DOI: 10.18721/JPM.13104
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ВЗАИМНО-ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ С МАТРИЦАМИ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

А.С. Бердников[1], К.В. Соловьев[2,1], Н.К. Краснова[2]

[1] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение свойств функций, однородных по Эйлеру, которые можно использовать при синтезе электрических и магнитных полей электронно- и ионно-оптических систем, реализующих спектрографический режим регистрации. Рассматривается обобщение функционального уравнения общего вида для однородных функций, которое соответствует линейным функциональным соотношениям с матрицей минимального размера. В предположении о дифференцируемости рассматриваемых функций найдено общее решение построенного функционального уравнения. Полученные системы функций названы взаимно-однородными по аналогии с однородными функциями Эйлера и присоединенными однородными функциями Гельфанда.

Ключевые слова: функциональное уравнение, присоединенная однородная функция, взаимно-однородные функции, спектрограф

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53. DOI: 10.18721/JPM.13104

MUTUALLY HOMOGENEOUS FUNCTIONS WITH FINITE-SIZED MATRICES

A.S. Berdnikov[1], K.V. Solovyev[2,1], N.K. Krasnova[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This work continues our studies in the properties of the homogeneous Euler' s functions that can be used in the synthesis of electric and magnetic fields for electron and ion-optical systems to carry out spectrographic recording mode. A generalization of a functional general equation for homogeneous functions has been considered. This equation corresponds to linear functional relations with a minimal-sized matrix. A general solution of the obtained functional equation was found assuming of differentiability of the functions in question. The resulting systems of functions were termed mutually homogeneous functions by analogy with the homogeneous Euler's functions and the associated homogeneous Gel'fand's functions.

Keywords: functional equation, associated homogeneous function, mutually homogeneous functions, spectrograph

Citation: Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova, N.K., Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53. DOI: 10.18721/JPM.13104

Введение

Данная статья продолжает серию работ [1 – 4], посвященных исследованию свойств однородных гармонических функций и их использованию при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем, реализующих спектрографический режим регистрации [5 – 8].

Функциями, однородными по Эйлеру и имеющими степень однородности p, называются вещественные функции многих переменных, удовлетворяющих при любом λ следующему тождеству [9]:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (1)$$

Любую однородную по Эйлеру функцию можно взаимно-однозначным способом представить в виде [9]:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1{}^p g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \quad (2)$$

где $g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) = g(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ – вещественная функция от $(n - 1)$ переменных.

Соответственно, единственной однородной функцией степени p от одной переменной является степенная функция $f(x) = \mathrm{const} \cdot x^p$, а единственной однородной функцией нулевой степени от одной переменной – константа.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема, то ее частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут однородными функциями степени $(p - 1)$ [9]. Кроме того, если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является дифференцируемой в любой точке пространства R^n, то для того, чтобы она была однородной по Эйлеру степени p, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке пространства R^n выполнялось условие

$$x_1 \partial f/\partial x_1 + x_2 \partial f/\partial x_2 + \ldots + x_n \partial f/\partial x_n = pf \quad (3)$$

(теорема Эйлера об однородных функциях, называемая также критерием Эйлера для однородных функций [9]).

Вместо определения (1) можно рассмотреть функциональное уравнение вида

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = a_0(\lambda) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (4)$$

с заранее неизвестной функцией $a_0(\lambda)$, которое, на первый взгляд, должно обладать бульшей общностью, чем условие (1).

Однако достаточно быстро оказывается, что когда функция $a_0(\lambda)$ непрерывна хотя бы в одной точке, то единственным случаем, когда у уравнения (4) возможны решения, отличные от нуля и представляющие практический интерес, будет степенная функция $a_0(\lambda) = \lambda^p$. При этом, хотя у уравнения (4) и могут быть решения, отличные от степенной функции $a_0(\lambda) = \lambda^p$ и разрывные в любой точке, такие решения представляют интерес разве что в абстрактно-математическом смысле, но отнюдь не для физических приложений.

Действительно, из условия (4) следует, что функция $a_0(\lambda)$ обязана удовлетворять функциональному уравнению

$$\forall \lambda_1, \lambda_2: \; a_0(\lambda_1 \lambda_2) = a_0(\lambda_1)\, a_0(\lambda_2),$$

поскольку

$$f(\lambda_1 \lambda_2 x) = a_0(\lambda_1 \lambda_2) f(x) = a_0(\lambda_1) f(\lambda_2 x) =$$
$$= a_0(\lambda_2) f(\lambda_1 x) = a_0(\lambda_1)\, a_0(\lambda_2) f(x).$$

Данное уравнение представляет собой мультипликативное функциональное уравнение Коши. Любое решение этого уравнения имеет вид степенной функции $a_0(\lambda) = \lambda^p$, если функция $a_0(\lambda)$ непрерывна хотя бы в одной точке. Для дифференцируемых функций $a_0(\lambda)$ доказательство этого утверждения получается элементарным образом после дифференцирования соотношения

$$a_0(\lambda\mu) = a_0(\lambda)\, a_0(\mu)$$

по μ в точке $\mu = 1$ и решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения.

Обобщением функций, однородных по Эйлеру, являются присоединенные однородные функции Гельфанда [10, 11], которые можно определить как решение полубесконечной системы функциональных уравнений:

$$f_0(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_0(\lambda) f_0(x_1, x_2, \ldots);$$
$$f_1(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_1(\lambda) f_0(x_1, x_2, \ldots) + \quad (5)$$
$$+ a_0(\lambda) f_1(x_1, x_2, \ldots);$$

$$f_2(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_2(\lambda) f_0(x_1, x_2, \ldots) +$$
$$+ a_1(\lambda) f_1(x_1, x_2, \ldots) + a_0(\lambda) f_2(x_1, x_2, \ldots);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которые должны выполняться при любом $\lambda > 0$; при этом $a_k(\lambda)$ – это заранее неизвестные функции.

У системы функциональных уравнений (5), которая имеет вид нижней треугольной матрицы с одинаковыми функциями $a_k(\lambda)$ вдоль диагоналей, общее решение может иметь достаточно сложный вид. Однако практический интерес представляет лишь так называемая главная цепочка присоединенных однородных функций, для которой

$$a_k(\lambda) = (1/k!)\, \lambda^p\, (\ln \lambda)^k, \tag{6}$$

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = (1/k!)\, (x_1)^p\, (\ln x_1)^k\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{7}$$

где $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ – произвольная вещественная функция от $(n - 1)$ переменных.

Следующим уровнем обобщения являются функции, которые должны удовлетворять системе функциональных уравнений

$$f_k(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_{kj}(\lambda) f_j(x_1, x_2, \ldots), \tag{8}$$

где $k = 1, 2, ..., m$, а функции $a_{kj}(\lambda)$ заранее неизвестны.

Такие функции, названные нами взаимно-однородными, исследуются в данной работе.

Получаемые на выходе конструкции могут иметь не только теоретический, но и практический смысл. Так, для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру, справедлив принцип подобия траектории, введенный Ю.К. Голиковым [5 – 8]:

если надлежащим образом масштабировать начальные условия заряженных частиц, то при справедливости нерелятивистского приближения, траектории частиц в подобных полях будут представлять собой геометрически масштабированные выражения.

Это свойство позволяет синтезировать эффективно работающие электронно- и ионно-оптические системы, примерами которых могут служить, например, полученные в работах [12 – 28].

Для упрощения выкладок предполагается, что как функции $a_{kj}(\lambda)$, так и функции $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будут дифференцируемыми в любой точке. Имеется предположение, справедливое для однородных функций Эйлера и для присоединенных однородных функций Гельфанда, что требование дифференцируемости функций во всех точках можно значительно ослабить, заменив его на непрерывность функций хотя бы в одной точке и получив на выходе точно такие же формулы общего вида.

Доказательство соответствующих теорем выходит за рамки данной публикации, поскольку для скалярных потенциалов электрических и магнитных полей, используемых в электронной и ионной оптике, требование дифференцируемости в любой точке всегда выполняется.

Матрица минимального размера

Рассмотрим систему функциональных уравнений, соответствующую матрице (8) размера 2 × 2:

$$f_1(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_{11}(\lambda) f_1(x_1, x_2, \ldots) + + a_{12}(\lambda) f_2(x_1, x_2, \ldots), \tag{9}$$

$$f_2(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = a_{21}(\lambda) f_1(x_1, x_2, \ldots) + + a_{22}(\lambda) f_2(x_1, x_2, \ldots), \tag{10}$$

где функции $a_{11}(\lambda)$, $a_{12}(\lambda)$, $a_{21}(\lambda)$, $a_{22}(\lambda)$ заранее неизвестны.

Применим взаимно-однозначную замену переменных:

$$x = \ln x_1,\ t_2 = x_2/x_1,$$
$$t_3 = x_3/x_1,\ \ldots,\ t_n = x_n/x_1.$$

При подстановке

$$f_1(x_1, x_2, \ldots) = g_1(\ln x_1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots) = g_2(\ln x_1, x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1)$$

вместо уравнений (9), (10) получаем эквивалентные функциональные уравнения:

$$g_1(x + \ln \lambda, t_2, t_3, \ldots, t_n) = = a_{11}(\lambda)\, g_1(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) + + a_{12}(\lambda)\, g_2(x, t_2, t_3, \ldots, t_n), \tag{11}$$

$$g_2(x + \ln \lambda, t_2, t_3, \ldots, t_n) = = a_{21}(\lambda)\, g_1(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) + + a_{22}(\lambda)\, g_2(x, t_2, t_3, \ldots, t_n). \tag{12}$$

После дифференцирования уравнений (11), (12) по переменной λ в точке $\lambda = 1$

получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами по переменной x:

$$g'_1(x, \ldots) = a'_{11}(1)\, g_1(x, \ldots) + + a'_{12}(1)\, g_2(x, \ldots), \quad (13)$$

$$g'_2(x, \ldots) = a'_{21}(1)\, g_1(x, \ldots) + + a'_{22}(1)\, g_2(x, \ldots). \quad (14)$$

Форма аналитического решения для уравнений (13), (14) зависит от того, к какому классу относятся собственные числа матрицы $\|a'_{ij}(1)\|$.

Несовпадающие вещественные собственные значения. Пусть собственные числа матрицы (13), (14) являются вещественными и не равными друг другу. Общее решение для системы дифференциальных уравнений (13), (14) имеет вид

$$g_1(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) = c_{11}(t_2, t_3, \ldots, t_n)\exp(p_1 x) + + c_{12}(t_2, t_3, \ldots, t_n)\exp(p_2 x),$$

$$g_2(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) = c_{21}(t_2, t_3, \ldots, t_n)\exp(p_2 x) + + c_{22}(t_2, t_3, \ldots, t_n)\exp(p_1 x),$$

где c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} – это некоторые функции от $(n-1)$ переменных.

В таком случае функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ должны будут иметь вид

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = x_1^{p1} c_{11}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1) + + x_1^{p2} c_{12}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1), \quad (15)$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = x_1^{p1} c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) + + x_1^{p2} c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1). \quad (16)$$

После подстановки выражений (15) и (16) в условия (9) и (10), в силу того, что функции x_1^{p1} и x_1^{p2} являются линейно-независимыми, получаются соотношения

$$\lambda^{p1} c_{11} = a_{11}(\lambda)\, c_{11} + a_{12}(\lambda)\, c_{21}, \quad (17)$$

$$\lambda^{p2} c_{12} = a_{11}(\lambda)\, c_{12} + a_{12}(\lambda)\, c_{22}, \quad (18)$$

$$\lambda^{p1} c_{21} = a_{21}(\lambda)\, c_{11} + a_{22}(\lambda)\, c_{21}, \quad (19)$$

$$\lambda^{p2} c_{22} = a_{21}(\lambda)\, c_{12} + a_{22}(\lambda)\, c_{22}. \quad (20)$$

Линейные алгебраические уравнения (17), (18) для неизвестных функций $a_{11}(\lambda)$ и $a_{12}(\lambda)$ не могут быть линейно-зависимыми (пропорциональными друг другу), за исключением вырожденного случая

$$c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0,$$

не представляющего практический интерес, поскольку функции λ^{p1} и λ^{p2} являются линейно-независимыми.

Точно так же линейно-независимыми будут линейные алгебраические уравнения (19), (20) для неизвестных функций $a_{21}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$.

Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что

$$\Delta = c_{11}\, c_{22} - c_{12}\, c_{21} \neq 0.$$

В таком случае

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^{p1}(c_{11}c_{22}/\Delta) + \lambda^{p2}(-c_{12}c_{21}/\Delta), \quad (21)$$

$$a_{12}(\lambda) = \lambda^{p1}(-c_{11}c_{12}/\Delta) + \lambda^{p2}(c_{11}c_{12}/\Delta), \quad (22)$$

$$a_{21}(\lambda) = \lambda^{p1}(c_{21}c_{22}/\Delta) + \lambda^{p2}(-c_{21}c_{22}/\Delta), \quad (23)$$

$$a_{22}(\lambda) = \lambda^{p1}(-c_{12}c_{21}/\Delta) + \lambda^{p2}(c_{11}c_{22}/\Delta). \quad (24)$$

Поскольку функции $a_{11}(\lambda)$, $a_{12}(\lambda)$, $a_{21}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ не должны зависеть от набора переменных x_1, x_2, ..., x_n, а функции

$$c_{11}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1),\ c_{12}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

$$c_{21}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1),\ c_{22}(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1)$$

не должны зависеть от λ, множители

$$c_{11}c_{22}/\Delta,\ c_{12}c_{21}/\Delta,\ c_{11}c_{12}/\Delta,\ c_{21}c_{22}/\Delta$$

– это константы, не зависящие ни от указанного набора переменных, ни от λ.

Следовательно, выражения

$$c_{22} : c_{12} = (c_{11}c_{22}/\Delta) : (c_{11}c_{12}/\Delta);$$

$$c_{11} : c_{21} = (c_{11}c_{22}/\Delta) : (c_{21}c_{22}/\Delta)$$

также должны быть константами.

В результате

$$c_{11}(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1) =$$

$$= s_{11}h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

$$c_{12}(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1) =$$

$$= s_{12}h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

$$c_{21}(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1) =$$

$$= s_{21}h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

$$c_{22}(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1) =$$

$$= s_{22}h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

где величины s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} – это произвольные константы; $h_1(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)$, $h_2(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)$ – произвольные функции от $(n - 1)$ переменных.

В окончательном виде общее решение для функциональных уравнений (9) и (10) приобретает вид

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^{p1} + (\lambda^{p2} - \lambda^{p1})(-s_{12}s_{21}/\Delta^*), \quad (25)$$

$$a_{12}(\lambda) = (\lambda^{p2} - \lambda^{p1})(s_{11}s_{12}/\Delta^*), \quad (26)$$

$$a_{21}(\lambda) = (\lambda^{p2} - \lambda^{p1})(-s_{21}s_{22}/\Delta^*), \quad (27)$$

$$a_{22}(\lambda) = \lambda^{p2} + (\lambda^{p2} - \lambda^{p1})(s_{12}s_{21}/\Delta^*), \quad (28)$$

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$$

$$= x_1^{p1}s_{11}h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots, x_n/x_1) + \quad (29)$$

$$+ x_1^{p2}s_{12}h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots, x_n/x_1),$$

$$f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$$

$$x_1^{p1}\ s_{21}h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1) + \quad (30)$$

$$+ x_1^{p2}s_{22}h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

где

$$\Delta^* = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0,$$

а величины s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} – произвольные константы; $h_1(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)$, $h_2(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)$ – произвольные функции от $(n - 1)$ переменных.

В общем случае часть констант в формулах (25) – (30) является лишней, поскольку, например, константу s_{11} можно объединить с функцией

$$h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

а константу s_{22} – с функцией

$$h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

однако тогда случаи $s_{11} = 0$ или $s_{22} = 0$ придется рассматривать отдельно. В частности, можно без ограничения общности положить в общих формулах $s_{11} = s_{22} = 1$, а случаи, когда $s_{11} = s_{22} = 0$ либо $s_{11} = 0$, $s_{22} = 1$, рассматривать как вырожденные.

Следует отметить, что формулы (25) – (30) остаются корректными и при $p_1 = p_2 = p$, когда они принимают вид

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^p,\ a_{12}(\lambda) = 0,$$

$$a_{21}(\lambda) = 0,\ a_{22}(\lambda) = \lambda^p,$$

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$$

$$= x_1^{\,p}h_1(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

$$f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$$

$$= x_1^{\,p}h_2(x_2/x_1,\ x_3/x_1,\ \ldots,\ x_n/x_1),$$

т.е. в этом случае решение распадается на две независимые однородные функции одной и той же степени.

Равные вещественные собственные значения. Пусть собственные числа матрицы (13), (14) являются вещественными и равными друг другу. Общее решение для системы дифференциальных уравнений (13), (14) имеет вид

$$g_1(x,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n) = c_{11}(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)\exp(px) +$$

$$+ c_{12}(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)\ x\exp(px);$$

$$g_2(x,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n) = c_{21}(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)\exp(px) +$$

$$+ c_{22}(t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n)\ x\exp(px),$$

где c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} – это некоторые функции от $(n - 1)$ переменных.

В таком случае функции

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

должны иметь вид

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1^{\,p}\, c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) + \qquad (31)$$
$$+ x_1^{\,p}\, (\ln x_1)\, c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1^{\,p}\, c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) + \qquad (32)$$
$$+ x_1^{\,p}\, (\ln x_1) \cdot c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1).$$

После подстановки выражений (31) и (32) в условия (9) и (10), в силу того, что функции x_1^p и $x_1^p\,(\ln x_1)$ являются линейно-независимыми, получаются следующие соотношения:

$$a_{11}(\lambda)\, c_{11} + a_{12}(\lambda)\, c_{21} = \lambda^p\, c_{11}, \qquad (33)$$
$$a_{11}(\lambda)\, c_{12} + a_{12}(\lambda)\, c_{22} = \lambda^p\, (\ln \lambda)\, c_{12}, \qquad (34)$$
$$a_{21}(\lambda)\, c_{11} + a_{22}(\lambda)\, c_{21} = \lambda^p\, c_{21}, \qquad (35)$$
$$a_{21}(\lambda)\, c_{12} + a_{22}(\lambda)\, c_{22} = \lambda^p\, (\ln \lambda)\, c_{22}. \qquad (36)$$

Из-за того, что функции λ^p и $\lambda^p\,(\ln \lambda)$ являются линейно-независимыми, линейные алгебраические уравнения (33), (34) для неизвестных функций $a_{11}(\lambda)$ и $a_{12}(\lambda)$, а также линейные алгебраические уравнения (35), (36) для неизвестных функций $a_{21}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ не могут быть линейно-зависимыми (пропорциональными друг другу), за исключением вырожденного случая $c_{12} = c_{22} = 0$, который рассматривается отдельно.

Пусть

$$\Delta = c_{11}\, c_{22} - c_{12}\, c_{21} \neq 0.$$

В таком случае

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^p\, (1 + (1 - \ln \lambda)\, (c_{12}c_{21}/\Delta)), \qquad (37)$$
$$a_{12}(\lambda) = \lambda^p\, (1 - \ln \lambda)\, (-c_{11}c_{12}/\Delta), \qquad (38)$$
$$a_{21}(\lambda) = \lambda^p\, (1 - \ln \lambda)\, (c_{21}c_{22}/\Delta), \qquad (39)$$
$$a_{22}(\lambda) = \lambda^p\, (1 + (1 - \ln \lambda)\, (-c_{11}c_{22}/\Delta)). \qquad (40)$$

Поскольку функции $a_{11}(\lambda)$, $a_{12}(\lambda)$, $a_{21}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ не должны зависеть от набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а функции

$$c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)$$

не должны зависеть от λ, то множители $c_{12}c_{21}/\Delta$, $c_{11}c_{12}/\Delta$, $c_{21}c_{22}/\Delta$, $c_{11}c_{22}/\Delta$ – это константы, не зависящие ни от указанного набора переменных, ни от λ.

Следовательно, выражения $c_{21} : c_{11} = (c_{12}c_{21}/\Delta) : (c_{11}c_{12}/\Delta)$ и $c_{12} : c_{22} = (c_{11}c_{12}/\Delta) : (c_{11}c_{22}/\Delta)$ – также константы, так что

$$c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) =$$
$$= s_{11}\, h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) =$$
$$= s_{21}\, h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) =$$
$$= s_{12}\, h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) =$$
$$= s_{22}\, h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

где s_{11}, s_{12}, s_{21} и s_{22} – константы, не равные одновременно нулю; $h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)$ и $h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)$ – некоторые функции от $(n - 1)$ переменных.

В окончательном виде решение приобретает вид

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^p\, (1 + (1 - \ln \lambda)\, (s_{12}s_{22}/\Delta^*)), \qquad (41)$$
$$a_{12}(\lambda) = \lambda^p\, (1 - \ln \lambda)\, (-s_{11}s_{12}/\Delta^*), \qquad (42)$$
$$a_{21}(\lambda) = \lambda^p\, (1 - \ln \lambda)\, (s_{21}s_{22}/\Delta^*), \qquad (43)$$
$$a_{22}(\lambda) = \lambda^p\, (1 + (1 - \ln \lambda)\, (-s_{11}s_{22}/\Delta^*)), \qquad (44)$$
$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1^{\,p}\, s_{11}\, h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) + \qquad (45)$$
$$+ x_1^{\,p}\, (\ln x_1)\, s_{12}\, h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1^{\,p}\, s_{21}\, h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) + \qquad 46)$$
$$+ x_1^{\,p}\, (\ln x_1)\, s_{22}\, h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

где $\Delta^* = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0$, величины s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} являются произвольными константами, а $h_1(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h_2(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ произвольными функциями от $(n - 1)$ переменных.

Комплексно-сопряженные собственные значения. Пусть собственные числа матрицы (13), (14) являются сопряженными комплексными числами вида $p \pm i\omega$.

Общее решение для системы дифференциальных уравнений (13), (14) имеет вид

$$g_1(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) =$$

$$= c_{11}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \cos(\omega x)\exp(px) +$$

$$+ c_{12}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \sin(\omega x) \exp(px);$$

$$g_2(x, t_2, t_3, \ldots, t_n) =$$

$$= c_{21}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \cos(\omega x) \exp(px) +$$

$$+ c_{22}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \sin(\omega x) \exp(px),$$

где c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} – некоторые функции от $(n - 1)$ переменных.

В таком случае функции f_1 и f_2 должны иметь следующий вид:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= x_1^p c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) + \quad (47)$$

$$+ x_1^p c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1);$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= x_1^p c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) + \quad (48)$$

$$+ x_1^p c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1).$$

После подстановки выражений (47) и (48) в условия (9) и (10), в силу того, что функции $x_1^p\cos(\omega \ln x_1)$ и $x_1^p\sin(\omega \ln x_1)$ являются линейно-независимыми, получаются следующие соотношения:

$$c_{11} a_{11}(\lambda) + c_{21}a_{12}(\lambda) = \quad (49)$$
$$= \lambda^p c_{11} \cos(\omega\ln\lambda) + \lambda^p c_{12} \sin(\omega\ln\lambda),$$

$$c_{12} a_{11}(\lambda) + c_{22}a_{12}(\lambda) = \quad (50)$$
$$= \lambda^p c_{12} \cos(\omega\ln\lambda) - \lambda^p c_{11} \sin(\omega\ln\lambda),$$

$$c_{11} a_{21}(\lambda) + c_{21}a_{22}(\lambda) = \quad (51)$$
$$= \lambda^p c_{21}\cos(\omega\ln\lambda) + \lambda^p c_{22} \sin(\omega\ln\lambda),$$

$$c_{12}a_{21}(\lambda) + c_{22}a_{22}(\lambda) = \quad (52)$$
$$= \lambda^p c_{22} \cos(\omega\ln\lambda) - \lambda^p c_{21} \sin(\omega\ln\lambda).$$

Линейные алгебраические уравнения (49), (50) для неизвестных функций $a_{11}(\lambda)$, $a_{12}(\lambda)$ и линейные алгебраические уравнения (51), (52) для неизвестных функций $a_{21}(\lambda)$, $a_{22}(\lambda)$ не могут быть линейно-зависимыми, за исключением вырожденного случая

$$c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0,$$

не представляющего практический интерес.

Действительно, функции $\lambda^p\cos(\omega\ln\lambda)$ и $\lambda^p\sin(\omega\ln\lambda)$ являются линейно-независимыми, при этом соотношения пропорциональности

$$c_{11}:c_{12} = c_{12} : (-c_{11}),$$

$$c_{21} :c_{22} = c_{22} : (-c_{21})$$

для правых частей уравнений (49) – (52) не могут быть удовлетворены при ненулевых значениях $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$.

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$\Delta = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0.$$

В таком случае

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^p\cos(\omega\ln\lambda) +$$

$$+ \lambda^p\sin(\omega\ln\lambda) ((c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22})/\Delta), \quad (53)$$

$$a_{12}(\lambda) = - \lambda^p\sin(\omega\ln\lambda) ((c_{11}^2 + c_{12}^2)/\Delta), \quad (54)$$

$$a_{21}(\lambda) = + \lambda^p\sin(\omega\ln\lambda) ((c_{21}^2 + c_{22}^2)/\Delta), \quad (55)$$

$$a_{22}(\lambda) = \lambda^p\cos(\omega\ln\lambda) -$$

$$- \lambda^p\sin(\omega\ln\lambda) ((c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22})/\Delta). \quad (56)$$

Поскольку функции $a_{11}(\lambda)$, $a_{12}(\lambda)$, $a_{21}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ не должны зависеть от набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а функции

$$c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

$$c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

$$c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1),$$

$$c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1)$$

не должны зависеть от λ, то множители

$$(c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22})/\Delta,\ (c_{11}{}^2+c_{12}{}^2)/\Delta,$$

$$(c_{21}{}^2+c_{22}{}^2)/\Delta$$

– это константы, не зависящие ни от указанного набора переменных, ни от λ.

После замены

$$c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) =$$
$$= h_a(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) \cos h_b(x_2/x_1, x_3/x_1, ...),$$
$$c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) =$$
$$= h_a(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) \sin h_b(x_2/x_1, x_3/x_1, ...),$$
$$c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) =$$
$$= h_c(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) \sin h_d(x_2/x_1, x_3/x_1, ...),$$
$$c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) =$$
$$= h_c(x_2/x_1, x_3/x_1, ...) \cos h_d(x_2/x_1, x_3/x_1, ...)$$

получим, что константами должны быть величины

$$\mathrm{tg}\,(h_b(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) + h_d(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots));$$
$$h_a(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)/h_c(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots).$$

Поэтому после подстановок

$$h_a(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) = s_a h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots),$$
$$h_c(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) = s_c h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots),$$
$$h_b(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) = f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) + s_b,$$
$$h_d(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) = -f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) + s_d,$$

где s_a, s_c, s_b, s_d – константы; $h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$, $f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$ – вспомогательные функции, а также некоторых дополнительных эквивалентных преобразований приходим к формулам

$$c_{11}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) =$$
$$+ s_{11}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \cos f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) -$$
$$- s_{12}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \sin f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots);$$

$$c_{12}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) =$$
$$= + s_{11}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \sin f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) +$$
$$+ s_{12}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \cos f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots);$$
$$c_{21}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) =$$
$$= -s_{22}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \sin f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) +$$
$$+ s_{21}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \cos f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots);$$
$$c_{22}(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) =$$
$$= + s_{22}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \cos f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) +$$
$$+ s_{21}h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \sin f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots),$$

где s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} – константы, не зависящие ни от указанного набора переменных, ни от λ.

Такой выбор параметризации для c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} является избыточным (очевидным образом), поскольку, например, практически без ограничения общности можно установить $s_a = 1$ и $s_b = 0$, что означает, что $s_{11} = 1$ и $s_{12} = 0$).

Кроме того, удобно заменить

$$h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \cos f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$$

на $h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$, а

$$h(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots) \sin f(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$$

на $h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots)$.

В окончательном виде общее решение для функциональных уравнений (9) и (10) приобретает вид

$$a_{11}(\lambda) = \lambda^p \cos(\omega \ln\lambda) + \lambda^p \sin(\omega \ln\lambda) \times \times ((s_{11}s_{21} + s_{12}s_{22})/\Delta^*), \quad (57)$$

$$a_{12}(\lambda) = -\lambda^p \sin(\omega \ln\lambda)\,((s_{11}{}^2 + s_{12}{}^2)/\Delta^*), \quad (58)$$

$$a_{21}(\lambda) = +\lambda^p \sin(\omega \ln\lambda)\,((s_{21}{}^2 + s_{22}{}^2)/\Delta^*), \quad (59)$$

$$a_{22}(\lambda) = \lambda^p \cos(\omega \ln\lambda) - \lambda^p \sin(\omega \ln\lambda) \times \times ((s_{11}s_{21} + s_{12}s_{22})/\Delta^*), \quad (60)$$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p\,(s_{11}\cos(\omega\ln x_1) + s_{12}\,x_1^p\sin(\omega\ln x_1))\,h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots) + x_1^p\,(-s_{12}\cos(\omega\ln x_1) + s_{11}\sin(\omega\ln x_1))\,h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots), \quad (61)$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p\,(s_{21}\cos(\omega\ln x_1) + s_{22}\,x_1^p\sin(\omega\ln x_1))\,h_1(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots) + x_1^p\,(-s_{22}\cos(\omega\ln x_1) + s_{21}\sin(\omega\ln x_1))\,h_2(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots), \quad (62)$$

где

$$\Delta^* = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0,$$

а величины s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} – произвольные константы (отчасти избыточные); $h_1(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, $h_2(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ – произвольные функции от $(n - 1)$ переменных.

Дальнейшие шаги

По аналогичной схеме можно проанализировать и другие системы функциональных уравнений вида (8) с матрицами конечного размера. В результате анализа, однако, появятся сложные формулы со многими вариантными ветвлениями, вдобавок не имеющие (на взгляд авторов) большого практического смысла.

С учетом приведенного в данной статье анализа для дифференцируемых функций, все решения функциональных уравнений вида (8) будут линейными комбинациями функций вида

$$f_{k,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p(\ln x_1)^k h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \quad (63)$$

которые соответствуют вещественным собственным значениям p кратности k, и функций вида

$$f^{(c)}_{k,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p(\ln x_1)^k\cos(\omega\ln x_1)\times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \quad (64)$$

$$f^{(s)}_{k,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^p(\ln x_1)^k\sin(\omega\ln x_1)\times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \quad (65)$$

которые соответствуют комплексно-сопряженным собственным значениям вида $p \pm i\omega$ кратности k, где $h(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ – некоторые функции от $(n - 1)$ переменных.

Представляется целесообразным при построении теории взаимно-однородных функций вместо анализа систем функциональных соотношений общего вида ограничиться анализом систем функциональных соотношений, соответствующих изолированным фундаментальным цепочкам функций вида (63) и (64), (65).

Анализу получаемых в результате подобного анализа систем взаимно-однородных функций с бесконечными цепочками функциональных уравнений вида (8)планируется посвятитьследующие публикации.

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы WolframMathematica [29].

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за активное участие в обсуждении проблемы.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-01073-20-00 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Дифференциальные операто-

ры Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62.

4. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

10. **Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. Вып. 3. С. 3–70.

11. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Серия «Обобщенные функции». Вып. 1. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

12. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements // Microelectronic Engineering. 1991. Vol. 14. No. 3–4. Pp. 197–205.

13. **Khursheed A.** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast // Microelectronic Engineering. 1992. Vol. 16. No. 1–4. Pp. 43–50.

14. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets // Scanning. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 87–91.

15. **Khursheed A.** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2000. Vol. 71. No. 4. Pp. 1712 –1715.

16. **Khursheed A.** A low voltage time of flight electron emission microscope // Optik (Jena). 2002. Vol. 113. No. 11. Pp. 505–509.

17. **Khursheed A.** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM // Ultramicroscopy. 2002. Vol. 93. No. 3–4. Pp. 331–338.

18. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2003. Vol. 74. No. 1. Pp. 134–140.

19. **Khursheed A., Osterberg M.** A spectroscopic scanning electron microscope design // Scanning. 2004. Vol. 26. No. 6. Pp. 296–306.

20. **Osterberg M., Khursheed A.** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 2005. Vol. 555. No. 1–2. Pp. 20–30.

21. **Khursheed A., Osterberg M.** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2006. Vol. 556. No. 2. Pp. 437–444.

22. **Luo T., Khursheed A.** Imaging with surface sensitive backscattered electrons // Journal of Vacuum Science and Technology. B. 2007. Vol. 25. No. 6. Pp. 2017–2019.

23. **Khursheed A., Hoang H.Q.** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection // Ultramicroscopy. 2008. Vol. 109. No. 1. Pp. 104–110.

24. **Khursheed A.** Scanning electron microscope optics and spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010. 403 p.

25. **Hoang H.Q., Khursheed A.** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2011. Vol. 635. No. 1. Pp. 64–68.

26. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM // Ultramicroscopy. 2011. Vol. 111. No. 8. Pp. 1093–1100.

27. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 2012. Vol. 184. No. 11–12. Pp. 525 –532.

28. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source // Nature Communications. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 1288.

29. Wolfram Mathematica // URL: http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.01.2020, принята к публикации 02.03.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого,Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.**, Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.
2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.**, Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.
3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62.
4. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.
5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg , 2010.
6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.
7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya Fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.
8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.
9. **Fikhtengol'ts G.M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol.1, Oxford, New York, Pergamon Press, 1965.
10. **Gel'fand I.M., Shapiro Z.Ya.,** Generalized functions and their applications, Uspekhi Mat. Nauk.10 (3) (1955) 3–70.
11. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.,** Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations, AMS Chelsea Publishing, 1964.
12. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.,** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements, Microelectronic Engineering. 14 (3–4) (1991) 197–205.
13. **Khursheed A.**, Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast, Microelectronic Engineering. 16 (1–4) (1992) 43–50.
14. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.,** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets, Scanning. 20 (2) (1998) 87–91.

15. **Khursheed A.,** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 71 (4) (2000) 1712–1715.

16. **Khursheed A.,** A low voltage time of flight electron emission microscope, Optik (Jena). 113 (11) (2002) 505–509.

17. **Khursheed A.,** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM, Ultramicroscopy. 93 (3-4) (2002) 331–338.

18. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.,** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 74(1) (2003) 134–140.

19. **Khursheed A., Osterberg M.,** A spectroscopic scanning electron microscope design, Scanning. 26 (6) (2004) 296–306.

20. **Osterberg M., Khursheed A.,** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 555 (1–2) (2005) 20–30.

21. **Khursheed A., Osterberg M.,** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 556 (2) (2006) 437–444.

22. **Luo T., Khursheed A.,** Imaging with surface sensitive backscattered electrons, Journal of Vacuum Science and Technology B. 25 (6) (2007) 2017–2019.

23. **Khursheed A., Hoang H.Q.,** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection, Ultramicroscopy. 109 (1) (2008) 104–110.

24. **Khursheed A.,** Scanning electron microscope optics and spectrometers, World Scientific,Singapore, 2010.

25. **Hoang H.Q., Khursheed A.,** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 635 (1) (2011) 64–68.

26. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.,** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM, Ultramicroscopy. 11 (8) (2011) 1093–1100.

27. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.,** A wide-range parallel Radial Mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 184 (11–12) (2012) 525–532.

28. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.,** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source, Nature Communications. 9 (1) (2018) 1288.

29. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/N.K.,Teoriyasyntezaelektrostaticheskikhenergoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg , 2010.

Received 21.01.2020, accepted 02.03.2020.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26RizhskyAve., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru