

DOI: 10.18721/JEST.26308

УДК 621.74.01:681.3.06

*В.М. Голод, Д.К. Ле*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия**ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ МЕЗОМАСШТАБНОГО  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ МЕЖДУОСНЫХ  
ПРОМЕЖУТКОВ ДЕНДРИТОВ ДЛЯ СТАЛЬНОГО ЛИТЬЯ**

Необходимость прогнозирования дендритной структуры отливок для обеспечения их качества путем моделирования литейных процессов остается актуальной в силу сложности морфологии мезомасштабного массива отдельных ветвей и стволов, адекватное описание эволюции которых, невзирая на многочисленные попытки, не реализовано. В работе рассмотрена и успешно решена задача обобщенного количественного отображения кинетики совместной конкурентной кристаллизации значительного массива дендритных ветвей на основе металлографического анализа размеров междуосных промежутков путем статистического анализа микроструктуры образцов, часть из которых получена путем закалки затвердевающего расплава. Показано, что применение математического аппарата логнормального распределения случайных величин для серии репрезентативных массивов вторичных междуосных промежутков стальных отливок обеспечивает эффективную свертку экспериментальной информации, обобщенные параметры которой позволяют получить описание дендритной эволюции. Использование математического аппарата логнормального распределения случайных величин делает возможным проведение расчетной оценки неоднородности мезомасштабной дендритной структуры, а также расчет ранее недоступных значений и структурно-зависимых характеристик непрерывного скелета твердой фазы и его фильтрационной проницаемости при моделировании образующихся усадочных пустот.

*Ключевые слова:* дендритная структура, вторичные междуосные промежутки, локальная структурная неоднородность, статистические модели, логнормальное распределение, литейные процессы.

*Ссылка при цитировании:*

Голод В.М., Ле Д.К. Обобщенное уравнение мезомасштабного распределения вторичных междуосных промежутков дендритов для стального литья // *Материаловедение. Энергетика.* 2020. Т. 26, № 3. С. 101–116. DOI: 10.18721/JEST.26308

Это статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

*V.M. Golod, D.C. Le*

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

**GENERALIZED EQUATION OF MESOSCALE DISTRIBUTION  
OF SECONDARY DENDRITE ARM SPACINGS FOR STEEL CASTING**

The need to predict the dendritic structure of castings to ensure their quality by modeling of casting processes remains relevant due to the complexity of the morphology of the mesoscale array of individual branches and trunks, an adequate description of the evolution of which, despite numerous attempts, has not been implemented. The paper considers and successfully solves the problem of a generalized quantitative representation of the kinetics of joint competitive crystallization of a significant array of dendritic branches on the basis of a metallographic

analysis of the sizes of dendrite arm spacings by means of a statistical analysis of the samples microstructure. Some of the samples were obtained by quenching the solidifying melt. It is shown that the use of the mathematical apparatus of the lognormal distribution of random variables for a series of representative arrays of secondary dendrite arm spacings of steel castings provides an effective convolution of experimental information, the generalized parameters of which make it possible to obtain a description of the dendritic evolution. The use of the mathematical apparatus of the lognormal distribution of random variables makes it possible to carry out a computational assessment of the heterogeneity of the mesoscale dendritic structure, as well as to calculate previously inaccessible values and structure-dependent characteristics of the continuous skeleton of the solid phase and its filtration permeability when modeling the resulting shrinkage voids.

*Keywords:* dendritic structure, secondary dendrite arm spacings, local structural heterogeneity, statistical models, lognormal distribution, casting processes.

*Citation:*

V.M. Golod, D.C. Le, Generalized equation of mesoscale distribution of secondary dendrite arm spacings for steel casting, *Materials Science. Power Engineering*, 26 (03) (2020) 101–116, DOI: 10.18721/JEST.26308

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

**Введение.** Целью настоящей работы является исследование закономерностей формирования мезомасштабной неоднородности дендритной структуры, возникающей в процессе объемной кристаллизации сплавов, на основе использования статистического аппарата логнормального распределения наблюдаемых структурных изменений. В доступной русско- и англоязычной литературе отсутствуют публикации, ориентированные на исследование логнормальных распределений в структуре литых металлических сплавов. Исключение составляют ранее опубликованные данные по дендритной структуре группы литых алюминиевых сплавов, где впервые была статистически обоснована гипотеза логнормального распределения относительных междусных промежутков  $\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}$  для значительного массива экспериментальных данных [1], что ставит при выполнении настоящей работы дополнительную задачу методологического развития выявленного эффективного математического инструментария и оценки его дальнейших перспектив.

#### **Объекты исследования и обработка экспериментальных данных**

Дендритная структура литого металла, характеризующаяся обычно экспериментальной величиной  $\lambda_2$  – средним значением вторичных междусных промежутков, несмотря на ее многолетние исследования [2–6 и др.], до сих пор не отвечает той степени изученности, которая бы позволила сочетать обобщенные опытные данные с их теоретическим моделированием для анализа и прогнозирования литейных процессов (течение и остановка двухфазного потока, возникновение усадочных пустот, образование горячих трещин и т.д.). При моделировании литейных процессов вследствие экспериментальной и/или теоретической сложности надежного определения параметров дендритной структуры [6–9] используют приближенные статистические оценки или значения, получаемые с помощью полуэмпирических выражений, что радикально ухудшает прогностическое качество моделирования и возможность объективной оценки разрабатываемой технологии [7–12]. Существующие представления о формировании дендритов и их срастании в непрерывный скелет при последовательном изменении морфологии образующегося твердо-жидкого ансамбля случайно ориентированных стволов и боковых ветвей, носят весьма схематичный характер [13–14] и не позволяют количественно характеризовать кинетику дендритной кристаллизации в рамках системного анализа неравновесной кристаллизации и прогнозировать возникающую структурную и ликвационную неоднородность. По этой причине актуальной задачей

компьютерного анализа взаимосвязанных литейных процессов различной природы (кристаллизационной, диффузионной, капиллярной и др.) является накопление обширного массива данных по дендритной структуре различных сплавов [16–17] и активный поиск математических моделей для обобщения экспериментального материала с целью формирования на его основе математического аппарата, описывающего неоднородную мезомасштабную структуру.

В качестве подобных моделей используют статистические уравнения различного рода, используемые для включения дендритных параметров ( $\lambda_1, \lambda_2, \sigma_\lambda$ ) в число предикторов ряда важных литейных характеристик. Накопленный эмпирический материал и теоретический анализ, опирающийся на представления о формировании на определенном этапе объемной дендритной кристаллизации скелета непрерывной твердой фазы, свидетельствует, что в результате смыкания и срастания мезомасштабного ансамбля боковых ветвей различной толщины, протяженности и взаимной ориентации, происходит радикальное изменение характера течения расплава в объемных пустотах скелета, проницаемость которого зависит от локальной структурной неоднородности ветвей при их возникновении и условий дальнейшего сопряженного радиального роста при непрерывном выделении и растворении твердой фазы по механизму дендритной коалесценции [1].

Ансамблевые дисперсные композиции в процессах структурных превращений обнаруживают двойной характер взаимного влияния слагающих его частей (компонентов) на ход процесса [18–19]. Наиболее распространены представления об *аддитивном* влиянии, которое со стороны отдельной части системы (зерна, элемента, компонента и т.д.) является весьма малым ( $s_i$ ) и вносит свой вклад  $S$ , определяемый *суммарным* эффектом большого числа  $N$  воздействий, зависящим от коэффициента  $\alpha_i$ :  $S = \sum_{i=1}^N \alpha_i s_i$ . Такие системы и процессы в них описываются *нормальным* статистическим распределением наблюдаемых изменений системных параметров  $x$ <sup>1</sup>:

$$F(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right], \quad (1)$$

где  $\mu$  – среднее значение  $x$ ;  $\sigma$  – стандартное отклонение  $x$  от среднего.

Наряду с указанными выше в ряде случаев ансамблевые дисперсные композиции обнаруживают *мультипликативный* характер влияния отдельных частей на ход процесса структурных превращений, приводящий к их существенному изменению, которое непрерывно накапливается  $S = \prod_{i=1}^N \alpha_i s_i$ . В результате проявления и распространения в объеме системы таких локальных воздействий характер структурных изменений эволюционирует и приводит к прогрессирующим последствиям, которые описываются *логнормальным* статистическим распределением наблюдаемых изменений системных параметров  $z$  [18, 19]:

$$F(z, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(z) - \mu]^2\right\}, \quad (2)$$

где  $z$  – переменная, принимающая различную форму в зависимости от характера рассматриваемой задачи;  $\mu$  – среднее значение  $\ln(z)$ ;  $\sigma$  – стандартное отклонение  $\ln(z)$  от его среднего значения. Концепция *логнормального* распределения случайных величин, которая получила убедительное подтверждение широкой применимости при анализе кинетики процессов, затрагивающих экономические, популяционные, механические и структурные превращения особого класса в

<sup>1</sup> Вероятностные разделы математики: учебник для бакалавров технических направлений, под ред. Ю.Д. Максимова. СПб., «Иван Федоров», 2001. 592 с.

системах различной природы, отличающихся особым характером взаимодействия объединяемых ими случайных компонентов [17, 20].

В качестве объекта изучения выбрана наиболее распространенная равноосная дендритная структура обширной группы сталей различного состава, получаемая при изготовлении машиностроительных отливок, затвердевающих при скоростях охлаждения, характерных для неметаллических форм и изложниц.

Для проведения исследований в работе использованы результаты микроструктурных измерений междуосных промежутков боковых ветвей дендритов (рис. 1,а), выявленных на травленных шлифах в образцах, вырезанных из стальных отливок различного состава (табл. 1) при изменении локальной продолжительности затвердевания в пределах от 100 до 300 с (образцы 1-7 углеродистых и низколегированных марок [3]) и от 120 до 1100 с (образцы 8-10 из средней части по высоте слитка высоколегированной стали 10X16H25M2T [19] массой 500 кг на удалении от поверхности соответственно на 100, 140 и 175 мм).

Таблица 1

**Химический состав и условия затвердевания исследованных образцов стали**

Table 1

**Chemical composition and conditions of solidification of the studied steel samples**

Номер образца	1	2	3	4	5	6	7	8-10
C, %	0,11	0,12	0,18	0,19	0,36	0,69	1,01	0,08
Si, %	0,12	0,27	0,44	0,40	0,27	0,23	0,25	0,51
Mn, %	1,25	1,53	1,26	1,42	0,58	0,72	0,46	1,66
Cr, %	–	–	–	–	0,08	–	–	15,5
Ni, %	–	–	–	0,13	0,05	–	–	24,3
$\Delta t_{LS}$ , K	65	75	80	65	75	120	140	30
$\tau_{LS}$ , с	240	230	210	210	230	250	300	300-450

Примечание:  $\Delta t_{LS}$  – температурный интервал затвердевания;  $\tau_{LS}$  – локальная продолжительность затвердевания

Сводные данные табл. 1, свидетельствующие о значительных пределах варьирования химического состава сплавов и различии условий затвердевания исследованных образцов, позволили получить многофакторную информацию об их дендритной микроструктуре, являющейся основным объектом последующего статистического анализа размеров вторичных междуосных промежутков дендритов.

Регистрация размеров междуосных промежутков и формирование статистических массивов  $X[\lambda_2]$ , характеристики которых представлены в табл. 2, производилась после соответствующего травления образцов с помощью системы анализа изображений Thixomet Pro и оптического микроскопа Techno Meiji IM 7200 на основе серии более 300 измерений для каждого из образцов (8-10) сплава 10X16H25M2T [19] и по 50-120 измерений для углеродистых и низколегированных сталей (1-7) [3], дендритная структура которых выявлена путем закалки твердо-жидкого металла при выделении от 40 до 80 % твердой фазы.

Приведенные в левой части табл. 2 характеристики структуры исследованных образцов  $X[\lambda_2]$  для массивов первичных экспериментальных данных дают возможность оценить значительную неоднородность равноосных дендритных кристаллитов с помощью значений  $\lambda_2$  по наблюдаемому размаху  $X_{max} - X_{min}$ , а также – величину стандартного отклонения  $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ , дисперсии  $D_x$  и коэффициента асимметрии  $A_x$  для последующего вычисления характерных относительных параметров.

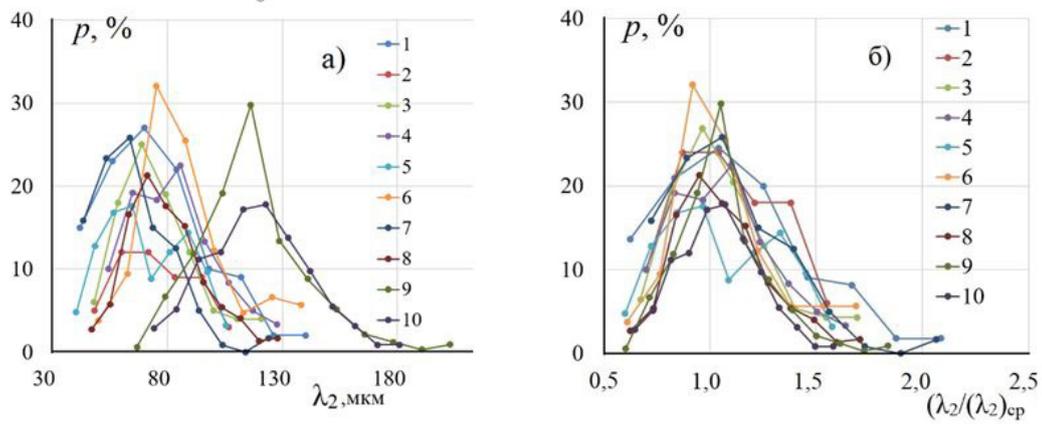


Рис. 1. Сводные гистограммы распределения частоты  $p$  исходных размеров  $\lambda_2$  (а) и частоты относительных размеров вторичных междоусных промежутков дендритов  $\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}$  (б) в исследованных литых образцах из сталей различных марок

Fig. 1. Summary histograms of the distribution of the frequency  $p$  of the initial dimensions  $\lambda_2$  (a) and the frequency of the relative dimensions of the secondary dendrite arm spacings  $\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}$  (b) in the investigated cast samples of steels of various grades

Таблица 2

**Статистические параметры массивов  $X[\lambda_2]$  и  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  для исследованных образцов стали**

Table 2

**Statistical parameters of arrays  $X[\lambda_2]$  and  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  for the investigated steel samples**

Номер образца	Массив $X[\lambda_2]$					Массив $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$				
	$X_{min}^*$ , МКМ	$X_{cp}^*$ , МКМ	$X_{max}^*$ , МКМ	$D_X^*$ , МКМ <sup>2</sup>	$A_X$	$Y_{min}$	$Y_{cp}$	$Y_{max}$	$D_Y$	$A_Y$
1	28	67	140	517	0,67	-0,88	-0,06	0,74	0,12	-0,14
2	37	69	107	279	0,23	-0,63	-0,03	0,44	0,06	-0,28
3	38	71	121	333	0,78	-0,64	-0,03	0,53	0,06	0,08
4	44	78	128	347	0,48	-0,57	-0,03	0,50	0,06	-0,01
5	32	67	105	313	0,22	-0,73	-0,04	0,45	0,07	-0,18
6	37	82	138	439	0,83	-0,78	-0,03	0,52	0,06	0,11
7	33	60	124	271	0,98	-0,59	-0,04	0,73	0,07	0,21
8	40	75	128	289	0,59	-0,66	-0,03	0,53	0,05	-0,04
9	54	111	203	535	0,82	-0,71	-0,02	0,61	0,04	0,02
10	65	114	181	476	0,17	-0,57	-0,02	0,46	0,04	-0,33
Среднее значение	$X_{min}^*$	$X_{cp}^*$	$X_{max}^*$	$D_X^*$	$A_X^*$	$Y_{min}^*$	$Y_{cp}^*$	$Y_{max}^*$	$D_Y^*$	$A_Y^*$
	41	80	138	380	0,58	-0,68	-0,03	0,56	0,06	-0,06

Примечания:  $D, A$  – дисперсия и коэффициент асимметрии;  $X_{min}^*, X_{cp}^*, X_{max}^*, Y_{min}^*, Y_{cp}^*, Y_{max}^*$  – минимальное, среднее и максимальное значение в исследуемых массивах

## Результаты и их обсуждение

### 1. Статистический анализ экспериментальных данных

На рис. 1,а приведены гистограммы распределения вторичных междуосных промежутков ( $\lambda_2$ ) исследованных образцов стали различного состава при варьировании условий их затвердевания – по средней скорости охлаждения от 0,50 К/с (для образцов 1-7) до 0.10 К/с (образцы 8-10) и режиму кристаллизации, прерываемой в образцах 1-7 закалкой жидко-твердого сплава. Эти различия обуславливают значительные масштабы варьирования минимальных  $X_{min}$  (28-65 мкм) и максимальных  $X_{max}$  (107-203 мкм) характеристик, размаха  $(X_{max} - X_{min})/X_{cp}$  (0,68-1,44) и дисперсии  $D_X/D_X^*$  (0,71-1,41) относительно их средних значений, а также коэффициента асимметрии  $A_X/A_X^*$  (0,17-0,98), что позволяет считать рассматриваемые данные достаточно репрезентативными для значительного круга машиностроительных стальных отливок.

В представленной сводной диаграмме (рис. 1,а) отчетливо выражен несимметричный характер изменения частоты размеров междуосных промежутков – более крутой на восходящих и пологий на нисходящих ветвях относительно расположения вершин гистограмм, где отмечается максимальное значение вероятности (частоты). Эти особенности присущи всем без исключения образцам, при этом наиболее ярко они выражены в образцах 8-10, отличающихся наибольшим размахом гистограмм между минимальными  $(\lambda_2)_{min}$  и максимальными  $(\lambda_2)_{max}$  значениями.

Преобразование исходных гистограмм (рис. 1,а) путем использования относительных значений  $(\lambda_2)/(\lambda_2)_{cp}$  размеров междуосных промежутков (рис. 1,б) при совмещении их локальных координат  $(\lambda_2)/(\lambda_2)_{cp} = 1$  приводит к существенному изменению взаимного размещения гистограмм. При сохранении ранее отмеченной их различной асимметричности на рис. 1,б проявляется сходственный характер их геометрии относительно общей вершины  $(\lambda_2) = (\lambda_2)_{cp}$  и плотное расположение кривых всего составного ансамбля.

Данные, приведенные в левой части табл. 2, где сопоставлены основные характеристики рассмотренных исходных гистограмм ( $X_{min}$ ;  $X_{cp}$ ;  $X_{max}$ ;  $D_X$ ;  $A_X$ ) и их осредненные значения ( $X_{min}^*$ ;  $X_{cp}^*$ ;  $X_{max}^*$ ;  $D_X^*$ ;  $A_X^*$ ), позволяют дать обобщенную оценку значительной асимметрии, присущей исследованным дендритным структурам, путем сравнения относительных значений  $\Delta X_{min} = (X_{cp} - X_{min})/\sigma_X = 2,03 \pm 0,20$  и  $\Delta X_{max} = (X_{max} - X_{cp})/\sigma_X = 3,05 \pm 0,30$ , используя в качестве масштаба стандартное отклонение  $\sigma_X$ . Значительная асимметрия относительных размеров междуосных промежутков, наблюдаемая на рис. 1,б в широком интервале их значений от  $X_{min} [(\lambda_2)/(\lambda_2)_{cp}] = 0,53$  до  $X_{max} [(\lambda_2)/(\lambda_2)_{cp}] = 2,09$ , обусловлена подобием характера радикальных физико-химических превращений при ее возникновении в мезомасштабных ансамблевых дендритных структурах.

Важным дополнительным подтверждением сделанного выше вывода о *подобии* мезомасштабных статистических массивов формирующихся вторичных дендритных ветвей является отмеченное для всех исследованных сплавов достижение на момент *завершения* или *прерывания* кристаллизации весьма стабильного (с доверительной вероятностью 0.95) соотношения  $(X_{max}/X_{min} = 3.49 \pm \pm 0.30)$  с размахом, не превышающим 10 %, в условиях непрерывного изменения текущих значений  $X_{min}$  и  $X_{max}$  вследствие коалесценции при выделении твердой фазы. Эти оценки свидетельствуют о количественном *структурном подобии*, устойчиво проявляющемся в отношении ряда статистических параметров *мезомасштабного* распределения вторичных междуосных промежутков дендритов.

Сопоставление близких по характеру дендритных гистограмм для различных по химическому составу сталей, приведенных на рис. 1,б в образцах (8-10), *непрерывно* кристаллизовавшихся при затвердевании крупного слитка, с экспериментальными образцами (1-7), полученными путем закалки, свидетельствует о том, что такое подобие кинетики изменения *локальной* дендритной структуры в условиях капиллярно-диффузионной коалесценции вторичных ветвей при *объемном* характере затвердевания не зависит от текущего соотношения долей твердой и жидкой фазы в мезомасштабе и обусловлено его *микромасштабным* характером.

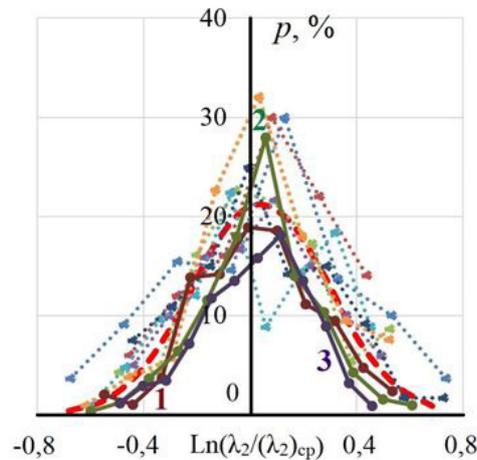


Рис. 2. Сводная диаграмма частоты  $p[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}})]$  относительных размеров вторичных междоузных промежутков дендритов в исследованных литых образцах (точки для образцов 1-7 и линии для образцов 8-10) в сопоставлении с обобщенной кривой распределения частоты (пунктир) в полулогарифмических координатах

Fig. 2. Summary diagram of the frequency  $p[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}})]$  of the relative sizes of the secondary dendrite arm spacings of dendrites in the investigated cast samples (points for samples 1-7 and lines for samples 8-10) in comparison with the generalized frequency distribution curve (dotted line) in semi-logarithmic coordinates

На рис. 2 и в правой части табл. 2 приведены результаты преобразования данных сводного массива  $X[\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}}]$  на основе использования концепции логнормального распределения случайных величин. Сопоставление характера сводных диаграмм, приведенных на рис. 1, б и рис. 2, отражает главные выявленные при этом особенности логарифмического преобразования  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}})]$  для промежуточного набора массивов  $X[\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}}]$  относительных размеров  $\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}}$  междоузных промежутков вторичных дендритных ветвей. Представленные результаты (рис. 2) демонстрируют симметрию положительных и отрицательных ветвей гистограмм массива  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}})]$  (при коэффициенте асимметрии  $A_Y^* = -0.06$ ) и практическое равенство (с доверительной вероятностью 0,95) относительных значений левостороннего  $\Delta Y_{\text{min}}^* = (Y_{\text{cp}}^* - Y_{\text{min}}^*)/\sigma_Y^* \approx 2,62$  и правостороннего  $\Delta Y_{\text{max}}^* = (Y_{\text{max}}^* - Y_{\text{cp}}^*)/\sigma_Y^* \approx 2,38$  отклонения от нулевого значения при  $(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}}) = 1$ .

Характер приведенных на рис. 2 гистограмм для всей совокупности исследованных образцов свидетельствует о том, что механизм возникновения мезомасштабной дендритной структуры, обусловленный процессом капиллярно-диффузионной коалесценции вторичных ветвей, является *автомодельным*, поскольку проявляется единообразно в локальных пространственных (от  $X_{\text{min}}$  до  $X_{\text{max}}$ ), температурных ( $\Delta t_{LS}$ ), концентрационных ( $\Delta C_{LS} = C_L - C_S$ ) и временных ( $\tau_{LS}$ ) условиях зоны затвердевания отливки, динамически перемещающейся по сечению отливки. Объемно протекающий процесс коалесценции охватывает в течение всего периода кристаллизации множество локально сопряженных и случайно-ориентированных дендритных ветвей, коалесцирующих между собой при непрерывном понижении температуры, увеличении доли твердой и изменении состава жидкой фазы. Этот период начинается с момента возникновения непрерывного скелета смыкающихся дендритов и завершается с концом затвердевания внутридендритной жидкой фазы.

Результатом этого процесса является взаимосогласованное увеличение как минимальных  $Y_{\text{min}}$ , так и максимальных  $Y_{\text{max}}$  *микромасштабных* размеров междоузных промежутков при одновременном возрастании их размаха ( $Y_{\text{max}} - Y_{\text{min}}$ ), являющегося движущей силой продолжающейся коалесценции.

## 2. Численный анализ логнормального характера исследуемых распределений

Проверка справедливости гипотезы о логнормальном характере исследуемого распределения значений  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{\text{cp}})]$  проведена с использованием критерия Хи-квадрат<sup>1</sup> путем оценки

выполнения критического неравенства:  $\chi_B^2 \leq (\chi^2)_{кр.}$ , в котором выборочное значение сводного критерия  $\chi_B^2$  определено выражением:

$$\chi_B^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

определяющим сумму отклонений статистической частоты  $n_i$  в каждом сгруппированном промежутке рассматриваемой гистограммы от нормированной частоты  $np_i$ , где  $n$  – объем выборки;  $p_i$  – расчетное значение вероятности в  $i$ -ом интервале. Критическая величина  $(\chi^2)_{кр.}$  задается табличным значением квантили стандартного Хи-квадрат распределения  $\chi_{1-\alpha}^2(r) = \chi_{0,95}^2(r)$  при заданном уровне значимости ( $\alpha = 0,05$ ) в зависимости от числа степеней свободы выборки  $r = k - l - 1$ , где  $k$  – число промежутков ( $k = 5-11$ );  $l$  – число дополнительно оцененных параметров в гипотетическом законе генерального распределения ( $l = 2$ )<sup>1</sup>.

Таблица 3

**Расчетные значения  $\chi_B^2$  и  $(\chi^2)_{кр.}$  для статистических массивов  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$**

Table 3

**Calculated values of  $\chi_B^2$  и  $(\chi^2)_{кр.}$  for statistical arrays  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$**

Номер образца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Выборочное значение $\chi_B^2$	6,9	1,0	4,4	1,6	6,0	8,8	3,7	12,8	1,5	3,0
Критическое значение $(\chi^2)_{кр.}$	9,5	6,0	9,5	11,1	11,1	9,5	11,1	15,5	14,1	15,5

Проведенный анализ (табл. 3) показывает, что для всех представленных массивов  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  со значительным превышением выполняется неравенство  $\chi_B^2 \leq (\chi^2)_{кр.}$ , подтверждающее логнормальный характер исследуемых распределений (с доверительной вероятностью 0.95).

### 3. Обобщенное уравнение для оценки мезомасштабной дендритной неоднородности

Правомерность допущения о логнормальном характере распределения массива  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$ , наглядно представленная в табл. 2 и 3 и на рис. 2, а также стабильностью приведенного набора числовых характеристик ( $\Delta Y_{min}^*$ ;  $\Delta Y_{max}^*$ ;  $Y_{min}^*$ ;  $Y_{max}^*$ ;  $D_Y^*$ ;  $A_Y^*$ ), позволяет обобщить эти результаты путем их объединения в форме трехпараметрического уравнения для количественной оценки плотности распределения междендритных промежутков исследованного стального литья:

$$f\left[z, \mu^*, \sigma^*, \lambda_2 / (\lambda_2)_{cp}\right] = \frac{1}{\left[\lambda_2 / (\lambda_2)_{cp}\right] \sigma^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu^*)^2}{2(\sigma^*)^2}}. \quad (3)$$

при  $z = \text{Ln}[\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}]$ ;  $z_{min} \geq Y_{min}^*$ ;  $z_{max} \leq Y_{max}^*$ . Массив, описывающий рассматриваемый набор выборочных значений междусосных промежутков, характеризуется следующими статистическими параметрами:

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_1^n z_i = \frac{1}{n} \sum_1^n \text{Ln} \left[ \frac{\lambda_2}{(\lambda_2)_{cp}} \right];$$

$$\sigma^* = \sqrt{\left\{ \frac{1}{n-1} \sum_1^n [z_i - \mu^*]^2 \right\}} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{n-1} \sum_1^n \left[ \text{Ln} \left[ \frac{\lambda_2}{(\lambda_2)_{cp}} \right] - \mu^* \right]^2 \right\}}.$$

Их использование позволяет получить расчетные эмпирические значения мезомасштабной частоты размеров междендритных промежутков  $f(z_i)$  в заданном интервале  $[a = z_{min}, b = z_{max}]$  на основе известных табличных значений для нормального распределения<sup>1</sup> (при условии  $A = 0; E = 0$ ):

$$P\{z \in [a; b]\} = F\left(\frac{b - \mu^*}{\sigma^*}\right) - F\left(\frac{a - \mu^*}{\sigma^*}\right). \quad (4)$$

Для выявленных статистических параметров обобщенного логнормального распределения междусных промежутков:

$$\begin{aligned} Y_{min}^* &= -0,68; Y_{max}^* = 0,68; \mu_Y^* = 0; \\ \sigma_Y^* &= \sqrt{D_Y^*} = 0,25; A_Y^* = 0; E_Y^* = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

в табл. 4 представлены результаты расчета интервальной частоты  $p(Y)$ , характеризующей совокупность осредненных экспериментальных данных для исследованных сплавов. При их сопоставлении для восходящей ( $\lambda_2 < (\lambda_2)_{cp}$ ) и нисходящей ( $\lambda_2 > (\lambda_2)_{cp}$ ) ветвей гистограммы выявляется некоторая асимметрия полученных результатов в окрестности вершины.

Таблица 4

**Сравнительный анализ экспериментальных  $p(Y)$  и расчетных  $P(Y)$  значений частоты логнормального массива  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  для заданных промежутков  $[Y_1, Y_2]$**

Table 4

**Comparative analysis of the experimental  $p(Y)$  and calculated  $P(Y)$  values of the frequency of the lognormal array  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  for the given intervals  $[Y_1, Y_2]$**

$Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$	-0,54	-0,41	-0,27	-0,14	0	0,14	0,27	0,41	0,54
$p(Y)$	0,02	0,05	0,10	0,17	0,22	0,20	0,14	0,07	0,03
$P(Y)$	0,032	0,061	0,126	0,183	0,220	0,189	0,131	0,066	0,018

Эмпирические значения вероятности  $p(Y)$  логнормальных значений массива  $Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$  на каждом выделенном промежутке  $[Y_1; Y_2]$  в интервале  $[Y_{min}^* = -0,816; Y_{max}^* = 0,816]$ , приведенные в табл. 4, использованы для построения обобщенной пунктирной кривой (см. рис. 2), объединяющей результаты описанных выше трех этапов статистической обработки экспериментальных данных микроструктурных измерений  $X[\lambda_2]$  для исследованных образцов стали. Важно подчеркнуть их взаимное согласование, наглядно подтверждающее целесообразность применения обобщенных уравнений (3-5). Вместе с тем, это обстоятельство свидетельствует о возможности их использования для решения обратной задачи – расчета относительной доли дендритов, междусные промежутки которых находятся в заданном интервале значений  $\Delta X[\lambda_2]$  или  $\Delta Y[\text{Ln}(\lambda_2/(\lambda_2)_{cp})]$ , для количественной характеристики мезомасштабной структурной однородности.

Для решения этой задачи, играющей важную роль в моделировании кинетики ряда литейных процессов [16–17, 20], выполняется численное интегрирование уравнения (3) с использовани-

ем приведенного набора (5) обобщенных параметров и производится соответствующий расчет локальной или интервальной частоты дендритных ветвей различного масштаба. Приведенное в табл. 4 и на рис. 3 сопоставление интервальных эмпирических значений  $p(Y)$  с численными результатами теоретического расчета частоты  $P(Y)$ , оцениваемой на основе обобщенного уравнения (6), свидетельствует об их практическом взаимном совпадении (с коэффициентом корреляции 0,989).

Этот результат позволяет реализовать более детальный теоретический анализ кинетики коалесценции, в частности – рассмотреть эволюцию величины междендритных промежутков в ходе коалесценции  $\lambda_2(\tau)$ , опираясь на результаты системного моделирования изменения их среднего значения  $(\lambda_2)_{cp}(\tau)$  [16, 20], опирающегося на учет сопряженного влияния тепловых, термодинамических, диффузионных и кристаллизационных факторов, а также закономерности формирования логнормальной структурной неоднородности [18–19].

Эволюцию дендритного мезомасштабного ансамбля в процессе кристаллизации обобщенно описывает изменение среднего размера междусных промежутков [16]:

$$\frac{d}{d\tau} [(\lambda_2)_{cp}^3] = \frac{\Gamma}{\varphi_j} \frac{1}{\sum_n \frac{p_i C_i^L (1-k_i)}{D_i^L}}, \quad (6)$$

где  $\tau$  – продолжительность кристаллизации;  $C_i^L$  – осредненная концентрация  $i$ -го компонента в жидкой фазе;  $\Gamma$  – коэффициент Гиббса-Томсона;  $k_i, p_i$  – коэффициент распределения и тангенс угла наклона поверхности ликвидуса  $i$ -го компонента  $n$ -компонентного сплава ( $2 \leq i \leq n$ );  $\sigma_i$  – нормированный ( $0 \leq \sigma_i \leq 1$ ) параметр обратной диффузии;  $\sigma_i = 2\alpha_i / (1+2\alpha_i)$  при  $\alpha_i = 8 D_S^i \tau_{LS} / \lambda_2^2$ , который оценивает полноту диффузионных процессов в твердой фазе;  $D_i^L, D_i^S$  – коэффициенты диффузии компонентов в жидкой и твердой фазах;  $\varphi_j$  – параметр, который учитывает принятую  $j$ -ую модель коалесценции.

Скорость изменения размеров междусных промежутков определяется кинетикой коалесценции дендритов мезомасштабного ансамбля при непрерывном капиллярном растворении боковых ветвей малого радиуса в сочетании с эквивалентным диффузионным переносом атомов в направлении ветвей большого радиуса вследствие их различной равновесной растворимости в расплаве [21–23].

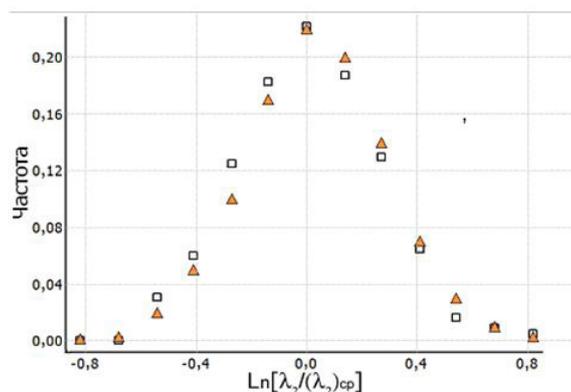


Рис. 3. Экспериментальная (а) и расчетная (б) гистограммы логнормального распределения междусных промежутков дендритных ветвей а) □; б) ▲

Fig. 3. Experimental (a) and calculated (b) histograms of the lognormal distribution of the dendritic arm spacings а) □; б) ▲

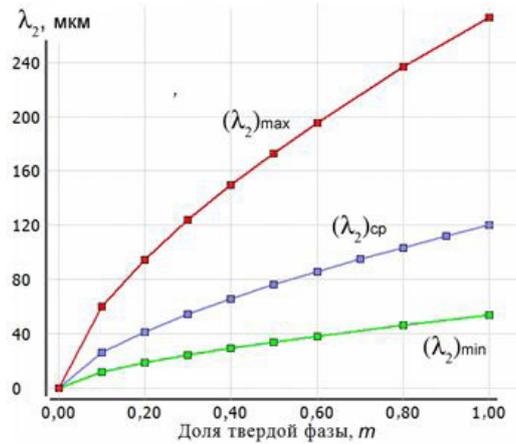


Рис. 4. Кинетика изменения минимальных  $(\lambda_2)_{min}$ , средних  $(\lambda_2)_{cp}$  и максимальных  $(\lambda_2)_{max}$  междуосных промежутков дендритов в результате коалесценции боковых ветвей в период затвердевания стали (образец 1,  $\tau_{LS} = 240$  с)

Fig. 4. Kinetics of changes in the minimum  $(\lambda_2)_{min}$ , average  $(\lambda_2)_{cp}$  and maximum  $(\lambda_2)_{max}$  arm spacing of dendrites as a result of coalescence of side branches during the solidification of steel (sample 1,  $\tau_{LS} = 240$  s)

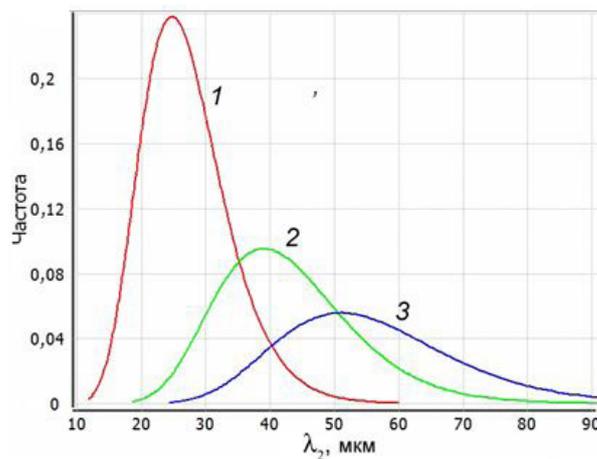


Рис. 5. Гистограммы дендритной неоднородности мезомасштабного распределения междуосных промежутков боковых ветвей с изменением доли твердой фазы при  $m = 0,10$  (1);  $0,20$  (2);  $0,30$  (3)

Fig. 5. Histograms of dendritic inhomogeneity of mesoscale distribution of side dendrite arm spacings with changes in the solid phase fraction at  $m = 0,10$  (1);  $0,20$  (2);  $0,30$  (3)

Изменение размаха минимальных  $(\lambda_2)_{min}(\tau)$  и максимальных  $(\lambda_2)_{max}(\tau)$  размеров междуосных промежутков (рис. 4) оценивается с использованием соотношений (5)  $Y_{min}^* = -0,68$ ;  $Y_{max}^* = 0,68$ . При заданной величине  $(\lambda_2)_{cp}(\tau)$  для полученных значений  $(\lambda_2)(\tau)$  производится определение интервальной частоты  $P(\lambda_2)$  на основе уравнения (4). Приведенные на рис. 4-5 данные отчетливо выявляют асимметрию развития дендритной структуры в течение всего периода затвердевания мезоячейки и масштабный характер ее формирующейся структурной неоднородности, которые играют определяющую роль в динамике ряда сопряженных литейных процессов [20].

Существующие представления о формировании дендритов и их срастании в непрерывный скелет из вторичных боковых ветвей нуждаются в значительном уточнении условий непрерыв-

ного изменения морфологии образующегося твердо-жидкого агрегата, который характеризуется стабильностью ряда безразмерных параметров дендритной структуры, выявленных для исследованных образцов, отличающихся составом и условиями затвердевания. Этими параметрами, которые для процесса формирования мезомасштабной дендритной структуры играют роль *определяющих критериев подобия* и установлены на основе проведенного статистического анализа, являются: нулевое значение коэффициента асимметрии  $A_Y^* \approx 0$  при  $(Y_{max}^* - Y_{cp}^*) / (Y_{cp}^* - Y_{min}^*) \approx 1$ ; равенство средней величины двустороннего размаха  $[(Y_{max}^*) - (Y_{min}^*)] = \pm 0,82$  и дисперсии  $D_Y^* = 0.062$  (с доверительной вероятностью 0,95).

#### 4. Анализ формирования усадочных пустот в отливках на основе логнормальных оценок дендритной неоднородности

В качестве актуального примера рассмотрим возможность детального анализа условий фильтрационного питания отливок с учетом локальной мезомасштабной неоднородности микроструктуры, описываемой с использованием экспериментальных или расчетных значений дендритных параметров  $\mu(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$ . Для компьютерного анализа и фильтрационного прогноза условий питания отливок, описываемого с помощью экспериментальных или расчетных значений дендритных параметров [10, 14, 17, 24–25], традиционно используется эффективное значение коэффициента проницаемости  $K_p$  [17]:

$$K_p = CK_0 (\lambda_2)_{эф}^2 \frac{m_L^3}{(1 - m_L)^2}, \quad (7)$$

где  $C$  – константа Козени;  $K_0$  – коэффициент, отражающий извилистость внутридендритных каналов, который при вычислениях в силу информационной неопределенности нередко принимают неизменным;  $m_L$  – доля остаточной жидкой фазы. В этом уравнении использование постоянного значения  $(\lambda_2)_{эф}$  условно опирается на классическую модель Козени для проницаемости капиллярно-пористого тела, образованного пучком равноотстоящих капилляров одинакового сечения. Как показано многочисленными исследованиями [22–25], это допущение вносит в соответствующие расчеты коэффициента проницаемости для металлических сплавов весьма существенные погрешности, масштаб которых особенно значителен вследствие многократного изменения величины  $K_p$  при кристаллизации (в пределах  $10^{-4} - 10^{-9} \text{ м}^2$ ). По этой причине эффективное значение величины  $(\lambda_2)_{эф}$  необходимо оценивать путем суммирования значений вклада (частоты)  $P(Y)$ , определяемой с помощью соотношений (4) для каждого выбранного промежутка расчетной гистограммы (табл. 4).

Однако, наиболее существенное общепринятое упрощение при расчете коэффициента проницаемости связано с тем, что значительная доля внутридендритных каналов не участвует в фильтрации расплава вследствие его торможения в условиях, когда капиллярное давление  $P_k$  превышает давление  $P$  в объеме внутридендритной жидкой фазы:

$$P_k = 2 \frac{\sigma_{LS}}{r_k} \cos \theta > P, \quad (8)$$

где  $\sigma_{LS}$  – межфазное натяжение на межфазной границе расплав/твердая фаза;  $r_k$  – локальное значение радиуса междоусного внутридендритного микрокапилляра;  $\theta$  – угол смачивания. Детальные эксперименты [17 и др.] показывают, что значительная доля остаточной жидкой фазы может быть определена как *нефильтрующаяся*  $(m_L)_{нф}$ , поскольку удерживается капиллярными силами в междоусных промежутках дендритов, и ее доля в зависимости от характера формирующейся локальной дендритной структуры сплава может достигать значительной части объема мезоэчейки.

Вследствие этого в фильтрационном балансе при расчете коэффициента проницаемости на основе соотношения:

$$K_p(m) = CK_0(\lambda_{эф})^2 \frac{[m_L - (m_L)_{НФ}]^3}{\{1 - [m_L + (m_L)_{НФ}]\}^2}, \quad (9)$$

необходимо учитывать непрерывное изменение как  $(m_L)_{НФ}$ , так и  $(\lambda_2)_{эф}$ , с помощью соотношений (7) и (6). Результаты проведенных расчетов [17] подтверждают правомерность подобных оценок и технологическую значимость их последующей реализации.

### Выводы

1. В результате преобразования данных гистограмм вторичных междуосных промежутков, выявленных при металлографическом исследовании мезомасштабной дендритной структуры образцов стали различного состава, с использованием массива логарифмических значений относительных структурных параметров  $\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}$ , была установлена возможность эффективной свертки экспериментальной информации, при которой сводный массив гистограмм приобретает симметричное расположение всех кривых относительно срединной вершины  $\ln[\lambda_2/(\lambda_2)_{cp}] = 0$  и характеризуется обобщенными статистическими параметрами асимметрии и дисперсии.

2. На основе подтверждения статистической гипотезы о нормальном характере полученной сводной логнормальной гистограммы (при доверительной вероятности 0,95) в работе обоснована ее применимость для характеристики дендритной неоднородности различных литых сталей и определены сводные значения соответствующих обобщенных параметров.

3. Результаты исследования мезомасштабной неоднородности массива литейных сталей, совпадающие с ранее полученными данными для сплавов на основе алюминия, позволяют заключить, что выявленные в работе закономерности капиллярно-диффузионной коалесценции дендритной структуры при объемном характере затвердевания демонстрируют критериальное подобие по ряду количественных параметров и автомодельность в отношении базовых эволюционных факторов, обусловленные тождественным характером происходящих при этом физико-химических процессов.

4. При совместном использовании стандартной функции вероятности логнормального распределения для затвердевающих сплавов и расчетных средних значений междуосных промежутков для конкретных выборочных массивов в ходе кристаллизации реализована возможность решения обратной задачи по построению исходных гистограмм неоднородности дендритной структуры.

5. В работе представлено применение инструментария логнормального распределения вторичных междуосных промежутков с целью модернизации базовых расчетных формул при моделировании проницаемости дендритного скелета для анализа формирования усадочных пустот в отливках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Golod V.M., Dobosh L.Ju., Kim A.E.** Evolution of filtration permeability of dendrite structure in the conditions of capillary-diffusion coalescency of the secondary side branches, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 229 (2020) 225–237.
- [2] **Kurz W., Rappaz M., Trivedy R.** Progress in modeling solidified microstructure in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018, *Int. Mater. Reviews*, 64(6) (2019) 311–354.
- [3] **Dantzig J.A., Rappaz M.** Solidification, second ed, EPFL Press, Lausanne, 2016. 491–494.
- [4] *A Guide to the Solidification of Steels*, Jernkontoret, Stockholm, 1977, 165.

- [5] **Флемингс М.** Процессы затвердевания. М.: Изд. «МИР», 1977. 423 с.
- [6] **Stefanescu D.M.** Science and engineering of casting solidification, Switzerland, Springer, 2015, 556.
- [7] **Курц В., Фишер Д.Д.** Фундаментальные основы затвердевания. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 400 с.
- [8] **Souhar Y., De Felice V.F., Beckerman C., Combeau H., Založnik M.** Three-dimensional mesoscopic modelling of equiaxed dendritic solidification of a binary alloy, *Comput. Mater. Sci.*, 112 (2016) 304–317.
- [9] **Ferreira A.F., de Melo E.G., Ferreira de-Olive.** Prediction of secondary-dendrite arm spacing for binary alloys by means of a phase-field model, *Steel Res. Int.*, 86(1) (2015) 58–65.
- [10] **Mullis A.M.** Deterministic side-branching during thermal dendritic growth, *Mater. Sci. Eng.*, 84 (2015) 012071.
- [11] **Melo M.L.N.M., Rizzo E.M.S., Santos R.G.** Predicting dendrite arm spacing and their effect on microporosity formation in directionally solidified Al-Cu alloy, *J. Mater. Sci.*, 40 (2005) 1599–1609.
- [12] **Kumar A., Založnik M., Combeau H.** Study of the influence of mushy zone permeability laws on macro- and mesosegregations predictions, *Int. Journal of Thermal Science*, 54 (2012) 33–47.
- [13] **Shang S., Guo Z., Han Z.** On the kinetics of dendrite sidebranching: a three-dimensional phase field study, *J. Appl. Phys.*, 119 (2016) 164305.
- [14] **Steinbach I., Beckermann C., Kanerauf B., Li Q., Guo J.** Three-dimension modelling of equiaxed dendrite growth on a mesoscopic scale, *Acta Mater.*, 47 (1999) 971–982.
- [15] **Rappaz M.** Modeling and characterization of grain structure and defects in solidification, *Curr. Opin. Sol. State Mater. Sci.*, 20 (2016) 37–45.
- [16] **Glicksman M.E.** Mechanism of dendritic branching, *Met. Mater. Trans.*, 43A (2012) 391–404.
- [17] **Golod V.M., Dobosh L.Yu.** Computer material science of structure-phase transformation in casting aluminum alloys, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.*, 192 (2017) 012027.
- [18] **Хан Г., Шапиро С.** Статистические модели в инженерных задачах. Москва, Изд-во «МИР», 1969. 395 с.
- [19] **Колмогоров А.Н.** О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР, 1941, Т. XXXI. № 2. 99–101.
- [20] **Голод В.М., Цветков А.С., Теплухина И.В.** Системное моделирование формирования локальной дендритной и ликвационной неоднородности в слитке из реакторной стали аустенитного класса. – *Материаловедение. Энергетика.* 26(2) (2020) 114–127.
- [21] **Touret D., Sturz L., Viardin A., Založnik M.** Comparing mesoscopic models for dendritic growth, *MCWASP XV 2020, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.*, 861 (2020) 012002.
- [22] **Kharicha A., Stefan-Kharicha M., Ludwig A., Wu M.** A scale adaptive dendritic envelope model of solidification at mesoscopic scales, *MCWASP, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.* 84 (2015) 012032.
- [23] **Fezi K., Krane M.J.** Uncertainty quantification of modeling equiaxed solidification, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.*, 143 (2016) 012028.
- [24] **Daudin R., Terzi S., Lhuissier P., Tamayo J., Scheel M., HariBabu N., Eskin D.G., Salvo L.** Particle-induced morphological modification of Al alloy equiaxed dendrites revealed by sub-second in situ microtomography, *Acta Mater.*, 155 (2017) 303–310.
- [25] **Viardin A., Založnik M., Souhar Y., Apel M., Combeau H.** Mesoscopic modeling of spacing and grain selection in columnar dendritic solidification: Envelope versus phase-field model, *Acta Mater.*, 122 (2017) 386–399.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ГОЛОД Валерий Михайлович** – доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, канд. техн. наук.  
E-mail: lpi2015@mail.ru

**ЛЕ Данг Као** — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, без степени.

E-mail: Caodang0906@gmail.com

Дата поступления статьи в редакцию: 15.08.2020

## REFERENCES

- [1] **V.M. Golod, L.Ju. Dobosh, A.E. Kim**, Evolution of filtration permeability of dendrite structure in the conditions of capillary-diffusion coalescency of the secondary side branches, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 229 (2020) 225–237.
- [2] **W. Kurz, M. Rappaz, R. Trivedy**, Progress in modeling solidified microstructure in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018, *Int. Mater. Reviews*, 64(6) (2019) 311–354.
- [3] **J.A. Dantzig, M. Rappaz**, *Solidification*, second ed, EPFL Press, Lausanne, 2016, 491–494.
- [4] *A Guide to the Solidification of Steels*, Jernkontoret, Stockholm, 1977, 165.
- [5] **M. Flemings**, *Protsessy zatverdevaniya*[Solidification processing]. M.: Izd. «MIR», 1977. 423 s.
- [6] **D.M. Stefanescu**, *Science and engineering of casting solidification*, Switzerland, Springer, 2015, 556.
- [7] **V. Kurts, D.D. Fisher**, *Fundamentalnyye osnovy zatverdevaniya*[Fundamentals of solidification]. – M., Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy, 2011. 400 s.
- [8] **Y. Souhar, V.F. De Felice, C. Beckerman, H. Combeau, M. Založnik**, Three-dimensional mesoscopic modelling of equiaxed dendritic solidification of a binary alloy, *Comput. Mater. Sci.*, 112 (2016) 304–317.
- [9] **A.F. Ferreira, E.G. de Melo, Ferreira de-Olive**, Prediction of secondary-dendrite arm spacing for binary alloys by means of a phase-field model, *Steel Res. Int.*, 86(1) (2015) 58–65.
- [10] **A.M. Mullis**, Deterministic side-branching during thermal dendritic growth, *Mater. Sci. Eng.*, 84 (2015) 012071.
- [11] **M.L.N.M. Melo, E.M.S. Rizzo, R.G. Santos**, Predicting dendrite arm spacing and their effect on microporosity formation in directionally solidified Al-Cu alloy, *J. Mater. Sci.*, 40 (2005) 1599–1609.
- [12] **A. Kumar, M. Založnik, H. Combeau**, Study of the influence of mushy zone permeability laws on macro- and mesosegregations predictions, *Int. Journal of Thermal Science*, 54 (2012) 33–47.
- [13] **S. Shang, Z. Guo, Z. Han**, On the kinetics of dendrite sidebranching: a three-dimensional phase field study, *J. Appl. Phys.*, 119 (2016) 164305.
- [14] **I. Steinbach, C. Beckermann, B. Kanerauf, Q. Li, J. Guo**, Three-dimension modelling of equiaxed dendrite growth on a mesoscopic scale, *Acta Mater.*, 47 (1999) 971–982.
- [15] **M. Rappaz**, Modeling and characterization of grain structure and defects in solidification, *Curr. Opin. Sol. State Mater. Sci.*, 20 (2016) 37–45.
- [16] **M.E. Glicksman**, Mechanism of dendritic branching, *Met. Mater. Trans.*, 43A (2012) 391–404.
- [17] **V.M. Golod, L.Yu. Dobosh**, Computer material science of structure-phase transformation in casting aluminum alloys, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.*, 192 (2017) 012027.
- [18] **G. Khan, S. Shapiro**, *Statisticheskiye modeli v inzhenernykh zadachakh*[Statistical models in engineering problems]. Moskva, Izd-vo «MIR», 1969. 395 s.
- [19] **A.N. Kolmogorov**, O logarifmicheski-normalnom zakone raspredeleniya razmerov chastits pri droblenii [On the logarithmic-normal law of particle distribution during crushing] // DAN SSSR, 1941, T. XXXI, № 2, 99–101.
- [20] **V.M. Golod, A.S. Tsvetkov, I.V. Teplukhina**, Sistemnoye modelirovaniye formirovaniya lokalnoy dendritnoy i likvatsionnoy neodnorodnosti v slitke iz reaktornoy stali austenitnogo klassa [System modeling of the formation of local dendritic and liquation inhomogeneity in the ingot of austenitic grade reactor steel]. – *Materialovedeniye. Energetika*. 26(2) (2020) 114–127.

[21] **D. Tourret, L. Sturz, A. Viardin, M. Založnik**, Comparing mesoscopic models for dendritic growth, MCWASP XV 2020, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng., 861 (2020) 012002.

[22] **A. Kharicha, M. Stefan-Kharicha, A. Ludwig, M. Wu**, A scale adaptive dendritic envelope model of solidification at mesoscopic scales, MCWASP, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng. 84 (2015) 012032.

[23] **K. Fezi, M.J. Krane**, Uncertainty quantification of modeling equiaxed solidification, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng., 143 (2016) 012028.

[24] **R. Daudin, S. Terzi, P. Lhuissier, J. Tamayo, M. Scheel, N. HariBabu, D.G. Eskin, L. Salvo**, Particle-induced morphological modification of Al alloy equiaxed dendrites revealed by sub-second in situ microtomography, Acta Mater., 155 (2017) 303–310.

[25] **A. Viardin, M. Založnik, Y. Souhar, M. Apel, H. Combeau**, Mesoscopic modeling of spacing and grain selection in columnar dendritic solidification: Envelope versus phase-field model, Acta Mater., 122 (2017) 386–399.

### THE AUTHORS

**GOLOD Valeriy M.** – *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*  
E-mail: lpi2015@mail.ru

**LE Dang Cao** – *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*  
E-mail: Caodang0906@gmail.com

**Received: 15.08.2020**