DOI: 10.18721/JPM.12410
УДК 533.9.01

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ РАЗРЯДА ПОСТОЯННОГО ТОКА В ЛАЗЕРНЫХ ТРУБКАХ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

В.А. Кожевников, В.Е. Привалов, А.Э. Фотиади

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассмотрены процессы в положительном столбе разряда постоянного тока в газе и получены выражения, связывающие внешние параметры столба (меняющийся радиус разрядного канала, давление напуска газа и разрядный ток) с «внутренними» характеристиками (концентрация заряженных частиц, электронная температура, напряженность «продольного» электрического поля).

Ключевые слова: характеристика плазмы положительного столба, лазерная трубка переменного диаметра, геометрия активного элемента

Ссылка при цитировании: Кожевников В.А., Привалов В.Е., Фотиади А.Э. Положительный столб разряда постоянного тока в лазерных трубках переменного диаметра // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 4. С. 97–107. DOI: 10.18721/JPM.12410

POSITIVE COLUMN OF A DIRECT CURRENT DISCHARGE IN LASER TUBES OF VARIABLE DIAMETER

V.A. Kozhevnikov, V.E. Privalov, A.E. Fotiadi

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

St. Petersburg, Russian Federation

A positive column of a direct current discharge in monoatomic gas is considered and expressions are obtained that relate the external parameters of the column (varying radius of the discharge channel, gas pressure and discharge current) to the “internal” characteristics (concentration of charged particles, electron temperature, and longitudinal electric field strength).

Keywords: positive column plasma characteristic, variable diameter laser tube, active element geometry

Citation: Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Fotiadi A.E., Positive column of a direct current discharge in laser tubes of variable diameter, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (4) (2019) 97–107. DOI: 10.18721/JPM.12410

В наиболее распространенных газоразрядных лазерах (ГРЛ), таких, например, как гелий-неоновый (He-Ne), гелий-кадмиевый (He-Cd), в качестве активной среды используется положительный столб (ПС) тлеющего разряда постоянного тока низкого давления в цилиндрических трубках. Обычно активный элемент лазера помещается в оптический резонатор типа плоскость – сфера. Форма каустики в таком резонаторе заметно отличается от цилиндрической. Поэтому часть возбужденных атомов, образующихся в «цилиндрическом» разряде, не участвует в формировании «эффективного» коэффициента усиления среды, определяющего выходную мощность лазера. С целью повышения эффективности использования активной среды, повышения ее активного модового объема, еще в 1969 году возникла идея использовать в качестве активного элемента газовых лазеров конические трубки [1, 2]. Жизнеспособность идеи, подкрепленная расчетами усиления [3], была подтверждена экспериментально [4].

В основу проведенных расчетов «геометрической» части коэффициента усиления k была положена формула

$$k = \frac{1}{S}\int_V k_0 \cdot f_s dV,$$

где k_0 – ненасыщенный коэффициент усиления среды на оси трубки, f_S – функция распределения усиления по сечению столба, S – площадь его поперечного сечения.

Предполагалось, что функция f_S подобна распределению концентрации возбужденных атомов в разряде [5, 6]. Такая запись предполагает независимость величин k_0, f_S и S от продольной координаты столба z. В случае разряда в конической трубке, это предположение является как минимум сомнительным, поскольку с изменением радиуса разрядного канала изменяются площадь S и такие важные характеристики ПС, определяющие инверсию населенностей, как электронные концентрация и температура.

Ранее [7], изучалась реакция параметров положительного столба на резкое (скачкообразное) изменение радиуса разрядной трубки. Однако сведения о работах, посвященных исследованию этого вопроса для трубок с «плавно меняющимся» радиусом разрядного канала, особенно в ГРЛ, в литературе практически отсутствуют. Настоящая работа посвящена рассмотрению этого вопроса.

Рассмотрим ПС разряда постоянного тока длиной l в моноатомном газе. Давление напуска газа p не превышает 10 мм рт. ст., разрядный ток I лежит в интервале 10 – 100 мА. Радиус разрядного канала R является гладкой функцией координаты z ($0 \le z \le l$):

$$|dR/dz| << 1.$$

Ось z направлена вдоль оси разрядной трубки:

$$R = R(z) = R_0 f_R(z),$$

где R_0 – значение радиуса канала R в точке $z = 0$; $f_R(z = 0) = 1$;

$$1 \text{ мм} \le R_0 \le 5 \text{ мм}.$$

Считаем, что при таких разрядных условиях рассматриваемый положительный столб представляет собой трехкомпонентную плазму, состоящую из нейтральных атомов одного сорта, однозарядных положительных ионов и электронов. Концентрации этих частиц обозначим соответственно как n_a, n_i, n_e, а их массы – m_a, m_i, m_e; при этом $m_a = m_i$.

Считаем, что длина свободного пробега ионов λ_i много меньше радиуса трубки: $\lambda_i << R$. Поэтому рассмотрение процессов в разряде можно вести в рамках диффузионной теории ПС Шоттки.

Предполагаем, что в данных разрядных условиях плазма столба квазинейтральна, т. е. $n_e \approx n_i = n$, и слабо ионизована:

$$\nu_{ee}, \nu_{ei}, \nu_{ii} << \nu_{ea}, \nu_{ia},$$

т. е. частоты столкновений заряженных частиц друг с другом ν_{ee}, ν_{ei}, ν_{ii} много меньше частот электрон-атомных (ν_{ea}) и ион-атомных (ν_{ia}) столкновений.

При таком предположении маловероятны такие объемные процессы, как ступенчатая ионизация, объемная рекомбинация и прилипание электронов.

Далее, считаем распределения электронов, ионов и нейтральных атомов по энергиям максвелловским, с температурами $T_\alpha \equiv T_e$, T_i, T_a, соответственно. При этом принимается, что

температуры частиц соотносятся как $T_e >> T_i \approx T_a$;

температура электронов однородна по сечению столба, но является функцией координаты z: $T_e = \text{const}\ (r, \theta)$, $T_e = T_e\ (z)$;

температура ионов распределена однородно как по сечению столба, так и по продольной координате: $T_i = \mathrm{const}\ (r, \theta, z)$.

Распределения давления газа в столбе, равного давлению напуска p, температуры газа, а следовательно, и концентрации нейтральных частиц $n_a = p/kT_a$, также будем считать однородными как по сечению столба, так и по его длине: T_a, $n_a = \mathrm{const}\ (r, \theta, z)$.

Концентрации заряженных частиц азимутально однородны, но являются функциями радиальной и продольной координат:

$$n_e = \mathrm{const}(\theta),\ n_e = n_e(r,z),$$

$$n_i = \mathrm{const}(\theta),\ n_i = n_i(r,z).$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ также азимутально однородно и является функцией радиальной и продольной координат:

$$\mathbf{E} = \mathrm{const}\ (\theta),\ \mathbf{E} = \mathbf{E}(r,z).$$

Считаем, что основным механизмом «рождения» заряженных частиц является прямая ионизация электронным ударом из основного состояния атомов. Частота ионизации $\nu_i = n_a \langle \sigma_{0i} \nu_e \rangle$, где $\langle \sigma_{0i} \nu_e \rangle$ – произведение $\sigma_{0i}\,\nu_e$, усредненное по функции распределения электронов $f_e(\nu_e)$; σ_{0i} – сечение данного ионизационного процесса; v_e – скорость электрона.

Считаем, что основным механизмом «гибели» заряженных частиц является их диффузионный уход на стенки разрядной трубки.

Плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}\ (r, z)$ равна разности плотностей потоков ионов $\mathbf{\Gamma}_i = n_i\,\mathbf{u}_i$ и электронов $\mathbf{\Gamma}_e = n_e\,\mathbf{u}_e$:

$$\mathbf{j} = e(\mathbf{\Gamma}_i - \mathbf{\Gamma}_e) = e\ (n_i\mathbf{u}_i - n_e\mathbf{u}_e) = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (1)$$

Величина разрядного тока I определяется z-ой компонентой плотности тока $\mathbf{j}_z$, связанной с дрейфом заряженных частиц в поле $\mathbf{E}_z$ (продольный градиент потенциала в столбе), зависящим от продольной координаты:

$$\mathbf{E}_z(z) = \mathbf{E}_{0_z} f_{E_z}(z),$$

где $\mathbf{E}_{0_z} = \mathbf{E}_z(z = 0)$; $f_{E_z}\ (z = 0) = 1$.

Считаем, что вся энергия поступает в ПС от электронов, ускоренных в этом электрическом поле $\mathbf{E}_z$.

Ставится следующая задача:

получить относительно простые выражения, связывающие внешние, легко контролируемые параметры столба – разрядный ток I, радиус разрядного канала R(z) и давление напуска газа p – с его основными «внутренними» характеристиками – концентрацией заряженных частиц $n_e(z)$, электронной температурой $T_e(z)$ и напряженностью «продольного» электрического поля $\mathbf{E}_z(z)$.

Для решения задачи, следуя методам, развитым в работах [7, 8, 12], используем следующие уравнения.

Уравнения движения заряженных частиц, которые с учетом условия

$$\nu_{ee}, \nu_{ei}, \nu_{ii} << \nu_{ea}, \nu_{ia}$$

и пренебрежения термосилой имеют вид

$$-e\mathbf{E} - \frac{\nabla\left(n_e kT_e\right)}{n_e} - \mu_{ea}\nu_{ea}\mathbf{u}_e = 0$$

для электронов;

$$e\mathbf{E} - \frac{\nabla\left(n_i kT_i\right)}{n_i} - \mu_{ia}\nu_{ia}\mathbf{u}_i = 0$$

для ионов.

Здесь μ_{ea}, μ_{ia} – приведенные массы электронов и ионов, соответственно.

Уравнения баланса заряженных частиц:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla\left(n_e\mathbf{u}_e\right) = \frac{\delta n_e}{\delta t}$$

для электронов;

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\left(n_i\mathbf{u}_i\right) = \frac{\delta n_i}{\delta t}$$

для ионов.

Уравнение баланса энергии электронов:

$$IE_z = P_v + P_w,$$

где IE_z – мощность, затрачиваемая продольным электрическим полем на нагрев электронов и поддержание всего энергетического баланса в столбе; P_v – мощность, теряемая электронами в упругих столкновениях с атомами (нагрев газа); P_w – мощность, уносимая ионами на стенку.

Мощность, теряемая электронами в неупругих столкновениях с атомами, в уравнении баланса не учитывается.

Рассмотрим подробнее эти уравнения.

Для разряда постоянного тока, с учетом сделанных предположений о квазинейтральности плазмы и независимости температуры ионов от координат, выражения для направленных скоростей электронов и ионов запишутся следующим образом:

$$\mathbf{u}_e = -b_e\mathbf{E} - D_e\left(\frac{\nabla n}{n} + \frac{\nabla T_e}{T_e}\right); \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_i = +b_i\mathbf{E} - D_i\frac{\nabla n}{n}. \quad (3)$$

Здесь $b_e = e/\mu_{ea}\nu_{ea}$, $b_i = e/\mu_{ia}\nu_{ia}$ – коэффициенты подвижности электронов и ионов; $D_e = kT_e/\mu_{ea}\nu_{ea} = b_e kT_e/e, D_i = kT_i/\mu_{ia}\nu_{ia} = b_i kT_i/I$ – коэффициенты диффузии электронов и ионов соответственно; ν_{ea} – частота упругих электрон-атомных столкновений, равная

$$\nu_{ea} = n_a\left\langle\sigma_{ea}v_e\right\rangle,$$

где $\left\langle\sigma_{ea}v_e\right\rangle$ – произведение $\sigma_{ea}v_e$, усредненное по функции распределения электронов $f_e(v_e)$; σ_{ea} – сечение упругих электрон-атомных столкновений, v_e – скорость электронов.

В общем случае, выражение $\left\langle\sigma_{ea}v_e\right\rangle$ также является функцией продольной координаты z, поскольку $T_e = T_e(z)$. Мы же будем считать, что

$$\left\langle\sigma_{ea}v_e\right\rangle = \mathrm{const}(z),$$

что в первом приближении верно, во всяком случае, для разряда в гелии, поскольку в диапазоне изменения энергии электронов, характерном для данных разрядных условий, величина

$$\sigma_{ea}v_{ea} \approx \mathrm{const}(T_e). \quad [11]$$

Частота упругих ион-атомных столкновений имеет вид

$$\nu_{ia}\nu_{ia} = n_a\left\langle\sigma_{ia}v_{ia}\right\rangle,$$

где величину $\left\langle\sigma_{ia}v_{ia}\right\rangle$ в случае слабоионизованной плазмы можно представить как

$$\left\langle\sigma_{ia}v_{ia}\right\rangle \approx \sigma_{ia}\left\langle v_{T_a}\right\rangle = \sigma_{ia}\sqrt{3\frac{kT_a}{m_a}} = \mathrm{const}(z).$$

Тогда плотность тока в плазме ПС запишется как

$$\mathbf{j} = en\left[b_i\mathbf{E} - D_i\frac{\nabla n}{n} + b_e\mathbf{E} + D_e\left(\frac{\nabla n}{n} + \frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right)\right]. \quad (4)$$

Отсюда получаем выражение для электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{en(b_i+b_e)} - \left(\frac{D_e - D_i}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla n}{n} + \frac{D_e}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right) = \mathbf{E}_{con} + \mathbf{E}_{sc}.$$

Иными словами, электрическое поле $\mathbf{E}$ в плазме столба определяется двумя слагаемыми. Первое из них – это электрическое поле «проводимости» $\mathbf{E}_{con}$, т. е. «внешнее» поле, обусловливающее протекание тока $\mathbf{j}$ в среде, проводимость которой σ:

$$\mathbf{E}_{con} = \frac{\mathbf{j}}{en(b_i+b_e)} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}.$$

Второе слагаемое – поле «объемного заряда» $\mathbf{E}_{sc}$:

$$\mathbf{E}_{sc} = -\left(\frac{D_e - D_i}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla n}{n} + \frac{D_e}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right) = \left(\mathbf{E}_{sc_{\nabla n}} + \mathbf{E}_{sc_{\nabla T_e}}\right),$$

где

$$\mathbf{E}_{sc_{\nabla n}} = -\frac{D_e - D_i}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla n}{n},$$

$$\mathbf{E}_{sc_{\nabla T_e}} = -\frac{D_e}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla kT_e}{kT_e}.$$

Тогда выражение для плотности тока можно записать как

$$\mathbf{j} = en\left[(b_i+b_e)(\mathbf{E}_{con} + \mathbf{E}_{sc}) + (D_e - D_i)\frac{\nabla n_e}{n_e} + D_e\frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = en(b_i+b_e)\left[\mathbf{E}_{con} - \frac{D_e - D_i}{b_i+b_e}\cdot\frac{\nabla n}{n} - \frac{D_e}{(b_i+b_e)}\frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right] + en\left[(D_e - D_i)\frac{\nabla n_e}{n_e} + D_e\frac{\nabla kT_e}{kT_e}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{j}_{con} + \mathbf{j}_{\nabla_n} + \mathbf{j}_{\nabla_{T_e}},$$

где

$$\mathbf{j}_{con} = en(b_i+b_e)\mathbf{E}_{con} = \sigma\mathbf{E}_{con};$$

$$\mathbf{j}_{\nabla n} = en\left[(D_e - D_i) - (b_i+b_e)\frac{D_e - D_i}{b_i+b_e}\right]\frac{\nabla n}{n};$$

$$\mathbf{j}_{\nabla_{Te}} = en\left[D_e - (b_i+b_e)\frac{D_e}{(b_i+b_e)}\right]\frac{\nabla kT_e}{kT_e}.$$

Нетрудно видеть, что плотности тока $\mathbf{j}_{\nabla_n}$ и $\mathbf{j}_{\nabla_{T_e}}$, обусловленные диффузией заряженных частиц под действием градиентов их концентраций и электронной температуры, равны нулю.

Это означает следующее.

Во-первых, в рассматриваемом разряде превалирует режим амбиполярной диффузии. Действительно, используя полученные выражения для диффузионных потоков заряженных частиц, получаем:

$$\mathbf{u}_{e_{sc}} = \mathbf{u}_{i_{sc}} = -\left[\frac{\left(b_i D_e + b_e D_i\right)}{b_i + b_e}\right]\frac{\nabla n}{n} - \frac{b_i D_e}{b_i + b_e} \times$$

$$\times \frac{\nabla k T_e}{k T_e} = -D_{a_{\nabla n}} \frac{\nabla n}{n} - D_{a_{\nabla T_e}} \frac{\nabla k T_e}{k T_e},$$

где

$$D_{a_{\nabla n}} = \frac{\left(b_i D_e + b_e D_i\right)}{b_i + b_e}, \ D_{a_{\nabla T_e}} = \frac{b_i D_e}{b_i + b_e}$$

– соответствующие коэффициенты амбиполярной диффузии.

Учитывая, что $D_e >> D_i$, $b_e >> b_i$, $T_e >> T_i$, получаем:

$$D_{a_{\nabla n}} \approx D_{a_{\nabla T_e}} = D_a = b_i \frac{k T_e}{e}.$$

Во-вторых, плотность тока в плазме ПС, равная сумме $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{con} + \mathbf{j}_{sc}$, в рассматриваемом случае будет определяться только плотностью тока проводимости:

$$\mathbf{j} = en\left(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e\right) = \mathbf{j}_{con} = en\left(b_i + b_e\right)\mathbf{E}_{con} \approx$$

$$\approx e n b_e \mathbf{E}_{con} = \sigma_e \mathbf{E}_{con}.$$

Плотность тока $\mathbf{j}_{con}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{j}_{con} = \mathbf{j}_{con_r r} + \mathbf{j}_{con_z}.$$

Поскольку продольная компонента плотности тока проводимости $\mathbf{j}_{con_z}$ есть составляющая плотности тока, связанная с дрейфом электронов вдоль оси столба в продольном электрическом поле $\mathbf{E}_{con_z} = \mathbf{E}_z\left(z\right)$, регистрируемый разрядный ток I можно записать как

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_z} \mathbf{j}_{con_z} r dr d\theta = \qquad (5)$$

$$= 2\pi e b_e E_z\left(z\right)\int_0^{R_z} n\left(r, z\right) r dr = \mathrm{const}\left(z\right),$$

где R_z – значение радиуса R в точке с координатой z.

Рассмотрим теперь уравнения баланса заряженных частиц:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla\left(n_e \mathbf{u}_e\right) + \frac{\delta n_e}{\delta t};$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\nabla\left(n_i \mathbf{u}_e\right) + \frac{\delta n_i}{\delta t}.$$

В стационарном режиме для сохранения квазинейтральности плазмы должно выполняться условие:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\partial n_i}{\partial t}.$$

Генерационные члены $\frac{\delta n_i}{\delta t}$ и $\frac{\delta n_e}{\delta t}$ уравнений в нашем случае (отсутствие объемной рекомбинации и ступенчатой ионизации) определяются только процессом прямой ионизации атома электронным ударом с частотой ионизации ν_i:

$$\nu_i = n_a \left\langle \sigma_{0_i} v_e \right\rangle.$$

Поскольку процессы ионизации в объеме и рекомбинации на стенках трубки приводят к одновременному рождению или гибели ион-электронной пары, что выражается как

$$\frac{\delta n_e}{\delta t} = \frac{\delta n_i}{\delta t} = \frac{\delta n}{\delta t} = n\nu_i,$$

получаем следующие равенства: $\nabla n \mathbf{u}_e = \nabla n \mathbf{u}_i = n\nu_i$.

Тогда, с учетом сделанных предположений о квазинейтральности плазмы и независимости подвижностей электронов и ионов, а также температуры ионов от координат, используем выражения (2), (3) для направленных скоростей электронов и ионов, и путем простых преобразований, исключая $\mathbf{E}$ и учитывая, что $\nabla n \mathbf{u}_e = \nabla n \mathbf{u}_i = n\nu_i$, получим следующее уравнение:

$$n\nu_i\left(b_i + b_e\right) + \left(b_i D_e + b_e D_i\right)\Delta n +$$

$$+ \left(b_i D_e \frac{\nabla T_e}{T_e}\right)\nabla n +$$

$$+ b_i\left[\nabla D_e \cdot \frac{\nabla T_e}{T_e} + D_e \nabla\left(\frac{\nabla T_e}{T_e}\right)\right] n = 0.$$

А поскольку $n = \mathrm{const}(\theta)$, $n_a = \mathrm{const}(r,\theta,z)$, $T_e = \mathrm{const}(r,\theta)$ и независимость от радиальной координаты концентрации атомов и электронной температуры обуславливает независимость от координаты r коэффициента диффузии электронов и частоты ионизации, это уравнение можно представить как

$$n\nu_i + \frac{\left(b_i D_e + b_e D_i\right)}{\left(b_i + b_e\right)}\left(\Delta_r n + \Delta_z n\right) +$$

$$+\left(\frac{b_i D_e}{\left(b_i + b_e\right)}\frac{\nabla_z T_e}{T_e}\right)\nabla_z n + \frac{b_i}{\left(b_i + b_e\right)}\times$$

$$\times\left\{\left[\nabla_z D_e \cdot \frac{\nabla_z T_e}{T_e} + D_e \nabla_z\left(\frac{\nabla_z T_e}{T_e}\right)\right]\right\} n = 0.$$

Далее, поскольку $b_e >> b_i$, $T_e >> T_i$ и

$$D_a = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_i + b_e} \approx b_i \frac{D_e}{b_e} = b_i \frac{kT_e}{e},$$

получаем такое уравнение:

$$n\nu_i + D_a\left(\Delta_r n + \Delta_z n\right) +$$

$$+\left(\frac{b_i}{b_e} D_e \frac{\nabla_z T_e}{T_e}\right)\nabla_z n +$$

$$+\frac{b_i}{b_e}\left[\nabla_z\left(D_e \frac{\nabla_z T_e}{T_e}\right)\right] n = 0.$$

После его преобразований имеем:

$$\left(\Delta_r n + \Delta_z n\right) + \frac{2}{D_a}\left(\nabla_z D_a\right)\nabla_z n +$$

$$+\frac{1}{D_a}\left[\nabla_z\left(\nabla_z D_a\right) + \nu_i\right] n = 0.$$

Расписываем это уравнение, и оно приобретает такой вид:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{2}{D_a}\frac{dD_a}{dz}\frac{dn}{dz} + \frac{1}{D_a}\left(\frac{d^2 D_a}{dz^2} + \nu_i\right) n = 0. \qquad (6)$$

Теперь введем безразмерную концентрацию

$$N(r, z) = \frac{n(r, z)}{n_0} = f_{n_r}(r)\cdot f_{n_z}(z),$$

где $n_0 = n(0,0)$ – значение концентрации заряженных частиц на оси разряда ($r = 0$) в точке $z = 0$; $f_{n_r}(r) = \mathrm{const}(z)$ – функция только радиуса, $f_{n_z}(z) = \mathrm{const}\ (r)$ – функция только продольной координаты с граничными условиями:

$$f_{n_r}(r=0) = f_{n_z}(z=0) = f_{R_z}(z=0) = 1;$$

$$f_{n_r}(R_z) = 0; f_{n_z}(l) = \frac{n(0, l)}{n_0};$$

$$f_{R_z} = \frac{R_z}{R_0};$$

$$0 \le r \le R_z;\ \ 0 \le z \le l.$$

Значение концентрации $n(0, z)$ на оси ($r = 0$) в точке z будет равно:

$$n(0,z) = n_{0z}(z) = n_0 f_{n_z}(z) = \mathrm{const}(r),$$

и выражение для $n(r, z)$ запишется как

$$n(r,z) = n_{0_z}(z)\cdot f_{n_r}(r) = n_0 f_{n_r}(r) f_{n_z}(z).$$

Тогда уравнение (6) преобразуется к следующему виду:

$$f_{n_z}(z)\frac{d^2 f_{n_r}(r)}{dr^2} + f_{n_z}(z)\frac{1}{r}\frac{df_{n_r}(r)}{dr} +$$

$$+f_{n_r}(r)\frac{d^2 f_{n_z}(z)}{dz^2} + 2\frac{f_{n_r}(r)}{D_a}\frac{dD_a}{dz}\frac{df_{n_z}(z)}{dz} +$$

$$+\frac{1}{D_a}\left\{\left[\frac{d^2 D_a}{dz^2}\right] + \nu_i\right\} f_{n_z}(z) f_{n_r}(r) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{f_{n_r}(r)}\frac{d^2 f_{n_r}(r)}{dr^2} + \frac{1}{f_{n_r}(r)}\cdot\frac{1}{r}\frac{df_{n_r}(r)}{dr} =$$

$$= -\frac{1}{f_{n_z}(z)}\cdot\frac{d^2 f_{n_z}(z)}{dz^2} - \frac{2}{f_{n_z}(z)}\times$$

$$\times\frac{1}{D_a}\frac{dD_a}{dz}\cdot\frac{df_{n_z}(z)}{dz} - \frac{1}{D_a}\left[\frac{d^2 D_a}{dz^2} + \nu_i\right] = -\lambda,$$

или в другой записи получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f_{n_r}(r)}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{df_{n_r}(r)}{dr} + \lambda f_{n_r}(r) = 0, \\ \dfrac{d^2 f_{n_z}(z)}{dz^2} + \dfrac{2}{D_a}\dfrac{dD_a}{dz}\cdot\dfrac{df_{n_z}(z)}{dz} + \\ +\dfrac{1}{D_a}\left[\dfrac{d^2 D_a}{dz^2} + \nu_i\right] f_{n_z}(z) - \\ -f_{n_z}(z)\lambda = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r^2\dfrac{d^2 f_{n_r}(r)}{dr^2}+r\dfrac{df_{n_r}(r)}{dr}+ \\ +\left(r\sqrt{\lambda}\right)^2 f_{n_r}(r)=0, \\ \dfrac{d^2 f_{n_z}(z)}{dz^2}+\dfrac{2}{D_a}\dfrac{dD_a}{dz}\cdot\dfrac{df_{n_z}(z)}{dz}+ \\ +\dfrac{1}{D_a}\left[\dfrac{d^2 D_a}{dz^2}+\nu_i-D_a\lambda\right]f_{n_z}(z)=0. \end{cases}$$

Первое уравнение, в случае, если $\lambda = \mathrm{const}(r)$ – это уравнение Бесселя нулевого порядка. Решение его известно:

$$f_{n_r}(r)=J_0\left(r\sqrt{\lambda}\right).$$

Тогда, в силу граничного условия $f_{n_r}(R_z) = 0$, получаем $J_0\left(R_z\sqrt{\lambda}\right)=0$, если

$$\lambda=\left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2.$$

Второе уравнение, с учетом полученного выражения для λ, после преобразований принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left(D_a\frac{df_{n_z}(z)}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(f_{n_z}(z)\frac{dD_a}{dz}\right)+ +\left[\nu_i-D_a\left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2\right]f_{n_z}(z)=0. \tag{7}$$

Поскольку основным механизмом гибели заряженных частиц в разряде является их диффузионный уход на стенку трубки, естественно предположить, что устойчивость разряда будет иметь место лишь при определенном соотношении частоты ионизации ν_i, определяющей время рождения τ_i заряженных частиц на единице длины разряда – $\tau_i = 1/\nu_i$, и коэффициента амбиполярной диффузии D_a, определяющего время диффузионного ухода частиц из разряда на стенку трубки радиуса R_z:

$$\tau_{D_a}=R_z^2/D_a.$$

Концентрацию частиц на стенке мы полагаем равной нулю, и поскольку распределение концентрации электронов по радиусу является функцией Бесселя нулевого порядка, первый корень которого достигается при значении аргумента 2,405, то можно положить

$$R_z\sqrt{\frac{\nu_i}{D_a}}=2{,}405 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2-\frac{\nu_i}{D_a}=0. \tag{8}$$

Иными словами, мы получили «классическую» взаимосвязь между частотой ионизации и коэффициентом амбиполярной диффузии для «шоттковского» положительного столба разряда постоянного тока в цилиндрическом разрядном канале [7, 10] с заменой радиуса R_0 на $R_z = R_0 f_R(z)$.

Тогда уравнение (7) запишется как

$$\frac{d}{dz}\left(D_a\frac{df_{n_z}(z)}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(f_{n_z}(z)\frac{dD_a}{dz}\right)=0.$$

Его можно привести к виду:

$$\frac{d}{dz}\left[D_a f_{n_z}(z)\right]=C\Rightarrow D_a(z)f_{n_z}(z)=Cz+G$$

Учитывая, что $f_{n_z}(z = 0)=1$, получаем следующее выражение:

$$D_a(z)f_{n_z}=Cz+D_a(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{n_z}(z)=\frac{Cz+D_a(0)}{D_a(z)}=\frac{C_1 z+T_e(0)}{T_e(z)}.$$

Как мы показали выше (см. формулу (5)), регистрируемый разрядный ток I будет определяться только дрейфовыми потоками заряженных частиц во внешнем электрическом поле, т. е. только током проводимости I_d:

$$I=I_d=2\pi e b_e E_z(z)\int_0^{R_z} n(r,z)\,r\,dr=\mathrm{const}(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=2\pi e b_e E_z(z)n_0 f_{n_z}(z)\times$$

$$\times\int_0^{R_z} f_{n_r}(r)\,r\,dr=\mathrm{const}(z)$$

Далее, поскольку

$$f_{n_r}(r)=J_0\left(r\sqrt{\lambda}\right),$$

$$\lambda=\left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2=\left(\frac{2{,}405}{R_0 f_R(z)}\right)^2,$$

используя граничные условия для R_z и E_z , получаем:

$$I = 1{,}36R_z^2 eb_e n_0 f_{n_z}(z) E_z(z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n_0 f_{n_z}(z) =$$
$$= \frac{0{,}737I}{R_0^2 f_R^2(z) eb_e E_{0z} f_{E_z}(z)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n_0 = \frac{0{,}737I}{R_0^2 eb_e E_{0z}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_{n_z}(z) = \frac{1}{f_R^2(z) f_{E_z}(z)}.$$

Среднее по сечению разряда значение концентрации электронов выражается как

$$\overline{n}_z(z) = \frac{\int_0^{R(z)} rn_e dr}{\int_0^{R(z)} rdr} = 0{,}43 n_0 f_{n_z}(z) =$$
$$= \frac{0{,}317I}{eb_e R_0^2 f_R^2(z) E_{0z} f_{E_z}(z)}.$$

Вернемся к выражению (8). Мы получили, что в случае «диффузионного» разряда в трубке с переменным радиусом частота ионизации атомов $\nu_i(z)$ записывается следующим образом:

$$\nu_i = D_a \left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2 \Rightarrow \nu_i = b_i \frac{kT_e}{e} \left(\frac{2{,}405}{R_z}\right)^2.$$

Поскольку мы предположили с самого начала, что у нас в разряде имеет место только «прямая» ионизация, то частота ионизации ν_i атомов (их концентрация обозначена как n_a) электронным ударом из основного состояния записывается как

$$\nu_i = n_a \left\langle \sigma_{0_i} v_e \right\rangle,$$

где $\left\langle \sigma_{0_i} v_e \right\rangle$ – константа скорости реакции ионизации, т. е. произведение $\sigma_{0i} v_e$, усредненное по функции распределения электронов по энергиям.

В случае максвелловского распределения электронов по энергиям, целесообразно аппроксимировать зависимость сечения прямой ионизации $\sigma_{0_i}(\varepsilon_e)$ от энергии электронов ε_e такой прямой:

$$\sigma_{0i} = C_i(\varepsilon_e - \varepsilon_i),$$

которая при $\varepsilon_e \geq \varepsilon_i$ характеризуется константой C_i.

При такой аппроксимации получаем следующее выражение для частоты ионизации:

$$\nu_i(z) = C_i n_a \left[\varepsilon_i + 2kT_e(z)\right] \times$$
$$\times \sqrt{\frac{8kT_e(z)}{\pi m_e}} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT_e(z)}\right),$$

откуда

$$\nu_i = C_i n_a \sqrt{\frac{8kT_e(z)}{\pi m_e}} \cdot \left(\varepsilon_i + 2kT(z)_e\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT_e(z)}\right) = b_i \frac{kT_e(z)}{e} \left(\frac{2{,}405}{R_z(z)}\right)^2.$$

В итоге получаем известную формулу [7, 10], связывающую kT_e в ПС диффузионного цилиндрического разряда с концентрацией ионизуемых атомов и радиусом разрядного канала с заменой R на $R_z(z) = R_0 f_R(z)$:

$$\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{kT_e(z)}} \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon_i}{kT_e(z)}\right)}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{2kT_e(z)}\right)} =$$
$$= 0{,}552 \frac{e}{\sqrt{m_e}} \left(\frac{C_i \sqrt{\varepsilon_i}}{b_i n_a}\right) n_a^2 \times$$
$$\times \left[R_0 f_R(z)\right]^2 (z).$$

Теперь обратимся к определению поля $E_z(z)$. С этой целью воспользуемся уравнением баланса энергии на единицу длины столба, как это делали известные российские физики в своих классических работах [7, 12]:

$$IE_z = P_v + P_w,$$

где IE_z – мощность, затрачиваемая продольным электрическим полем, создаваемым внешним источником на ускорение («нагрев») электронов в столбе. Как уже отмечалось выше, P_v – мощность, которая связана с энергией, приобретаемой электронами, и тратится ими в упругих столкновениях с атомами (нагрев газа); P_w – мощность, уносимая ионами на стенку.

Выражения для P_v и P_w можно записать в виде [7, 12]:

$$P_v = \frac{3}{2}\pi R^2(z)\cdot \overline{n}(z)\chi_{ea}\nu_{ea}(z)kT_e(z);$$

$$P_w = 2\pi R(z)\, j_{i_w}\cdot\left(U_i + 1{,}7\frac{kT_e(z)}{e} + U_w\right),$$

где χ_{ea} – коэффициент передачи энергии в упругих электрон-атомных столкновениях, $\chi_{ea} = 2m_e/m_a$; j_{iw} – ток ионов на стенку трубки; U_i – потенциал ионизации атома; U_w – пристеночный скачок потенциала.

Тогда мощность, теряемая электронами в упругих столкновениях, выразится как

$$P_\nu(z) = 4{,}05\frac{m_e}{m_a}n_0(z)\cdot kT_e(z)\times$$

$$\times R_z^2(z)\cdot\nu_{ea} = 3\frac{I_d}{m_a b_e^2 E_z(z)}\cdot kT_e(z).$$

Выражение для величины пристеночного скачка потенциала U_w определим из условия равенства потоков электронов Γ_{eg} и ионов Γ_{ig} на границе плазма – стенка трубки [7, 8].

В предположении, что коэффициент отражения электронов и ионов от стенки трубки пренебрежимо мал и направленная скорость ионов в слое определяется амбиполярным полем, а скорость электронов – их хаотической скоростью, получаем:

$$\Gamma_{eg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}n_{eg}\sqrt{\frac{kT_e(z)}{m_e}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{eU_w(z)}{kT_e(z)}\right) = \Gamma_{ig} = n_{ig}\sqrt{\frac{kT_e(z)}{m_i}}.$$

Здесь n_{eg}, n_{ig} – концентрации электронов и ионов на границе слоя. Из данного уравнения следует, что

$$U_w(z) = \frac{kT_e(z)}{e}\ln 0{,}4\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}.$$

Стеночный ток ионов можно записать, в соответствии с выражениями, приведенными в работах [7, 8]:

$$j_{iw}(z) = -en_{(r\approx R_z)}D_a\frac{1}{n_{(r\approx R_z)}}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)_{(r\approx R_z)} =$$

$$= -eD_a n_0(z)\left(\frac{\partial}{\partial r}f_{n_{e_r}}\right)_{(r\approx R_z)} =$$

$$= -eD_a n_0(z)\left[\frac{\partial}{\partial r}J_0\left(\frac{2{,}405}{R_z}r\right)\right]_{(r\approx R_z)} =$$

$$= eD_a n_0(z)\frac{2{,}405}{R(z)}J_1(2{,}405) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j_{w_i}(z) \approx 3\overline{n}(z)b_i\frac{kT_e(z)}{R_0 f_R(z)}.$$

Тогда мощность, уносимая ионами на стенку, запишется как

$$P_w(z) == 6\pi R_z\overline{n}(z)\frac{kT_e(z)}{R_0 f_R(z)}b_i\times$$

$$\times\left(U_i + 1{,}7\frac{kT_e(z)}{e} + U_w(z)\right),$$

или

$$P_w(z) = \frac{6I}{\left[R_0 f_R(z)\right]^2 E_z(z)}\frac{b_i}{b_e}\cdot\frac{kT_e(z)}{e^2}\times$$

$$\times\left[eU_i + kT_e(z)\left(1{,}7 + \ln 0{,}4\sqrt{\frac{m_a}{m_e}}\right)\right].$$

А весь баланс энергий принимает следующий вид:

$$IE_z(z) = P_\nu(z) + P_w(z) =$$

$$= 3\frac{I}{m_a b_e^2 E_z(z)}\cdot kT_e(z) +$$

$$+\frac{6I}{\left[R_0 f_R(z)\right]^2 E_z(z)}\frac{b_i}{b_e}\cdot\frac{kT_e(z)}{e^2}\times$$

$$\times\left[eU_i + kT_e(z)\left(1{,}7 + \ln 0{,}4\sqrt{\frac{m_a}{m_e}}\right)\right].$$

Отсюда получаем:

$$(eE_z)^2 = 3kT_e(z)\frac{m_e\nu_{ea}}{m_a}\times$$

$$\times\left\{m_e\nu_{ea} + \frac{4}{\left[R_0 f_R(z)\right]^2\nu_{ia}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[eU_i + kT_e(z)\left(1{,}7 + \ln 0{,}4\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\right)\right]\right\}.$$

Подведем основные итоги проведенного исследования.

В результате рассмотрения процессов в

положительном столбе разряда постоянного тока при типичных для ГРЛ разрядных условиях в трубках переменного диаметра, нами получены уравнения для концентрации электронов (как функции продольной и поперечной координат), электронной температуры и проекции электрического поля, связывающие их с зависимостью радиуса разрядного канала от продольной координаты. Полученная система уравнений дает решение поставленной задачи. В работе представлены относительно простые выражения, связывающие внешние, легко контролируемые параметры столба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Кольцевой газовый лазер // Успехи физических наук. 1969. Т. 97. № 3. С. 377–402.

2. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** He-Ne лазер с разрядной трубкой конусообразного сечения // Журнал прикладной спектроскопии. 1970. Т. 12. № 5. С. 937–939.

3. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Зависимость мощности излучения He-Ne лазера от геометрии сечения разрядного промежутка // Журнал технической физики. 1968. Т. 37. № 12. С. 2080–2084.

4. **Федотов А.А.** Автореферат кандидатской диссертации. Л.: ЛЭТИ, 1974.

5. **Троицкий Ю.В., Чеботаев В.П.** Радиальное распределение усиления в He-Ne смеси // Оптика и спектроскопия. 1966. Т. 20. № 2. С. 362–365.

6. **Молчанов М.И., Савушкин А.Ф.** Измерение коэффициента усиления в смеси He-Ne // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15. № 8. С. 1544–1546.

7. **Грановский В.Л.** Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1971. 545 с.

8. **Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.** Основы физики плазмы. СПб.: «Лань», 2011. 448 с.

9. **Райзер Ю.П.** Физика газового разряда. М.: Издательский дом «Интеллект», 2009. 736 с.

10. **Cherrington B.E.** Gaseous electronics and gas lasers. Oxford: Pergamon Press, 1979. 266 с.

11. **Brawn S.C.** Introduction to electrical discharges in gases. New York, USA, John Wiley & Sons, 1966. 320 p.

12. **Клярфельд Б.Н.** Положительный столб газового разряда и его использование для получения света // Труды Всесоюзного электротехнического института. Электронные и ионные приборы. Вып. 41. Под ред. П.В. Тимофеева. М.: Госэнергоиздат, 1940. С. 165–235.

Статья поступила в редакцию 16.10.2019, принята к публикации 31.10.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОЖЕВНИКОВ Вадим Андреевич – *старший преподаватель Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vadim.kozhevnikov@gmail.com

ПРИВАЛОВ Вадим Евгеньевич – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vaevpriv@yandex.ru

ФОТИАДИ Александр Эпаминондович – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fotiadi@rphf.spbstu.ru

REFERENCES

1. **Privalov V.E., Fridrikhov S.A.,** The ring gas laser, Sov. Phys, Usp. 12 (3) (1969) 153–167.
2. **Privalov V.E., Fridrikhov S.A.,** He-Ne laser with a conical discharge tube, Journal of Applied Spectroscopy. 12 (5) (1970) 700–702.
3. **Privalov V.E., Fridrikhov S.A.,** Zavisimost moshchnosti izlucheniya He-Ne lazera ot geometrii secheniya razryadnogo promezhutka [The radiation power of He-Ne laser as a function of a cross-section geometry of a discharge gap], Technical Physics. 37(12) (1968) 2080–2084 (in Russian).
4. **Fedotov A.A.,** Abstract of Ph.D. thesis, Leningrad, LETI, 1974.
5. **Troitskiy Yu.V., Chebotayev V.P.,** Radialnoye raspredeleniye usileniya v He-Ne smesi [Radial distribution of amplification in the He-Ne mixture], Optics and Spectroscopy. 20 (2) (1966) 362–365 (in Russian).
6. **Molchanov M.I., Savushkin A.F.,** Izmereniye koeffitsiyenta usileniya v smesi He-Ne [Measurement of amplification factor in the He-Ne mixture], Journal of Communications, Technology and Electronics. 15 (8) (1970) 1544–1546.
7. **Granovskiy V.L.,** Elektricheskiy tok v gaze. Ustanovivshiysya tok [Electric current in the gas. Steady current], Nauka, Moscow, 1971.
8. **Golant V.E., Zhilinskiy A.P., Sakharov I.E.** Osnovy fiziki plazmy [Fundamentals of plasma physics], "Lan" Publishing, St. Petersburg, 2011.
9. **Rayzer Yu.P.**, Fizika gazovogo razryada [Gas discharge physics], "Intellekt" Publishing House, Moscow, 2009.
10. **Cherrington B.E.,** Gaseous electronics and gas lasers, Pergamon press, Oxford, 1979.
11. **Brawn S.C.**, Introduction to electrical discharges in gases, John Wilay & Sons, New York, 1966.
12. **Klyarfeld B.N.,** Polozhitelnyy stolb gazovogo razryada i yego ispolzovaniye dlya polucheniya sveta [Positive gas discharge column and its use to get light], Proceedings of the All-Soviet-Union Electrotechnical Institute, Electronic and Ionic devices, Edited by P.V. Timofeyev, Gosenergoizdat, Moscow, (41) (1940) 165–235.

Received 16.10.2019, accepted 31.10.2019.

THE AUTHORS

KOZHEVNIKOV Vadim A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vadim.kozhevnikov@gmail.com

PRIVALOV Vadim E.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vaevpriv@yandex.ru

FOTIADI Alexander E.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fotiadi@rphf.spbstu.ru