(x,y,z) = -aU_x^*(x,y,z) - \\ -bU_y^*(x,y,z) - cU_z^*(x,y,z),$$

где не все коэффициенты a, b, c равны нулю;

в) у однородной гармонической функции $U^*(x, y, z)$ степени $-m - 1$ имеется однородный и гармонический прототип $U(x, y, z)$ степени m, из которого, в соответствии с формулой Томсона (3), ее можно вычислить как

$$U^*(x,y,z) = U(x,y,z) \big/ r^{2m+1}.$$

В таком случае однородная гармоническая функция $U(x, y, z)$ степени m оказывается функцией-прототипом, из которой посредством преобразования

$$V(x,y,z) = (2m+1)(ax+by+cz)\times \\ \times U(x,y,z) - r^2\big(aU_x(x,y,z) + \\ + bU_y(x,y,z) + cU_z(x,y,z)\big) \qquad (40)$$

получается исходная однородная гармоническая функция $V(x, y, z)$ степени $m + 1$.

Отметим, что преобразование (40) представляет собой суперпозицию преобразований в) + б) + а), в чем легко убедиться с помощью прямого вычисления указанной суперпозиции.

Следовательно, линейная комбинация (40), составленная из базисных операторов Донкина (9) – (11), снова является оператором Донкина, если не все коэффициенты a, b, c равны нулю.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5), (12) – (14) для степени однородности* m*, либо из базисных операторов Донкина (15), (22) – (24) для степени однородности* $-m - 1$*, являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.*

Доказательство. Из-за обратимости формулы Томсона (3) линейные комбинации, составленных из формул (15), (22) – (24), будут обратимыми тогда и только тогда, когда обратимыми будут линейные комбинации, составленные из формул (5), (12) – (14).

Исследуем обратимость линейной комбинации с постоянными коэффициентами, составленной из формул (5), (12) – (14):

$$V(x,y,z)=a\left(yU_z-zU_y\right)+ \\ +b\left(zU_x-xU_z\right)+c\left(xU_y-yU_x\right)+eU, \quad (41)$$

где a, b, c, e — константы, не все из которых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$, либо $c \neq 0$ (если $a = b = c = 0$, то комбинированный оператор (41) превращается в базисный оператор (5), обратимость которого очевидна). Это требование необходимо, чтобы выражение

$$2apq - b(1 + p^2 - q^2) + 2cq,$$

на которое потребуется делить в дальнейшем, не обращалось тождественно в нуль.

После подстановки (30), (31) при $k = m$ в линейную комбинацию (41) и в уравнения Лапласа, для функций U и V получаем переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2}+ \\ +\frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}F(p,q)=0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}\left(b\left(1+p^2-q^2\right)-2apq-2cq\right)+ \\ +\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}\left(-a\left(1-p^2+q^2\right)+2bpq+2cp\right)+ \\ +2eF(p,q)=G(p,q), \quad (43)$$

которую надо исследовать на предмет существования решений для неизвестной функции F, при условии, что функция G известна и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial q^2}+ \\ +\frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}G(p,q)=0. \quad (44)$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $R(p, q)$ с помощью подстановки

$$\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}=R(p,q)F(p,q). \quad (45)$$

Из уравнения (43), с учетом соотношения (45), можно выразить производную

$$\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}= \\ =\frac{-G(p,q)+F(p,q)\left(2e+R(p,q)A(p,q)\right)}{B(p,q)}, \quad (46)$$

где

$$A(p,q)=2bpq-a\left(1-p^2+q^2\right)+2cp,$$

$$B(p,q)=2apq-b\left(1+p^2-q^2\right)+2cq.$$

Из условия равенства смешанных производных, т. е.

$$\partial\left(\partial F/\partial p\right)/\partial q=\partial\left(\partial F/\partial q\right)/\partial p,$$

получаем дополнительное линейное соотношение, которому должны удовлетворять производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$.

Из условия (45), после дифференцирования по q, можно найти производную $\partial^2 F/\partial q^2$, а из условия (46), после дифференцирования по p, —производную $\partial^2 F/\partial p^2$ в виде алгебраических выражений, содержащих F, R, $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$. Тогда уравнение (42) позволяет сконструировать еще одно независимое линейное соотношение, которому должны удовлетворять производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$.

Из этих соотношений можно найти производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$ как функции от $F(p,q)$, $R(p,q)$, $G(p,q)$, частных производных первого порядка $\partial G(p,q)/\partial p$ и $\partial G(p,q)/\partial q$, независимых переменных p, q и констант a, b, c, e.

В итоге получилась полная система дифференциальных уравнений, описанная в разделе «Полные системы уравнений в частных производных первого порядка», с неизвестными функциями $F(p, q)$, $R(p, q)$ и независимыми переменными p, q (функция $G(p, q)$ считается известной). Можно убедиться, что при условии, что функция $G(p, q)$ удовлетворяет уравнению (44), для полученной полной системы дифференциальных уравнений, условия (39) ее разрешимости тождественно равны нулю.

Следовательно, полученная полная система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение (определенное с точностью до двух произвольных констант). Поэтому преобразование однородных гармонических функций (41) является обратимым на множестве однородных гармонических функций, а линейный дифференциальный оператор (41) оказывается оператором Донкина при любых константах a, b, c, e, не равных одновременно нулю.

Лемма 4 доказана.

Теорема полностью доказана.

Особый случай

В нашей статье [2] рассматривается вырожденный случай преобразования Томсона $U(x, y, z) \to V(x, y, z)$ для однородных гармонических функций, когда функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ имеют степени однородности 0 или −1. Этот случай не входит в список элементарных преобразований Томсона, представленный выше, и должен рассматриваться отдельно. В этом разделе исследуется обратимость преобразования Томсона, соответствующего указанному случаю.

Для вырожденного случая преобразования Томсона, согласно формулам Донкина (25), (26), функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\begin{cases} U(x,y,z) = F\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \\ V(x,y,z) = G\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right); \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} U(x,y,z) = F\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \\ V(x,y,z) = \dfrac{1}{r} G\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right); \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} U(x,y,z) = \dfrac{1}{r} F\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \\ V(x,y,z) = G\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right); \end{cases} \tag{49}$$

$$\begin{cases} U(x,y,z) = \dfrac{1}{r} F\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \\ V(x,y,z) = \dfrac{1}{r} G\left(\dfrac{x}{z+r}, \dfrac{y}{z+r}\right), \end{cases} \tag{50}$$

где функции $F(p, q)$ и $G(p, q)$ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа.

Связь между функциями $F(p, q)$ и $G(p, q)$ устанавливается с помощью линейного дифференциального соотношения первого порядка:

$$G(p,q) = \lambda F(p,q) + v(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial p} + w(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial q}, \tag{51}$$

где λ – произвольная вещественная константа, а функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ удовлетворяют соотношениям Коши – Римана:

$$v_p = w_q,\ v_q = -w_p,$$

т. е. представляют собой вещественную и мнимую части некоторой аналитической функции комплексного переменного [31 – 34] (и тем самым каждая из этих функций удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа).

Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из выражений вида (51) с разными константами λ_k и разными функциями $v_k(p, q)$ и $w_k(p, q)$, но с одной и той же гармонической функцией $F(p, q)$, очевидным образом снова будут выражениями вида (51) при константах λ, выбранных надлежащим образом, и функциях $v(p, q)$ и $w(p, q)$, удовлетворящих соотношениям Коши – Римана.

Физический смысл формулы (51) вполне нагляден. Если функция $F(p, q)$ будет гармонической, то ее можно рассматривать как вещественную часть аналитической функции комплексного переменного $s = p + iq$:

$$f(s) = f(p+iq) = F(p,q) + i\,\hat{F}(p,q);$$

здесь функции $F(p, q)$ и $\hat{F}(p,q)$ связаны соотношениями Коши – Римана:

$$F_p = \hat{F}_q,\ F_q = -\hat{F}_p.$$

Следует отметить, что соотношения Коши – Римана, рассматриваемые как полная система дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $\hat{F}(p,q)$ (при заданной функции $F(p, q)$), в соответствии с теоремой из раздела «Полные системы уравнений в частных производных первого порядка», гарантированно имеет решение с точностью до произвольной аддитивной константы, когда $F(p, q)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Возвращаясь к обсуждению физического смысла формулы (51), утверждаем, что аналогичным образом аналитической функцией комплексного переменного будет функция

$$u(s) = u(p+iq) = v(p,q) + iw(p,q),$$

когда функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ связаны соотношениями Коши – Римана.

В таком случае выражение

$$\lambda f(s) + u(s)\, df(s)/ds$$

является аналитической функцией комплексного переменного, а ее вещественная часть, совпадающая с правой частью формулы (51), обязана быть гармонической функцией (удовлетворять двумерному уравнению Лапласа).

Также можно проверить с помощью прямой подстановки, что функция (51) будет гармонической функцией, когда функция F – гармоническая:

$$\begin{gathered} G_{pp}+G_{qq}=\lambda\left(F_{pp}+F_{qq}\right)+ \\ +\left(v_{pp}+v_{qq}\right)F_p+\left(w_{pp}+w_{qq}\right)F_q+ \\ +v\left(F_{ppp}+F_{pqq}\right)+w\left(F_{ppq}+F_{qqq}\right)+ \\ +2\left(v_pF_{pp}+w_qF_{qq}\right)+2\left(v_q+w_p\right)F_{pq}=0. \end{gathered} \tag{52}$$

Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из выражений вида (51), очевидным образом снова будут выражениями вида (51) при константах λ, выбранных надлежащим образом, и функциях $v(p, q)$ и $w(p, q)$, удовлетворяющих соотношениям Коши – Римана.

Поскольку частные производные от функции F по p и q можно с помощью формул (47) – (49) или (50) выразить через частные производные от функции U по x и y, соотношение (51) между функциями F и G порождает линейное дифференциальное соотношение между функциями U и V, которое тем самым будет являться преобразованием Томсона для рассматриваемых однородных функций U и V.

В случае, когда соотношение (51) будет обратимым, получаемое преобразование Томсона для однородных гармонических функций будет также обратимым, т. е. будет оператором Донкина.

Как уже было отмечено, когда функция $F(p, q)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, ее можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции комплексного переменного:

$$f(s)=f(p+iq)=F(p,q)+i\hat{F}(p,q), \tag{53}$$

где вещественная часть $F(p, q)$ и мнимая часть $\hat{F}(p,q)$ связаны соотношениями Коши – Римана:

$$F_p=\hat{F}_q, F_q=-\hat{F}_p.$$

Соответственно, и функцию $G(p, q)$ также можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции комплексного переменного:

$$g(s)=g(p+iq)=G(p,q)+i\hat{G}(p,q), \tag{54}$$

где вещественная часть $G(p, q)$ и мнимая часть $\hat{G}(p,q)$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} G(p,q)=\lambda F(p,q)+v(p,q)F_p(p,q)+ \\ +w(p,q)F_q(p,q)= \\ =\lambda F(p,q)+v(p,q)F_p(p,q)- \\ -w(p,q)\hat{F}_p(p,q); \\ \hat{G}(p,q)=\lambda\hat{F}(p,q)+v(p,q)\hat{F}_p(p,q)+ \\ +w(p,q)\hat{F}_q(p,q)= \\ =\lambda\hat{F}(p,q)+v(p,q)\hat{F}_p(p,q)+ \\ +w(p,q)F_p(p,q). \end{gathered} \tag{55}$$

Можно убедиться, что функции (55) связаны между собой соотношениями Коши – Римана:

$$G_p=\hat{G}_q,\ G_q=-\hat{G}_p.$$

Соотношения (55) для вещественной и мнимой частей функции $g(s)$ эквивалентны обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для аналитических функций комплексного переменного [35]:

$$g(s)=\lambda f(s)+u(s)\frac{df(s)}{ds}, \tag{56}$$

где

$$u(s) = u(p + iq) = v(p, q) + iw(p, q).$$

Уравнение (56), рассматриваемое на комплексной плоскости относительно неизвестной функции $f(s)$ при заданной функции $g(s)$, имеет решение

$$\begin{gathered} f(s)=\left(C+\int_{s_0}^{s}\left[\frac{g(t)}{u(t)}\exp\left(\int_{s_0}^{t}\frac{\lambda d\tau}{u(\tau)}\right)\right]dt\right)\times \\ \times\exp\left(-\int_{s_0}^{s}\frac{\lambda dt}{u(t)}\right), \end{gathered} \tag{57}$$

где C – произвольная комплексная константа.

Для формулы (57) существенно, что интеграл от аналитической функции на комплексной плоскости не зависит от пути интегрирования (для чего, возможно, потребуется добавить к комплексной плоскости разрезы, устраняющие особые точки подынтегральных функций и обеспечивающие односвязность полученной области), а результатом интегрирования является аналитическая функция [35]. Поэтому дифференциальное соотношение (51) будет обратимым для подмножества двумерных гармонических функций, если $u(s) \neq 0$ (либо при $u(s) = 0$, если $\lambda \neq 0$).

Следовательно, преобразования Томсона, порождаемые для однородных гармонических функций (47) – (49) или (50) с помощью соотношений (51), являются операторами Донкина, если только не обращаются в нуль сразу все коэффициенты в формуле (51).

Вырожденные линейные комбинации

До сих пор рассматривались операторы Донкина, которые, хотя и содержат в некоторых случаях в явном виде степень однородности в качестве параметра, могут применяться к однородным гармоническим функциям любых степеней. В этом разделе исследуется возможность существования вырожденных случаев, которые работают лишь для какой-то одной степени однородности и не могут быть обобщены на произвольную степень однородности.

Действительно, при некоторых значениях m степени однородности формул из списков (5) – (14) и (15) – (24) могут пересекаться и, следовательно, эти формулы допустимо объединять в одной и той же линейной комбинации с постоянными коэффициентами. Такие комбинации могут отличаться от линейных комбинаций общего вида, рассмотренных в разделе «Особый случай». Приведем такие значения m.

1. Если $m = -1/2$, то у операторов (5), (12) – (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная $-1/2$ (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (5), (12) – (15), (22) – (24) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

2. При $m = 0$ у операторов (5), (12) – (14), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная нулю, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = eU + U_x(cy - bz + fr) + U_y(az - cx + gr) + U_z(bx - ay + hr). \quad (58)$$

3. При $m = -1$ у операторов (5), (12) – (14), (19) – (21) будет одинаковая степень однородности, равная -1, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = U\left(e + \frac{fx + gy + hz}{r}\right) + U_x(cy - bz + fr) + U_y(az - cx + gr) + U_z(bx - ay + hr). \quad (59)$$

4. При $m = 0$ у операторов (6) – (8), (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная -1, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = \frac{eU}{r} + U_x\left(f + \frac{cy - bz}{r}\right) + U_y\left(g + \frac{az - cx}{r}\right) + U_z\left(h + \frac{bx - ay}{r}\right). \quad (60)$$

5. При $m = 1/2$ у операторов (6) – (8), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная $-1/2$ (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (6) – (8) и (16) – (18) тождественно совпадают при $k = 1/2$).

6. При $m = -1/2$ у операторов (6) – (8), (19) – (21) будет одинаковая степень однородности, равная $-3/2$ (этот случай также не представляет интереса, так как группы операторов (6) – (8) и (19) – (21) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

7. При $m = -1$ у операторов (9) – (11), (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная нулю, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = U(fx + gy + hz + erU) + U_x r(cy - bz + fr) + U_y r(az - cx + gr) + U_z r(bx - ay + hr). \quad (61)$$

8. При $m = -1/2$ у операторов (9) – (11), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная 1/2 (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (9) – (11) и (16) – (18) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

9. При $m = -3/2$ у операторов (9) – (11), (19) – (21) будет одинаковая степень однородности, равная – 1/2 (этот случай также не представляет интереса, так как группы операторов (9) – (11) и (19) – (21) тождественно совпадают при $k = -3/2$).

Выражения (58) – (61) соответствуют особому случаю, рассмотренному в разделе

«Особый случай», если выбрать

$$\lambda = e,$$

$$v(p,q) = \frac{f-b}{2} - hp + cq +$$
$$+(a-g)pq - \frac{b+f}{2}\left(p^2 - q^2\right), \quad (62)$$
$$w(p,q) = \frac{a+g}{2} - cp - hq -$$
$$-(b+f)pq - \frac{a-g}{2}\left(p^2 - q^2\right)$$

(легко убедиться, что функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ удовлетворяют соотношениям Коши – Римана $v_p = w_q$, $v_q = -w_p$).

Следовательно, операторы (58) – (61) являются операторами Донкина по отношению к однородным гармоническим функциям соответствующих степеней при любом выборе констант a, b, c, e, f, g, h.

Заключение

Исследование всех возможных форм дифференциальных преобразований Томсона для трехмерных однородных гармонических функций показывает, что любые операторы Донкина первого порядка обязаны представлять собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных дифференциальных формул Томсона первого порядка для однородных функций [2]. Это, естественно, не означает, что базисные дифференциальные формулы Томсона либо их линейные комбинации действительно являются операторами Донкина. Однако в работе [3] показано, что базисные дифференциальные формулы Томсона (5) – (14), (15) – (24) обратимы, т. е. являются операторами Донкина.

Исследование, представленное в данной работе, показывает, что линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5) – (14), (15) – (24), соответствующих одной степени однородности, также являются операторами Донкина. Очевидно, что других операторов Донкина первого порядка для трехмерных однородных гармонических функций не существует.

Утверждение, высказанное в такой сильной форме, требует некоторого разъяснения. Если прибавить к любой из формул (5) – (14), (15) – (24) или к их линейной комбинации соотношение Эйлера, умноженное на произвольную функцию, то получится новая трансформирующая формула с точно такими же свойствами. Это связано с тем, что по своему воздействию на трехмерные однородные гармонические функции заданной степени такие формулы будут полностью эквивалентны базовым формулам (5) – (14) и (15) – (24) либо их линейным комбинациям с постоянными коэффициентами.

Для чистоты эксперимента эта функция должна быть однородной по Эйлеру с соответствующей степенью однородности, иначе искусственную аддитивную добавку будет слишком легко вычленить из нового выражения. При этом подобные формулы могут достаточно серьезным образом отличаться в алгебраическом смысле от полученного ранее списка. Например, оператор

$$L[U] = AU_x(x,y,z) +$$
$$+BU_y(x,y,z) + CU_z(x,y,z),$$
$$A = a(2m+1)xz + b(2m+1)yz +$$
$$+c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right),$$
$$B = a(2m+1)xy + \quad (63)$$
$$+b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) +$$
$$+c(2m+1)yz,$$
$$C = a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) +$$
$$+b(2m+1)xy + c(2m+1)xz,$$

с произвольными константами a, b и c отличается (с алгебраической точки зрения) как от любой из полученных ранее базовых формул (5) – (14) и (15) –(24), так и от их линейной комбинации с постоянными коэффициентами.

Однако этот оператор можно представить в виде

$$L[U] = \Big(a(2m+1)xz + b(2m+1)yz +$$
$$+c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right)\Big)U_x +$$
$$+\Big(a(2m+1)xy + b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) +$$
$$+c(2m+1)yz\Big)U_y + \quad (64)$$
$$+\Big(a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) +$$
$$+b(2m+1)xy + c(2m+1)xz\Big)U_z =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2m+1\right)\left(cx+by+az\right)\times \\
&\times\left(xU_x + yU_y + zU_z - mU\right)+ \\
&+mc\left(\left(2m+1\right)xU - r^2U_x\right)+ \\
&+mb\left(\left(2m+1\right)yU - r^2U_y\right)+ \\
&+ma\left(\left(2m+1\right)zU - r^2U_z\right).
\end{aligned} \quad (64)$$

Из этого тождества видно, что фактически оператор (63) ничем не отличается от линейной комбинации операторов (9) – (11) по своему воздействию на однородные гармонические функции степени m.

Указанная связь, однако, не всегда очевидна. Похожие проблемы, касающиеся фактической идентичности математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, рассматриваются, например, в работах [36 – 39].

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [40].

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики СПбПУ, за активное участие в обсуждении способов доказательства обратимости линейных дифференциальных операторов на подмножестве однородных гармонических функций.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав государственного задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

4. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

5. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

6. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.

7. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

8. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c // Proceedings of the Royal Society of London. 1856 –1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

9. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. Tome XII. 1847. Pp. 256–264.

10. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.

11. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

12. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

13. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

14. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

15. **Helms L.L.** Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

16. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 165–181.

17. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

18. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. II.

Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

19. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

20. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

21. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

22. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

23. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.

24. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.

25. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934.

26. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

27. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

28. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

29. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

30. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107–119.

31. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

32. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968. 486 с., 624 с.

33. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

34. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

35. **Айнс Э.Л.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ–НТТИ Украины, 1939. 719 с.

36. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

37. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

38. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

39. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

40. Wolfram Mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.06.2019, принята к публикации 16.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.
2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.
3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.
4. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.
5. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.
6. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 5 (1) (2017) 10–27.
7. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace‘s functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.
8. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace‘s functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.
9. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, Journal de mathématiques pures et appliqués. 12 (1847) 256–264.
10. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], OGIZ-GITTL, Moscow, Leningrad, 1946.
11. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.
12. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.
13. **Kellogg O.D.,** Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
14. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. “Lecture Notes in Mathematics”, Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.
15. **Helms L.L.,** Potential theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.
16. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe’s K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.
17. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.
18. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.
19. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin’s formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

20. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

21. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

22. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

23. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

24. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

25. **Günther N.M.,** Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.

26. **Rashevsky P.K.,** Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.

27. **Finikov S.P.,** Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometriy [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.

28. **Cartan É.,** Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications gèomètriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 994, Hermann, Paris, 1945.

29. **Shcherbakov R.N.,** Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometriy [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.

30. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 27 (3) (2017) 107–119.

31. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

32. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

33. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

34. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen Über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

35. **Ince E.L.,** Ordinary differential equations, Dover Publications, New York, 1964.

36. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

37. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

38. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

39. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

40. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/.

Received 21.06.2019, accepted 16.07.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru