DOI: 10.18721/JPM.12412
УДК 517.938:070

МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОВОЙ ИНФОРМАЦИИ В ОБЩЕСТВЕ

С.В. Тимофеев, А.П. Суходолов

Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

В статье строится и исследуется базовая математическая модель распространения в обществе новой информации. Предлагаемая модель представлена системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью в правых частях. Для данной системы найдены два стационарных решения, допускающие вполне логичную интерпретацию. В пространстве параметров системы выделены две области, в которых стационарные решения обладают разными свойствами. С помощью качественных методов теории дифференциальных уравнений изучены глобальные свойства фазового портрета построенной динамической системы. Это позволило выделить несколько возможных сценариев распространения новой информации в обществе.

Ключевые слова: распространение новой информации, стационарное решение системы, инвариантное множество, асимптотическая устойчивость

Ссылка при цитировании: Тимофеев С.В., Суходолов А.П. Модель распространения новой информации в обществе // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 4. С. 119–134. DOI: 10.18721/JPM.12412

A MODEL OF NEW INFORMATION DISSEMINATION IN THE SOCIETY

S.V. Timofeev, A.P. Sukhodolov

Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

In the article, a basic mathematical model of new information dissemination in the society is constructed and studied. The suggested model has been described using the system of four ordinary differential equations with square nonlinearity in the right parts. Two stationary solutions furnishing quite logical interpretation for this system were found. Two areas with various properties of stationary solutions were separated in the parameters' space of the system. The global properties of a phase pattern of the constructed dynamic system were investigated by qualitative methods of the differential equations theory. The obtained results allowed finding several possible scenarios of new information dissemination in the society.

Keywords: dissemination of new information, stationary solution of system, invariant set, asymptotic stability

Citation: Timofeev S.V., Sukhodolov A.P., A model of new information dissemination in the society, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (4) (2019) 119–134. DOI: 10.18721/JPM.12412

Введение

Очевидным является факт, что средства массовой информации (СМИ) оказывают значительное влияние на все сферы деятельности общества. Их важная роль в формировании и развитии общественного сознания бесспорна. Каждый индивидуум ежедневно получает массу новой информации, которая оказывает влияние на его выбор и предпочтения. И это не зависит от того, в каком качестве воспринимаются СМИ – как источник новостей, познавательной информации, развлечения или просто как возможность контактировать с внешней средой.

В мире четко прослеживается тенденция формирования так называемого «информационного общества». Например, в российском законодательстве уже имеется определение данного феномена. Согласно статье 3 «Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 – 2030 годы», информационное общество – это общество, в котором информация и уровень ее применения и доступности кардинальным образом влияют на экономические и социокультурные условия жизни граждан[1]. Таким образом, главным ресурсом в обществе такого типа становятся информация и знания [1]. В этих условиях роль СМИ в формировании общественного мнения и сознания возрастает значительно. Именно они являются первоначальным источником новостей, позволяя получать самую свежую, порой в режиме реального времени, информацию из любой части света. Людям дано право доверять или не доверять предоставленным журналистами сведениям и их оценкам происходящего. В век высоких информационных технологий любая новость может быть представлена в каком-либо сегменте общества или обществе в целом. А современные технологии воздействия на общественное сознание с равным успехом через массмедиа могут применяться как для объединения и стабильности общества, так и его разъединения и дестабилизации. Все будет зависеть от целевых установок инициатора информационного воздействия и от потенциала объекта воздействия, который либо желает принять эти установки, либо намерен защитить себя от внешнего информационного «давления» [2]. Успех в продвижении новой концепции в общество во многом зависит от позиций влиятельных СМИ, обладающих способностью формировать общественное мнение (с одной стороны), и субъектов общества, например экспертных сообществ, органов исполнительной власти, которые имеют возможность задействовать массмедиа для освещения альтернативной точки зрения и «раскручивания» своих концепций в социуме (с другой стороны) [3]. Такое информационное противоборство характеризуется общими факторами, поэтому представляют интерес формализация и изучение закономерности процесса в целом.

[1]«О стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы». Указ Президента РФ от 9 мая 2017 года № 203 // Собрание законодательства РФ. 2017. № 20, ст. 2901.

Построение модели

В настоящей статье построена и исследована базовая математическая модель распространения новой информации в обществе. Предложенная математическая модель, разумеется, является весьма обобщенной и в дальнейшем потребует детализации. Но уже в таком виде она позволяет связать выделенные для продвижения новостной информации факторы в некоторую систему и может быть полезной для изучения общей картины.

Будем считать, что основными факторами распространения новой информации являются следующие величины, зависящие от времени t: $N(t)$, $C(t)$, $A(t)$ и $i(t)$. Они выражают следующие понятия:

$N(t)$ (от *англ.* News) – количество новостной информации (сообщения разного рода), способствующей распространению новой концепции в обществе (либо сегменте общества);

$C(t)$ (от *англ.* Censorship) – количество органов со своими информационными ресурсами в структуре общества (либо сегменте общества), заинтересованных в сохранении ранее принятых концепций;

$A(t)$ (от *англ.* Alternative view) – количество информации (сообщения разного рода), препятствующей распространению (в том числе по поручению органов цензуры) новой концепции в обществе (либо сегменте общества);

$i(t)$ (от *англ.* index) – относительная характеристика приятия новой концепции на момент времени t,

$$i = 1 - \frac{I^*}{I},$$

где I, %, – характеристика полного приятия в обществе определенной идеи, на смену которой претендует новая концепция; I^*, %, – соответствующая характеристика приятия этой идеи при распространении новой концепции.

Очевидно, что до начала процесса продвижения $i = 0$, а при полном приятии новой концепции $i = 1$.

Построим соответствующие соотношения модели. Первое уравнение будет описывать динамику числа сообщений $N(t)$ в средствах массовой информации:

$$dN = \beta N dt - \gamma A N dt.$$

Выражение dN в левой части показывает численное изменение новостной информации, способствующей распространению новой концепции в обществе, за интервал времени dt. Неотрицательные параметры β, γ характеризуют интенсивность распространения информации через СМИ и вероятность нейтрализации эффекта от сообщения путем изложения альтернативной точки зрения соответственно. Разделив соотношение на dt, окончательно приходим к уравнению

$$\frac{dN}{dt} = \beta N - \gamma A N. \qquad (1)$$

Следующее уравнение будет описывать реакцию различных органов цензуры на появление информации, связанной с продвижением новых идей в общество. Предполагается, что в социальной среде всегда используется административный ресурс в количестве C_* для поддержки своих концепций. Поэтому при информационном «вбросе» возможно изменение активности органов информационной защиты C и, соответственно, численное изменение ресурса, по сравнению с уровнем C_*:

$$d(C - C_*) = \alpha A N dt - \mu (C - C_*) dt.$$

Неотрицательный коэффициент α характеризует реакцию на интенсивность противоборства альтернативных точек зрения; положительный параметр μ – коэффициент, равный обратной величине времени функционирования дополнительно созданных органов.

С учетом того, что $d(C - C_*) = dC$, окончательно имеем:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha A N - \mu (C - C_*). \qquad (2)$$

В третьем уравнении будет подсчитан баланс числа альтернативных новостей в качестве возможности общества повлиять через СМИ на продвижение новой непривычной концепции. Предлагается исходить из следующего соотношения:

$$dA = \rho C dt - \eta \gamma A N dt - \lambda A dt, \qquad (3)$$

где dA – количество актуальных новостей, появившихся в информационной среде в качестве альтернативы новостям N за интервал времени dt; первый член $\rho C dt$ в правой части описывает «производство» новостей за время dt, при этом $\rho \geq 0$ – средняя скорость появления новостей из одного органа информации C; второй член $\eta \gamma A N dt$ описывает уменьшение числа актуальных новостей за счет адресного воздействия на новости N за время dt, $\eta \geq 0$ – среднее количество новостной информации A для нейтрализации эффекта от сообщения N; третий член $\lambda A dt$ описывает процесс забывания новостной информации за время dt, $\lambda > 0$ – коэффициент, обратно пропорциональный времени забывания информации.

Разделив соотношение (3) на dt, приходим к уравнению

$$\frac{dA}{dt} = \rho C - \eta \gamma A N - \lambda A.$$

Для характеристики приятия новой концепции рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{di}{dt} = \sigma N - \omega i. \qquad (4)$$

Данное уравнение (4) показывает, что скорость изменения приятия новой идеи пропорциональна количеству новой информации N с коэффициентом пропорциональности $\sigma > 0$ с учетом инертности и настороженности восприятия нового с соответствующим коэффициентом восстановления приятия прежней концепции $\omega \geq 0$.

В итоге получаем следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \beta N - \gamma A N, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha A N - \mu (C - C_*), \qquad (5) \\ \frac{dA}{dt} &= \rho C - \eta \gamma A N - \lambda A, \end{aligned}$$

$$\frac{di}{dt} = \sigma N - \omega i. \qquad (5)$$

В дальнейшем будем записывать систему (5) в более удобном для исследования виде:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \alpha AN - \mu(C - C_*), \\ \frac{dA}{dt} &= \rho C - (\lambda + \eta\gamma N)A, \\ \frac{dN}{dt} &= (\beta - \gamma A)N, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma N - \omega i. \end{aligned} \qquad (6)$$

К данной системе уравнений (6) присоединим начальные данные при $t = t_0$:

$$\begin{aligned} &C(t_0) = C_0 \geq 0, A(t_0) = A_0 \geq 0, \\ &N(t_0) = N_0 \geq 0, i(t_0) = i_0 \geq 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

Систему уравнений (6) с начальными условиями (7) назовем базовой математической моделью распространения новой информации в обществе.

Так как система (6) является автономной, то положим $t_0 = 0$; при этом функции $C(t)$, $A(t)$, $N(t)$, $i(t)$ будем считать непрерывными в области их определения.

Анализ модели

Утверждение 1. *Если при всех $t \geq 0$ существует решение системы (6) с начальными условиями (7), то множество*

$$R_+^4 = \{(C, A, N, i) \in \\ \in R^4 : C \geq 0, A \geq 0, N \geq 0, i \geq 0\}$$

инвариантно для этой системы.

Доказательство. Действительно, из третьего уравнения системы (6) следует, что при $t \geq 0$ справедливо следующее условие:

$$N(t) = N_0 \exp[\int_0^t (\beta - \gamma A)dt] \geq 0.$$

Это условие обеспечивает неотрицательность функции $i(t)$ при $t \geq 0$. В самом деле, если $N(t) = 0$, то

$$i(t) = i_0 \exp[-\omega t] \geq 0.$$

Если $N(t) \geq 0$, то $i(t) > 0$ вблизи точки $t = 0$. Действительно, при $i_0 = 0$

$$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \sigma N > 0$$

и $i(t)$ возрастает в окрестности $t = 0$.

Тогда, в силу непрерывности, для того чтобы $i(t)$ стала отрицательной, необходимо существование точки $t = t_1 > 0$, в которой

$$i(t_1) = 0, \quad \frac{di}{dt}\Big|_{t=t_1} < 0.$$

Но это невозможно, так как

$$\frac{di}{dt}\Big|_{t=t_1} = \sigma N(t_1) - \omega i(t_1) = \sigma N(t_1) > 0.$$

Точно так же легко показать неотрицательность функций $C(t)$ и $A(t)$ при начальных условиях (7).

Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. *Если в условиях утверждения 1 $C_0 \geq C_*$, то для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $C(t) \geq C_*$.*

Неотрицательность решения системы (6) соответствует смыслу описываемого процесса, поскольку переменные модели интерпретируются как величины, значения которых не могут быть отрицательными.

Таким же образом несложно показать [4 – 7], что система (6) обладает свойствами единственности, неограниченной продолжимости решений, а также их непрерывной зависимости от параметров.

Система (6) допускает два стационарных решения:

$$X_{1st} = (C_{1st}, A_{1st}, N_{1st}, i_{1st}) = (C_*, \frac{\rho C_*}{\lambda}, 0, 0);$$

$$X_{2st} = (C_{2st}, A_{2st}, N_{2st}, i_{2st}),$$

где

$$C_{2st} = \frac{\alpha\lambda\beta - \eta\mu\gamma^2 C_*}{\gamma(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}, A_{2st} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$N_{2st} = \frac{\mu(\lambda\beta - \gamma\rho C_*)}{\beta(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}, i_{2st} = \frac{\sigma\mu(\lambda\beta - \gamma\rho C_*)}{\omega\beta(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}.$$

Выделим в пространстве параметров системы две области, в которых $X_{ist} \in R_+^4, i = 1, 2$:

$$\Omega_1 : \begin{cases} \gamma\rho C_* > \lambda\beta, \\ \mu\eta\gamma > \alpha\rho, \end{cases} \quad \Omega_2 : \begin{cases} \gamma\rho C_* < \lambda\beta, \\ \mu\eta\gamma < \alpha\rho. \end{cases}$$

Интерпретация: Здесь X_{1st} можно определить как состояние общества, в котором доминирует определенная концепция. Для ее поддержки в обществе используется административный ресурс в количестве C_* с необходимым количеством информации $\rho C^* / \lambda$ в СМИ. X_{2st} характеризуется как состояние общества, в котором сосуществуют привычная старая и новая концепции (представлены своими долями), а относительная характеристика приятия новых представлений i_{2st} имеет положительное значение.

Для исследования устойчивости стационарных решений системы (6) линеаризуем ее вблизи стационарных точек X_{ist}, $i = 1, 2$, и проанализируем характеристическое уравнение системы ее первого приближения:

$$W(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & \alpha N_{ist} & \alpha A_{ist} & 0 \\ \rho & a_{22}-k & -\eta\gamma A_{ist} & 0 \\ 0 & -\gamma N_{ist} & a_{33}-k & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & a_{44}-k \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$a_{11} = -\mu,\ a_{22} = -\eta\gamma N_{ist} - \lambda,$$
$$a_{33} = \beta - \gamma A_{ist},\ a_{44} = -\omega.$$

Для $X_{1st} = (C_{1st}, A_{1st}, N_{1st}, i_{1st})$, имеем:

$$W_1(k) = \left(\beta - \frac{\rho C_*}{\lambda} - k\right)(\lambda + k) \times (\mu + k)(\omega + k) = 0.$$

Для $X_{2st} = (C_{2st}, A_{2st}, N_{2st}, i_{2st})$, соответственно,

$$W_2(k) = (\omega + k)(k^3 + ak^2 + bk + c) = 0,$$

где

$$a = \mu + \eta\gamma N_{2st} + \lambda,$$
$$b = \mu(\eta\gamma N_{2st} + \lambda) - (\alpha\rho + \eta\gamma\beta)N_{2st}, \qquad (8)$$
$$c = \beta N_{2st}(\alpha\rho - \mu\eta\gamma).$$

Утверждение 2. *В области параметров Ω_1 сационарное решение X_{1st} системы (6) асимптотически устойчиво, а решение X_{2st} неустойчиво.*

Доказательство. Для стационарного решения X_{1st} корни характеристического уравнения имеют следующий вид:

$$k_1 = -\omega < 0,\ k_2 = -\mu < 0,$$
$$k_3 = -\lambda < 0,\ k_4 = \beta - \frac{\gamma\rho C_*}{\lambda}.$$

Однако в области параметров Ω_1 $k_4 < 0$. Но, таким образом, корни $W_1(k)$ отрицательны, что и означает асимптотическую устойчивость решения X_{1st} в линеаризованной системе и, следовательно, в системе (6).

Для $W_2(k)$ в области параметров Ω_1 свободный член

$$c = \beta N_{2st}(\alpha\rho - \mu\eta\gamma) < 0,$$

что означает наличие положительного корня для соответствующего характеристического уравнения. Следовательно, стационарное решение X_{2st} системы (6) неустойчиво.

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *В области параметров Ω_2 стационарное решение X_{1st} системы (6) неустойчиво, а решение X_{2st} при выполнении дополнительного условия $ba - c > 0$ асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для стационарного решения X_{1st} корни характеристического уравнения имеют следующий вид:

$$k_1 = -\omega < 0,\ k_2 = -\mu < 0,$$
$$k_3 = -\lambda < 0,\ k_4 = \beta - \frac{\gamma\rho C_*}{\lambda}.$$

Однако в области параметров Ω_2 $k_4 > 0$. Таким образом, для $W_1(k)$ существует положительный корень, и, следовательно, стационарное решение X_{1st} системы (6) неустойчиво.

Для $W_2(k)$ имеем $k_1 = -\omega < 0$. Для исследования остальных корней характеристического уравнения рассмотрим многочлен

$$P(k) = k^3 + ak^2 + bk + c$$

с коэффициентами из выражений (8).

Поскольку

$$a = \mu + \eta\gamma N_{2st} + \lambda > 0,$$
$$c = \beta N_{2st}(\alpha\rho - \mu\eta\gamma) > 0$$

в области параметров Ω_2, то условие

$$ba - c > 0 \qquad (9)$$

утверждения 3 предполагает, что и $b > 0$. Наряду с выполнением самого условия (9), на основании критерия Гурвица [8] делаем вывод, что все действительные корни и действительные части комплексных корней многочлена $P(k)$, а поэтому и характеристического уравнения $W_2(k) = 0$, отрицательны. Таким образом, стационарное решение X_{2st} в линеаризованной системе и, следовательно, в системе (6) асимптотически устойчиво.

Утверждение 3 доказано.

Замечание 1. Следует обратить внимание, что переменная $i(t)$ фигурирует только в последнем уравнении системы (6), поэтому в дальнейшем имеет смысл проводить исследования лишь для системы

$$\frac{dC}{dt} = \alpha AN - \mu(C - C_*),$$
$$\frac{dA}{dt} = \rho C - (\lambda + \eta\gamma N)A, \qquad (10)$$
$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \gamma A)N,$$

$$C(t_0) = C_0 \geq 0,\ A(t_0) = A_0 \geq 0,\ N(t_0) = N_0 \geq 0, \qquad (11)$$

распространяя затем выводы и результаты на переменную $i(t)$.

Стационарные решения системы (10), (11) имеют вид:

$$X_{1st} = (C_{1st}, A_{1st}, N_{1st}) = (C_*, \frac{\rho C_*}{\lambda}, 0),$$
$$X_{2st} = (C_{2st}, A_{2st}, N_{2st}) =$$
$$= \left(\frac{\alpha\lambda\beta - \eta\mu\gamma^2 C_*}{\gamma(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\mu(\lambda\beta - \gamma\rho C_*)}{\beta(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}\right).$$

Анализ модели (10), (11) в области параметров Ω_1

При исследовании трехмерной системы (10), (11) существенно используются свойства вспомогательной двумерной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dA}{dt} = \rho C - (\lambda + \eta\gamma N)A, \qquad (12)$$
$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \gamma A)N,$$

полученной из подсистемы (10) при $\alpha = 0$ и $C(t) = C_*$ при $t \geq 0$.

Интерпретация. Данная система (12) моделирует ситуацию, когда при информационном «вбросе» новой идеи в общество органы информационной защиты не реагируют на него, так как считают, что ранее необходимое количество административного ресурса достаточно для поддержки привычных положений и нейтрализации реакции на появление в СМИ новой информации.

Система (12), очевидно, обладает свойствами единственности, неограниченной продолжимости решений и непрерывной их зависимости от параметров, причем множество

$$R_+^2 = \{(A, N) \in R^2 : A \geq 0,\ N \geq 0\}$$

для системы (12) инвариантно.

Система (12) в области параметров Ω_1 имеет следующие стационарные решения:

$$X_{1st} = (A_{1st}, N_{1st}) = \left(\frac{\rho C_*}{\lambda}, 0\right),$$
$$X_{2st} = (A_{2st}, N_{2st}) = \left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma\rho C_* - \lambda\beta}{\beta\eta\gamma}\right),$$

лежащие в R_+^2, причем X_{1st} – устойчивый узел, а X_{2st} – седло.

С использованием известных приемов качественного анализа двумерных систем дифференциальных уравнений [9] и результата теоремы 4.1, представленной в статье [10], построен и изучен фазовый портрет поведения траекторий системы (12) (рис. 1).

Исходя из построения и изученных свойств траекторий, для данного фазового портрета можно выделить следующие области подпространства R^2:

$$Q_1 = \left\{(A, N) \in R_+^2 : \frac{\beta}{\gamma} \leq A < \infty, 0 \leq N \leq N_{2st}\right\},$$
$$Q_2 = \left\{(A, N) \in R_+^2 : 0 \leq A < \frac{\beta}{\gamma}, 0 \leq N \leq N_{2st}\right\},$$
$$Q_3 = \left\{(A, N) \in R_+^2 : 0 \leq A < \frac{\beta}{\gamma}, N_{2st} \leq N < \infty\right\},$$
$$Q_4 = \left\{(A, N) \in R_+^2 : \frac{\beta}{\gamma} \leq A < \infty, N_{2st} \leq N < \infty\right\}.$$

К седлообразной точке X_{2st} системы (12) в области параметров Ω_1 примыкают четыре сепаратрисы: устойчивые $p(t)$, $q(t)$ и неустойчивые $r(t)$, $s(t)$; при этом $p\epsilon(t) \in Q_2$, $q(t) \in Q_4$ при $t \geq 0$, и $p(t)$, $q(t) \to X_{2st}$ при $t \to +\infty$, $r(t) \in Q_3$, $s(t) \in Q_1$ и $r(t)$, $s(t) \to X_{2st}$ при $t \to -\infty$. Q_1, Q_3 – инвариантные множества относительно системы (12). Кривая, составленная из устойчивых сепаратрис p, q седла X_{2st}, является границей области притяжения устойчивого узла X_{1st}.

Поскольку аналитическое описание кривых, представляющих собой сепаратрисы $p(t)$ и $q(t)$, затруднительно, в предлагаемом утверждении дается следующая оценка области притяжения X_{1st}, аналог которой ниже приводится и для системы (10).

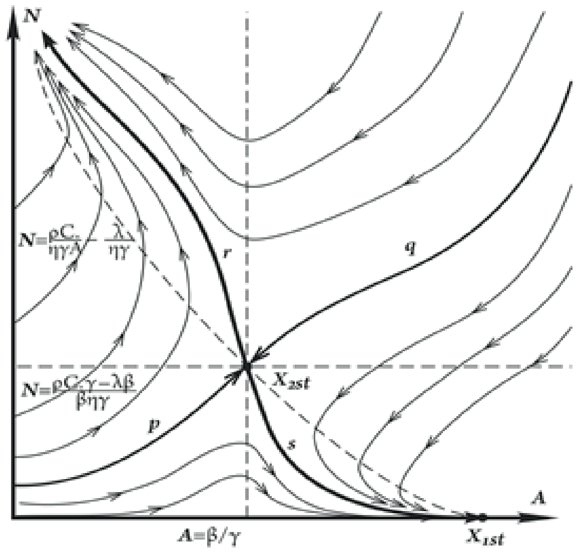

Рис. 1. Фазовый портрет системы (12)

Утверждение 4. *Пусть заданы множества*

$$Q_1^* = Q_1 \setminus \{X_{2st}\},$$

$$Q_2^* = \Bigg\{ (A, N) \in Q_2 : 0 \le A < \frac{\beta}{\gamma},$$

$$0 \le N \le N_{2st} \exp\left(\frac{-\beta^2}{\rho C_* \gamma}\right) \exp\left(\frac{\beta A}{\rho C_*}\right) \Bigg\}.$$

В области параметров Ω_1 множество $Q = Q_1^* \cup Q_2^*$ – оценка области притяжения асимтотически устойчивого стационарного решения X_{1st} системы (12).

Доказательство. Так как Q_1^* – инвариантное множество системы (12), лежащее в области притяжения устойчивого узла X_{1st}, то из того, что $X_0 = (A_0, N_0) \in Q_1^*$, следует что $X(t, X_0) \in Q_1^*$ при всех $t \ge 0$, и $X(t, X_0) \to \to X_{1st}$ при $t \to +\infty$.

Покажем, что, если

$$X_0 = (A_0, N_0) \in Q_2^*,$$

то найдется такой момент времени t_*, при котором

$$X(t_*, X_0) \in Q_1^*.$$

Пусть $N = N(A)$ − интегральная кривая дифференциального уравнения, полученного из системы (12):

$$\frac{dN}{dA} = \frac{(\beta - \gamma A)N}{\rho C_* - (\lambda + \eta\gamma N)A} = f(A, N), \quad (13)$$

а $G = G(A)$ − решение уравнения

$$\frac{dG}{dA} = \frac{(\beta - \gamma A)G}{\rho C_* - (\lambda + \eta\gamma N_{2st})A} \equiv \frac{\beta G}{\rho C_*}. \quad (14)$$

Для любой точки $(A, N) \in Q_2$, очевидно, что

$$f(A, N) \le \frac{\beta N}{\rho C_*},$$

поэтому по теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [11], если

$$N(A_0) \le G(A_0),$$

$$(A_0, N(A_0)) \in Q_2,$$

$$(A_0, G(A_0)) \in Q_2,$$

то

$$N(A) \le G(A)$$

для тех $A > A_0$, для которых $(A, N, (A)) \in Q$.

Пусть $G(0)$ − точка оси ON, начиная из которой кривая $G(A)$ проходит через точку (A_{2st}, N_{2st}). Из формулы (14) следует, что

$$G(A) = G(0) \exp\left(\frac{\beta A}{\rho C_*}\right),$$

поэтому, если $G(A_{2st}) = N_{2st}$, то

$$G(0) = N_{2st} \exp\left(\frac{-\beta^2}{\rho C_* \gamma}\right).$$

На основании теоремы Чаплыгина любая интегральная кривая уравнения (13) при $N(0) \le G(0)$ попадает с ростом A в множество Q_1^* и, следовательно, будет стремиться к стационарному решению X_{1st}. Таким образом, каждая точка множества Q_2^* принадлежит области притяжения X_{1st}, а множество $Q = Q_1^* \bigcup Q_2^*$ – ее оценка.

Утверждение 4 доказано.

Интерпретация. Рис. 1 хорошо иллюстрирует возможное развитие ситуации при отсутствии должного внимания к информационному «вбросу». Если количество сообщений о новой концепции в СМИ незначительно или реакция общества на них слабая, то исходного административного ресурса может быть достаточно, чтобы новые идеи не проникли в общественное сознание. Но если объем новой информации значительный, то традиционной активности органов информационной защиты может оказаться недостаточно для нейтрализации общественной реакции. И тогда без осмысленного управления СМИ новая концепция становится доминирующей в обществе, так как из графика на рис. 1 следует, что не всякая реакция на подавление новой идеи приводит к успеху.

Обращаясь теперь к системе (10), (11), получаем аналогичный результат. Докажем теорему.

Теорема 1. *В пространстве параметров* Ω_1 *множество* $D = D_1 \bigcup D_2$ *фазового пространства* $\{C, A, N\}$ *системы* (*10*), *где*

$$D_1 = \Big\{(C, A, N): C_* \le C < \infty,$$
$$\frac{\beta}{\gamma} \le A < \infty, 0 \le N \le N_*\Big\}$$

$$D_2 = \left\{(C, A, N): C_* \le C < \infty, 0 \le A < \frac{\beta}{\gamma},\right.$$
$$\left. 0 \le N \le N_* \exp\left(\frac{-\beta^2}{\rho C_* \gamma}\right)\exp\left(\frac{\beta A}{\rho C_*}\right)\right\},$$
$$N_* = \frac{\gamma\rho C_* - \lambda\beta}{\beta\eta\gamma},$$

является оценкой области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения X_{1st} *системы* (*10*), (*11*).

Доказательство. Из утверждения 4, первого и третьего уравнений системы (10), (11) следует инвариантность множества D_1.

Множество

$$\overline{D_1} = \left\{(C, A, N) \in \partial D_1 : N = 0\right\},$$

где ∂D_1 – граница множества D_1, также, очевидно, является инвариантным для решения системы (10), (11), и если

$$X_0 = \left(C_0, A_0, N_0\right) \in \overline{D_1},$$

то $X(t,X_0) \to X_{1st}$ при $t \to +\infty$, поскольку на множестве $\overline{D_1}$ система (10) задается линейными уравнениями

$$\frac{dC}{dt} = -\mu(C - C_*), \frac{dA}{dt} = \rho C - \lambda A, \qquad (15)$$
$$N(t, X_0) \equiv 0,$$

для которых особая точка X_{1st} – глобально равномерно асимптотически устойчива.

Пусть $X_0 \in D_1 \setminus \overline{D_1}$, а $X(t, X_0)$ – решение системы (10), (11), начинающееся в X_0. Для компоненты $N(t, X_0)$ вектора $X(t, X_0)$, согласно третьему уравнению, справедливо неравенство $\dot{N}(t, X_0) \le 0$ для $t \ge 0$, причем $\dot{N}(t, X_0) = 0$ лишь в изолированной точке временнóй полуоси $[0; \infty)$, где

$$C(t, X_0) = C_*, A(t, X_0) = \frac{\beta}{\gamma},$$
$$N(t, X_0) \equiv N_*.$$

Поскольку точка $\left(C_*, \frac{\beta}{\gamma}, N_*\right) \in D_1$ не является особой для системы (10), (11), существует такой момент времени $t_1 \ge 0$, когда для неотрицательной функции $\dot{N}(t, X_0)$ имеем $\dot{N}(t, X_0) \le 0$ для всех $t \ge t_1 \ge 0$. Но тогда

$$\lim_{t \to +\infty} N(t, X_0) = 0,$$

и, следовательно,

$$X(t, X_0) \to \overline{D_1} \text{ при } t \to +\infty.$$

На основании теоремы о непрерывной зависимости решений системы (10), (11) от начальных данных (см. работу [12]) следует, что

$$X(t, X_0) \to X_{1st} \text{ при } t \to +\infty,$$

поскольку таким свойством обладает каждое решение системы (15).

Изучим поведение траектории системы (10),(11) на множестве D_2. Согласно приведенному выше, при

$$X_0 \in D_2 : C_0 \ge C_*$$

имеем $C(t) \ge C_*$ при всех $t \ge 0$.

Рассмотрим систему из двух уравнений:

$$\frac{dN_1}{dt} = (\beta - \gamma A_1)N_1, \tag{16}$$

$$\frac{dA_1}{dt} = \rho C(t) - (\lambda + \eta\gamma N_1)A_1,$$

которая эквивалентна уравнению

$$\frac{dN_1}{dA_1} = \frac{(\beta - \gamma A_1)N_1}{\rho C(t) \ - (\lambda + \eta\gamma N_1)A_1}. \tag{17}$$

В области D_2 из уравнений (17) и (13) следует, что

$$\frac{(\beta - \gamma A)N}{\rho C(t) - (\lambda + \eta\gamma N)A} \le$$

$$\le \frac{(\beta - \gamma A)N}{\rho C_* - (\lambda + \eta\gamma N)A}.$$

Из теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [11] следует, что, если только $N_1(0) \le N(0)$, то в множестве D_2 для систем (16) и (12) будет выполняться неравенство $N_1(t) \le N(t)$ при всех $t \ge 0$. Поэтому, если $X_0 \in D_2$ для системы (10), (11), то решение $X(t, X_0) \in D_2$ для всех $A < \dfrac{\beta}{\gamma}$. Но поскольку в множестве D_2 производная $\dot{A}(t) > 0$, а переменная $C(t)$ ограничена, то $X(t, X_0)$ попадает в область D_1 за конечный отрезок времени. Поэтому, если $X_0 \in D$, то любое решение

$$X(t, X_0) \to X_{1st} \text{ при } t \to +\infty,$$

если только $X_0 \in D$.

Теорема 1 полностью доказана.

При этом справедлива следующая, более сильная теорема.

Теорема 2. *Пусть дана система* (*10*)*, в которой параметры принадлежат области* Ω_1. *Тогда для неустойчивого стационара* X_{2st} *существует сепаратрисная поверхность* W^s, *которая является точной границей области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения* X_{1st}.

Доказательство. Действительно, поскольку параметры системы (10) принадлежат области Ω_1, через неустойчивый стационар X_{2st} проходит устойчивая сепаратрисная поверхность $W^s(X_{2st})$. Тогда, убедившись в справедливости условий $A1 - A3$ теоремы 4.1, представленных в работе [10], получаем сформулированный в теореме результат.

Теорема 2 доказана.

Интерпретация. Полученные результаты показывают, что при обозначенных соотношениях для параметров системы в пространстве $\{C, A, N\}$ существует область, из которой система стремится к устойчивому состоянию X_{1st}. В этом состоянии в обществе (или в его сегменте) полностью доминирует привычная прежняя концепция. Поэтому теоретически в любой момент времени при грамотном управлении параметрами системы можно добиться попадания траектории в описанную область.

Анализ системы (10), (11) в области параметров Ω_2

Система (10), (11), согласно замечанию 1, есть редукция системы (5), (6). Поэтому, вследствие утверждения 3, в области параметров Ω_2 стационарное решение X_{1st} системы (10) неустойчиво, а решение X_{2st}, при выполнении дополнительного условия (9), асимптотически устойчиво. Представляет интерес исследовать область притяжения стационара X_{2st} системы (10), (11).

В пространстве $\{C, A, N\}$ рассмотрим поверхность, где величина $\dot{A}(t)$ равна нулю:

$$N = \frac{\rho C}{\eta\gamma A} - \frac{\lambda}{\eta\gamma}. \tag{18}$$

Введем дополнительное соотношение:

$$\rho C_*(\rho\alpha + \eta\beta\gamma) - \lambda\eta\beta(\mu + \beta) \ge 0 \tag{19}$$

и рассмотрим следующее множество (оно графически представлено на рис. 2):

$$G = \{(C, A, N) : 0 < N < \mathbf{p}(C - C_*), \quad A_{1st} \le A < \infty\}, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{p} - \text{const:} \frac{\mu\lambda + (\lambda\beta - \rho C_*\beta\gamma)}{\rho C_*\alpha} < \mathbf{p} < \frac{\rho}{\eta\beta}.$$

Утверждение 5. *Пусть для системы* (10), (11) *в области параметров* Ω_2 *выполняется условие (19). Тогда для этой системы множество* G *— инвариантно.*

Доказательство. Установим направление векторного поля на поверхности $N = \mathbf{p}(C - C_*)$, определенной в соотношении (19).

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial N}{dC}; \frac{\partial N}{dA}; -1\right) = (\mathbf{p}; 0; -1)$$

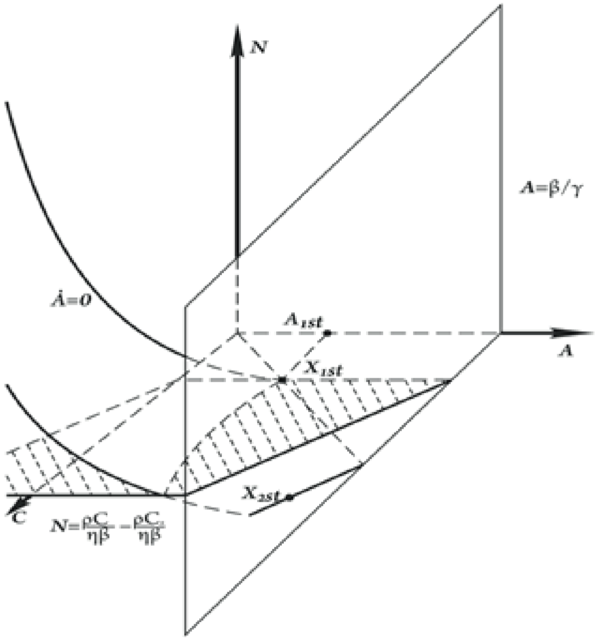

Рис. 2. Множество G (см. формулу (20)) в фазовом пространстве системы (10), (11)

и

$$\frac{dX}{dt}=\left(\frac{dC}{dt};\frac{dA}{dt};\frac{dN}{dt}\right)$$

имеет вид

$$\mathbf{p}(C - C_*)\ [(\alpha\mathbf{p} + \gamma)\ A - (\mu + \beta)].$$

Это выражение больше нуля при

$$A>\frac{\mu+\beta}{\alpha p+\gamma}=\overline{A},$$

что означает попадание траекторий системы при таких A с плоскости

$$N=\mathbf{p}(C-C^*)$$

в множество G. Но в этом множестве $A_{1st}\le A$.

Другими словами, для того чтобы множество G было инвариантно, требуется выполнение условия $\overline{A}\le A_{1st}$. Но при $\mathbf{p}$ из выражения (20) оно справедливо лишь при выполнении соотношения (19) (см. ниже замечание 2). На части плоскости $A = A_{1st}$, которая принадлежит множеству G, векторное поле направлено внутрь этого множества, поскольку с учетом того, что $N > 0$, справедливы неравенства

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{A=A_{1st}}>\rho(C-C_*)\frac{\lambda\beta-\rho C_*\gamma}{\lambda\beta}>0.$$

Следовательно, все траектории этой системы с границы $A = A_{1st}$ попадают в множество G. А поскольку плоскость $N = 0$ является инвариантной, траектории не могут попасть из множества G на эту плоскость (иначе будет нарушена теорема единственности).

Утверждение 5 доказано.

Замечание 2. Ограничение на параметр $\underline{\mathbf{p}}$ снизу следует из того, что неравенство $\overline{A}\le A_{1st}$ справедливо лишь при

$$\frac{\mu\lambda+(\lambda\beta-\rho C_*\beta\gamma)}{\rho C_*\alpha}<\mathbf{p}.$$

Ограничение же на параметр $\mathbf{p}$ сверху потребуется далее в утверждении 6.

При $\mathbf{p}$ из выражения (20) условие $\overline{A}\le A_{1st}$ действительно выполняется лишь при соотношении (19). Выражение

$$q\frac{\rho}{\eta\beta}+(1-q)\frac{\mu\lambda+(\lambda\beta-\rho C_*\beta\gamma)}{\rho C_*\alpha},$$

$$q\in(0;1)$$

описывает интервал

$$\left(\frac{\mu\lambda+(\lambda\beta-\rho C_*\beta\gamma)}{\rho C_*\alpha};\frac{\rho}{\eta\beta}\right).$$

Тогда условие $\overline{A}\le A_{1st}$ при

$$\mathbf{p}\in\left(\frac{\mu\lambda+(\lambda\beta-\rho C_*\beta\gamma)}{\rho C_*\alpha};\frac{\rho}{\eta\beta}\right)$$

принимает вид

$$q\rho^2C_*\alpha+(1-q)\eta\beta[\mu\lambda+(\lambda\beta-\rho C_*\gamma)]+$$
$$+\rho C_*\eta\beta\gamma>\lambda\eta\beta(\mu+\beta).$$

Отсюда следует неравенство

$$(q-1)[\rho^2 C_*\alpha - \eta\beta(\mu\lambda + \lambda\beta - \rho C_*\gamma)] +$$
$$+\rho C_*\eta\beta\gamma + \rho^2 C_*\alpha - \lambda\eta\beta(\mu+\beta) > 0,$$

что эквивалентно выполнению неравенства

$$q[\rho C_*(\rho\alpha + \eta\beta\gamma) - \lambda\eta\beta(\mu+\beta)] > 0.$$

Утверждение 6. *Пусть для системы (10), (11) в области параметров Ω_2 выполняется условие (19). Тогда траектории этой системы ограничены на множестве G.*

Доказательство. Проведем доказательство в три этапа.

Первый этап. Пусть G_1 – подмножество G, где

$$A_{1st} \le A \le \frac{\beta}{\gamma}.$$

Покажем, что в подмножестве G_1 траектории системы ограничены.

Рассмотрим для этого плоскость

$$\mathbf{a}A - C + \mathbf{b} = 0 \qquad (21)$$

с нормалью $\mathbf{n}_1 = (-1; \mathbf{a}; 0)$. Коэффициенты $\mathbf{a}, \mathbf{b} > 0$ выберем так, чтобы плоскость (21) пересекала подмножество G_1. Рассмотрим на этой плоскости в G_1 векторное поле

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dC}{dt}; \frac{dA}{dt}; \frac{dN}{dt}\right)$$

системы уравнений (10). А именно, определим часть плоскости (21), где скалярное произведение векторов $\mathbf{n}_1$ и $d\mathbf{X}/dt$ больше нуля. Это произведение имеет вид:

$$\mu(C - C_*) - \alpha AN + \alpha\rho C -$$
$$-\mathbf{a}\lambda A - \mathbf{a}\eta\gamma AN >$$
$$> \mu(C - C_*) - \alpha\frac{\beta}{\gamma}N +$$
$$+\alpha\rho C - \mathbf{a}\lambda A - \mathbf{a}\eta\gamma\frac{\beta}{\gamma}N.$$

С учетом данной оценки и уравнения плоскости (21) скалярное произведение гарантированно будет положительным при

$$N < \frac{\mathbf{a}\gamma(\mathbf{a}\rho + \mu - \lambda)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}A - \frac{\gamma(\mu C_* - \mathbf{ab}\rho)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}.$$

Найдем соотношение, при котором это произведение больше нуля в любой точке плоскости (21) из подмножества G_1. Для этого найдем пересечение плоскости

$$N = \mathbf{p}\,(C - C_*)$$

с плоскостью (21). Уравнение этой прямой имеет вид:

$$N = \mathbf{pa}A + \mathbf{pb} - \mathbf{p}C_*. \qquad (22)$$

Если коэффициент при A в уравнении для прямой (22) будет меньше соответствующего коэффициента прямой

$$N = \frac{\mathbf{a}\gamma(\mathbf{a}\rho + \mu - \lambda)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}A - \frac{\gamma(\mu C_* - \mathbf{ab}\rho)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}, \quad (23)$$

то в уравнении (21) можно найти такую постоянную $\mathbf{b}$, что прямые (22) и (23) пересекутся в точке A_{1st}, а при условии

$$A_{1st} \le A \le \frac{\beta}{\gamma} \qquad (24)$$

вектор системы на плоскости (21) в подмножестве G_1 будет направлен в одну сторону с вектором $\mathbf{n}_1$ от плоскости (21). Это будет означать, что для любой траектории из множества G при условии (24) существует «перегородка», которая не позволяет ей уйти в бесконечность на подмножестве G_1.

Остается показать, что всегда можно подобрать $\mathbf{a}$ такое, что для коэффициентов при A в уравнениях (22) и (23) будет выполняться соотношение

$$\mathbf{p} < \frac{\gamma(\mathbf{a}\rho + \mu - \lambda)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}.$$

Качественное поведение функции

$$f(\mathbf{a}) = \frac{\gamma(\mathbf{a}\rho + \mu - \lambda)}{\beta(\mathbf{a}\eta\gamma + \alpha)}$$

схематично представлено на графике рис. 3. При его анализе видно, что при любом $\mathbf{p} < \rho/\eta\beta$ существует

$$0 < \mathbf{a} < \infty: f(\mathbf{a}) > \mathbf{p}.$$

Таким образом, траектория системы (10), попав в множество G при условии (24), может уйти в бесконечность, если только пересечет плоскость $A = \beta/\gamma$.

Второй этап. Начинаясь в подмножестве множества G, где $A > \beta/\gamma$, траектория также не может уйти в бесконечность. Действительно, при $A > \beta/\gamma$ из третьего уравнения системы (10) следует, что $\dot{N}(t) < 0$. Поэтому, если воспользоваться рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 1, то можно показать, что для компоненты $N(t, X_0)$ вектора $X(t, X_0)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} N(t, X_0) = 0,$$

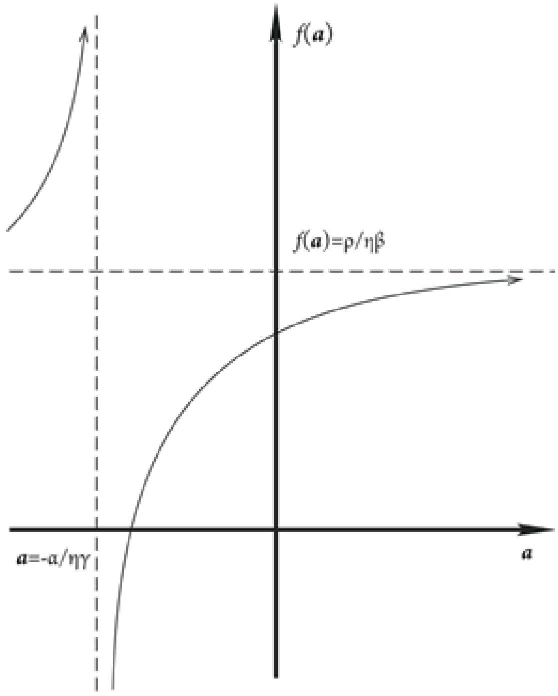

Рис. 3. График функции $f(\mathbf{a})$

если только X_0 принадлежит этому подмножеству.

Другими словами, за конечный промежуток времени траектория системы попадает в достаточно малую окрестность плоскости $N = 0$. Но на этой плоскости нет решений, которые уходят в бесконечность. Поэтому теорема о непрерывной зависимости от начальных данных [12] гарантирует, что траектория на этом подмножестве также не может уйти в бесконечность. Следовательно, если предположить существование такой траектории, то она должна через плоскость $A = \beta/\gamma$ попасть в G_1.

Третий этап. Рассуждения предыдущих этапов позволяют сделать вывод, что если в множестве G найдется траектория, которая уходит в бесконечность, то она должна бесконечное число раз пересекать плоскость $A = \beta/\gamma$. Допустим, что такая траектория существует. Заметим при этом, что пересечение плоскости $A = \beta/\gamma$ в сторону убывания $A(t)$, в силу выражения (18), происходит при

$$N > \frac{\rho C}{\eta\beta} - \frac{\lambda}{\eta\gamma},$$

(так как прямая

$$N = \frac{\rho C}{\eta\beta} - \frac{\lambda}{\eta\gamma}$$

есть пересечение поверхности (18) с плоскостью $A = \beta/\gamma$ (см. рис. 2)) и при $N < \mathbf{p}(C - C_*)$. Поскольку $\mathbf{p} < \rho/\eta\beta$, прямые

$$N = \frac{\rho C}{\eta\beta} - \frac{\lambda}{\eta\gamma}, N = \mathbf{p}(C - C_*)$$

имеют пересечение в конечной точке плоскости $A = \beta/\gamma$. При этом в множестве G образуется предкомпактный сегмент

$$S = \left\{ (C, A, N) \in G : A = \frac{\beta}{\lambda}, \right.$$

$$\left. \frac{\rho C}{\eta\beta} - \frac{\lambda}{\eta\gamma} < N < \mathbf{p}(C - C_*) \right\}.$$

Составим из таких точек пересечения траектории плоскости $A = \beta/\gamma$ последовательность $\{x_k\}$, из которой выделим сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее предел как x^*. Тогда из точки x^* траектория попадает в подмножество G_1, где $A < \beta/\gamma$, откуда, согласно доказанному на первом этапе, пересекает плоскость $A = \beta/\gamma$ уже в сторону возрастания $A(t)$ в конечной точке.

В итоге возникло противоречие с предположением о том, что траектория уходит в бесконечность. Следовательно, все траектории исследуемой системы ограничены в множестве G.

Утверждение 6 доказано.

Теорема 3. *Если для системы (10), (11) в* *пространстве параметров Ω_2 выполняется условие (19), то множество G, определенное выражением (20), является оценкой области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения X_{2st}.*

Доказательство. Зададим на множестве G (напомним, что оно инвариантно согласно утверждению 5) функцию Ляпунова:

$$V(X,t) = \gamma AN - \beta N - \gamma \int_0^t \dot{A} N \, d\tau.$$

Ее производная, в силу системы (10), (11), имеет следующий вид:

$$\dot{V}(X,t) = \gamma \dot{N} A + \gamma \dot{A} N - \beta \dot{N} - \gamma \dot{A} N =$$

$$= \dot{N}(\gamma A - \beta) = -(\beta - \gamma A)^2 N \le 0.$$

Докажем ограниченность функции $V(X, t)$ снизу. Ввиду ограниченности траекторий системы на множестве G, слагаемое $\gamma AN - \beta N$ ограничено снизу. На множестве, где $\dot{A} < 0$, последнее слагаемое функции $V(X, t)$ является положительным. На множестве, где $\dot{A} > 0$, указанное слагаемое можно оценить таким образом:

$$-\gamma \int_0^t \dot{A} \; N \, d\tau \ge -\gamma \int_0^t \dot{A} \; N_{\max} d\tau =$$

$$= -\gamma N_{\max} [A(t) - A(0)] \ge$$

$$\ge -\gamma N_{\max} A_{\max} + \gamma N_{\max} A(0).$$

Следовательно, функция $V(X, t)$ ограничена снизу. Очевидно, что и производная $\ddot{V}(X,t)$ также будет ограничена снизу. Таким образом, согласно утверждению VIII.4.7, приведенному в работе [13], можно утверждать, что

$$V(X, t) \text{ при } t \to +\infty.$$

Это означает, что траектория системы стремится к своему ω-предельному множеству

$$M_0 \in M = \left\{ (C, A, N) \in G : A = \frac{\beta}{\lambda} \right\}.$$

По свойству ω-предельных множеств для автономных систем, M_0 инвариантно в силу системы (10), (11). Но на плоскости $A = \beta/\gamma \, M_0$ инвариантно только в том случае, если $M_0 = \{X_{2st}\}$. Следовательно,

$$X(t, X_0) \to X_{2st} \text{ при } t \to +\infty.$$

Таким образом, G − это оценка области притяжения для X_{2st}.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть для системы (10), (11) в пространстве параметров Ω_2 выполняются условие (19) и соотношение*

$$\rho\alpha - \mu\eta\gamma > \beta\eta\gamma. \tag{25}$$

Тогда все пространство

$$R^+ = \left\{ (C, A, N) \in R^3 : C \ge 0, \, A \ge 0, \, N > 0 \right\}$$

является частью области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения X_{2st}.

Доказательство. Покажем, что все траектории, имеющие начало в R^+, попадают в множество G, откуда, согласно теореме 3, стремятся при $t \to +\infty$, к стационарному решению X_{2st}.

Правая часть уравнения для $C(t)$ системы (10) гарантирует попадание траектории с начальными данными из R^+ в инвариантное подпространство, где $C(t) \ge C_*$. Поэтому проведем исследование лишь в этом подпространстве. Разобьем его на два подмножества:

$$T_1 = \left\{ (C, A, N) \in R^+ : C \ge C_*, \, A \ge A_{1st} \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (C, A, N) \in R^+ : C \ge C_*, \, 0 \le A \le A_{1st} \right\}.$$

Пусть точка траектории находится в $T_1 \backslash G$. Тогда для некоторого числа $q > 0$ эта точка, согласно соотношению (21), лежит на плоскости

$$N = p(C - C_*) + q.$$

С этой плоскости, следовательно, траектории попадают в множество G, либо в подмножество T_2. Покажем теперь, что из T_2 все траектории попадают в область, где

$$N < \frac{\rho C}{\eta\beta} - \frac{\lambda}{\eta\gamma},$$

(см. рис. 2) и, следовательно, $\dot{A} > 0$.

Зададим в подмножестве T_2 функцию $V_{T_2} = \dot{A}$ и исследуем знак ее производной, учитывая свойства системы (10) на поверхности $V_{T_2}(X) = 0$. Принимая во внимание выражение (18), имеем:

$$\dot{V}_{T_2} = \ddot{A} = \rho \dot{C} - \eta\gamma \dot{N} A =$$

$$= \left(\frac{\rho C - \lambda A}{\eta\gamma} \right) (\rho\alpha - \mu\eta\gamma - \beta\eta\gamma + \eta\gamma^2 A) +$$

$$+ \rho\mu C_* - \lambda\mu A.$$

Если в подмножестве T_2 выполняется соотношение (25), то

$$\dot{V}_{T_2}(X)\Big|_{X:V_{T_2}(X)=0} > 0.$$

Если $V_{T_2}(X) < 0$ в некоторой части пространства T_2, то исследование знака производной $V_{T_2}(X)$ в силу системы (10) сводится к вычислению знака производной на поверхности $V_{T_2}(X) = 0$, так как

$$\dot{V}_{T_2}(X)\Big|_{X:V_{T_2}(X)\le 0} = \ddot{A} = \rho\dot{C} - \lambda\dot{A} -$$

$$-\eta\gamma\dot{N}A - \eta\gamma\dot{A}N \ge$$

$$\ge \rho\dot{C} - \eta\gamma\dot{N}A = \dot{V}_{T_2}(X)\Big|_{X:V_{T_2}(X)=0} > 0.$$

Это значит, что все траектории из T_2 попадают в область, где $\dot{A} > 0$, а, следовательно, и в область G, из которой стремятся к асимптотически устойчивому стационарному решению X_{2st}.

Теорема 4 доказана.

Интерпретация. В данном разделе получены соотношения для параметров системы, которые характеризуют готовность общества вместе с имеющейся концепцией принять новые положения. Поэтому любая новая идея, появившаяся в СМИ, находит отклик. Со временем старые и новые представления приходят к совместному сосуществованию со своими долями приятия в обществе.

Заключение

Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие основные итоги.

1. Выделены обобщенные факторы и закономерности продвижения новостной информации в обществе, на основании которых строится базовая математическая модель распространения новой информации. Полученная модель является системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью в правых частях.

2. С использованием методов качественного анализа изучены глобальные свойства фазового портрета построенной динамической системы.

3. Дана интерпретация основных результатов исследования, которая позволила выделить несколько возможных сценариев развития событий и влиять на них.

Результаты, изложенные в данной статье, авторы считают продолжением системного исследования, начало которому было положено в работе [14] и далее развито в работах [15 – 18]. Эта научно-исследовательская программа направлена на изучение медиасистемы как одной из самых актуальных и высокоскоростных динамических систем. Использование математических методов дает возможность проводить медиаисследования более глубоко и на новом научном уровне. А обращение к методам нелинейной динамики позволяет наиболее полно изучить структуру и свойства процессов в такой системе, как средства массовой информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Погорелый Д.Е., Фесенко В.Ю., Филиппов К.В.** Информационное общество. Политологический словарь-справочник. Ростов-на-Дону: Наука-Спектр, 2008. 320 с.

2. Информационное право: актуальные проблемы теории и практики. Под общ. ред. И.Л. Бачило. М.: Изд-во «Юрайт», 2009. 530 с.

3. **Марущак А.В.** Политико-социальный образ России в американском медиапространстве // Журналистский ежегодник. 2012. № 1. 2012. С. 93–96.

4. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.

5. **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1972. 664 с.

6. **Чезаре Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.

7. **Lakshmikantham V., Ladas G.E.** Differential equations in abstract spaces. New-York: Academic Press, 1972. 231 p.

8. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 234 с.

9. **Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.

10. **Chang H.-D., Hirsch M.W., Wu F.F.** Stability regions of nonlinear autonomous dynamical

systems // IEEE Trans. Automat. Contrl., 1988. Vol. 33. No. 1. Pp. 16–27.

11. **Барбашин Е.А., Табуева В.А.** Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 387 с.

12. **Федорюк М.В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.

13. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

14. **Суходолов А.П., Рачков М.П.** К созданию теории средств массовой информации: постановка задачи // Вопросы теории и практики журналистики. 2016. Т. 5. № 1. С. 6–13.

15. **Баенхаева А.В., Тимофеев С.В.** Эволюционный подход к развитию средств массовой информации: построение математической модели // Известия Байкальского государственного университета. 2016. Т. 26. № 5. С. 825–833.

16. **Суходолов А.П., Кузнецова И.А., Тимофеев С.В.** Анализ подходов в моделировании средств массовой информации // Вопросы теории и практики журналистики. 2017. Т. 6. № 3. С. 287–305.

17. **Суходолов А.П., Тимофеев С.В.** СМИ и виртуальная реальность: новые возможности и перспективы // Вопросы теории и практики журналистики. 2018. Т. 7. № 4. С. 567–580.

18. **Суходолов А.П., Анохов И.В., Маренко В.А.** Информационное импульсно-волновое взаимодействие СМИ и общества // Вопросы теории и практики журналистики. 2019. Т. 8. № 1. С. 5–19.

Статья поступила в редакцию 14.06.2019, принята к публикации 22.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ТИМОФЕЕВ Сергей Викторович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и статистики Байкальского государственного университета, г. Иркутск, Российская Федерация.*

664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
timofeevsv12@gmail.com

СУХОДОЛОВ Александр Петрович – *доктор экономических наук, проректор по научной работе Байкальского государственного университета, г. Иркутск, Российская Федерация.*

664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11
science@bgu.ru

REFERENCES

1. **Pogoreliy D.E., Fesenko V.Yu., Filippov K.V.,** Informatsionnoye obshchestvo. Politologicheskiy slovar-spravochnik [Society of information. Reference book]. Nauka-Spektr, Rostov-on-Don, 2008.

2. Informatsionnoye pravo: aktualnyye problemy teorii i praktiki [Information right: current problems of theory and practice], Ed. I.L. Bachilo, YouRight Publishing, Moscow, 2009.

3. **Marushchak A.V.,** Politiko-sotsialnyy obraz Rossii v amerikanskom mediaprostranstve [Political and social image of Russia in the American media space], Zhurnalistskiy yezhegodnik [Journalistic Year-Book]. (1) (2012) 93–96.

4. **Pontryagin L.S.,** Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya [Ordinary differential equations], Nauka, Moscow,1974.

5. **Erugin N.P.,** Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsialnykh uravneniy [The book for reading on the general course of differential equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1972.

6. **Cesari L.,** Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Inbunden Engelska, 1971.

7. **Ladas G.E., Lakshmikantham V.,** Differential equations in abstract spaces, Academic Press, New York, 1972.

8. **Chetayev N.G.,** Ustoychivost dvizheniya [Motion stability], Nauka, Moscow,1965.

9. **Bautin N.N., Leontovich E.A.,** Metody i priyemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Metods and technique of qualitative study of dynamical systems on the plane], Nauka, Moscow, 1990.

10. **Chang H.-D., Hirsch M.W., Wu F.F.,** Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems, IEEE Trans. Automat. Contrl. 33 (1) (1988) 16 –27.

11. **Barbashin E.A., Tabuyeva V.A.,** Dinamicheskiye sistemy s tsilindricheskim fazovym prostranstvom [Dynamical systems with cylindrical phase space]. M.: Nauka, Moscow, 1969.

12. **Fedoryuk M.V.,** Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya [Ordinary differential equations], Nauka, Moscow, 1985.

13. **Rouche N., Habets P., Laloy N.,** Stability theory by Liapunov's direct method, Springer-Verlag 1977.

14. **Sukhodolov A.P., Rachkov M.P.,** To create a theory of the media: statement of the problem, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 5 (1) (2016) 6–13.

15. **Bayenkhayeva A.V., Timofeev S.V.,** The evolutionary approach to development of mass media: construction of a mathematical model, Izvestiya Baykalskogo Gosudarstvennogo Universiteta [News of Baikal State University]. 26 (5) (2016) 825–833.

16. **Sukhodolov A.P., Kuznetsova I.A., Timofeev S.V.,** The analysis of approaches in modelling of mass media, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 6 (3) (2017) 287–305.

17. **Sukhodolov A.P., Timofeev S.V.,** Mass media and virtual reality: new opportunities and prospects, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 7 (4) (2018) 567–580.

18. **Sukhodolov A.P., Anokhov I.V., Marenko V.A.**, Information impulse-wave interaction between the media and society, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 8 (1) (2019) 5–19.

Received 14.06.2019, accepted 22.07.2019.

THE AUTHORS

TIMOFEEV Sergey V.
Baikal State University
11, Lenin St., Irkutsk, 664003, Russian Federation
timofeevsv12@gmail.com

SUKHODOLOV Alexander P.
Baikal State University
11, Lenin St, Irkutsk, 664003, Russian Federation
science@bgu.ru