

DOI: 10.18721/JPM.13103  
УДК 519.226.2-519.248

## **ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ И ИСПОЛЬЗОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОСТИЧЕСКОГО ТИПА**

**Ю.А. Пичугин**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического  
приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе рассмотрены два направления развития динамико-стохастического подхода к построению и использованию прогностических моделей. Первое связано с неопределенностью начального состояния моделируемого процесса, а второе – со стохастической природой оценок параметров модели. В первом случае рассмотрены методы вычисления быстрорастущих возмущений начального состояния моделей атмосферной динамики и метод их использования в оптимизации систем наблюдения на основе информационного упорядочивания. Приведен пример определения зон динамической неустойчивости Северного полушария. Во втором случае предложен математический аппарат генерации возмущений параметров модели в соответствии с их вероятностным распределением. На основе данных экономических индексов СССР приведен численный пример возмущения оценок параметров и интегрирования модели Вольтерры.

**Ключевые слова:** динамическая модель, быстрорастущее возмущение, распределение оценок параметров, ансамбль прогнозов, экономический индекс

**Ссылка при цитировании:** Пичугин Ю.А. Динамико-стохастический подход к построению и использованию моделей прогностического типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 26–41. DOI: 10.18721/JPM.13103

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## **A DYNAMIC-STOCHASTIC APPROACH TO THE CONSTRUCTION AND USE OF PREDICTIVE MODELS**

**Yu.A. Pichugin**

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,  
St. Petersburg, Russian Federation

The paper considers two directions of development of the dynamic-stochastic approach to the construction and use of predictive models. The first direction is related to the uncertainty of the initial state of the simulated process, and the second – to the stochastic nature of model parameter estimates. In the first case, we consider methods for calculating fast-growing perturbations (FGPs) of the initial state of atmospheric dynamics models and a method for using FGPs in optimizing observation systems based on information ordering. An example of determining the zones of dynamic instability of the Northern hemisphere is given. In the second case, a mathematical apparatus for generating perturbations of model parameters in accordance with their probability distribution is proposed. Based on the data of the USSR economic indices, a numerical example of perturbation of parameter estimates and integration of the Volterra model is given.

**Keywords:** dynamic model, fast-growing perturbation, distribution of parameter estimates, ensemble of forecasts, economic index

**Citation:** Pichugin Yu.A., A dynamic-stochastic approach to the construction and use of predictive models, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 26–41. DOI: 10.18721/JPM.13103

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Первоначально динамико-стохастический подход к прогнозированию интенсивно развивался в метеорологии и был связан с неопределенностью начальных состояний прогностических моделей. Однако к настоящему времени вполне сформировалась тенденция (идея) распространения этого подхода на математическое моделирование в целом, так как параметры моделей в случае, когда они оценены методом наименьших квадратов (OLS—Ordinary Least Squares), имеют стохастическую природу.

Цели настоящей работы — во-первых, предложить использование быстрорастущих возмущений начального состояния динамической модели для решения задачи оптимизации мониторинга любого контролируемого многомерного процесса на основе информационного упорядочивания; во-вторых, разработать универсальный метод учета стохастической природы OLS-оценок параметров модели для построения системы прогнозирования, позволяющей отслеживать динамику вероятностного распределения величин, описываемых моделью.

В связи с указанными целями в настоящей работе решаются следующие задачи:

описать основные методы вычисления быстрорастущих возмущений (FGPs – fast-growing perturbations) начального состояния динамической модели и продемонстрировать их применение к выбранной оптимизации;

описать математический аппарат генерирования возмущений в соответствии с вероятностным распределением их OLS-оценок и проиллюстрировать это на численном примере через построение ансамбля интегрированных модели.

При рассмотрении первой задачи, связанной, главным образом, с метеорологией, мы намеренно будем избегать описания некоторых деталей метеорологического прогнозирования, чтобы не перегружать далекого от метеорологии читателя несущественными моментами. Например, рассматривая ошибки измерения начального

состояния, мы не будем упоминать объективного анализа — интерполяции на регулярную географическую сетку данных измерений на метеостанциях. В то же время, мы будем делать акцент на деталях математического аппарата, что, с одной стороны, не обнаруживается в достаточной мере в метеорологических статьях, а с другой стороны позволит перенести эти математические приемы и методы в прогнозирование иных многомерных процессов.

### Неопределенность начального состояния, быстрорастущие возмущения и оптимизация систем наблюдения

Началом развития динамико-стохастического подхода в построении и реализации прогностических моделей, согласно наиболее известным публикациям, по-видимому, следует считать работу Э.С. Эпштейна [1]. Согласно Эпштейну, стохастическая природа начального состояния динамической прогностической модели, которая естественным образом возникает из-за случайных погрешностей измерений, должна отражаться на результате интегрирования модели.

Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — вектор величин, которыми оперирует динамическая модель, где  $t$  — время, т.е.  $\mathbf{x}(t)$  — вектор, с помощью которого описывается некоторый моделируемый многомерный процесс. В чисто динамическом подходе мы в результате интегрирования переходим от некоторого состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  к состоянию  $\mathbf{x}(t)$ , где  $t = t_0 + \Delta t$ , а  $\Delta t$  — величина временного интервала интегрирования модели. На практике вместо истинного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  мы всегда имеем возмущенное начальное состояние

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) + \Delta \mathbf{x}(t_0),$$

где возмущение  $\Delta \mathbf{x}(t_0)$  возникает в результате погрешностей измерения начального состояния.

Эпштейн предложил моделировать разброс возмущений начального состояния  $\Delta \mathbf{x}(t_0)$ , который бы соответствовал если не многомерному вероятностному распределению, то хотя бы масштабу погрешностей

измерений. Таким образом, при наличии некоторого ансамбля сгенерированных возмущений  $\{\Delta \mathbf{x}(t_0)_i\}_{i=1}^n$  мы имеем также и ансамбль начальных состояний

$$\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0)_i = \mathbf{x}(t_0) + \Delta \mathbf{x}(t_0)_i\}_{i=1}^n.$$

(см. замечание ниже).

Интегрируя динамическую модель от каждого члена этого ансамбля начальных состояний, мы получаем новый ансамбль

$$\{\mathbf{x}(t)_i\}_{i=1}^n$$

– выборку результатов интегрирования объема  $n$ . Такая выборка дает возможность оценивать вероятности тех или иных состояний моделируемого процесса  $\mathbf{x}(t)$ , если предварительно оценить параметры распределения (предположительно нормального).

Внедрение идей Эпштейна в практику метеорологических прогнозов сначала базировалось на использовании метода Монте-Карло как метода генерации возмущений начального состояния [2]. Однако очень скоро, с внедрением ансамблевых прогнозов, возникла идея использовать быстрорастущие возмущения FGPs. Здесь имеются в виду возмущения, которые при сохранении масштаба погрешностей измерения начального состояния имели бы такую (пространственную) конфигурацию, которая приводила бы к наибольшим отклонениям прогноза от результата, полученного интегрированием от измеренного начального состояния. Использование FGPs позволяет получать наибольший разброс ансамбля прогнозов и тем самым в большей мере учитывать степень неопределенности, возникающую вследствие погрешности измерений начального состояния. Эту идею можно реализовать различными методами.

Пусть  $\mathbf{A}$  есть вещественная матрица оператора модели, линеаризованного в некотором начальном состоянии. Из геометрической интерпретации линейных операторов известно, что в качестве наиболее быстро растущих векторов (возмущений) следует брать собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  ( $T$  – оператор транспонирования), соответствующие наибольшим собственным числам этой матрицы. Эти собственные векторы и квадратные корни из собственных

чисел матрицы  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  известны как сингулярные векторы и сингулярные числа (соответственно) матрицы  $\mathbf{A}$ . Трудность реализации этой идеи в метеорологии состояла в необходимости снижения размерности модели (размерности матрицы  $\mathbf{A}$ ) из-за ограниченных возможностей компьютеров, по крайней мере, на момент внедрения этой идеи в метеорологию. Снижение размерности естественно приводит к сглаживанию исходных данных, т.е. к неизбежной потере информации, что в конечном итоге снижает и эффективность этой идеи [3].

Сравнительно более легким в реализации оказался метод, основанный на вычислении собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующих наибольшему по модулю собственным числам. Некоторая незначительная потеря состоит здесь в том, что наибольший модуль собственного числа матрицы  $\mathbf{A}$  не превосходит наибольшего сингулярного числа (см. выше) этой матрицы. Геометрическая суть этого вопроса состоит в том, что сингулярные числа можно интерпретировать длинами полуосей  $N$ -мерного эллипсоида, в котором  $N$ -мерная сфера единичного радиуса с центром в нуле векторного пространства отображается линейным оператором с матрицей  $\mathbf{A}$  ( $N$  – размерность пространства). Таким образом, сингулярные числа – это коэффициенты растяжения (сжатия) по взаимно ортогональным направлениям сингулярных векторов, которые, в отличие от собственных векторов, в общем случае не сохраняют своего направления, претерпевая некоторый поворот в пространстве. Модули собственных значений равны величинам некоторых отрезков, соединяющих этот эллипсоид со своим центром.

Если матрица  $\mathbf{A}$  является симметричной, что имеет место в случае самосопряженного оператора, то собственные числа и векторы совпадают с сингулярными числами и векторами. Следовательно, возмущения, пропорциональные сингулярным векторам, которые соответствуют наибольшим сингулярным числам, в принципе, могут расти быстрее, чем возмущения, пропорциональные собственным векторам. Поэтому, когда размерность модели такова, что линеаризацию оператора можно произвести без снижения размерности, а сам линеаризованный оператор не является самосопряженным, использование сингулярных векторов предпочтительнее.

В метеорологии большую популярность приобрел второй подход к вычислению FGPs, пропорциональных собственным векторам матрицы линеаризованного оператора гидродинамической модели. Эта популярность основана на относительной простоте численной реализации, известной как метод выращивания (breeding method [4]). По своей сути этот метод подобен методу прямых итераций с той лишь разницей, что умножение  $A\Delta\mathbf{x}(t_0)$ , на котором основан этот хорошо известный метод, заменено интегрированием модели на некоторое относительно короткое время  $\Delta t_b$  (в метеорологии  $\Delta t_b = 12$  или  $24$  ч, не более), позволяющее считать определенный таким образом оператор линейным. Действие оператора на возмущение  $\Delta\mathbf{x}_k(t_0)$  в итерационном процессе метода выращивания обычно определяется как разность

$$\Delta\mathbf{y}_{k+1}(t_0) = A(\mathbf{x}(t_0) + \Delta\mathbf{x}_k(t_0), \Delta t_b) - A(\mathbf{x}(t_0), \Delta t_b) \quad (1)$$

с последующим нормированием

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1}(t_0) = \delta \|\Delta\mathbf{y}_{k+1}(t_0)\|_e^{-1} \Delta\mathbf{y}_{k+1}(t_0), \quad (2)$$

где  $A(\mathbf{x}(t_0), \Delta t)$  есть результат интегрирования модели на время  $\Delta t$  от начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$ ;  $\|\cdot\|_e$  – энергетическая норма;

$\delta$  – стандарт нормы возмущения (см. ниже);  $k$  – номер итерации.

Начальное возмущение  $\Delta\mathbf{x}_0(t_0)$  (при  $k = 0$ ) выбирается произвольно, но с соблюдением масштаба (принятой нормы).

В методе выращивания важную роль играет скалярное произведение. В метеорологии принято использовать энергетическое скалярное произведение.

Пусть суммарная энергия процесса в момент времени  $t$  выражается квадратичной формой от компонент вектора  $\mathbf{x}(t)$ :

$$E(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^N \mu_i x_i^2(t),$$

где  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N = \dim\mathbf{x}$ ) – константы модели.

Тогда энергетическое скалярное произведение двух возмущений  $\Delta\mathbf{x}'(t)$  и  $\Delta\mathbf{x}''(t)$  выражается как [5]

$$\langle \Delta\mathbf{x}'(t), \Delta\mathbf{x}''(t) \rangle_e = \sum_{i=1}^N \mu_i \Delta x_i'(t) \Delta x_i''(t).$$

Величина энергетической нормы возмущения равна

$$\|\Delta\mathbf{x}(t)\|_e = E^{1/2}(\Delta\mathbf{x}(t)),$$

а величина стандарта нормы возмущения  $\delta$  (см. формулу (2)) определяется как  $\delta = \|\delta\mathbf{x}\|_e$ , где компонентами вектора  $\delta\mathbf{x}$  выступают стандарты погрешностей измерений начального состояния.

Отношения Рэлея, которые представляют собой приближения собственных значений и, в сущности, коэффициенты роста возмущений, вычисляются с использованием энергетического скалярного произведения

$$l_{k+1} = \frac{\langle \Delta\mathbf{y}_{k+1}(t_0), \Delta\mathbf{x}_k(t_0) \rangle_e}{\langle \Delta\mathbf{x}_k(t_0), \Delta\mathbf{x}_k(t_0) \rangle_e}.$$

Когда методом прямых итераций вычисляются собственные векторы и собственные значения симметричной вещественной матрицы, после вычисления первого вектора (он будет соответствовать максимальному собственному числу) необходимо производить ортогонализацию Грама – Шмидта при вычислении последующих векторов, для того чтобы исключить конфигурации (направления) уже вычисленных собственных векторов. В случае симметричной матрицы, ортогонализацию достаточно осуществлять при формировании каждого следующего начального приближения.

В методе выращивания ортогонализацию необходимо выполнять и в каждой итерации между действиями формул (1) и (2). Полученные таким образом последующие векторы можно интерпретировать как собственные векторы не исходного линеаризованного оператора, а его некоторого самосопряженного приближения, что естественным образом приводит к дополнительному ограничению количества растущих векторов возмущений. В качестве критерия остановки «выращивания» возмущений принимается прекращение роста отношения Рэлея  $l_k$ .

**Замечание.** Математическое моделирование в целом, как и большая часть физико-математических и естественных наук, которая имеет дело с реальными природными процессами и явлениями, при построе-



нии моделей не обходится без каких-либо допущений, когда приходится пренебрегать явными несоответствиями модели своему объекту. Для того чтобы моделируемое распределение возмущений было хотя бы симметричным, каждое из возмущений добавляется к начальному состоянию дважды с разными знаками. Однако эта цель в полной мере не достигается, поскольку мы никогда не имеем невозмущенного начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$ , так как моделируемые возмущения прибавляются к результату измерений, который уже содержит ошибки  $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$  (возмущения, см. выше). К этому следует добавить и то, что интегрирование модели на относительно длительные сроки (бóльшие, чем при выращивании возмущений), в принципе, не является линейным оператором, действующим на возмущение. Следовательно, смоделировав ансамбль нормально распределенных возмущений («статистически оправданных возмущений» [6]), мы не обязательно получим ансамбль нормально распределенных прогнозов.

Этими моментами метеорология вынуждена пренебрегать, что вполне компенсируется хотя бы тем фактом, что результативность прогнозов, полученных осреднением прогнозов по ансамблю возмущенных начальных состояний, как показала практика, заметно превосходит результативность прогнозов от исходного начального состояния. С другой стороны, как отмечалось выше, полученный таким образом ансамбль прогнозов позволяет оценить параметры распределения, т.е. построить вероятностное распределение и вероятностный прогноз. Динамико-стохастический подход к прогнозированию, реализуемый таким образом, уже в конце прошлого столетия прочно вошел в общемировую практику метеорологического прогнозирования и, в частности, практику Гидрометцентра России.

Как нетрудно было заметить, быстрорастущие возмущения (FGPs), вычисленные тем или иным методом, определяются начальным состоянием, так как от начального состояния зависит результат линеаризации оператора модели (см. выше), но и существенно зависят от качества использованной модели.

Пусть имеется выборка начальных состояний  $\{\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^n$ , полученных как результаты измерений в моменты времени  $\{t_i\}_{i=1}^n$ , и эти моменты охватывают достаточно большой период времени. По этой выборке

начальных состояний можно вычислить выборку FGPs  $\{\Delta\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^n$  с наибольшим

коэффициентом роста на промежутке выращивания или, если размерность позволяет, соответствующие наибольшему сингулярному числу (см. выше). Далее, построив по выборке возмущений базис главных компонент и регрессию возмущений на этот базис (см. работу [7]), мы можем упорядочить компоненты вектора  $\Delta\mathbf{x}(t)$  (т.е. исходного вектора  $\mathbf{x}(t)$ ) по убыванию количества информации (см. работу [8]) относительно главных компонент, интерпретируемых как скрытые факторы. В метеорологии, если в качестве  $\Delta\mathbf{x}(t)$  рассматривать возмущения только одного конкретного метеорологического поля, например геопотенциала  $H_{500}$  (высота изобарической поверхности – 500 мбар), приземного давления или приземной температуры, то каждая компонента вектора  $\Delta\mathbf{x}(t)$  соответствует некоторой конкретной точке географической сетки. Таким образом можно выявить географические зоны, где ошибки метеорологических измерений могут приводить к существенным ошибкам прогнозирования. Другими словами, зоны наибольшей информативности, по сути, являются зонами динамической неустойчивости. Эта идея была реализована в работе [9] с использованием полусферной модели циркуляции атмосферы по выборке начальных состояний объемом  $n = 216$  и охватывающей временной интервал в три года (1999 – 2001). При этом в алгоритме вычисления FGPs применялась формула

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{y}_{k+1}(t_0) &= \\ &= A(\mathbf{x}(t_0) + \Delta\mathbf{x}_k(t_0), \Delta t_b) - \mathbf{x}(t_0). \end{aligned} \quad (1a)$$

Мотивация применения формулы (1a) состоит в том, что нас интересует максимально быстрый уход не от результата интегрирования на короткое время  $\Delta t_b$ , а от начального состояния. К этому следует добавить, что применение формулы (1a) ускоряет процесс вычисления быстрорастущих возмущений (FGPs), а использование полученных таким образом FGPs существенно улучшило результаты ансамблевых прогнозов. Информационное упорядочивание в работе [9] производилось по возмущениям поля  $H_{500}$  как наиболее важного компонента динамики атмосферы. Работа [9] является иллюстрацией к вышед-

шей существенно позже работе [8]. На рис. 1 приводится итоговый результат работы [9]. Отмеченные на карте наиболее информативные зоны соответствуют известным географическим особенностям (Гольфстрим, Алеутские острова), оказывающим, по общему мнению метеорологов, существенное влияние на атмосферные процессы, что, в свою очередь, говорит об объективности метода и качестве использованной модели.

Очевидно, методика, предложенная в работе [9], может быть использована для оптимизации любых систем пространственного мониторинга при наличии выборки наблюдений и математической модели контролируемого процесса. Актуальность этой методики (перехода от наблюдений к FGPs) в информационном упорядочивании определяется необходимостью решать задачу прогноза, когда системы наблюдения действительно нуждаются в оптимизации, помимо задачи контроля.

#### Стохастическая природа оценок параметров модели и генерация возмущений, соответствующих их вероятностному распределению

При построении математических моделей каких-либо процессов, не обязательно природных, возникает задача оценки параметров, которые, с одной стороны, не являются известными физическими или иными константами, а с другой стороны, при их линейном вхождении в модель, оцениваются OLS-методом по исходным данным. Некоторым продвижением в развитии динамико-стохастического подхода в математическом моделировании была постановка вопроса проверки статистической гипотезы о принадлежности истинных значений параметров модели такой области, когда интегрирование модели устойчиво (или неустойчиво) по Ляпунову [10]. Решение этого вопроса, представленное в той же работе

[10], в дальнейшем получило существенное уточнение и теоретическое обоснование в работе [11].

Однако на проблему динамической устойчивости модели можно смотреть и с другой стороны. Вместо того, чтобы проверять статистическую гипотезу, отвечающую на вопрос, будет ли решение устойчиво или нет при истинных значениях параметров, можно исследовать степень возможной неустойчивости, моделируя разброс оценок параметров в соответствии с полученным распределением. Таким образом, следующим этапом развития динамико-стохастического подхода к построению и использованию моделей прогностического типа, по всей видимости, должно быть моделирование распределения OLS-оценок параметров модели, что позволяет учесть неопределенность, возникающую вследствие стохастической природы этих оценок. Рассмотрим основные технические моменты реализации этой идеи.

Следуя работе [11], будем предполагать, что параметры модели оцениваются как параметры системы регрессионных уравнений:

$$y_l = \theta_{0l} + \theta_{1l}x_1 + \theta_{2l}x_2 + \dots + \theta_{kl}x_k + \varepsilon_l, \quad (3)$$

$$l = 1, 2, \dots, m,$$

где каждое уравнение содержит одинаковый набор регрессоров  $\{x_j\}_{j=1}^k$  и соответствует какому-либо дифференциальному уравнению исходной модели, в которое подлежащие оценке параметры входят линейно.

При этом под левыми частями уравнений системы (3) подразумеваются любые выражения, а под переменными правых частей системы (регрессорами, см. выше) также подразумеваются любые выражения, но имеющие в качестве множителей пара-

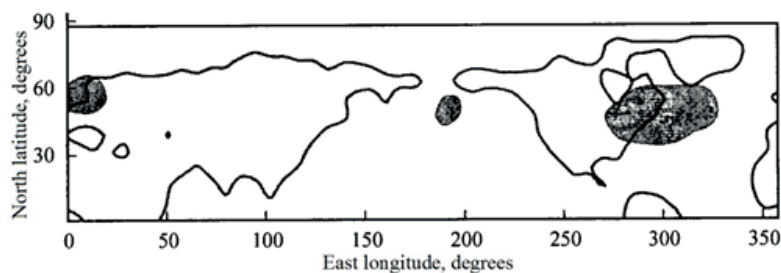


Рис. 1. Зоны Северного полушария, связанные с динамической неустойчивостью

метры, подлежащие оценке. Ниже это будет проиллюстрировано конкретным примером.

Будем предполагать, что имеется выборка всех значений переменных объемом  $n$ . Вычислив средние значения по каждой из переменных величин

$$\bar{y}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{il}, \quad l = 1, 2, \dots, m;$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

перейдем к центрированным переменным

$$y_{il} := y_{il} - \bar{y}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m;$$

$$x_{ij} := x_{ij} - \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

что позволит избавиться в системе (3) от параметров  $\theta_{0l}$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ )

$$y_l = \theta_{1l}x_1 + \theta_{2l}x_2 + \dots + \theta_{kl}x_k + \varepsilon_l, \quad (3a)$$

$$l = 1, 2, \dots, m.$$

Полученными таким образом центрированными переменными заполним матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{X}$  размерностей  $n \times m$  и  $n \times k$ , соответственно. В матричном виде система (3a) может быть записана в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Theta} + \mathbf{E}, \quad (4)$$

где каждый  $l$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{\Theta}$  есть вектор  $\boldsymbol{\theta}_l$ , параметров  $l$ -го уравнения центрированной системы (3a); элемент  $\varepsilon_{il}$  ( $n \times m$ )-матрицы  $\mathbf{E}$  есть погрешность  $l$ -го уравнения при подстановке  $i$ -х центрированных значений выборки, а OLS-оценка матрицы параметров следует выражению

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_m) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (5)$$

Матрицы  $\mathbf{\Theta}$  и  $\hat{\mathbf{\Theta}}$  имеют размерность  $k \times m$ . Из столбцов этих матриц сконструируем составные векторы

$$\boldsymbol{\theta}^T = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_m^T),$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^T, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_m^T).$$

Согласно теории OLS, если предполагается, что каждый столбец матрицы  $\mathbf{E}$  подчиняется многомерному нормальному рас-

пределению, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l \sim N(\mathbf{0}, \sigma_l^2 \mathbf{I}),$$

где  $\mathbf{0}$  – нулевой вектор,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, то каждый столбец матрицы  $\mathbf{\Theta}$  подчиняется распределению

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_l \sim N(\boldsymbol{\theta}_l, \sigma_l^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}).$$

Несмещенная оценка  $\sigma_l^2$  выражается как

$$\hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{n-k-1} (\mathbf{Y}_l - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}_l)^T (\mathbf{Y}_l - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}_l), \quad (6)$$

где  $\mathbf{Y}_l$  –  $l$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{Y}$ .

Из этого следует, что составной вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  также подчиняется многомерному нормальному распределению  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}})$ . Поэтому рассмотрим подробно задачу построения матрицы  $\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ .

Пусть ортогональная матрица  $\mathbf{R}$  размерности  $m \times m$  приводит к диагональному виду матрицу  $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ , т. е. матрица  $\mathbf{R}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{R}$  имеет диагональную структуру. Вычислим матрицу

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \mathbf{R},$$

для которой запишем систему регрессионных уравнений в матричном виде, аналогично представлению (4):

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \boldsymbol{\Xi} + \boldsymbol{\Delta}. \quad (7)$$

Далее вычислим несмещенные оценки, аналогичные оценкам (5) и (6) ( $\boldsymbol{\Delta}$  – матрица остатков), т. е.

$$\hat{\boldsymbol{\Xi}} = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_m) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Z} \quad (8)$$

и

$$\hat{\delta}_l^2 = \frac{1}{n-k-1} (\mathbf{Z}_l - \mathbf{X}\hat{\xi}_l)^T (\mathbf{Z}_l - \mathbf{X}\hat{\xi}_l), \quad (9)$$

где  $\mathbf{Z}_l$  означает  $l$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{Z}$ , а  $\hat{\xi}_l$  –  $l$ -ый столбец матрицы  $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ .

При этом каждый столбец  $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$  подчиняется многомерному нормальному распределению

$$\hat{\xi}_l \sim N(\xi_l, \delta_l^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}),$$

а составной вектор (аналогичный вектору  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ )

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} \sim N(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}).$$

Матрица  $\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\xi}}}$  имеет размерность  $(mk) \times (mk)$  и блочно-диагональную структуру в силу некоррелированности столбцов  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{V}_{\xi} = \begin{pmatrix} \delta_1^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_2^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \delta_m^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда, следуя работе [11], имеем:

$$\mathbf{V}_{\theta} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)} \mathbf{V}_{\xi} (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)})^T, \quad (10)$$

где  $\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)}$  – кронекеровское произведение  $\mathbf{R}$  (см. выше) на единичную матрицу размерности  $k \times k$ .

Формула (10) естественным образом следует из формул для оценок составных векторов:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)} \hat{\xi}, \\ \hat{\xi} &= (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)})^T \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из остатков регрессий (3а) можно составить вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)^T,$$

который подчиняется многомерному нормальному распределению  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_{\varepsilon})$ , а также аналогичный вектор  $\boldsymbol{\delta} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_{\delta})$ .

Реализациями вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  являются строки матрицы  $\mathbf{E}$ , а вектора  $\boldsymbol{\delta}$  – строки матрицы  $\mathbf{\Lambda}$  (см. формулы (4) и (7)). Для указанных векторов и их ковариационных матриц выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{V}_{\delta} = \mathbf{R}^T \mathbf{V}_{\varepsilon} \mathbf{R}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{R} \boldsymbol{\delta}, \quad \mathbf{V}_{\varepsilon} = \mathbf{R} \mathbf{V}_{\delta} \mathbf{R}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Из групп формул (11) и (12) следует, что в принципе достаточно вычислить оценки (5) и (6), а оценки (8) и (9) получить, пользуясь этими группами формул, или наоборот, вычислить только оценки (8) и (9), а (5) и (6) получить на основе (11) и (12).

В центрированном варианте модели (3а) с вычисленными OLS-оценками параметров для каждого  $l$ -го уравнения ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) введем обозначения

$$\hat{y}_{il} = \hat{\theta}_{1l} x_{i1} + \hat{\theta}_{2l} x_{i2} + \dots + \hat{\theta}_{kl} x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

и вычислим коэффициенты детерминации (квадраты коэффициентов множественной

корреляции):

$$R_l^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{y}_{il}^2}{\sum_{i=1}^n y_{il}^2}. \quad (13)$$

Проверку гипотезы

$$H_l: \theta_{1l} = \theta_{2l} = \dots = \theta_{kl} = 0$$

можно осуществить посредством статистики [12]:

$$\gamma_l = \frac{R_l^2 (n - k - 1)}{(1 - R_l^2) k}, \quad (14)$$

которая, при верной гипотезе  $H_l$  подчиняется  $F$ -распределению, т.е.  $\gamma_l \sim F_{n-k-1, k}$ .

Отвергая гипотезу  $H_l$ , мы утверждаем право на включение в систему (3а), а следовательно, и в исходную систему (3),  $l$ -го уравнения ( $l = 1, 2, \dots, m$ ). Следует отметить, что переход к матричной записи (4) системы (3) вовсе не требует центрирования переменных. Если бы мы не прибегали к центрированию, матрица  $\mathbf{X}$  имела бы дополнительный столбец, стоящий слева на первом месте и заполненный единицами, а матрица  $\Theta$  имела бы дополнительную строку, стоящую сверху на первом месте и заполненную параметрами  $\theta_{0l}$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ).

Однако построение матрицы  $\mathbf{V}_{\theta}$  в общем случае невозможно без регрессии (7) и оценки (8), что требует неперемного перехода к центрированным переменным.

Из структуры  $\mathbf{V}_{\theta}$  следует, что ортогональная матрица  $\mathbf{Q}$ , приводящая  $\mathbf{V}_{\theta}$  к диагональному виду, имеет следующий вид [11]:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_{(k)}) (\mathbf{I}_{(m)} \otimes \mathbf{W}) = \mathbf{R} \otimes \mathbf{W}, \quad (15)$$

где ортогональная матрица  $\mathbf{W}$  размерности  $k \times k$  приводит к диагональному виду матрицу  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ .

Следовательно, имеет место равенство

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{V}_{\theta} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda},$$

где  $\mathbf{\Lambda}$  – диагональная матрица.

Предположим, что матрица  $\mathbf{P}$  размерности  $h \times s$ , где  $h = mk$  (см. выше), содержит линейно независимые центрированные строки, удовлетворяющие тесту на нормальное распределение. Если  $\mathbf{P}$  является матрицей полного ранга, т.е. при  $s > h$   $\text{rank} \mathbf{P} = h$ ,



то переход к независимым (некоррелированным) строкам матрицы не приведет к снижению размерности. Поэтому после соответствующих преобразований и нормирования можно считать столбцы этой матрицы  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) реализациями многомерного нормального распределения  $\mathbf{P}_i \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Ансамбль возмущений параметров  $\{\Delta\theta_i\}_{i=1}^s$  получаем по формуле

$$\Delta\theta_i = \mathbf{Q}\Lambda^{1/2}\mathbf{P}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (16)$$

так как матрица  $\mathbf{Q}\Lambda^{1/2}$  переводит распределение  $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  в распределение  $N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_{\hat{\theta}})$ . При этом матрица  $\Lambda^{1/2}$  задает масштаб возмущений, а матрица  $\mathbf{Q}$  – взаимозависимость, соответствующую их распределению.

Возвращаясь к нецентрированной исходной системе уравнений (3) (к нецентрированным переменным), мы должны вычислить оценки параметров  $\theta_{0l}$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ), играющих роль свободных членов. Напомним, что OLS-оценки невозмущенных свободных членов системы (3) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{0l} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{il} - \hat{\theta}_{1l}x_{i1} + \hat{\theta}_{2l}x_{i2} + \dots + \hat{\theta}_{kl}x_{ik}) = \\ &= \bar{y}_l - \sum_{j=1}^k \hat{\theta}_{jl}\bar{x}_j, \quad l = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (17)$$

которые можно использовать в качестве формул вычисления во всех случаях, включая случаи возмущенных параметров.

Действительно, пусть вычислены возмущенные значения параметров

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{jl}^i &= \hat{\theta}_{jl} + \Delta\theta_{jl}^i, \quad l = 1, 2, \dots, m, \\ j &= 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формулы (17) видно, что свободные члены уравнений системы (3) вычисляются как средние арифметические. Из этого факта следует утверждение.

**Утверждение.** При любом фиксированном наборе возмущенных параметров (см. формулу (18)) подстановка этих значений в формулу (17) дает OLS-оценку свободных членов системы уравнений (3), т.е. OLS-оценка свободных членов равна

$$\hat{\theta}_{0l}^i = \bar{y}_l - \sum_{j=1}^k \tilde{\theta}_{jl}^i \bar{x}_j, \quad (19)$$

$$l = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Непрерывное следование формуле (19) при вычислении свободных членов модели опирается на предположение, что возмущения, вносимые в оценки параметров, которые являются коэффициентами при переменных, в достаточной мере реализуют стохастическую природу модели.

Как и в замечании к разделу «Неопределенность начального состояния, быстрорастущие возмущения и оптимизация систем наблюдения», здесь следует отметить, что в итоге мы моделируем не распределение  $N(\theta, \mathbf{V}_{\hat{\theta}})$ , а распределение  $N(\hat{\theta}, \mathbf{V}_{\hat{\theta}})$  так как истинное значение вектора параметров  $\theta$  остается неизвестным, а прибавив к распределению  $N(\theta, \mathbf{V}_{\hat{\theta}})$  значение оценки  $\hat{\theta}$  (см. формулу (18)), мы получаем распределение  $N(\hat{\theta}, \mathbf{V}_{\hat{\theta}})$ . Поэтому употребляемый ниже термин *невозмущенные параметры* не вполне корректен.

Проинтегрировав исходную модель, параметры которой оценивались посредством регрессионной модели (3) как при невозмущенных, так и при возмущенных параметрах, мы получаем временную последовательность выборок элементов модели. Вычисляя оценки параметров распределений отдельных элементов или групп элементов модели, мы учитываем неопределенность, связанную с оценкой параметров модели, и получаем возможность оценивать вероятности тех или иных состояний исследуемого процесса и проверять те или иные статистические гипотезы.

**Замечание.** В реализации динамико-стохастического подхода к построению и использованию моделей прогностического типа имеют место две существенные проблемы.

Первая связана с необходимостью моделировать выборки, принадлежащие многомерному нормальному распределению  $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Здесь размерность равна количеству оцениваемых параметров. Эта задача требует немалых усилий, но, в принципе, решаема.

Вторая проблема связана с ситуацией, когда в уравнениях системы (3) группы переменных правых частей различны или совпадают лишь частично, и мы не можем использовать формулы (4) и (5), оценивая параметры каждого уравнения отдельно. Эта проблема разрешается естественным образом, когда система (3) состоит из одного уравнения или когда левые части системы (3) независимы. В последнем случае

Таблица 1

$\mathbf{R} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{V}_{\theta} = \mathbf{V}_{\xi}$ , т. е. матрица взаимных ковариаций оценок параметров имеет блочно-диагональную структуру, где все блоки различны и каждый блок соответствует одному из уравнений системы (3). При этом матрица  $\mathbf{Q}$  также имеет блочно-диагональную структуру (см. формулу(15)):

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{W}_m \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где все ортогональные блоки  $\mathbf{W}_l (l = 1, 2, \dots, m)$  различны.

В противном случае (при  $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ ) равенство  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  становится еще одним вынужденным допущением.

И наконец, отметим, что на рассмотренный в вышеприведенном замечании случай различных правых частей уравнений системы (3) при условии  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , очевидно, также в полной мере распространяется теорема, отвечающая на вопрос принадлежности истинных значений параметров некоторой области, сформулированная и доказанная в работе [11].

### Численный пример

В качестве примера рассмотрим построение (оценку параметров) и интегрирование при возмущенных значениях параметров модели Вольтерры (см. работу [10]), а в качестве исходных данных для построения модели возьмем таблицу значений индексов выпуска, фондов и труда в СССР за период 1958 – 1990 гг. ( $n = 33$ ), использованную и в работе [11], где все значения даны в процентах от значений на 1970 г. (табл. 1).

При этом мы будем считать, что индекс выпуска продукции достаточно точно определяется известной формулой производственной функции

$$Y = aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}, \quad (21)$$

где параметры  $a$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  успешно определены по данным табл. 1 в работе [11], а модель Вольтерры описывает взаимную динамику капиталовложений и людских ресурсов, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}}{K} &= \beta_{01} + \beta_{11}K + \beta_{21}L, \\ \frac{\dot{L}}{L} &= \beta_{02} + \beta_{12}K + \beta_{22}L. \end{aligned} \quad (22)$$

Индексы выпуска, фондов и труда (%) в СССР за период 1958 – 1990 гг. [13]

Год	Y	K	L
1958	43,20	30,83	61,97
1959	46,45	33,94	64,19
1960	50,17	38,10	68,74
1961	53,59	41,59	73,06
1962	56,63	44,97	75,72
1963	58,90	49,79	78,16
1964	64,38	54,31	81,26
1965	68,81	60,16	85,25
1966	74,39	68,11	88,36
1967	80,85	78,00	91,24
1968	87,55	86,68	94,35
1969	91,68	93,01	97,45
1970	100,00	100,00	100,00
1971	105,65	107,84	102,88
1972	109,81	116,64	105,54
1973	119,62	125,98	108,09
1974	125,98	135,32	110,64
1975	131,73	145,69	113,30
1976	139,48	156,78	115,52
1977	145,81	167,69	117,96
1978	153,32	179,45	120,40
1979	157,10	191,56	122,62
1980	164,82	203,74	124,72
1981	173,55	216,58	126,39
1982	186,64	230,20	127,72
1983	195,43	244,73	128,71
1984	203,11	259,80	129,49
1985	206,29	274,32	130,60
1986	211,03	288,73	131,37
1987	214,41	303,50	131,49
1988	223,85	318,14	129,93
1989	229,43	333,94	127,94
1990	220,26	349,49	125,17

Обозначения: Y – выпуск продукции, K – капиталовложения, L – людские ресурсы. Данные 1970 г. приняты за 100 %.

Такой выбор определен целым рядом причин. Во-первых, к рассмотренному в работе [11] вопросу о статистически корректной оценке параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  производственной функции (21) есть существенные добавления относительно оценки параметра  $a$  (см. ниже). Во-вторых, модель Вольтерры (22) представляет собой пример минимальной размерности, позволяющий проиллюстрировать предлагаемый математический аппарат. В-третьих, модель (22) обладает тем замечательным свойством, что при положительных начальных значениях результат интегрирования никогда не выйдет за пределы положительных значений (за пределы первого квадранта), что вполне соответствует природе входящих в нее переменных. В рассматриваемом примере, согласно модели (22) и данным табл. 1,  $m = k = 2$  и  $n = 33$ . Отметим, что в модели (22) обозначения параметров приняты в соответствии с работой [10] и отличаются от обозначений в моделях (3) и (3а) предыдущего раздела. Однако остальные обозначения предыдущего раздела, в частности обозначения вспомогательных матриц, мы оставляем неизменными.

Напомним, что в работе [11] после логарифмирования равенства (21) были получены следующие OLS-оценки параметров:  $\hat{\alpha}_1 = 0,631$  и  $\hat{\alpha}_2 = 0,260$ . Для выполнения принятого в экономической науке условия

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (23)$$

экономисты используют центральную проекцию на прямую (23) в плоскости значений этих параметров ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ), что дает значения  $\alpha_1^e = 0,708$  и  $\alpha_2^e = 0,292$ .

В работе [11] предложено брать на прямой (23) точку максимального правдоподобия по распределению  $N(\hat{\alpha}, V_{\hat{\alpha}})$ , где  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)^T$ , что дает значения  $\alpha_1^* = 0,585$  и  $\alpha_2^* = 0,415$ . Как показала проверка соответствующих статистических гипотез, точка (вектор  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)^T$ ) максимального правдоподобия не опровергает гипотезу  $H_*: \alpha = \alpha^*$  по любому из стандартных статистических критериев ( $\chi^2, t, F$ ), а принятая в экономике центральная проекция опровергает гипотезу  $H_e: \alpha = \alpha^e$  по всем критериям (см. работу [11]).

Однако в статье [11] не был отмечен важный момент, а именно — после внесения коррективы в оценки значений  $\alpha_1$  и

$\alpha_2$ , следует, согласно утверждению предыдущего раздела, вычислить новое значение коэффициента  $a$  формулы (19), а именно  $a = e^{\hat{\mu}}$ , где

$$\hat{\mu} = \frac{1}{33} \sum_{i=1}^{33} (\ln Y_i - \alpha_1^* \ln K_i - \alpha_2^* \ln L_i),$$

что дает следующие значения коэффициентов:

$$\hat{\mu} = 6,13 \cdot 10^{-3}, a = 1,01.$$

Они существенно отличаются от первоначальной OLS-оценки ( $\hat{\mu} = 0,50$ ,  $a = 1,65$ ).

Значения производных по времени от капиталовложений аппроксимируем по формулам

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &:= \frac{K_2 - K_1}{\Delta t}, \quad \dot{K}_{33} := \frac{K_{33} - K_{32}}{\Delta t}, \\ \dot{K}_t &:= \frac{K_{t+1} - K_{t-1}}{2\Delta t}, \quad t = 2, 3, \dots, 32. \end{aligned}$$

Эти же формулы используем для аппроксимации значений производных по времени индекса трудовых затрат  $L$  (людских ресурсов). В обоих случаях  $\Delta t = 1$  год.

После центрирования всех значений системы (22), согласно формуле (5), получаем следующие значения:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{21} & \hat{\beta}_{22} \end{pmatrix} = 10^{-4} \begin{pmatrix} -1,31 & -1,90 \\ -3,15 & 0,065 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

а оценки свободных членов системы (22), вычисленные по формуле (19), соответственно равны  $\hat{\beta}_{01} = 0,129$  и  $\hat{\beta}_{02} = 0,050$ .

Качество полученных оценок характеризуется значениями коэффициентов детерминации (13)  $R_1^2 = 0,772$  и  $R_2^2 = 0,906$ , а также значениями статистик (14)  $\gamma_1 = 50,7$  и  $\gamma_2 = 144,6$ , что в обоих случаях значительно превосходит критическое значение  $F$ -статистики при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  и равное  $F_{30,2} = 5,39$ .

На рис. 2 представлен результат интегрирования модели методом Рунге – Кутты с временным шагом  $h = 0,25$  года при невозмущенных значениях параметров системы (22).

Далее мы ограничимся лишь рассмотрением индекса выпуска  $Y$ , вычисляемого по формуле (21).

Вычисленные матрицы

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,760 & -0,650 \\ 0,650 & 0,760 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0,979 & -0,204 \\ 0,204 & 0,979 \end{pmatrix} \quad (25)$$

показывают необходимость в полной мере использовать идеологию построения возмущений параметров, рассмотренную в предыдущем разделе.

Здесь мы воздержимся от того, чтобы приводить значения остальных матриц, связанных с построением этой модели. Для реализации ансамбля возмущений в формуле (16) использована матрица (таблица чисел)  $\mathbf{P}$  размерности  $4 \times 25$ , строки которой не коррелируют между собой, удовлетворяют тесту на нормальный закон распределения, при этом дают несмещен-

ные оценки среднего значения и стандартного отклонения, равные 0 и 1, соответственно.)

На рис. 3 представлен ансамбль значений  $Y$ , полученных в результате интегрирования нашей модели. Ансамбль  $\{Y_i(t)\}_{i=0}^{25}$  включает 26 членов: 25 при возмущенных параметрах модели ( $i = 1, 2, \dots, 25$ ) и при невозмущенных оценках параметров ( $i = 0$ ).

Отметим, что среднее значение по ансамблю на 2020 год, равное  $\bar{Y}(2020) = 174,95\%$ , практически совпадает с результатом интегрирования при невозмущенных параметрах, равном  $Y_0(2020) = 173,34\%$  (относительное расхождение составляет менее одного процента).

Анализ выборки конечных значений интегрирования при возмущенных параметрах обнаружил следующее. При числе интервалов гистограммы, вычисленном по правилу

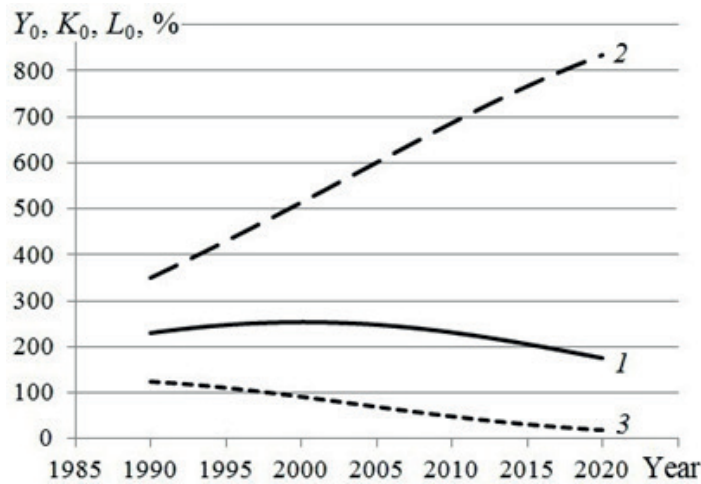


Рис. 2. Результат интегрирования модели методом Рунге – Кутты при невозмущенных параметрах (22):

1 – выпуск продукции  $Y_0$ , 2 – капиталовложения  $K_0$ , 3 – людские ресурсы  $L_0$

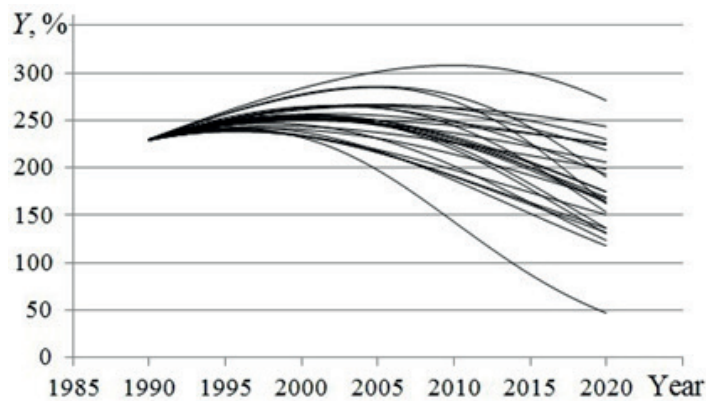


Рис. 3. Ансамбль результатов интегрирования модели (22). Он включает 26 членов (кривых)

Стёрджеса [14] и равному пяти, значение теста Пирсона  $\eta$  для проверки на нормальный закон распределения составляет  $\eta = 0,650$ . Критическое значение при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и соответствующем числе степеней свободы равно 9,49. Следовательно, у нас нет причин для отрицания нормального закона распределения. В связи с этим на рис. 4 приводим зависимость от времени параметров нормального распределения  $Y(t)$ , оцененных по ансамблю всех результатов интегрирования. На этом же графике представлен временной ход границ 95%-го студентовского доверительного интервала. Рост стандартного отклонения соответствует тому, что с увеличением дальности прогноза степень неопределенности неизбежно возрастает.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, оценки параметров, вычисленные по ансамблю результатов интегрирования, позволяют рассчитывать вероятности каких-либо конкретных состояний исследуемого процесса и проверять те или иные статистические гипотезы. При этом мы имеем временную эволюцию полученных оценок, чем, в конечном итоге, и реализуется динамико-стохастический подход к построению и использованию моделей прогностического типа.

**Замечания относительно модели (22)**

1. Если в модели (22) изменить только первое уравнение (см. ниже)

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \beta_{01} + \beta_{11}K + \beta_{21}L, \\ \frac{\dot{L}}{L} &= \beta_{02} + \beta_{12}K + \beta_{22}L, \end{aligned} \quad (22a)$$

то, соответственно, изменятся оценки параметров и статистик первого уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{01} &= -4,083, \hat{\beta}_{11} = 0,0175, \\ \hat{\beta}_{21} &= 0,107, \\ R_1^2 &= 0,966, \gamma_1 = 426,3. \end{aligned}$$

Кроме этого, изменится матрица  $\mathbf{R}$ , которая в данном случае оказывается близка к единичной  $\mathbf{R} \approx \mathbf{I}$  (совпадает с единичной при округлении до третьего знака после запятой). Последнее означает, что  $\mathbf{V}_{\hat{\theta}} \approx \mathbf{V}_{\xi}$ . Результаты же интегрирования меняются незначительно. В связи с этим мы не будем приводить графики, весьма сходные с представленными на рис. 2 – 4, а приведем таблицу сравнений результатов интегрирования этих моделей на 2020 год (табл. 2).

Таблица 2

**Сравнение результатов интегрирования моделей (22) и (22a) на 2020 год**

Индекс или оценка	Значение, %, для модели		Относительное расхождение, %
	(22)	(22a)	
$K_0$	834,00	757,85	-9,13
$L_0$	19,09	22,99	20,41
$Y_0$	174,95	178,68	2,13
$\bar{Y}$	173,34	180,29	4,00
$\hat{\sigma}_Y$	47,37	40,21	-15,13

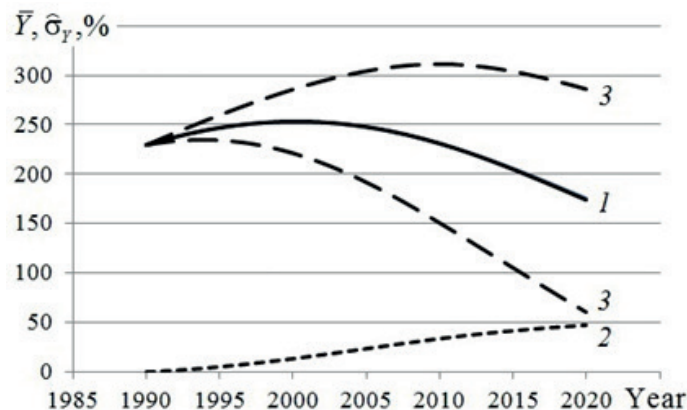


Рис. 4. Параметры нормального распределения, оцененные по ансамблю интегрирований модели (22): 1 – среднее значение  $\bar{Y}$ ; 2 – стандартное отклонение  $\hat{\sigma}_Y$ ; 3 – границы 95%-го доверительного интервала



Переход к модели (22a), как следует из табл. 2, на 15 % снижает стандартное отклонение. Кроме того, этот переход ухудшает значение теста Пирсона при проверке на нормальный закон распределения конечных значений интервала интегрирования, которое в этом случае составляет  $\eta = 3,7$ .

2. Отмеченное выше приближенное равенство  $\mathbf{R} \approx \mathbf{I}$  позволяет рассматривать вариант модели (22a) с различными правыми частями, считая например, параметр  $\beta_{22}$  равным нулю (исключая  $L$  из правой части второго уравнения), на что указывает относительно малое значение его оценки (см. замечание к предыдущему разделу и равенство (24)). В этом случае

$$\beta^T = (\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{12}),$$

а матрица  $\mathbf{Q}$ , согласно формуле (20) и равенству (25), будет иметь вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,979 & -0,204 & 0 \\ 0,204 & 0,979 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, отметим, что модели (22) и (22a) могут рассматриваться как альтернатива хорошо известной в экономической науке модели Солоу. Конечный выбор модели за исследователем.

### Заключение

Рассмотрено развитие динамико-стохастического подхода, связанное с неопределенностью начальных состояний прогностических моделей метеорологии. Рассмотрены все технические детали, позволяющие применять этот подход к прогнозированию любых многомерных процессов.

Показано, как быстрорастущие возмущения (FGPs) начальных состояний динамической модели контролируемого процесса и метод информационного упорядочивания можно использовать для оптимизации системы наблюдений.

Рассмотрена проблема учета стохастической природы OLS-оценок параметров модели. Исследованной ранее задаче проверки гипотезы устойчивости интегрирования предложена альтернатива – генерирование разброса OLS-оценок параметров в соответствии с их вероятностным распределением.

Предложенный в настоящей работе математический аппарат учета стохастической природы OLS-оценок параметров динамической модели может найти широкое применение в прогнозировании экономических, социальных, биологических и иных процессов. Эффективность такого подхода продемонстрирована на рассмотренном численном примере.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Epstein E.S. A scoring system for probability forecast of ranked categories // J. Appl. Meteor. 1969. Vol. 8. No. 6. Pp. 985–987.
2. Leith C.E. Theoretical skill of Monte Carlo forecasts // Monthly Weather Review. 1974. Vol. 102. No. 6. Pp. 409–418.
3. Hamill T.M., Snyder C., Morss R.E. A comparison of probabilistic forecasts from bred, singular-vector and perturbed observation ensembles // Monthly Weather Review. 2000. Vol. 128. No. 6. Pp. 1835–1851.
4. Toth Z., Kalnay E. Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method // Monthly Weather Review. 1997. Vol. 125. No. 12. Pp. 3297–3319.
5. Пичугин Ю.А., Мелешко В.П., Матюгин В.А., Гаврилина В.М. Гидродинамические долгосрочные прогнозы погоды по ансамблю начальных состояний // Метеорология и гидрология. 1998. № 2. С. 5–15.
6. Астахова Е.Д. Построение ансамблей начальных полей для системы кратко- и среднесрочного ансамблевого прогнозирования погоды // Труды Гидрометцентра России. 2008. Вып. 342. С. 98–117.
7. Пичугин Ю.А. Замечания к использованию главных компонент в математическом моделировании // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 74–89.
8. Пичугин Ю.А. Особенности использования информации по Шеннону в задачах, связанных с линейной регрессией // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 164–176.
9. Пичугин Ю.А. География динамической неустойчивости циркуляции атмосферы в Северном полушарии (моделирование и анализ) // Известия Русского географического

общества. 2005. Т. 137. Вып. 3. С. 12–16.

10. **Кондрашков А.В., Пичугин Ю.А.** Идентификация и статистическая проверка устойчивости модели Вольтерры // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 1 (189). С. 124–135.

11. **Пичугин Ю.А.** Геометрические аспекты проверки сложных статистических гипотез в математическом моделировании // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2015. № 2

(218) С. 123–137.

12. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.

13. **Бессонов В.А.** Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. М.: Институт экономики переходного периода, 2002. 589 с.

14. **Sturges H.** The choice of a class-interval // J. Amer. Statist. Assoc. 1926. Vol. 21. No. 153. Pp. 65–66.

*Статья поступила в редакцию 27.01.2020, принята к публикации 25.02.2020.*

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ПИЧУГИН Юрий Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор Института инноватики и базовой магистерской подготовки Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190000, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 61.  
yury-pichugin@mail.ru

### REFERENCES

1. **Epstein E.S.**, A scoring system for probability forecast of ranked categories, J. Appl. Meteor. 8 (6) (1969) 985–987.

2. **Leith C.E.**, Theoretical skill of Monte Carlo forecasts, Monthly Weather Review. 102 (6) (1974) 409–418.

3. **Hamill T.M., Snyder C., Morss R.E.**, A comparison of probabilistic forecasts from bred, singular-vector and perturbed observation ensembles, Monthly Weather Review. 128 (6) (2000) 1835–1851.

4. **Toth Z., Kalnay E.**, Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method, Monthly Weather Review. 125 (12) (1997) 3297–3319.

5. **Pichugin Yu.A., Meleshko V.P., Matyugin V.A., Gavrilina V.M.**, Hydrodynamic long-term weather forecasts with ensemble of initial states, Meteorology and Hydrology. (2) (1998) 5–15.

6. **Astakhova E.D.**, Postroenie ansambley nachalnyh poley dlya sistemy kratko- i srednesrochnogo ansamblevogo prognozirovaniya pogody [Construction of ensembles of initial fields for the system of short-and medium-term ensemble weather forecasting], Proceedings of the Hydrometeorological Center of Russia. (342) (2008) 98–117.

7. **Pichugin Yu.A.**, Notes on using the principal components in the mathematical simulation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 74–89.

8. **Pichugin Yu.A.**, The Shannon information quantity in the tasks associated with linear regression: usage pattern, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 164–176.

9. **Pichugin Yu.A.**, Geografiya dinamicheskoy neustoychivosti tsirkulyatsii atmosfery v Severnom polusharii (modelirovanie i analiz) [Geography of dynamic instability of atmospheric circulation in the Northern hemisphere (simulation and analysis)], Reports of Russian Geographical Society. 137 (3) (2005) 12–16.

10. **Kondrashkov A.V., Pichugin Yu.A.**, On the identification and statistical testing stability of Volterra model, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (1 (189)) (2014) 124–135.

11. **Pichugin Yu.A.**, Geometrical aspects of testing the complex statistical hypotheses in mathematical simulation, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2 (218) (2015) 123–137.

12. **Seber G.A.F.**, Linear regression analysis, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto (1977).

13. **Bessonov V.A.**, Problemy postroyeniya proizvodstvennykh funktsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike [Problems of construction of production functions in the Russian transitional economy], In the Book:



Bessonov V.A., Tsukhlo S.V., *Analiz dinamiki rossiyskoy perekhodnoy ekonomiki* [An analysis of the Russian transitional economy], Institute of the Transitional Economy, Moscow, 2002.  
14. **Sturges H.**, The choice of a class-interval, *J. Amer. Statist. Assoc.* 21 (153) (1926) 65–66.

*Received 27.01.2020, accepted 25.02.2020.*

#### **THE AUTHOR**

**PICHUGIN Yury A.**

*Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation*

61 Bolshaya Morskaya St., St. Petersburg, 190000, Russian Federation

yury-pichugin@mail.ru