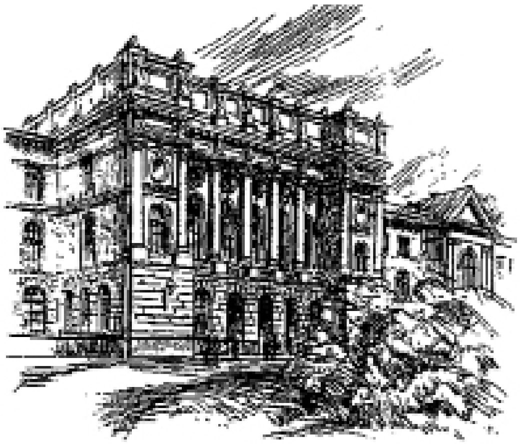
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические науки

Том 13, №2
2020

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2020

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

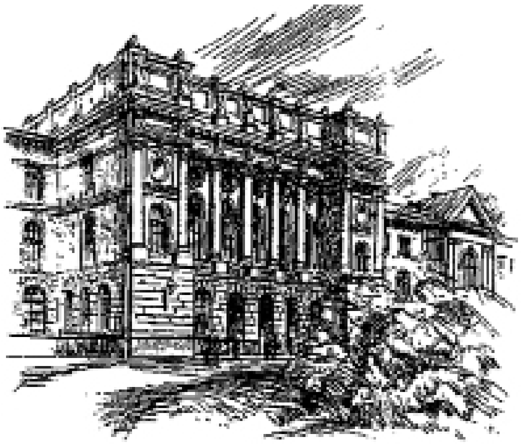
Распространяется по Каталогу стран СНГ, Объединенному каталогу «Пресса России» и по Интернет-каталогу «Пресса по подписке». Подписной индекс 71823.

Журнал индексируется в базе данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), а также включен в базу данных «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте

http://www.elibrary.ru

Адрес редакции и издательства:
Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
Тел. редакции (812) 294-22-85.
http://ntv.spbstu.ru/physics

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION



ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL

Physics and Mathematics

VOLUME 13, No.2, 2020

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2020

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is distributed through the CIS countries catalogue, the «Press of Russia» joint catalogue and the «Press by subscription» Internet catalogue. The subscription index is **71823**.

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) and the **Russian Science Citation Index** (RSCI) databases.

© Scientific Electronic Library (http://www.elibrary.ru).

Address: 195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

Phone: (812) 294-22-85.

http://ntv.spbstu.ru/physics

Содержание

Физика конденсированного состояния

Математическое моделирование физических процессов

Математическая физика

Приборы и техника физического эксперимента

Физическая электроника

Физическая оптика

Радиофизика

Ядерная физика

Механика

Contents

Mechanics

DOI: 10.18721/JPM.13201
UDC: 538.9

ELECTRIC CHARGE RELAXATION IN THE POLYETHYLENE WITH MINERAL INCLUSIONS OF DIATOMITE

Yu.A. Gorokhovatsky, N.S. Demidova, D.E. Temnov

Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, Russian Federation

The paper considers methods for increasing stability of polyethylene's electret state by adding diatomite particles to its composition. The results of analyzing the IR spectra, the involved materials' temporal and temperature stability are presented. Mechanisms for improving the stability of the composite polyethylene's electret state are discussed.

Keywords: electret state, polyethylene, diatomite, thermoactivation spectroscopy

Citation: Gorokhovatsky Yu.A., Demidova N.S., Temnov D.E., Electric charge relaxation in the polyethylene with mineral inclusions of diatomite, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 9–16. DOI: 10.18721/JPM.13201

РЕЛАКСАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ПОЛИЭТИЛЕНЕ С МИНЕРАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ДИАТОМИТА

Ю.А. Гороховатский, Н.С. Демидова, Д.Э. Темнов

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе рассматриваются методы повышения стабильности электретного состояния полиэтилена путем добавления в его состав частиц диатомита. Приводятся результаты исследования ИК-спектров, временной и температурной стабильности исследуемых материалов. Обсуждаются механизмы улучшения стабильности электретного состояния композитного полиэтилена.

Ключевые слова: электретное состояние, полиэтилен, диатомит, термостимулированная спектроскопия

Ссылка при цитировании: Гороховатский Ю.А., Демидова Н.С., Темнов Д.Э. Релаксация электрического заряда в полиэтилене с минеральными включениями диатомита // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 9–16. DOI: 10.18721/JPM.13201

Introduction

Polyethylene is one of the most widely used polymeric materials. At the moment, the polyethylene's electret properties are studied to create the active packages. One of the ways to increase the electret state stability is the creation of the composite material [1, 2]. Studies performed in Ref. [3] showed that adding aerosil in polyethylene leads to a significant improvement in the electret state stability of the obtained composite material. Aerosil is a very pure amorphous non-porous silicon dioxide with a particle size of 5 to 40 nm. Diatomite is another modification of silica. Diatomite is a more promising material for creating composites based on polyethylene because of its low cost.

In the work, the electret stability of composite polyethylene with diatomite has been compared with pure polyethylene films' stability using various methods.

We used such methods as thermostimulated potential relaxation, isothermal potential relaxation, depolarization with registration of short-circuit currents of a pre-charged dielectric and IR spectroscopy. The film thickness was about 1 mm.

Experimental technique

Samples were made by rolling and subsequent pressing. The Kazan National Research Technological University equipment was used. High pressure polyethylene, the brand 15313-003, GOST 7699-78 was used for creating the composite material. Mixing of the starting polyethylene with the filler was carried out in a mixing chamber. The mixing chamber consisted of 2 half cylinders containing horizontally rotating rolls. For the better distribution of filler particles, the rolls rotated in the opposite directions and had different rotation speeds. The temperature in the mixing chamber was 420 – 430 K.

The films were created using the pressing method in accordance with GOST 12019-66. The mold was a frame between two polished plates. Lavsan film was used to prevent the pressed sample's adhesion to the mold plates. The mold with the composite material was placed between the cooling plates, which, in turn, were placed between the heated plates. After the sample heating, the press plates were closed to create the necessary pressure and withstood for the necessary time. After that, the samples were cooled by water, then the pressure was removed from the plates, the press was opened and the samples were removed.

Diatomite distribution was monitored using a Nikon Eclipse LV150 optical microscope. IR spectra were obtained by means of a FSM 1202 Fourier spectrometer. When studying the electret state stability by the isothermal and thermally stimulated potential relaxation methods, the films were polarized in a corona discharge at 5 kV.

Electrically active defects' activation energy was calculated using the Tikhonov regulatory algorithms.

Experimental results and discussion

Our study of the composite materials without treatment did not show a significant effect of diatomite on their electret properties. Earlier it had been shown that the main mechanism of deterioration the polyethylene's electret properties was the presence of water molecules in it [4 – 7]. Diatomite, being a natural mineral, also contains water, which can impair the composite's electret properties. To reduce the amount of physically absorbed water in the composite structure, before studying the properties, samples were annealed in a muffle furnace for 1 h at a temperature $T = 400$ K.

The addition of diatomite to polyethylene leads to its gray color, so that the distribution of the filler in the polyethylene film can be controlled optically.

Fig. 1 shows the optical images of polyethylene film's slices with a diatomite concentration of 2, 4, and 6 % vol. Analysis of the filler distribution showed a uniform pattern of diatomite in the polyethylene film.

The optical spectroscopy method is highly effective in studying the physical and physicochemical properties of water-containing polymer objects [8 – 10]. Fig. 2 shows the infrared (IR) transmission spectra of the initial low density polyethylene (LDPE) and composite polyethylene with 6 % diatomite. Absorption bands in the region of 1500 – 1650 cm^{-1} are associated with the presence of water dissolved in the polymer. These spectra show the presence of water in the initial LDPE film and its substantial decrease with the addition of diatomite (see Fig. 2).

In order to study directly the electret state stability in the composite polyethylene, the films were investigated by the isothermal potential relaxation method at a temperature of 343 K. The films were polarized in a corona discharge at 5 kV for 360 s. The polarization temperature was 360 K.

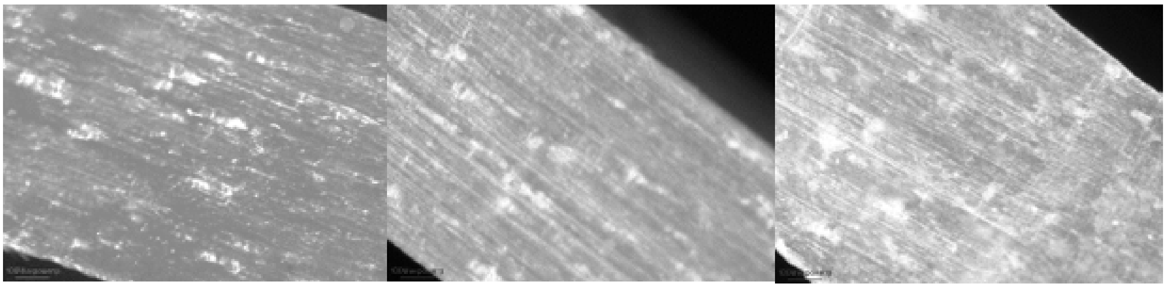


Fig. 1. The optical images of slices of the polyethylene films including diatomite;
a filler content (% vol.) is 2 (left), 4 (in the center) and 6 (right)

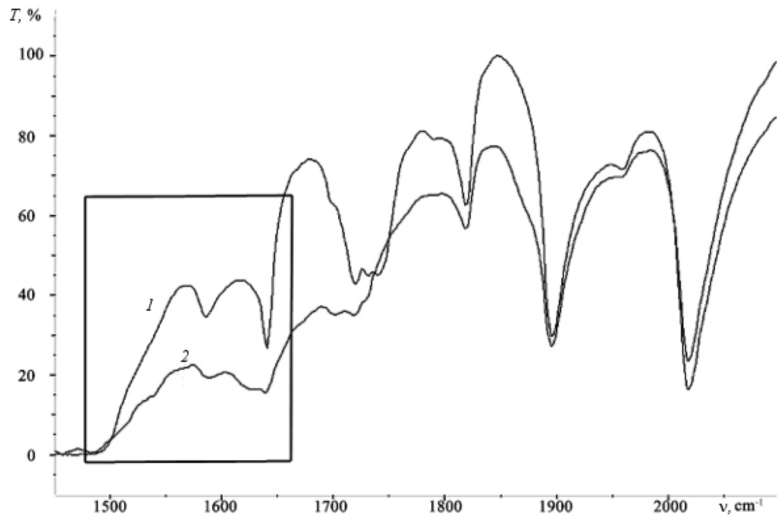


Fig. 2. IR transmission spectra of LDPE (1) and of the composite of LDPE + 6 % diatomite (2).
The presence of water is highlighted

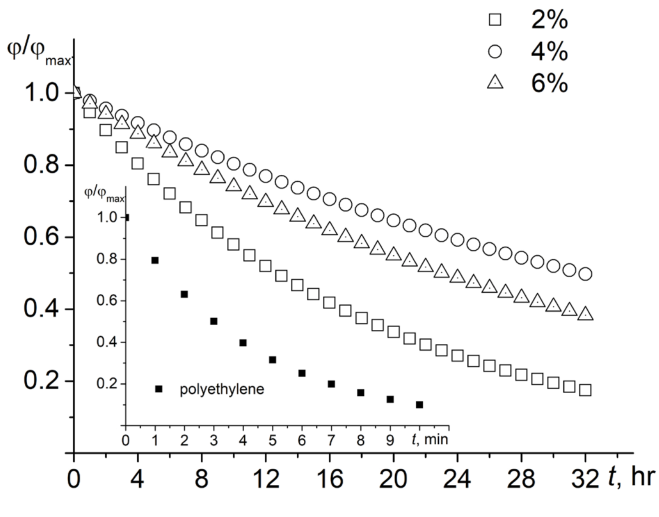


Fig. 3. The time dependences of the surface potential relaxation for pure polyethylene film
(in the inset) and composite polyethylene with the different diatomite content

Fig. 3 shows the time dependence of the electric potential relaxation for films of pure polyethylene and polyethylene with the different diatomite content. The graphs show a significant increase in the stability of polyethylene films when diatomite is introduced into their composition.

The diatomite adding into the polyethylene films leads to the stability increasing that it is obvious from the spectra obtained by thermostimulated potential relaxation method (Fig. 4). The thermally stimulated potential relaxation spectra were obtained both for the unannealed and annealed films of the polyethylene with 4 % diatomite; these curves are compared in Fig. 4. The graphs show a significant improvement of the composite polyethylene film's electret state stability after annealing. Thus, nonannealed films of composite polyethylene with diatomite did not exhibit high electret stability.

The electrically active defects' activation

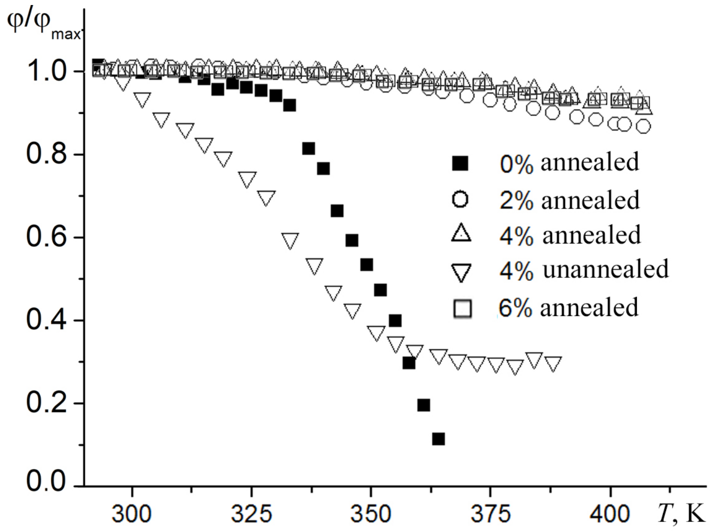


Fig. 4. The temperature dependences of the surface potential relaxation for the pure annealed polyethylene films and the composite polyethylene (unannealed and annealed) with the different diatomite content

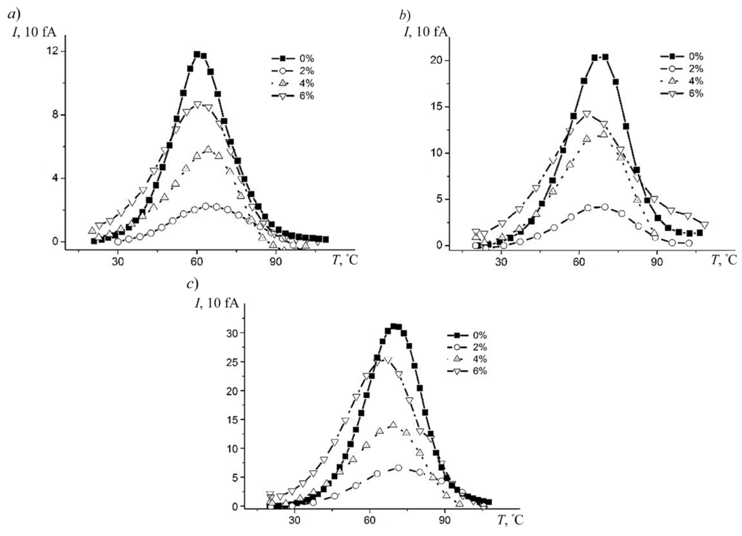


Fig. 5. Thermally stimulated depolarization spectra of the pure polyethylene films and of the composite polyethylene ones with diatomite. The heating rates (K/s) were $5\cdot10^{-2}$ (*a*), $1.0\cdot10^{-1}$ (**b**) and $1.5\cdot10^{-1}$ (*c*). For pure polyethylene films, the current value was reduced by 10 times

energy is one of the main characteristics of the relaxation process of electric charge decay [11]. To calculate this parameter, the study of pure and composite polyethylene was carried out by the method of thermally stimulated depolarization (TSD). A TSC-II setup by Setaram (France) was used for measurements. Sensitive electrometer Keithley 6517 is the main measuring device of the setup. The thermostimulated currents were measured in the temperature range between 290 and 380 K at the fixed heating rate. The heating rate was from $5\cdot10^{-2}$ to $1,5\cdot10^{-1}$ K/s. The samples were polarized in the electric field E_p = 500 V/mm at a polarization temperature T_p = 343 K, during a polarization time of 300 s. After the electric field exposure for 300 s, the samples were cooled in the applied field with a rate of $3,3\cdot10^{-2}$ K/s up to 293 K. The thermostimulated currents' spectra are shown in Fig. 5.

TSD data were processed using Tikhonov's regularizing algorithms. Fig. 6 shows the reconstructed distribution functions of the electrically active defects. It can be seen from the graphs that the maxima shift towards the higher energy and the distribution broadens with increasing the diatomite concentration. Table shows the values of the electrically active defects' activation energy for all the compositions. The activation energy value obtained in this work for electrically active defects for polyethylene without filler is in good agreement with the results of our previous studies [12].

Table

The values of the electrically active defects' activation energy for pure and composite LDPE films

Diatomite concentration, % vol.	Activation energy, eV
0	1.1 ± 0.1
2	1.4 ± 0.1
4	2.2 ± 0.2
6	2.6 ± 0.3

Footnote. Tikhonov's regularizing algorithms were used.

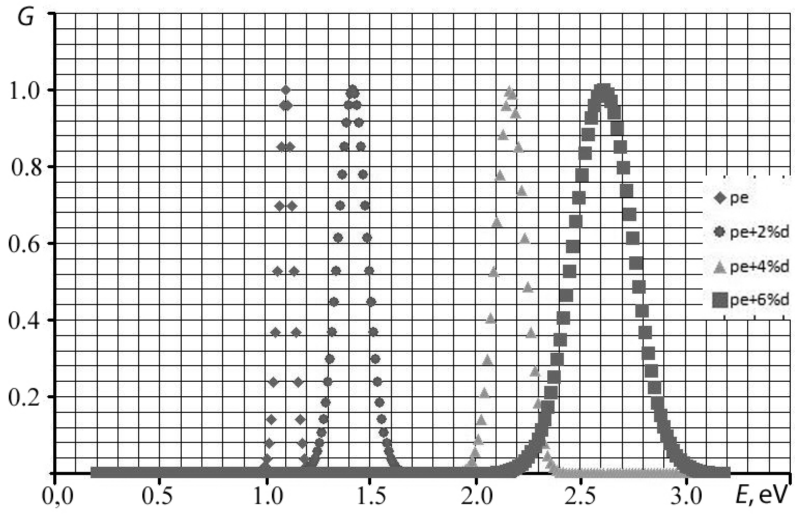


Fig. 6. The energy distribution functions of electrically active defects in the pure polyethylene (pe) and the composite one with the different diatomic (d) content (% vol.)

Summary

Our study showed that the creation of composite polyethylene based on diatomite could increase the electret stability of LDPE. The adding diatomite to polyethylene leads to increasing the charge traps' activation energy, at least up to a concentration of 6 vol %. Diatomite can be used for creating composite polyethylene to increase its electret stability in order to create active packages. It is important to continue further studies of the electret stability of polyethylene composite films with a higher concentration of diatomite and to study other fillers containing silicon dioxide.

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 19--32-90271) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSZN-2020-0026).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-32-90271) и Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № FSZN-2020-0026).

REFERENCES

1. **Goldade V.A.,** Electret composite materials based on polymers: Main properties and new fields of application, Mechanics of Composite Materials. 34 (2) (1998) 107–114.

2. **Gorokhovatsky Yu., Temnov D.,** Electret state in composite polymer materials based on low density polyethylene and polypropylene, Applied Mechanics and Materials. 752–753 (April) (2015) 225–231.

3. **Temnov D., Fomicheva E., Tazenkov B., et al.,** Electrets properties of polyethylene films with starch and aerosol, Journal of Materials Science and Engineering A. 3 (7) (2013) 494–498.

4. **Bordovsky G.A., Gorokhovatsky Y.A., Temnov D.E.,** Electret properties of polyethylene films with nano-dimension inclusions of SiO_2, Scientific Papers of the Institute of Electrical Engineering Fundamentals of Wroclaw Technical University Conferences. (2007) 194–197.

5. **Guzhova A.A., Galikhanov M.F., Gorokhovatsky Y., et al.,** Improvement of polylactic acid electret properties by addition of fine barium titanate, Journal of Electrostatics. 79 (February) (2016) 1–6.

6. **Kreuer K.D.,** On the development of proton conducting polymer membranes for hydrogen and methanol fuel cells, Journal of Membrane Science. 185 (1) (2001) 29–39.

7. **Shim W.S., Lee Y.H., Yeo I.H., et al.,** Polypyrrole/thermally sensitive polyelectrolyte composite, Synthetic Metals. 104 (2) (1999) 119–127.

8. **Okumura S., Nakashima S.,** Water diffusivity in rhyolitic glasses as determined by in situ IR spectroscopy, Physics and Chemistry of Minerals. 31 (3) (2004) 183–189.

9. **Kitano H., Nagaoka K., Tada S., et al.,** Structure of water incorporated in amphoteric polymer thin films as revealed by FT-IR spectroscopy, Macromolecular Bioscience. 8 (1) (2008) 77–85.

10. **Karulina E.A., Temnov D.E., Chistyakova O.V., Demidova N.S.,** The study of the sorbed water content in composite polymers by Fourier spectroscopy, "Physics of Dielectrics (Dielectrics-2017)", Proceedings of the 14-th International Conference (2017) 35–37.

11. **Sessler G.M. (Ed.),** Electrets (Topics in Applied Physics, Vol. 33), Second Ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

12. **Gorokhovatsky Yu., Temnov D.,** Thermostimulated relaxation of surface potential and thermostimulated discharge currents in dielectrics, Izvestia of Herzen State Pedagogical University. (8(38)) (2007) 24–34.

Received 04.05.2020, accepted 15.05.2020.

THE AUTHORS

GOROKHOVATSKY Yuriy A.
Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
gorokh-yu@yandex.ru

DEMIDOVA Natalya S.
Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
demidov_evg@mail.ru

TEMNOV Dmitry E.
Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
tde@herzen.spb.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гольдаде В.А.** Электретные композитные материалы на основе полимеров: основные свойства и новые области применения // Механика композитных материалов. 1998. Т. 34. № 2. С. 153– 162.

2. **Gorokhovatsky Yu., Temnov D.** Electret state in composite polymer materials based on low density polyethylene and polypropylene // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vols. 752–753. April. Pp. 225–231.

3. **Temnov D., Fomicheva E., Tazenkov B., Karulina E., Gorokhovatsky Yu.** Electrets properties of polyethylene films with starch and aerosil // Journal of Materials Science and Engineering A. 2013. Vol. 3. No. 7. C. 494–498.

4. **Bordovsky G.A., Gorokhovatsky Y.A., Temnov D.E.** Electret properties of polyethylene films with nano-dimension inclusions of SiO_2 // Scientific Papers of the Institute of Electrical Engineering Fundamentals of Wroclaw Technical University Conferences. 2007. Pp. 194–197.

5. **Guzhova A.A., Galikhanov M.F., Gorokhovatsky Y., Temnov D.E., Fomicheva E.E., Karulina E.A., Yovcheva T.A.** Improvement of polylactic acid electret properties by addition of fine barium titanate // Journal of Electrostatics. 2016. Vol. 79. February. Pp. 1–6.

6. **Kreuer K.D.** On the development of proton conducting polymer membranes for hydrogen and methanol fuel cells // Journal of Membrane Science. 2001. Vol. 185. No. 1. Pp. 29–39.

7. **Shim W.S., Lee Y.H., Yeo I.H., Lee J.Y., Lee D.S.** Polypyrrole/thermally sensitive polyelectrolyte composite // Synthetic Metals. 1999. Vol. 104. No. 2. Pp. 119–127.

8. **Okumura S., Nakashima S.** Water diffusivity in rhyolitic glasses as determined by in situ IR spectroscopy // Physics and Chemistry of Minerals. 2004. Vol. 31. No. 3. Pp. 183–189.

9. **Kitano H., Nagaoka K., Tada S., Gemmei-Ide M., Tanaka M.** Structure of water incorporated in amphoteric polymer thin films as revealed by FT-IR spectroscopy // Macromolecular Bioscience. 2008. Vol. 8. No. 1. Pp. 77–85.

10. **Карулина Е.А., Темнов Д.Ф., Чистякова О.В., Демидова Н.С.** Исследование содержания сорбированной воды в композитных полимерах методом Фурье-спектроскопии // «Физика диэлектриков (Диэлектрики-2017)». Материалы XIV Международной конференции. СПб., 29 мая – 2 июня 2017 г. Т. 1. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. С. 35–37.

11. **Сесслер Г.** Электреты. М.: Мир, 1983. 487 с.

12. **Гороховатский Ю.А., Темнов Д.Э.** Термостимулированная релаксация поверхностного потенциала и термостимулированные токи короткого замыкания в предварительно заряженном диэлектрике // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. Естественные и точные науки. 2007. № 8 (38). С. 24–34.

Статья поступила в редакцию 04.05.2020, принята к публикации 15.05.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОРОХОВАТСКИЙ Юрий Андреевич – *доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
gorokh-yu@yandex.ru

ДЕМИДОВА Наталья Сергеевна – *аспирантка кафедры общей и экспериментальной физики Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
demidov_evg@mail.ru

ТЕМНОВ Дмитрий Эдуардович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
tde@herzen.spb.ru

DOI: 10.18721/JPM.13202
УДК 538.91

THE EFFICIENCY OF SOLAR ENERGY CONVERSION BY THE CdS/*por*-Si/*p*-Si HETEROSTRUCTURE: THE DOPANT EFFECT

V.V. Tregulov

Ryazan State University named for S. Yesenin, Ryazan, Russian Federation

In this paper, the effect of the distribution profile of the doping acceptor impurity concentration in the base region of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure on the efficiency of solar energy conversion parameters has been studied. It was established that the solar energy conversion efficiency depended on the degree of a doping acceptor impurity depletion of the near-surface *p*-Si layer in the *por*-Si/*p*-Si heterojunction. The distribution profile of the impurity concentration in this space is formed during the growth of a porous silicon layer. This profile is controlled through changing the technological parameters of the process of a porous film growing: the current density and the duration time of the electrochemical etching. A gain in the conversion efficiency of solar energy was explained by an increase in the penetration depth of the electric field into the base region due to formation of a certain type of the impurity concentration distribution profile. In the final, this profile promotes the rapid carry-away of charge carriers generated by the light from the base region. This carry-away occurs before the carrier recombination moment involving traps.

Keywords: porous silicon, heterojunction, photovoltaic converter, solar cell, capacitance–voltage characteristic

Citation: Tregulov V.V. The efficiency of solar energy conversion by the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure: the dopant effect, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 17–26. DOI: 10.18721/JPM.13202

ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРУЮЩЕЙ ПРИМЕСИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГИИ ГЕТЕРОСТРУКТУРОЙ CdS/*por*-Si/*p*-Si

В.В. Трегулов

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
г. Рязань, Российская Федерация

В работе исследуется влияние профиля распределения концентрации легирующей акцепторной примеси в базовой области гетероструктуры CdS/*por*-Si/*p*-Si на параметры, характеризующие эффективность преобразования солнечной энергии. Установлено, что указанная эффективность зависит от степени обеднения легирующей акцепторной примесью приповерхностного слоя дырочного кремния (*p*-Si), входящего в структуру гетероперехода *por*-Si/*p*-Si. Профиль распределения концентрации примеси в данной области формируется в ходе роста слоя пористого кремния. Управление характером профиля распределения осуществляется через изменение технологических параметров процесса роста пористой пленки: плотностью тока и длительностью электрохимического травления. Повышение эффективности преобразования солнечной энергии объясняется увеличением глубины проникновения электрического поля внутрь базовой области за счет формирования определенного вида профиля распределения концентрации примеси. В конечном итоге вид профиля способствует быстрому выносу из базовой области носителей заряда, генерируемых светом; вынос происходит до момента рекомбинации носителей при участии ловушек.

Ключевые слова: пористый кремний, гетеропереход, фотовольтаический преобразователь, солнечный элемент, вольт-фарадная характеристика

Ссылка при цитировании: Трегулов В.В. Влияние легирующей примеси на эффективность преобразования солнечной энергии гетероструктурой CdS/*por*-Si/*p*-Si // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 17–26. DOI: 10.18721/JPM.13202

Introduction

Currently quite a lot of interest is being shown in the study of the solar photovoltaic converter based on the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure [1, 2]. The CdS film plays the role of an optical window and significantly expands the spectral sensitivity region of the photovoltaic converter [3, 4]. The *por*-Si layer is a buffer that reduces the mechanical stresses arising between the silicon substrate and the CdS film due to the difference in the lattice constants (about 7 %) [4, 5]. In addition, the *por*-Si film reduces the reflectivity of the front surface of the CdS/*por*-Si/*p*-Si photovoltaic converter [4]. An important advantage of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure is the absence of the need to form a $p - n$ junction by diffusion in *p*-Si. This will reduce the complexity of the manufacturing process of the photovoltaic cells and its cost, which is important in mass production. Thus the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure is relevant for use in solar energy.

In this regard the urgent task is to develop solutions aimed at increasing the efficiency of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure as a solar energy converter.

One way to solve this problem is to increase the collection efficiency of charge carriers generated by light in the absorbing region of the photovoltaic converter. It is well known that the separation of photogenerated charge carriers occurs under the influence of an electric field concentrated in the space charge region (SCR) of the photovoltaic converter barrier layer (in our case, a heterojunction). Due to the strong electric field the carriers are removed from the SCR before they have time to recombine through the participation of traps [6]. Thus, to increase the efficiency of carrier separation, it is advisable to create conditions for expanding the region located inside the absorbing layer in which the strongest electric field is concentrated. For this purpose, it is desirable to set up a concentration gradient of the dopant in the surface region of the absorbing layer of the photovoltaic converter [6, 7]. According to Ref. [6] these methods lead to an increase in the efficiency of solar energy conversion due to an increase in open circuit voltage and short circuit current.

The experimental samples studied in this work are similar to the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure investigated in Ref. [8] where it was shown the largest contribution to the photocurrent to make by charge carriers absorbed in *p*-Si. In addition, the SCR of the studied heterostructure was almost completely concentrated in the surface region of the *p*-Si heterojunction of the *por*-Si/*p*-Si. Thus, the base region of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure is located in the near-surface *p*-Si layer close to the *por*-Si/*p*-Si heterojunction. The charge carriers generated by light are separated by the electric field of the *por*-Si/*p*-Si heterojunction [8].

The high-frequency capacitance – voltage ($C - V$) characteristics of *por*-Si/*p*-Si structures were studied, and in this case the *por*-Si film was formed by anodic electrochemical etching at various values of the etching duration t_{et} and the anode current density J_{et} [9, 10]. It was found that with an increase in J_{et} and t_{et} in silicon, a depleted dopant region was formed near the *por*-Si/Si heterojunction.

In this paper, the influence of the distribution profile of the acceptor dopant concentration on the solar energy conversion efficiency for the absorbing *p*-Si layer of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure has been investigated.

In order to control this distribution profile, a *por*-Si film of the samples under investigation was

T a b l e

Information on the experimental samples

No.	J_{et}, mA/cm^2	t_{et}, min	U_{oc}, mV	J_{sc}, mA/cm^2	FF, arb.unit.	η, %	N_t, cm^{-3}
1	10	12	365	12.1	0.6	3.4	$4.2\cdot10^{13}$
2	18	10	487	16.5	0.7	5.7	$9.7\cdot10^{13}$
3	30	7	475	14.2	0.7	4.6	$2.0\cdot10^{14}$
4	45	5	270	9.6	0.6	1.6	$2.3\cdot10^{14}$

S y m b o l s: J_{et} is the anode current density, t_{et} is the etching duration, U_{oc} is the open circuit voltage, J_{sc} is the short-circuit current density, FF is the filling factor of the current-voltage characteristic, η is the efficiency, N_t is the concentration of traps.

formed at different values of the etching duration t_{et} and the anode current density J_{et}.

The technology of manufacturing experimental samples

For the preparation of experimental CdS/*por*-Si/*p*-Si samples the *p*-type single-crystal silicon wafers with a specific resistance of 1 Ohm·cm doped with boron and a surface orientation of (100) were used. The concentration of the doping acceptor impurity in the silicon wafers was $1.5\cdot10^{16}$ cm^{-3}. The *por*-Si film was made by the technique of anodic electrochemical etching in the galvanostatic mode. An electrolyte consisting of HF and C_2H_5OH in a ratio of 1:1 was used. Several samples were made with different values of J_{et} and t_{et} (see Table). The time t_{et} values for the samples were chosen so that the *por*-Si film thickness at different J_{et} values was approximately the same. After the *por*-Si film was grown, the surface of the samples was etched in an aqueous HF solution (10 %) for 10 min. The *por*-Si film thickness for all samples was 2.2 ± 0.3 μm.

A CdS film was formed on the surface of a *por*-Si layer by the method of chemical bath deposition (from aqueous solutions). A $CdCl_2$ solution with a concentration of 0.44 M was used as a source of cadmium ions. An N_2H_4CS (thiourea) solution with a concentration of 0.22 M was used as a source of sulfur ions. A concentrated aqueous NH_4OH (ammonia) solution was used as a complexing agent. At first, an ammonia solution was added to the $CdCl_2$ one until the precipitate completely dissolved, then the same volume of an aqueous thiourea solution was added to the resulting solution. The temperature of the solution was brought to 90° C, substrates with a *por*-Si film were immersed in it, and a CdS film was grown for 20 min. The CdS layer on the back side of *p*-Si was completely etched with a 30% HCl solution. Samples were washed with distilled water and dried in the oven. For all samples, the CdS film thickness was 1.8 ± 0.2 μm.

For electrical measurements, ohmic contacts were formed on opposite surfaces of the sample to the *p*-Si substrate and the CdS film by soldering indium.

The used investigation technique

In order to study the distribution profile of the dopant concentration in the base region of the structure given above, the $C - V$ characteristics were measured at a frequency of 1 MHz at a reverse bias. The reverse bias corresponds to the application of a positive value of the constant bias voltage U to the contact on the CdS surface and negative U to the contact on the *p*-Si. The measurements of the samples were carried out using an E7-20 digital immitance meter (MNIPI, Belarus) at a temperature of 300 K. It is known that the high-frequency $C - V$ characteristic $C(U)$ measured at reverse bias reflects the dependence of the capacitance barrier component on the applied voltage and allows one to determine the impurity concentration in the base region of the studied semiconductor structure:

$$N_b = \frac{2}{q\varepsilon\varepsilon_0 S^2} \cdot \left(\frac{dC(U)^{-2}}{dU} \right)^{-1}, \quad (1)$$

where q is the electron charge, ε is the dielectric constant of the semiconductor material of the base region of the studied heterostructure (silicon), ε_0 is the vacuum dielectric constant, S is the sample area [7].

The value of the x coordinate is calculated by the formula [7]:

$$x = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{C(U)}. \quad (2)$$

The combined use of formulas (1) and (2) allows us to calculate the distribution profile of the concentration of the dopant $N_b(x)$ in the base region of the investigated semiconductor structure.

The calculation of the distribution profile of the electric field in the SCR of the studied samples was carried out as follows [7]:

$$E(x) = -\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} N_b(x) \cdot (x - W), \quad (3)$$

where W is the width of the SCR.

The main characteristics of solar photovoltaic converters with heterojunctions are significantly affected by surface states, and also traps with energy levels located in the bulk of the base region [6]. In order to obtain information about traps, we studied the $C - V$ hysteresis measured at a frequency of 1 MHz in the region of reverse biases.

Despite the fact that at high frequencies the charge in traps with deep energy levels does not have time to follow the measuring signal, it affects the value of W and the value of the high-frequency capacitance [11]. To evaluate the influence of traps, one can compare the $C - V$ characteristic, measured with the forward bias of a constant bias voltage from 0 to a certain limiting value U_m ($C_{in}(U)$), and measured with a reverse scan from U_m to 0 ($C_{out}(U)$). In the absence of traps, the $C_{in}(U)$ and $C_{out}(U)$ curves should coincide completely. In the presence of traps a hysteresis phenomenon is observed – the $C_{in}(U)$, and $C_{out}(U)$ curves differ [12]. Thus, by analyzing the width of the hysteresis band formed by the $C_{in}(U)$ and $C_{out}(U)$ curves, we can obtain information about traps in the SCR.

The value of the barrier capacitance is determined by the ratio of the charge increment in the SCR to the magnitude of the voltage change [7]:

$$C = \frac{dQ}{dU}. \quad (4)$$

Hence, the charge Q concentrated in the SCR, when the constant bias voltage changes from U_1 to U_2, can be expressed as follows:

$$Q = \int_{U_1}^{U_2} C(U)\,dU. \quad (5)$$

On the other hand, the charge Q is determined by the volume concentrations of the dopant N_b and of the traps N_t, as well as the SCR thickness W:

$$Q = q(N_b + N_t)WS. \quad (6)$$

Given the hysteresis of the $C - V$ curves and using Eqs. (5) and (6), for the concentration of traps we can write the following expression:

$$N_t = \frac{1}{qWS} \int_0^{U_m} \left| C_{in}(U) - C_{out}(U) \right| dU, \quad (7)$$

where U_m is the limiting value of the constant bias voltage to which the constant bias voltage U is scanned.

To evaluate the efficiency of solar energy conversion by CdS/*por*-Si/*p*-Si samples, we measured the open circuit voltage U_{oc}, short-circuit current density J_{sc}, filling factor of the current – voltage characteristic FF and efficiency η under illumination under AM1.5.

Experimental results

Capacitance – voltage characteristics of the samples under study, measured in the region of reverse biases, are shown in Fig. 1 in the form of the dependence $(C/S)^{-2} = f(U)$. For sample No. 1, the graph in Fig. 1 is close to a straight

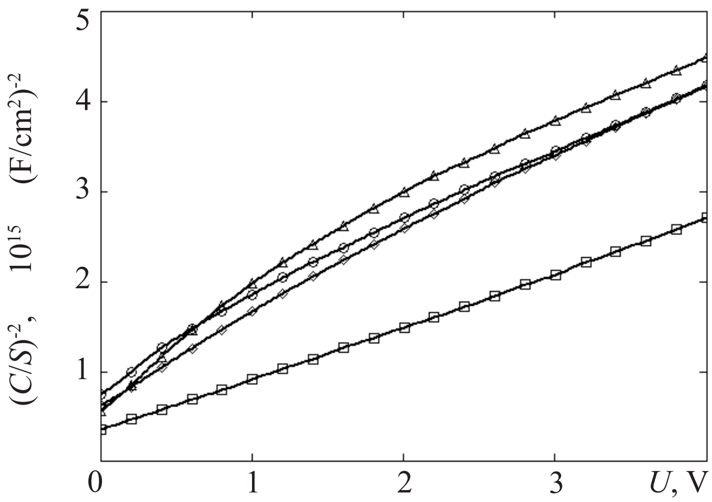


Fig. 1. Capacitance – voltage characteristics of samples No. 1 (□), No. 2 (◊), No. 3 (○), No. 4 (Δ), measured at a frequency of 1 MHz with reverse bias; S is the sample area

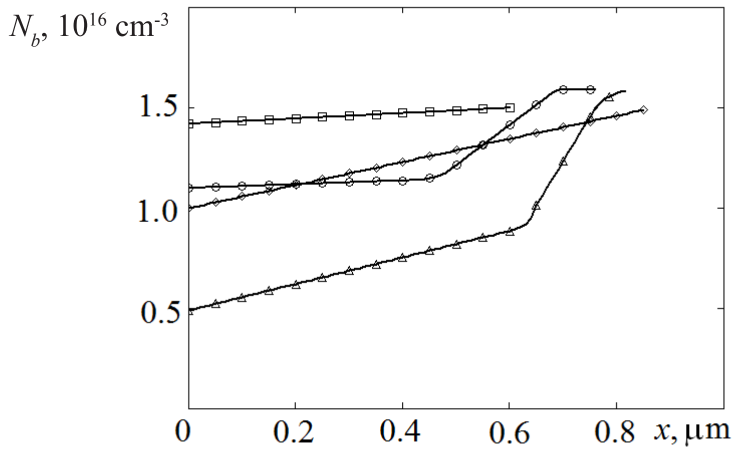


Fig. 2. Distribution profiles of the concentration of acceptor impurities in the base region of samples No. 1 (□), No. 2 (◊), No. 3 (○), No. 4 (Δ)

line. For samples No. 2 – No. 4, the dependence $(C/S)^{-2} = f(U)$ noticeably deviates from the linear one, which indicates the presence of an impurity concentration gradient in the base region (see Fig. 1).

The profiles of the distribution dopant concentration $N_b(x)$ in the surface layer of the base region of the samples under study, calculated by Eqs. (1) and (2), are shown in Fig. 2. For sample No.1, the N_b value varies slightly with the x coordinate and is close to the acceptor impurity concentration ($1.5 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}) in silicon wafers used as a substrate for the manufacture of the samples. For sample No. 2, the value N_b increases linearly with increasing x to a value close to $1.5 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}. Samples No. 3 and No. 4 are characterized by a more complex dependence $N_b(x)$. Thus, for samples No. 2 – No. 4 an acceptor impurity is depleted in the surface layer of the base region directly adjacent to the *por*-Si/*p*-Si heterojunction. With an increase in x the value of N_b tends to a value close to $1.5 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}.

The electric field distribution profile $E(x)$ for the studied samples calculated by Eq. (3) is presented in Fig. 3. Sample No. 1 exhibits a linear dependence $E(x)$ with a sharp heterojunction. The maximum value of E for samples No. 1 – No. 3 practically coincides. The region width bounded by the dependence $E(x)$ is maximum value for sample No. 2.

In order to estimate the traps concentration N_t the C – V characteristics of the samples were

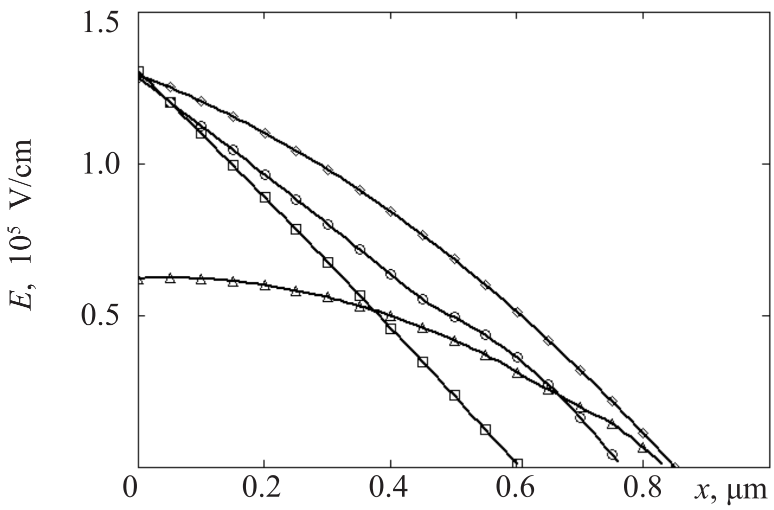


Fig. 3. The distribution profiles of the electric field in the base region of samples No. 1 (□), No. 2 (◊), No. 3 (○), No. 4 (Δ)

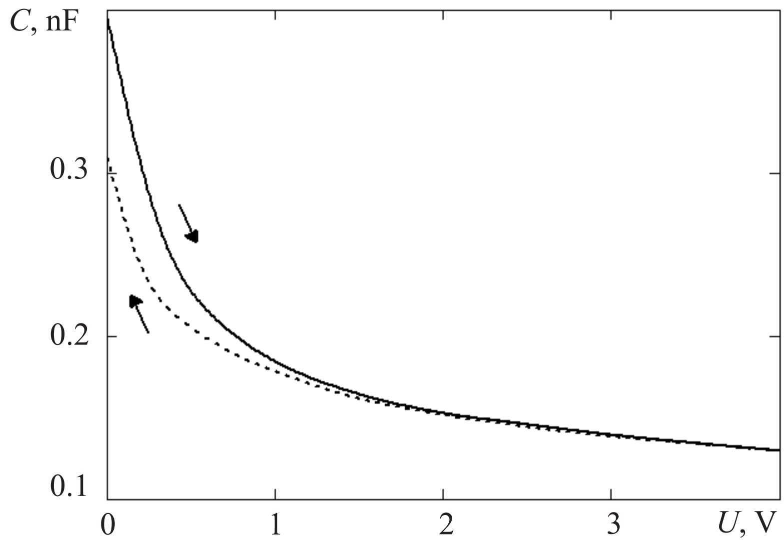


Fig. 4. Capacitance – voltage characteristics of sample No. 2 for a forward sweep of a constant bias voltage (solid line) and reverse (dashed line)

measured at direct $C_{in}(U)$ and reverse $C_{out}(U)$ scans of a constant bias voltage U in the range 0 – 4 V. For all the samples studied the behavior of the $C_{in}(U)$ and $C_{out}(U)$ is almost identical. The curves $C_{in}(U)$ and $C_{out}(U)$ for sample No. 2 are shown in Fig. 4. The $C_{in}(U)$ and $C_{out}(U)$ curves noticeably differ in the range of U values from 0 to 2 V; for $U > 2$ V this difference practically disappears (see Fig. 4). This behavior of the curves in Fig. 4 can be explained by a more noticeable effect on the barrier capacitance of traps localized at the *por*-Si/*p*-Si heterojunction (surface states) as compared to traps located in the bulk of the base region of the samples.

The values of U_{oc}, J_{sc}, FF and η, characterizing the efficiency of solar energy conversion of the studied samples, are presented in Table. The highest efficiency of solar energy conversion is characterized by sample No. 2; sample No. 3 is close to it; sample No. 4 has the lowest conversion efficiency compared to samples No. 1 – No. 3 (see Table).

Discussion of the experimental results

The efficiency of a solar photovoltaic converter with a heterojunction is significantly affected by surface states and traps located in the volume of

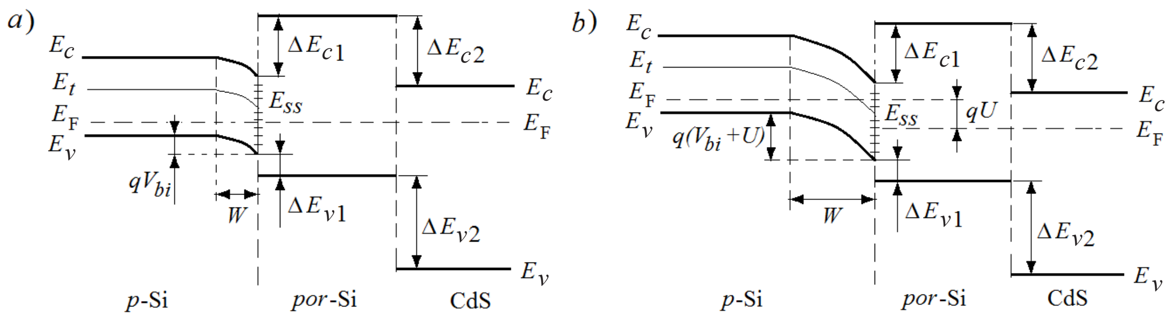


Fig. 5. The band diagram of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure at $U = 0$ V (*a*) and for some value of reverse bias U (*b*); see explanations in the text

the absorbing region [6]. However, it is impossible to draw an unambiguous conclusion about the effect of the concentration N_t on the solar energy conversion efficiency of experimental samples from the Table. So, sample No. 4 has significantly lower values of U_{oc}, J_{sc}, and η compared to sample No. 3. Moreover, for these samples the value of N_t changes slightly. Sample No. 2, characterized by the highest conversion efficiency η, has an N_t value close to samples No. 3 and No. 4. At the same time sample No. 1 which occupies an intermediate place between samples No. 3 and No. 4 in terms of conversion efficiency η, is characterized by the lowest N_t value of all the samples studied. Moreover, the N_t value of sample No. 1, is significantly less than for the remaining samples. Thus, the value of N_t does not have a decisive influence on the parameters characterizing the conversion efficiency of the studied samples.

An analysis of the hysteresis for the $C - V$ characteristics (see Fig. 4) shows that the capacitance decreases upon reverse sweep U. In Ref. [11] the decrease in the SCR capacitance was explained by the emptying of the traps of minority charge carriers. This situation can be illustrated by zone diagrams in Fig. 5.

The SCR of a width W is almost completely concentrated in the surface *p*-Si layer near the *por*-Si/*p*-Si heterojunction. At this heterojunction, surface states characterized by energy levels of E_{ss} are localized, and traps with energy levels of E_t can also be contained in the bulk of the *p*-Si base region (see Fig. 5). It was shown [8], that the current flow mechanisms in the studied CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure are determined by the traps with activation energies occupying a wide range of values. For the purpose of simplification, only one volumetric energy level E_t is shown in Fig. 5. At $U = 0$ V (see Fig. 5,*a*), the band bending in the *p*-Si region is determined by the value of the diffusion potential V_{bi}. In this case the energy levels of the E_t and E_{ss} traps located within the SCR of the *por*-Si/*p*-Si heterojunction are filled with charge carriers if they are below the Fermi level E_F and emptied if they are above E_F.

In the reverse bias (see Fig. 5,*b*), the band bending in the SCR increases by the value of the applied voltage U, the energy levels of the traps below E_F are filling with carriers. Upon subsequent change in the scanning direction U to 0 V the bending of the zones decreases, and a transition to the conditions shown in Fig. 5,*a* takes place. This is accompanied by the depletion of the energy levels of the E_t and E_{ss} traps. Moreover, the dominant contribution to the relaxation process is made by the energy levels of minority carrier traps in the *p*-Si layer.

The most probable cause of the observed differences in the efficiency parameters of the studied samples (see Table) may be the difference in the character of the dependence $E(x)$ in the SCR of the base region of the *por*-Si/*p*-Si heterojunction (see Fig. 3). In turn, the form of the dependence $E(x)$ is determined by the distribution dopant concentration profile $N_b(x)$ (see Fig. 2). Referring to Figs. 2 and 3, depletion of the *p*-Si surface region by an acceptor impurity for samples No. 2 and No. 3 leads to a noticeable extension of the $E(x)$ curves towards an increase in x as compared to that of sample No. 1, for which the N_b value weakly depends on x within the SCR. Moreover, the efficiencies of samples No. 2 and 3 are significantly higher as compared to that of sample No. 1. The near-surface layer of the *p*-Si region of sample No. 4 is more depleted in acceptor impurity than those of samples No. 1 – No. 3 (see Fig. 2). As a result, the electric field inside the SCR is noticeably lower for sample No. 4 than those for the remaining samples (see Fig. 3). Sample No. 4 exhibits the lowest conversion efficiency of solar energy as compared to those for the rest of the studied samples.

Thus, an increase in the conversion efficiency of solar energy of the studied samples can be explained by an increase in the penetration depth of a strong electric field into the base region. The charge carriers generated by the light inside this region are carried away by the electric field before they have time to recombine through the participation of traps. Thus, the depletion of the doping impurity in the near-surface *p*-Si layer which is in the immediate vicinity of the *por*-Si/*p*-Si heterojunction, is an aid to the expansion of the region in which the strongest electric field is concentrated. At the same time an increase in the depletion of the base region with an alloying impurity observed for sample No. 4 leads to a decrease in the electric field strength (see Fig. 3) and a decrease in the efficiency of solar energy conversion (see Table).

The depletion of the *p*-Si surface region occurs during the formation of a *por*-Si film. One of the causes of depletion may be the partial etching of impurity atoms from the surface of silicon crystallites during the formation of a porous layer [13]. Another cause of the depletion may be a partial compensation of the main dopant by defects, including those having deep energy levels localized on the surface of silicon crystallites [9, 13].

Numerous studies have shown that *por*-Si films formed on single-crystal silicon substrates are complexly structured [14 – 16]. The *por*-Si film is formed by silicon crystallites separated by pores. The average crystallite diameter increases as it moves from the outer surface of the *por*-Si film to the single-crystal substrate [16]. Thus, a clearly defined boundary between the porous film and the single crystal substrate may be absent. As a result, the *por*-Si/*p*-Si heterojunctions of the samples studied in this work can be located inside the largest silicon crystallites in the lower region of the *por*-Si film. The states localized on the crystallite surface can contribute to partial compensation of the acceptor dopant in the surface layer of the base region of the samples under study.

Summary

The relationship between the distribution profile of the dopant acceptor impurity in the base region of the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure and the solar energy conversion efficiency parameters has been established. It was shown that the conversion efficiency depends on the degree of depletion of the *p*-Si surface layer doping with an acceptor impurity located in the immediate vicinity of the *por*-Si/*p*-Si heterojunction. The formation of this depletion region occurs as a result of a *por*-Si film growing. By changing the main parameters of the *por*-Si growth process (t_{et} and J_{et}) one can control the impurity distribution profile and the efficiency of solar energy conversion. Thus, in order to increase its efficiency, one of the directions of optimizing the technology of the solar photovoltaic converter based on the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure is the selection of t_{et} and J_{et} parameters for *por*-Si film growing. An important advantage is a forming of the depleted region not requiring a separate technological operation. The concentration distribution profile is formed in the process of growing the *por*-Si layer. In production conditions this will reduce the cost of manufacturing a photovoltaic converter.

The obtained data can be useful in the development of solar photovoltaic converters and optical sensors based on the CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure.

REFERENCES

1. **Hasoon S.A., Ibrahim I.M., Raad M.S., et al.,** Fabrication of nanostructure CdS thin film on nanocrystalline porous silicon, International Journal of Current Engineering and Technology. 4 (2) (2014) 594–601.

2. **Jafarov M.A., Nasirov E.F., Jahangirova**

S.A., Nano-CdS/porous silicon heterojunction for solar cell, International Journal of Scientific and Engineering Research. 6 (7) (2015) 849–853.

3. **Sharma B.L., Purohit R.K.,** Semiconductor heterojunctions, Pergamon Press, Oxford, New York, 1974.

4. **Mamedov H.M., Kukevecz A., Konya Z., et al.,** Electrical and photoelectrical characteristics of *c*-Si/*porous*-Si/CdS heterojunctions, Russian Physics Journal. 61 (9) (2019) 1660–1666.

5. **Eesa M.W., Abdullah M.M.,** Porous silicon effect on the performance of CdS nanoparticles photodetector, International Journal of Current Engineering and Technology. 4 (6) (2016) 1372–1376.

6. **Fahrenbuch A.L., Bube R.H.,** Photovoltaic solar energy conversion, Fundamentals of solar cells, Academic Press, New York, 1983.

7. **Sze S.M.,** Physics of semiconductor devices: Second Ed., John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1981.

8. **Tregulov V.V., Litvinov V.G., Ermachikhin A.V.,** Study of current flow mechanisms in a CdS/*por*-Si/*p*-Si heterostructure, Semiconductors. 52 (7) (2018) 891–896.

9. **Timokhov D.F., Timokhov F.P.,** Determination of structure parameters of porous silicon by the photoelectric method, Journal of Physical Studies. 8 (2) (2004) 173–177.

10. **Hadi H.A., Abood T.H., Mohi A.T., Karim M.S.,** Impact of the etching time and current density on capacitance-voltage characteristics of *p*-type of porous silicon, World Scientific News. 67 (2) (2017) 149–160.

11. **Berman L.S., Lebedev A.A.,** Emkostnaya spektroskopiya glubokih centrov v poluprovodnikah [Deep-center capacity spectroscopy in semiconductors] Nauka, Leningrad, 1981 (In Russian).

12. **Voitsekhovskii A.V., Nesmelov S.N., Dzyadukh S.M.,** Electrical characterizations of MIS structures based on variable-gap *n*(*p*)-HgCdTe grown by MBE on Si(013) substrates, Infrared Physics and Technology. 87 (December) (2017) 129–133.

13. **Zhang X.G.,** Electrochemistry of silicon and its oxide, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004.

14. **Goryachev D.N., Belyakov L.V., Sreseli O.M.,** Formation of thick porous silicon layers with insufficient minority carrier concentration, Semiconductors. 38 (6) (2004) 712–716.

15. **Venger E.F., Gorbach T.Ya., Kirillova S.I., et al.,** Changes in properties of a porous silicon/silicon system during gradual etching off of the porous silicon layer, Semiconductors. 36 (3) (2002) 330–335.

16. **Melnik N.N., Tregulov V.V.,** Photoluminescence and Raman studies of the structure of a thick porous silicon film, Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 42 (3) (2015) 77–80.

Received 20.03.2020, accepted 04.05.2020.

THE AUTHOR

TREGULOV Vadim V.
Ryazan State University named for S. Yesenin
46, Svobody St., Ryazan, 390000, Russian Federation
trww@yandex.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hasoon S.A., Ibrahim I.M., Raad M.S., Al-Haddad, Mahmood S.S.** Fabrication of nanostructure CdS thin film on nanocrystalline porous silicon // International Journal of Current Engineering and Technology. 2014. Vol. 4. No. 2. Pp. 594–601.

2. **Jafarov M.A., Nasirov E.F., Jahangirova S.A.** Nano-CdS/porous silicon heterojunction for solar cell // International Journal of Scientific and Engineering Research. 2015. Vol. 6. No. 7. Pp. 849–853.

3. **Шарма Б.Л., Пурохит Р.К.** Полупроводниковые гетеропереходы. Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1979. 232 с.

4. **Мамедов Г.М., Кукевеч А., Коня З., Кордаш К., Шах С.И.** Электрические и фотоэлектрические характеристики гетеропереходов *c*-Si/пористый-Si/CdS // Известия высших учебных заведений. Физика. 2018. Т. 61. № 9. С. 96–101.

5. **Eesa M.W., Abdullah M.M.** Porous silicon effect on the performance of CdS nanoparticles photodetector // International Journal of Current Engineering and Technology. 2016. Vol. 4. No. 6. Pp. 1372–1376.

6. **Фаренбух А., Бьюб Р.** Солнечные элементы: теория и эксперимент. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1987. 280 с.

7. **Зи С.М.** Физика полупроводниковых приборов: Пер. с англ. В 2 тт. Т. 1. М.: Мир, 1984. 456 с.

8. **Трегулов В.В., Литвинов В.Г., Ермачихин А.В.** Исследование механизмов токопрохождения в гетероструктуре CdS/*por*-Si/*p*-Si / Физика и техника полупроводников // 2018. Т. 52. № 7. С. 751–756.

9. **Timokhov D.F., Timokhov F.P.** Determination of structure parameters of porous silicon by the photoelectric method // Journal of Physical Studies. 2004. Vol. 8. No. 2. Pp. 173–177.

10. **Hadi H.A., Abood T.H., Mohi A.T., Karim M.S.** Impact of the etching time and current density on Capacitance–Voltage characteristics of *p*-type of porous silicon // World Scientific News. 2017. Vol. 67. No. 2. Pp. 149–160.

11. **Берман Л.С., Лебедев А.А.** Емкостная спектроскопия глубоких центров в полупроводниках. Л.: Наука, 1981. 176 с.

12. **Voitsekhovskii A.V., Nesmelov S.N., Dzyadukh S.M.** Electrical characterizations of MIS structures based on variable-gap *n*(*p*)-HgCdTe grown by MBE on Si(013) substrates // Infrared Physics and Technology. 2017. Vol. 87. December. Pp. 129–133.

13. **Zhang X.G.** Electrochemistry of silicon and its oxide. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. 510 p.

14. **Горячев Д.Н., Беляков Л.В., Сресели О.М.** Формирование толстых слоев пористого кремния при недостаточной концентрации неосновных носителей // Физика и техника полупроводников. 2004. Т. 38. № 6. С. 739–744.

15. **Венгер Е.Ф., Горбач Т.Я., Кириллова С.И., Примаченко В.Е., Чернобай В.А.** Изменение свойств системы пористый Si/Si при постепенном стравливании слоя пористого Si // Физика и техника полупроводников. 2002. Т. 36. № 3. С. 349–354.

16. **Мельник Н.Н., Трегулов В.В.** Исследование структуры толстой пленки пористого кремния методами фотолюминесценции и комбинационного рассеяния света // Краткие сообщения по физике ФИАН. Т. 42. № 3. 2015. С. 19–24.

Статья поступила в редакцию 20.03.2020, принята к публикации 04.05.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТРЕГУЛОВ Вадим Викторович – *кандидат технических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики и методики преподавания физики Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация.*

390000, Российская Федерация, г. Рязань, ул. Свободы, 46

trww@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.13203
УДК 532.517

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ RANS-МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАСЧЕТОВ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ, РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ВБЛИЗИ ВНЕЗАПНО НАГРЕТОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

А.М. Левченя, С.Н. Трунова, Е.В. Колесник

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлены результаты тестирования нескольких RANS-моделей турбулентности на примере решения задачи развития во времени свободной конвекции воздуха у поверхности внезапно нагретой безграничной вертикальной пластины. Результаты решения с использованием различных моделей сопоставлены с литературными данными, полученными методом прямого численного моделирования. Численные решения получены с применением четырех моделей, две из которых основаны на концепции изотропной турбулентной вязкости, а остальные предполагают решение уравнений переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Получены характеристики течения и теплообмена на разных стадиях развития пограничного слоя – от ламинарного режима до турбулентного. На основе сопоставления полученных результатов с данными прямого численного моделирования сделаны выводы о предсказательных возможностях рассмотренных RANS-моделей турбулентности.

Ключевые слова: свободная конвекция, RANS-моделирование, прямое численное моделирование, пограничный слой

Ссылка при цитировании: Левченя А.М., Трунова С.Н., Колесник Е.В. Оценка возможностей RANS-моделей турбулентности по результатам расчетов свободной конвекции, развивающейся вблизи внезапно нагретой вертикальной пластины // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 27–40. DOI: 10.18721/JPM.13203

ASSESSMENT OF RANS TURBULENCE MODELS CAPABILITIES BASED ON COMPUTATIONAL RESULTS FOR FREE CONVECTION DEVELOPING NEAR A SUDDENLY HEATED VERTICAL PLATE

A.M. Levchenya, S.N. Trunova, E.V. Kolesnik

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The results of testing several RANS turbulence models in solving a problem of free air convection temporal development near the surface of a suddenly heated infinite vertical plate have been presented in the paper. The solution results with the use of the different models were compared with the literature data obtained by direct numerical simulation. Numerical solutions were carried out using the four models, two of them based on the isotropic turbulent viscosity concept and the rest ones involved solving the transport equations of the Reynolds stress tensor components. The flow and heat transfer characteristics for different stages of boundary layer development, from laminar to turbulent, were analyzed. Based on a comparison with the literature data on direct numerical simulation, conclusions about the predictive capabilities of the RANS models considered were drawn.

Keywords: free convection, RANS simulation, time-developing, direct numerical simulation, boundary layer

Citation: Levchenya A.M., Trunova S.N., Kolesnik E.V., Assessment of RANS turbulence models capabilities based on computational results for free convection developing near a suddenly heated vertical plate, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 27–40. DOI: 10.18721/JPM.13203

Введение

Свободно-конвективное течение у поверхности нагретой вертикальной пластины привлекает внимание исследователей на протяжении долгого времени, поскольку правильное предсказание теплообмена в пограничном слое имеет важное значение для многих практических приложений. Одним из эффективных методов численного исследования развивающихся пограничных слоев является подход, при котором анализируется эволюция течения во времени (подход Time Developing).

Основная идея этого подхода заключается в рассмотрении временного развития пограничного слоя вместо его пространственного развития (подход Spatial), которое обычно наблюдается на практике. Таким образом время выступает как бы в роли координаты, в направлении которой происходит эволюция течения. Данный подход, по сравнению с методами, предполагающими моделирование течения, эволюционирующего по продольной (пространственной) координате, позволяет существенно сэкономить на размере расчетной области и, как следствие, на общем времени вычислений.

Подход Time Developing активно используется для моделирования динамического турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине [1, 2]. В частности, в работе [1] применяется ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока, для чего методом прямого численного моделирования (Time Developing Direct Numerical Simulation, далее TDDNS) решается модельная задача о росте пограничного слоя на безграничной пластине, которая находится в изотропно турбулизованной, в среднем покоящейся жидкости и внезапно приводится в движение в своей плоскости. Для задач свободной конвекции впервые данный метод был использован в работе [3], а многообещающие результаты расчетов по данному методу подробно представлены в статье [4].

Несмотря на то, что наиболее полные данные о ламинарно-турбулентном переходе способны дать только методы прямого численного моделирования, вопрос о том, насколько полуэмпирические RANS-модели турбулентности способны удовлетворительно описать переход, до сих пор остается актуальным [5]. Несомненный интерес представляет и оценка эффективности применения той или иной модели турбулентности для расчета течения в полностью развитом турбулентном свободно-конвективном пограничном слое как в случае моделей, основанных на концепции изотропной турбулентной вязкости [6], так и при использовании моделей рейнольдсовых напряжений [7].

Следует отметить, что проблема выбора подходящих моделей турбулентности особенно актуальна для расчета усложненных свободно-конвективных течений, в том числе для случая возмущения свободно-конвективных слоев препятствиями разного рода. Например, в работе [8] представлены результаты RANS-расчетов (с использованием модели SST k-ω) обтекания круглого цилиндра конечной высоты, закрепленного на вертикальной нагретой пластине, а в недавно опубликованной работе [9] – результаты расчетно-экспериментального исследования, выполненного для той же конфигурации.

Целью работы является оценка работоспособности ряда RANS-моделей турбулентности путем сопоставления полученных авторами численных решений с тестовыми (образцовыми) данными, имеющимися в литературе [4] для модельной задачи о развитии во времени свободной конвекции около вертикальной безграничной пластины. Расчеты проводились с использованием пакета ANSYS Fluent 18.2.

Метод TDDNS как источник тестовых данных

Рассматривается модельная задача о развитии свободной конвекции около безграничной, внезапно нагреваемой вертикальной пластины. Схема течения приведена на рис. 1. Параметры рассматриваемой в данном разделе задачи (она описана идентично работе [4]) соответствуют условиям ранее проведенных известных экспериментов [10], в которых изучалось развитие свободно-конвективного слоя вдоль вертикальной пластины (по пространственной координате). Они представлены в таблице.

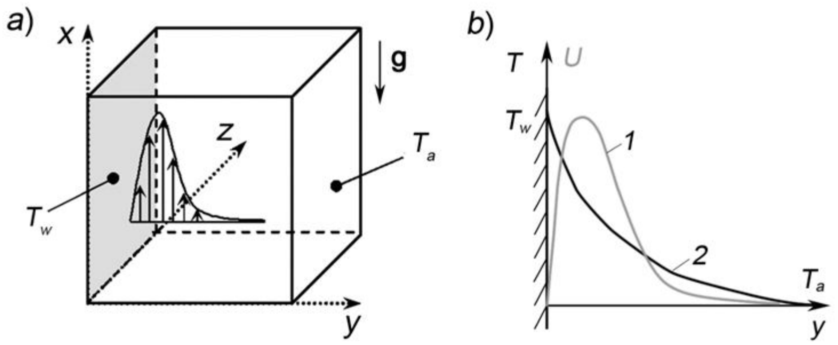


Рис. 1. Схема к постановке задачи развития турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя у нагретой вертикальной пластины: *a* – пластина (затушеванная область) с примыкающим к ней пространством окружающей среды (куб); *b* – графики распределения скорости (*1*) и температуры (*2*) окружающей воздушной среды по расстоянию до пластины

Т а б л и ц а

Значения параметров рассмотренной задачи

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Температура пластины	T_w	K	333,15
Температура окружающей среды	T_a	K	289,15
Плотность среды	ρ	кг/м^3	1,135
Вязкость среды	μ	Па·с	$1{,}906\cdot10^{-5}$
Коэффициент теплопроводности среды	λ	Вт/(м·K)	0,0274
Теплоемкость при постоянном давлении	c_p	Дж/(кг·K)	1006
Коэффициент термического расширения	β	1/K	$3{,}458\cdot10^{-3}$
Число Прандтля	Pr	–	0,71

П р и м е ч а н и я. 1. Физические свойства воздуха предполагаются постоянными, рассчитанными при средней температуре $T_f = (T_w + T_a)/2$.

2. Коэффициент β рассчитан при температуре $T = T_a$.

3. Число Прандтля $\mathrm{Pr} = c_p\mu/\lambda$.

Математическая модель, принятая за основу для описания турбулентной свободной конвекции несжимаемой ньютоновской среды с постоянными физическими свойствами, базируется на системе нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением баланса энергии, при учете эффектов плавучести в поле силы тяжести в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0;$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho \beta_T \left(T - T_a\right) g_i,$$

$$i = 1, 2, 3; \qquad (1)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial q_j}{\partial x_j}.$$

Здесь u_i – компоненты вектора скорости **V** в декартовой системе координат ($x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$); p (Па), T (К), ρ (кг/м^3), c_p (Дж/(кг·К) – давление, температура, плотность и теплоемкость воздуха.

Компоненты тензора молекулярных вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ за счет молекулярной теплопроводности определяются, соответственно, с помощью закона Фурье и реологического закона Ньютона:

$$q_j = -\lambda\left(\partial T / \partial x_j\right),\ j = 1, 2, 3; \qquad (2)$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ i, j = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

При вычислениях по методу TDDNS в качестве расчетной области выступает часть примыкающего к пластине пространства в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 1,*a*). Параллельная стенке внешняя граница рассматривается как проницаемая, с заданным на ней постоянным давлением p и температурой T_a. По однородным координатам (вертикальной x и трансверсальной z) ставятся условия периодичности. После расчета полей течения на очередном временном шаге проводится их осреднение вдоль однородных координат (вдоль осей x и z), что позволяет рассматривать нестационарную задачу как статистически одномерную, в которой осредненные параметры течения меняются только вдоль оси y (рис. 1,*b*).

Для построения безразмерных параметров, характеризующих состояние рассматриваемого течения в разные моменты времени, вводится понятие интегральной толщины скоростного пограничного слоя, которая определяется по следующей формуле (интегрирование по y ведется по всему внешнему пространству):

$$\delta = \int_0^\infty \frac{u}{U_m} dy. \qquad (4)$$

Вводится также понятие безразмерной температуры:

$$\theta = \left(T - T_a\right) / \left(T_w - T_a\right). \qquad (5)$$

Толщина температурного пограничного слоя δ_T определятся как координата y, где $\theta = 0{,}01$.

Число Грасгофа, число Нуссельта и безразмерное трение, построенные по толщине пограничного слоя, определяются следующим образом:

$$\mathrm{Gr}_\delta = g \beta \Delta T \delta^3 / \nu^2, \qquad (6)$$

$$\mathrm{Nu}_\delta = q_w \delta / (\lambda \Delta T), \qquad (7)$$

$$\overline{\tau} = \tau_w / (\rho g \beta \Delta T \delta), \qquad (8)$$

где $\Delta T = T_w - T_a$ – перепад температуры между пластиной и внешним пространством.

В работе [4] представлены подробные данные расчетной модели TDDNS по коэффициенту трения и числу Нуссельта в зависимости от числа Грасгофа, а также данные по профилям средних величин и характеристик турбулентности при нескольких значениях Gr_δ; эти данные и будут использованы в настоящей работе для сопоставления.

Постановка задачи на основе RANS-подхода

При расчете рассматриваемого, развивающегося во времени течения на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS) изначально вводится осреднение вдоль однородных координат (x и z). В результате получаются нестационарные одномерные уравнения относительно средней продольной составляющей скорости u и средней температуры T:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\left(\tau_{xy}+\tau_{t,xy}\right)}{\partial y}-\rho\beta_T\left(T-T_a\right)g,$$
$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(q_y+q_{t,y}\right), \tag{9}$$

при этом поперечная скорость v полагается равной нулю.

В возникающей одномерной нестационарной задаче, из всех составляющих тензора турбулентных напряжений и вектора турбулентного потока тепла остаются только составляющие $\tau_{t,xy}$ и $q_{t,y}$, отражающие турбулентный перенос по нормали к стенке:

$$\tau_{t,xy}=-\rho\overline{u'v'}, \tag{10}$$

$$q_{t,y}=-\rho c_p\overline{v'T'} \tag{11}$$

(штрихом обозначаются пульсационные составляющие, чертой сверху – осреднение по однородным координатам).

Система уравнений (9) является незамкнутой, поскольку необходимо определить способ расчета турбулентных составляющих тензора напряжений (10) и вектора плотности теплового потока (11). Для этого используются полуэмпирические модели турбулентности (их описание приводится ниже).

Отметим, что представляемые ниже решения получены по коду общего назначения ANSYS Fluent, в котором одномерные задачи решаются как двумерные, с введением условий трансляционной однородности. На стенке задается условие прилипания и постоянное значение температуры T_w. Параллельная стенке внешняя граница рассматривается как проницаемая с заданными на ней постоянными величинами давления и температуры. По однородной координате x ставятся условия периодичности. В начальный момент времени предполагается, что воздух находится при температуре T_a и является в среднем неподвижным, при этом в области присутствует начальная турбулентность, характеризуемая следующими параметрами: интенсивность турбулентности I = 0,1 %, отношение турбулентной вязкости к молекулярной $\nu_t/\nu = 0{,}1$.

Модели турбулентности

Приведем общую (трехмерную) формулировку моделей турбулентности, реализованных в коде ANSYS Fluent, которые используются для настоящих расчетов. Это две модели, основанные на гипотезе Буссинеска (SST k-ω и RNG k-ε), и две модели рейнольдсовых напряжений (DRSM Stress-Omega и DRSM Stress BSL).

В соответствии с гипотезой Буссинеска, связь между компонентами тензора турбулентных напряжений и турбулентного теплового потока с осредненными параметрами течения записывается в виде

$$\tau_{t,ij}=\mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}k\delta_{ij}, \tag{12}$$

$$q_{t,j}=-\lambda_t\left(\partial T/\partial x_j\right), \tag{13}$$

где $k=1/2\,\overline{u_i'u_i'}$ – кинетическая энергия турбулентности, μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, λ_t – коэффициент турбулентной теплопроводности;

$$\lambda_t=c_p\mu_t/\mathrm{Pr}_t. \tag{14}$$

В выражении (14) использована гипотеза о подобии процессов турбулентного переноса импульса и тепла, с введением понятия турбулентного числа Прандтля Pr_t, значение которого в расчетах полагается постоянным. Система замыкается полуэмпирической моделью турбулентности для определения коэффициента турбулентной вязкости μ_t. Представленные ниже результаты получены с использованием моделей SST k-ω и RNG k-ε, описание которых дано в работах [11, 12].

При использовании дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений, для каждой из шести независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i'u_j'}+\rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'}= =\left(D_{ij}^m+D_{ij}^t\right)+P_{ij}+\varphi_{ij}-\varepsilon_{ij}, \quad (15)$$

где D_{ij}^m, D_{ij}^t – слагаемые, отражающие молекулярный и турбулентный диффузионный перенос соответственно; P_{ij} – генерационный член; φ_{ij} – слагаемое, отвечающее за перераспределение энергии между компонентами тензора, ε_{ij} – диссипативный член.

Формулы для слагаемых, связанных с молекулярной диффузией D_{ij}^m и генерацией P_{ij}, записываются следующим образом (здесь не требуется введение каких-либо замыкающих соотношений):

$$D_{ij}^m=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right), \quad (16)$$

$$P_{ij}=-\rho\left[\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]. \quad (17)$$

Поскольку остальные члены уравнения (15) – D_{ij}^t, φ_{ij}, ε_{ij} – содержат моменты более высоких порядков, для их вычисления используются замыкающие соотношения, которые устанавливают связь этих слагаемых с осредненными параметрами потока.

Приведем конкретный вид соотношений для двух моделей, использованных в настоящей работе:

Stress-Omega (далее используется обозначение DRSM SO (Differential Reynolds Stress Model Stress-Omega)),

Stress BSL (обозначение DRSM BSL (Differential Reynolds Stress Model Stress-BSL)).

Данные модели отличаются друг от друга некоторыми замыкающими соотношениями и значениями констант.

Для слагаемого, отражающего турбулентный перенос, по аналогии с молекулярной диффузией, вводится коэффициент турбулентной диффузии, пропорциональный турбулентной вязкости:

$$D_{ij}^t=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right). \quad (18)$$

Согласно модели DRSM SO, коэффициент $\sigma_k = 2$.

По модели DRSM BSL, σ_k определяется соотношением

$$\sigma_k=F_1\sigma_{k,1}+(1-F_1)\sigma_{k,2}, \quad (19)$$

где $\sigma_{k,1} = 2{,}0$, $\sigma_{k,2} = 1{,}0$, а функция F_1 определяется формулами

$$F_1=\tanh\left(\Phi_1^4\right), \quad (20)$$

$$\Phi_1=\min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0{,}09\omega y},\frac{500\mu}{\rho y^2\omega}\right),\frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2}D_\omega^+y^2}\right], \quad (21)$$

$$D_\omega^+=\max\left(2\rho\frac{1}{\sigma_{\omega,2}}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j},10^{-10}\right), \quad \sigma_{\omega,2}=1{,}168, \quad (22)$$

где y – расстояние до стенки.

Слагаемое, отвечающее за перераспределение энергии между компонентами тензора, записывается в следующем виде:

$$\varphi_{ij}=-C_1\rho\beta_{RSM}^*\omega\left[\overline{u_i'u_j'}-(2/3)\delta_{ij}k\right]- -\hat\alpha_0\left[P_{ij}-(1/3)P_{kk}\delta_{ij}\right]-\hat\beta_0\left[D_{ij}-(1/3)P_{kk}\delta_{ij}\right]- -k\hat\gamma_0\left[S_{ij}-(1/3)S_{kk}\delta_{ij}\right], \quad (23)$$

$$D_{ij}=-\rho\left[\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right], \quad (24)$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]. \quad (25)$$

Для модели DRSM SO коэффициент β_{RSM}^* определяется следующим образом:

$$\beta_{RSM}^*=\beta^*f_\beta^*,\ \beta^*=0{,}09; \quad (26)$$

$$f_\beta^*=\begin{cases}1, & \chi_k\le 0,\\ \dfrac{1+640\chi_k^2}{1+400\chi_k^2}, & \chi_k>0;\end{cases} \quad (27)$$

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \tag{28}$$

Для модели DRSM BSL полагается $\beta^*_{RSM} = \beta^*$.

Значения остальных констант задаются следующими формулами (одинаковые для обеих моделей):

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{8 + C_2}{11},\ \hat{\beta}_0 = \frac{8C_2 - 2}{11},$$
$$\hat{\gamma}_0 = \frac{60C_2 - 4}{55}, \tag{29}$$

где $C_1 = 1{,}80$, $C_2 = 0{,}52$. (30)

Диссипативное слагаемое моделируется с привлечением дополнительной переменной – скалярной удельной диссипации ω:

$$\varepsilon_{ij} = (2/3)\delta_{ij}\rho\beta^*_{RSM}k\omega. \tag{31}$$

Значение константы β^*_{RSM} определяется так же, как и для слагаемого φ_{ij} (см. формулы (26) – (28)).

Кинетическая энергия турбулентности вычисляется по определению:

$$k = (1/2)\overline{u_i'u_i'}. \tag{32}$$

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывается по формуле

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega},\ \alpha^* = 1. \tag{33}$$

Для замыкания системы необходимо определить удельную диссипацию ω. Для этого, совместно с уравнениями относительно компонент тензора рейнольсовых напряжений (15), решается дифференциальное уравнение переноса относительно ω. Согласно модели DRSM SO, это уравнение имеет вид

$$\rho\frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega, \tag{34}$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \mu_t / \sigma_\omega,\ \sigma_\omega = 2. \tag{35}$$

Слагаемые G_ω, Y_ω, S_ω вычисляются в соответствии с моделью турбулентности k-ω [13].

Согласно модели DRSM BSL, в уравнение (34) относительно ω добавляется еще одно слагаемое (cross-diffusion term):

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho\frac{1}{\omega\sigma_{\omega,2}}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{36}$$

где значения функции F_1 вычисляются по формулам (20) – (22).

Остальные слагаемые рассчитываются в соответствии с моделью турбулентности BSL k-ω [14].

Для вычисления компонент турбулентного теплового потока, необходимых для замыкания осредненного уравнения энергии, используется градиентная гипотеза (13), (14); значение турбулентного числа Прандтля полагается равным 0,85.

Вычислительные аспекты

Расчетная область на плоскости xy представляет собой прямоугольник, при этом ее внешняя граница расположена на расстоянии 0,5 м от пластины. Расчетная сетка содержала 200 ячеек вдоль оси y и 5 ячеек вдоль однородной координаты x. Сгущение сеточных линий к поверхности пластины задавалось таким образом, чтобы обеспечить значение, меньшее единицы, для безразмерного расстояния от центра первой пристенной ячейки до стенки y^+ по всему рассчитываемому интервалу времени. Шаг по времени dt задавался равным 0,005 с. С целью анализа влияния шага по времени на результаты расчета был также проведен расчет с вдвое меньшим шагом.

Расчеты проводились с использованием программного пакета ANSYS Fluent 18.2. Для продвижения по времени использовался метод дробных шагов (Fractional Step Non-Iterative Time Advancement).

На этапе предварительных расчетов анализировалось влияние численных факторов на качество получаемых решений. На рис. 2,*а* показана зависимость y^+ от времени для всех моделей турбулентности. Видно, что

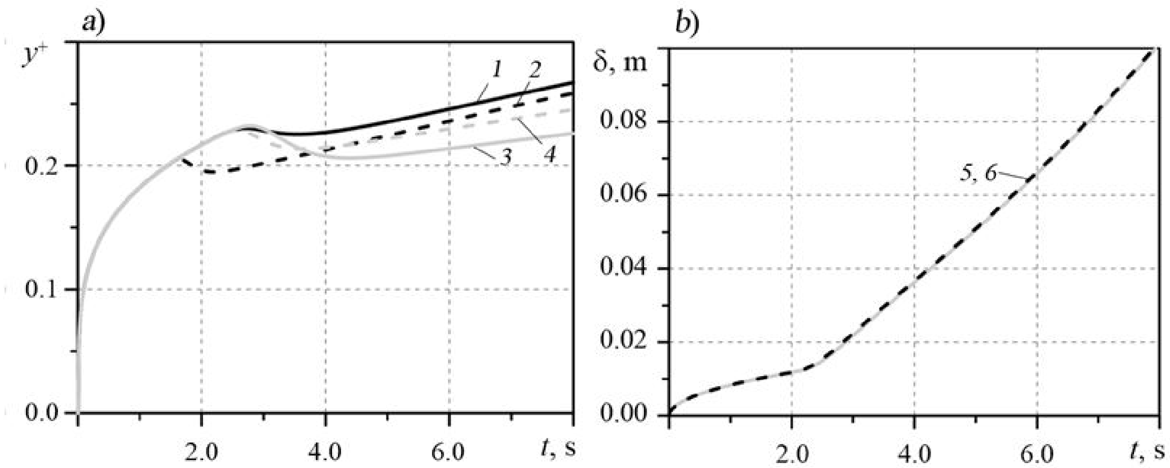


Рис. 2. Зависимости безразмерного расстояния y^+ (*a*) и толщины пограничного слоя (*b*) от времени. Сравнение результатов расчетов по различным моделям (*a*) и влияние шага по времени (*b*). Использованы модели SST k-ω (кривая *1* и рис. 2, *b*), RNG k-ε (кривая *2*), DRSM SO (*3*) и DRSM BSL (*4*); были взяты шаги dt = 0,0050 (*5*) и 0,0025 с (*6*)

значение y^+ меньше единицы на протяжении всего времени расчета. На рис. 2,*b* для модели SST k-ω представлены зависимости толщины пограничного слоя δ (она рассчитывалась как интегральная толщина по формуле (4)) от времени, полученные в расчетах с разными шагами по времени. Видно, что различия незначительны.

Результаты расчетов и обсуждение

Влияние модели турбулентности на рост толщины пограничного слоя. На рис. 3 приведены зависимости от времени интегральной толщины скоростного пограничного слоя, а также отношения толщин температурного и скоростного пограничных слоев; эти зависимости получены в расчетах с использованием рассматриваемых моделей турбулентности. На рис. 3,*a* наблюдаются три четко выраженные фазы развития пограничного слоя: вначале его толщина растет по закономерности нестационарного ламинарного слоя (до момента времени около 2 с), затем имеется короткий временной промежуток с псевдопроцессами ламинарно-турбулентного перехода, и далее пограничный слой развивается в соответствии с закономерностями турбулентного режима течения (зависимость толщины δ от времени близка к линейной).

Сравнение результатов, полученных с использованием разных моделей, показывает, что фаза ламинарного пограничного слоя предсказывается этими моделями одинаково (как и следовало ожидать), тогда как положение перехода и особенности роста пограничного слоя в области развитой турбулентности определяются применяемой моделью.

Самый быстрый рост толщины скоростного турбулентного пограничного слоя дает модель DRSM SO, а самый медленный – модель SST k-ω. Можно также отметить, что для всех моделей переход к турбулентности (точка характерного изменения зависимостей на графиках рис. 3) происходит одновременно, за исключением такового для модели RNG k-ε, у которой момент перехода происходит заметно раньше. Данная модель выделяется и поведением отношения толщины температурного слоя к интегральной толщине скоростного слоя: если в расчетах с использованием других моделей его значение выходит на практически постоянное значение при $t > 3$ с, то с применением этой модели наблюдается его снижение во времени.

Сопоставление с данными прямого численного моделирования. Полученные результаты расчетов сопоставляются с дан-

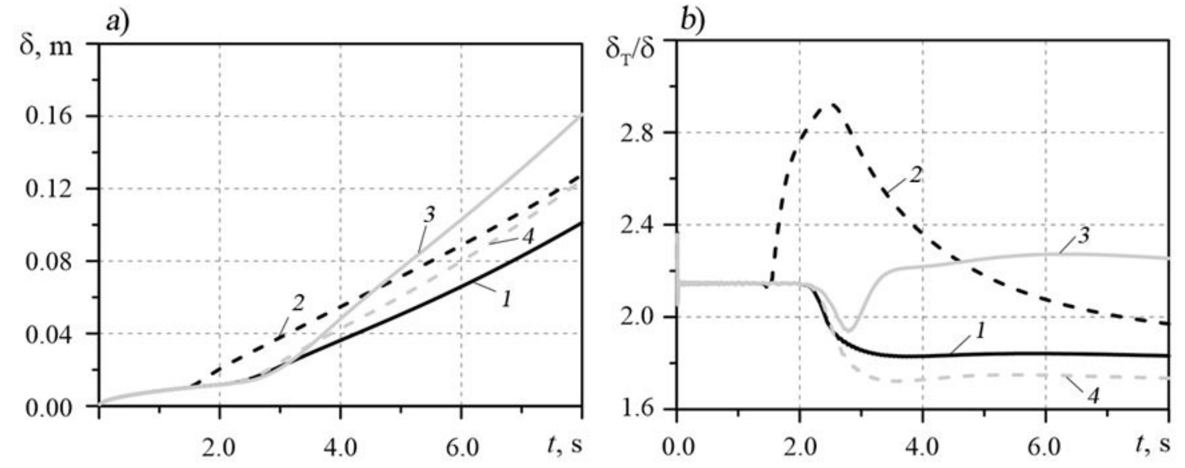


Рис. 3. Зависимости от времени интегральной толщины скоростного пограничного слоя (*a*) и отношения толщины температурного слоя к интегральной толщине скоростного слоя (*b*). Приведены результаты расчетов по различным моделям: SST k-ω (*1*), RNG k-ε (*2*), DRSM SO (*3*), DRSM BSL (*4*)

ными TDDNS, приведенными в работе [4].

Зависимости числа Нуссельта и безразмерного трения от числа Грасгофа, построенного по интегральной толщине пограничного слоя (см. формулы (6) – (8)), представлены на рис. 4, там же приведены данные TDDNS. Отметим, что для стадий ламинарного и полностью турбулентного течения полученные зависимости слабо различаются и хорошо согласуются с данными TDDNS. На стадии же перехода к турбулентности в поведении кривых наблюдаются заметные различия: по данным прямого численного моделирования, зависимость Nu_δ от Gr_δ имеет локальный максимум, тогда как согласно результатам RANS-моделирования, значение Nu_δ меняется монотонно; кроме того, все кривые лежат ниже TDDNS-точек (отличие составляет до 50 %). При этом зависимости, полученные по различным моделям, демонстрируют, в целом, одинаковое поведение во всех случаях, за исключением более раннего перехода к турбулентности, предсказанного моделью RNG k-ε (это уже отмечалось выше).

Анализ распределений во времени безразмерного трения показывает, что лучшее совпадение с данными прямого численного моделирования дает модель DRSM SO, а несколько завышенные значения предсказывает модель SST k-ω в области развитой турбулентности.

На рис. 5 сопоставляются данные TDDNS с профилями безразмерных скорости и температуры при значении числа Грасгофа $Gr_\delta = 5{,}94 \cdot 10^6$ (соответствует стадии развитого турбулентного течения). Анализ представленных результатов позволяет утверждать, что профили скорости, полученные во всех расчетах, довольно хорошо согласуются с данными TDDNS. Расхождения с TDDNS есть лишь во внешней области пограничного слоя – там, где наблюдается уменьшение скорости: модель RNG k-ε дает заниженные значения, а остальные модели – завышенные, однако эти отклонения не превышают 5 %. Что касается распределения температуры, то наилучшую согласованность с данными TDDNS показали модели DRSM BSL и RNG k-ε. Для двух других моделей наблюдаются существенные различия во внешней области пограничного слоя: модель SST k-ω дает завышенные на 15 – 20 % значения температуры, а модель DRSM SO – заниженные на 20 – 25 %.

Для вариантов расчетов, выполненных с использованием моделей рейнольдсовых напряжений (DRSM SO и DRSM BSL), на рис. 6 сопоставляются предсказываемые распределения по координате y компонент

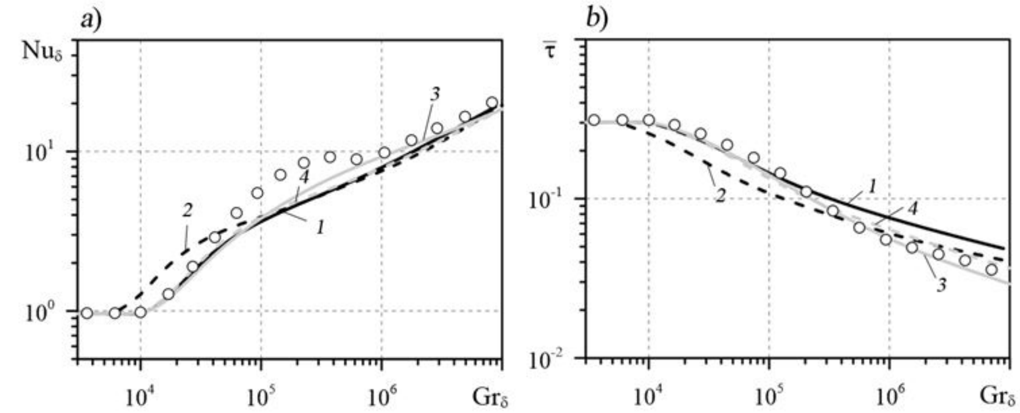


Рис. 4. Сопоставление рассчитанных зависимостей числа Нуссельта (*a*) и безразмерного трения (*b*) от числа Грасгофа (линии) с данными TDDNS (символы); числа Nu_δ и Gr_δ построены по толщине пограничного слоя. Нумерация кривых идентична приведенной на рис. 3

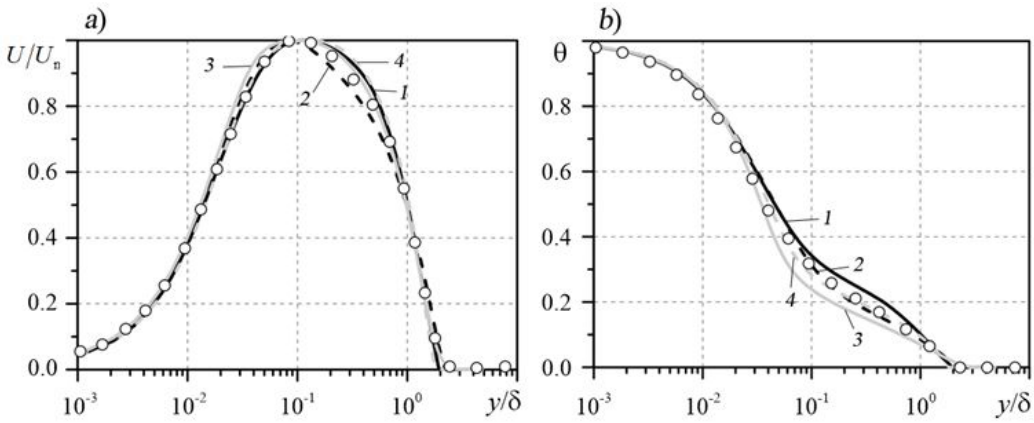


Рис. 5. Сопоставление рассчитанных профилей нормированной скорости (*a*) и температуры (*b*) (линии) с данными TDDNS (символы); $Gr_\delta = 5{,}94 \cdot 10^6$. Нумерация кривых идентична приведенной на рис. 3 и 4

тензора напряжений с данными прямого численного моделирования. Видно, что интенсивность пульсаций продольной компоненты скорости, рассчитанная по обеим DRSM-моделям, оказывается значительно заниженной во внутренней области пограничного слоя. Вычисленные распределения остальных компонент тензора хорошо согласуются с данными TDDNS, причем наилучшее соответствие наблюдается в случае модели DRSM SO.

Заключение

На задаче о развитии свободной конвекции у внезапно нагретой вертикальной пластины проведено тестирование двух полуэмпирических RANS-моделей турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска, и двух моделей рейнольдсовых напряжений. В качестве образцовых данных использованы результаты прямого численного моделирования по методу Time-Developing DNS [4].

Анализ результатов расчетов, проведенных с использованием разных моделей, показал, что скорость нарастания толщины пограничного слоя на стадии ламинарно-турбулентного перехода и в фазе развитого турбулентного слоя существенно зависит от используемой модели. Самое быстрое нарастание скоростного турбулентного пограничного слоя дает модель DRSM SO, а самое медленное – модель SST *k*-ω.

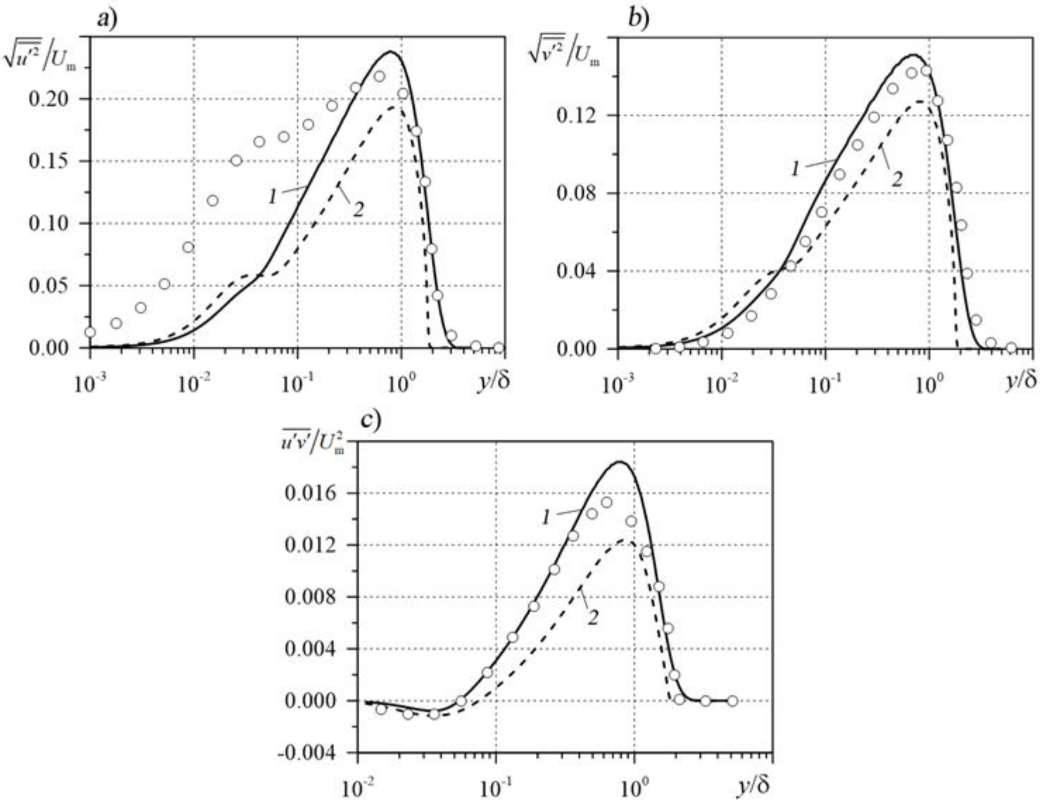


Рис. 6. Сопоставление рассчитанных профилей интенсивности пульсаций продольной (*a*) и поперечной (*b*) компонент скорости, а также профиля турбулентного касательного напряжения (*c*) (линии) с данными TDDNS (символы).
Показаны результаты расчетов по различным моделям: DRSM SO (*1*), DRSM BSL (*2*)

Для стадий формирования ламинарного и полностью турбулентного пограничных слоев предсказываемые зависимости числа Нуссельта и нормированного трения от числа Грасгофа, построенного по характерной толщине нарастающего слоя, хорошо согласуются с образцовыми данными TDDNS; при этом результаты, полученные по разным моделям, мало отличаются друг от друга; для величины безразмерного трения несколько лучшее совпадение с данными TDDNS дает модель DRSM SO.

Рассчитанные для фазы турбулентного слоя профили нормированной скорости находятся в хорошем согласии с данными TDDNS для всех рассмотренных моделей. Анализ результатов по профилям температуры показал, что наилучшую согласованность с образцовыми данными демонстрируют модели DRSM BSL и RNG k-ε. В случае моделей DRSM SO и SST k-ω наблюдаются существенные различия во внешней области пограничного слоя (около 20 %).

DRSM-модели довольно хорошо предсказывают поведение профилей турбулентного касательного напряжения и интенсивности пульсаций поперечной компоненты скорости, однако предсказываемая интенсивность пульсаций продольной компоненты скорости оказывается существенно заниженной во внутренней части пограничного слоя.

Итоги проведенных расчетов и анализа полученных результатов позволяют утверждать, что из числа рассмотренных RANS-моделей турбулентности наилучшую согласованность с образцовыми данными [4], которые получены методом TDDNS, продемонстрировала модель рейнольдсовых напряжений DRSM SO.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда 18-19-00082.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Устинов М.В.** Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 6. С. 77–93.

2. **Huang Z.F., Zhou H., Luo J.S.** Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer on a flat plate and its analysis // Science China. Ser. G: Physics, Mechanics & Astronomy. 2005. Vol. 48. No. 5. Pp. 626–640.

3. **Tsuji T., Kajitani T.** Turbulence characteristics and heat transfer enhancement of a natural convection boundary layer in water along a vertical plate // Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference (IHTC-13). Sydney, Australia, August 13–18. 2006. USA: Bigell House Inc, 2006.

4. **Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y.** Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. No. 19–20. Pp. 1723–1734.

5. **Abdollahzadeh M., Esmaeilpour M., Vizinho R., Younesi A., Pàscoa J.C.** Assessment of RANS turbulence models for numerical study of laminar-turbulent transition in convection heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 115. Part B. December. Pp. 1288–1308.

6. **Henkes R.A.W.M., Hoogendoorn C.J.** Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1989.Vol. 32. No. 1. Pp. 157–169.

7. **Peeters T.W.J., Henkes R.A.W.M.** The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1992. Vol. 35. No. 2. Pp. 403–420.

8. **Smirnov E.M., Levchenya A.M., Zhukovskaya V.D.** RANS-based numerical simulation of the turbulent free convection vertical-plate boundary layer disturbed by a normal-to-plate circular cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 144. December. P. 118573.

9. **Чумаков Ю.С., Левченя А.М., Храпунов Е.Ф.** Экспериментальное исследование течения в зоне влияния цилиндра, погруженного в свободноконвективный пограничный слой на вертикальной поверхности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 66–77.

10. **Tsuji T., Nagano Y.** Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1988. Vol. 31. No. 8. Pp. 1723–1734.

11. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. Vol. 4. Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. Antalya, Turkey. 12–17 October, 2003. Pp. 625–632.

12. **Orszag S. A., Yakhot V., Flannery W.S., Boysan F., Choudhury D., Maruzewski J., Patel B.** Renormalization group modeling and turbulence simulations // Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March 1993. P. 1031.

13. **Wilcox D.C.** Turbulence modeling for CFD. 2nd edition. La Canada, California: DCW Industries, 1998. 457 p.

14. **Menter F.R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32. No. 8. Pp. 1598–1605.

Статья поступила в редакцию 31.03.2020, принята к публикации 29.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛЕВЧЕНЯ Александр Михайлович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

levchenya_am@spbstu.ru

ТРУНОВА Серафима Николаевна – *студентка магистратуры Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

seraphimatr@yandex.ru

КОЛЕСНИК Елизавета Владимировна – *ассистент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

kolesnik_ev@mail.ru

REFERENCES

1. **Ustinov M.V.,** Numerical modeling of laminar-turbulent transition in a boundary layer at a high freestream turbulence level, Fluid Dynamics. 41 (6) (2006) 923–937.

2. **Huang Z.F., Zhou H., Luo J.S.,** Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer on a flat plate and its analysis, Science China. Ser. G: Physics, Mechanics & Astronomy. 48 (5) (2005) 626–640.

3. **Tsuji T., Kajitani T.,** Turbulence characteristics and heat transfer enhancement of a natural convection boundary layer in water along a vertical plate, Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference (IHTC-13). Sydney, Australia, August 13–18. 2006. USA: Bigell House Inc, 2006.

4. **Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y.,** Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate, International Journal of Heat and Mass Transfer. 52 (19–20) (2009) 1723–1734.

5. **Abdollahzadeh M., Esmaeilpour M., Vizinho R., et al.,** Assessment of RANS turbulence models for numerical study of laminar-turbulent transition in convection heat transfer, International Journal of Heat and Mass Transfer. 115, B (December) (2017) 1288–1308.

6. **Henkes R.A.W.M., Hoogendoorn C.J.,** Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate, International Journal of Heat and Mass Transfer. 32 (1) (1989) 157–169.

7. **Peeters T.W.J., Henkes R.A.W.M.,** The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate, International Journal of Heat and Mass Transfer. 35 (2) (1992) 403–420.

8. **Smirnov E.M., Levchenya A.M., Zhukovskaya V.D.,** RANS-based numerical simulation of the turbulent free convection vertical-plate boundary layer disturbed by a normal-to-plate circular cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer. 144 (December) (2019) 118573.

9. **Chumakov Yu.S., Levchenya A.M., Khrapunov E.F.,** An experimental study of the flow in the area of influence of a cylinder immersed in the free convective boundary layer on a vertical surface, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 66–77.

10. **Tsuji T., Nagano Y.,** Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate, International Journal of Heat and Mass Transfer. 31 (8) (1988) 1723–1734.

11. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.,** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model turbulence, Turbulence, Heat and Mass Transfer, Vol. 4. Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, 12–17 October, 2003, Pp. 625–632.

12. **Orszag S.A., Yakhot V., Flannery W.S., et al.,** Renormalization group modeling and turbulence simulations, In: Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March (1993) 1031.

13. **Wilcox D.C.,** Turbulence modeling for CFD, 2nd edition, DCW Industries, Inc. La

Canada, California, 1998.
14. **Menter F.R.,** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, AIAA Journal. 32 (8) (1994) 1598–1605.

Received 31.03.2020, accepted 29.04.2020.

THE AUTHORS

LEVCHENYA Alexander M.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
levchenya_am@spbstu.ru

TRUNOVA Seraphima N.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
seraphimatr@yandex.ru

KOLESNIK Elizaveta V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
kolesnik_ev@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.13204
УДК 530.1

ОПЕРАЦИЯ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ФУРЬЕ

М.Р. Петриченко, Т.А. Мусорина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Применяется алгебра неограниченных операторов дифференцирования t, действующая над кольцом дифференцируемых функций. Аналитическое представление дробной степени оператора t используется для построения резольвент трех предельных задач для уравнения Фурье. Периодические решения предельных задач Фурье в алгебре операторов дифференцирования совпадают с классическими решениями. Расширение t+2 – непрерывный спектр преобразования Фурье, позволяет получить точные решения трех предельных задач для области любой размерности $d > 1$.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, формула Лиувилля, кольцо операторов, обратный оператор, носитель, распределение

Ссылка при цитировании: Петриченко М.Р., Мусорина Т.А. Операция дробного дифференцирования в предельных задачах Фурье // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 41–52. DOI: 10.18721/JPM.13204

FRACTIONAL DIFFERENTIATION OPERATION IN THE FOURIER BOUNDARY PROBLEMS

M.R. Petrichenko, T.A. Musorina

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

We use the algebra of unbounded differentiation t operators acting on the ring of differentiable functions. The analytical representation of the fractional degree of the t operator is used to construct the resolvents of three boundary problems for the Fourier equation. Periodic solutions of limiting Fourier problems in the algebra of differentiation operators coincide with classical solutions. The t+2 extension is a continuous spectrum of the Fourier transform and allows us to obtain exact solutions of three limit problems for a domain of any dimension $d > 1$.

Keywords: differential equation, Abel–Liouville formula, ring of operators, inverse operator, carrier, distribution

Citation: Petrichenko M.R., Musorina T.A., Fractional differentiation operation in the Fourier boundary problems, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 41–52. DOI: 10.18721/JPM.13204

Введение

Классическая теория теплоустойчивости стеновых конструкций [1] использует аппарат теории рядов Фурье и, в известном смысле, порождается этим аппаратом. Это обстоятельство не случайно, поскольку автор указанной работы Г.А. Селиверстов являлся специалистам по теории рядов Фурье. Аппарат тригонометрических рядов достаточен, если предельные распределения температур внешних источников принадлежат L_p ($p > 1$) на множестве значений времени t. На таком множестве разложения Фурье сходятся почти везде. Но в приложениях приведенное условие избыточно. Как правило, распределение температуры источников в лучшем случае непрерывно, однако, согласно утверждению Е. Титчмарша [2], «ничего подобного для сходимости разложений Фурье почти всюду, доказать не удалось» [2, с. 420–421]. Аппарат Фурье-разложений становится неудобным в смешанной предельной задаче, особенно если внешний источник тепла зависит от параметра t (времени).

Настоящее исследование посвящено способам решения предельных задач для уравнения Фурье в виде равенств, содержащих функции от дифференциальных операторов и сравнению полученных распределений с известными точными решениями.

Актуальность данной работы связана с необходимостью решения задач теплоустойчивости строительных ограждений.

Ключевые подходы к решению задач

В данной работе сформулированы и обоснованы следующие утверждения.

1. Решение второй и третьей предельных задач для уравнения Фурье достигается из решения первой предельной задачи обращением оператора дифференцирования.

2. Меры носителей распределения первообразной $x(t,s)$, δ_x и производной первообразной $y:=-\partial x/\partial s$, δ_y в предельной задаче первого рода удовлетворяют неравенству $\delta_y/\delta_x \geq 1$.

3. Увеличение размерности области не увеличивает меры носителей распределения.

Вследствие утверждения 3 термическое сопротивление полупространства не превышает термического сопротивления полуплоскости; в свою очередь термическое сопротивление полуплоскости не превышает термического сопротивления полупрямой.

В качестве вспомогательного приема будет использоваться следующее представление ряда Тейлора (сдвига) для функций $f(t)$, аналитических на полупрямой $t > 0$, $f \in C^{\infty}(0,\infty)$:

$$f(t+s) = \exp(s\partial_t)\, f(t),$$

и его обращение

$$f(t) = \exp(-s\partial_t)\, f(t+s),$$

содержащие целые степени оператора дифференцирования ∂_t.

Простые выражения для мер носителей $\delta_{x,y}$

Использование операторных норм дробных степеней операторов ∂_t позволяет получить простые выражения для мер носителей $\delta_{x,y}$.

Предварительные сведения. Операция дробного дифференцирования связана с решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения произвольного целого положительного (натурального) порядка $s > 0$.

Пусть

$$t \in \mathfrak{D}(x) \subset \mathcal{C}^{(s)}\left(R^1\right),\, y \in \mathfrak{J}(x) \subseteq \mathfrak{L}_1^{(loc)}\left(R^1\right).$$

Тогда задача Коши

$$\partial_t^s x = y, \partial_t^r x(0) = 0, \quad r = 0(1)s-1, \partial_t := d/dt \tag{1}$$

имеет следующее решение [3]:

$$x(t) = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{s-1} y(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

или в символическом виде

$$x(t) = \partial_t^{-s} y(t). \tag{2а}$$

При s нецелом формула (2) допускает расширение:

$$\partial_t^{-s} y(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t (t-\tau)^{s-1} y(\tau)\, d\tau,$$

$$\Gamma(s) := (s-1)!,\; s > 0. \tag{2б}$$

Если $s = \sigma + i\rho$, $\sigma > 0$, то формула (2б) принимает вид

$$\partial_t^{-(\sigma+i\rho)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma+i\rho)}\int_0^t (t-\tau)^{\sigma-1} \Big(\cos\big(\rho \ln(t-\tau)\big) + i\sin\big(\rho\ln(t-\tau)\big)\Big) y(\tau)\, d\tau.$$

Пусть $s = 1/2$. Тогда, в силу выражения (2б), получаем формулу Абеля:

$$\partial_t^{-1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \tag{2в}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} y\left(t - z^2\right) dz.$$

С помощью полученной формулы (2в) можно рассчитать производные от степеней t, например,

$$\partial_t^{-1/2} 1 = 2\sqrt{t/\pi},\ \partial_t^{1/2} 1 = 1/\sqrt{t\pi},$$

$$\partial_t^{-1/2} t = \frac{4\sqrt{t^3}}{3\sqrt{\pi}},\ \partial_t^{1/2} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

и для всякого $n > 0$:

$$\partial_t^{-1/2} t^n = t^{n+1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)},$$

$$\partial_t^{1/2} t^n = t^{n-1/2} \frac{(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}.$$

Ясно, что при любом $0 < s < 1$ ядро оператора ∂_t^{-s}, $N(\partial_t^{-s})$ содержит только один элемент: $y = 0$.

Коммутация. По определению, справедливо следующее выражение:

$$\partial_t^{1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau =$$

$$= \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_t y(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau =$$

$$= \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}} + \partial_t^{-1/2}\left(\partial_t y(t)\right),$$

или

$$\left(\partial_t \partial_t^{-1/2} - \partial_t^{-1/2} \partial_t\right) y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}}. \tag{3}$$

Если $y(0) = 0$, то оператор ∂_t коммутирует со своей отрицательной дробной степенью, например – 1/2:

$$\left(\partial_t \partial_t^{-1/2} - \partial_t^{-1/2} \partial_t\right) y(t) = 0, \tag{3а}$$

или в симметрическом виде:

$$\partial_t^{-1/2} = \partial_t^{-1} \partial_t^{-1/2} \partial_t, \partial_t = \partial_t^{-1/2} \partial_t \partial_t^{1/2}.$$

Отсюда следует, что в коммутационном случае оператор ∂_t и его дробные степени самоподобны (автомодельны).

Если в задаче Коши (1)

$$y(t \pm t_0) - y(t) = 0, \forall |t| > 0,\ t > 0$$

– примитивный период и ищется периодическое решение такое, что

$$x(t \pm t_0) - x(t) = 0, \forall |t| > 0,$$

то условие периодичности можно заменить однородным условием [3]:

$$\partial_t^r x(-\infty) = 0,\ \ r = 0(1)s - 1,$$

и тогда решение периодической задачи Коши принимает вид

$$\partial_t^{-s} x(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{s-1}\, y(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \omega^{s-1} y(t-\omega) d\omega.$$

Пусть $s = 1/2$, и тогда предыдущая формула принимает вид

$$\partial_t^{-1/2} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y\left(t - z^2\right) dz. \tag{2г}$$

Таким образом, в периодической предельной задаче коммутант равен нулю и дробная степень оператора ∂_t перестановочна со свой обратной степенью.

Соотношения (2) – (2г) известны как равенства Абеля – Лиувилля [13]. Приложения к различным задачам механики имеются в работе Капуто (к сожалению, авторам данной статьи она недоступна; эта книга цитируется во многих более поздних работах, например в [5 – 17], где имеются дальнейшие ссылки).

Расширение 1. При любом $s > 0$ обращение оператора дробного дифференцирования имеет вид

$$\partial_t^{-s} x = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{t^s} y\left(t - z^{1/s}\right) dz$$

для апериодической задачи и вид

$$\partial_t^{-s} x = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} y\left(t - z^{1/s}\right) dz$$

– для периодической задачи.

Действительно, если

$$y(t \pm 1) - y(t) = 0, \forall |t| > 0,$$

то условие Коши на все производные имеет вид (по Ляпунову):

$$\partial_t^s x(-\infty) = 0.$$

Расширение 2. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра λ:

$$(\partial_t - \lambda) x(t) = y(t).$$

Очевидно, что ядро $\mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)$ оператора $\partial_t - \lambda$ состоит из экспонент $x(t) = \exp(\lambda t)$. Поэтому решение уравнения есть

$$x = (\partial_t - \lambda)^{-1} y + z, z \in \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda).$$

Уравнение

$$(\partial_t - \lambda)^n x(t) = y(t)$$

имеет решение

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-n} y(t) + (z),$$

$$(z) \in \mathfrak{N}\left((\partial_t - \lambda)^n\right).$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{N}(\partial_t - \lambda) \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^2 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^n.$$

Интегральное представление решения однородной задачи Коши имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \exp\left(\lambda(t-\tau)\right) y(\tau) d\tau.$$

Здесь ядро состоит из функций

$$P_{n-1}(t) \exp(\lambda t) = z(t) \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^n,$$

где $P_s(t)$ – полином степени s.

Продолжим решение однородной задачи Коши на дробные значения n:

$$x(t) = (\partial_{\hat{a}} - \lambda)^{-n} y(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \exp\left(\lambda(t-\tau)\right) y(\tau) d\tau.$$

Пусть $n = 1/2$; тогда

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\exp\left(\lambda(t-\tau)\right)}{\sqrt{t-\tau}} y(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(\lambda z^2\right) y\left(t - z^2\right) dz.$$

Для сходимости интегралов достаточно выполнения следующего условия для вещественной части числа λ: $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Аналогично, периодическое решение имеет вид

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-1/2} y(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(\lambda z^2\right) y\left(t - z^2\right) dz.$$

Расширение 3. Для произвольного $n > 0$ формулы обращения дробных степеней оператора имеют вид

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{t^n} \exp\left(\lambda z^{1/n}\right) y\left(t - z^{1/n}\right) dz$$

для апериодической задачи и вид

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \exp\left(\lambda z^{1/n}\right) y\left(t - z^{1/n}\right) dz$$

– для периодической задачи, причем $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Систематическое изложение этого расширения имеется в монографии [13], но тривиальная замена $\sqrt{t} = z$, по-видимому, авторами не использовалась. Эта замена удобна тем, что позволяет представить оператор дробного дифференцирования в виде интеграла вероятностей. Действительно, в формуле (2г) подынтегральную функцию можно разложить в ряд Тэйлора:

$$x\left(t - z^2\right) = \exp\left(-z^2 \partial_t\right) x\left(t\right),$$

и тогда сразу же получается левая часть формулы (2г).

В работах Дж. Нэша и Н.О. Кейпера, используемых в монографии М.М. Громова [18], сформулирован так называемый h-принцип: дифференциальные операторы R, связывающие частные производные, рассматриваются как алгебраические соотношения для частных производных.

Обоснование h-принципа содержит книга [18], где имеется библиография публикаций, доведенная до 1990 г. Пространства Соболева функций, имеющих (обобщенные) производные дробного порядка, изучены Л.Н. Слободецким в цикле работ [19, 20], развивающих ранние идеи И.Я. Бакельмана [21] по геометрической теории уравнений.

Анализ предельных задач Фурье для полупрямой $s > 0$

Первая предельная задача. Рассмотрим первую предельную задачу в неограниченной области $t > 0$, $s > 0$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, x\left(t, 0\right) = x_0\left(t\right). \qquad (4)$$

Найдем формальное решение этой предельной задачи методом разделения переменных.

Пусть

$$x\left(t, s\right) = \exp\left(-s\alpha\right) x_0\left(t\right), \qquad (5)$$

причем параметр $\alpha > 0$, что гарантирует убывание $x(t,s)$, равномерное по t. В этом случае подстановка равенства (5) в уравнение задачи (4) приводит к условию

$$\exp\left(-s\alpha\right)\left(\partial_t - \alpha^2\right) x_0\left(t\right) = 0,$$

откуда получается, что $\alpha = \partial_t^{1/2}$, и, в силу равенства (5), решение предельной задачи (4) имеет вид

$$x\left(t, s\right) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0\left(t\right). \qquad (6)$$

***Верификация решения* (6).** *Шаг* 1. Классическое решение предельной задачи (4) имеет следующий вид:

$$x\left(t, s\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{s}{2\sqrt{t}}}^{\infty} x_0\left(t - \frac{s^2}{4z^2}\right) \exp\left(-z^2\right) dz. \qquad (7)$$

Функцию $x_0\left(t - \frac{s^2}{4z^2}\right)$ разложим в ряд Тейлора по степеням $\frac{s^2}{4z^2}$:

$$x_0\left(t - \frac{s^2}{4z^2}\right) = \exp\left(-\frac{s^2 \partial_t}{4z^2}\right) x_0\left(t\right).$$

Тогда решение (7) принимает вид [4]:

$$x\left(t, s\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{s}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left(-z^2 - \frac{s^2 \partial_t}{4z^2}\right) dz\left(x_0\left(t\right)\right). \qquad (7а)$$

Но, как известно из учебного курса анализа бесконечно малых, разработанного Ш.-Ж. Валле-Пуссеном[3],

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-u^2 - \alpha / u^2\right) du = \exp\left(-2\sqrt{\alpha}\right).$$

Поэтому, если нижний предел в интеграле (7а) равен нулю, то формула (7а) совпадает с формулой (6). Таким образом, формула (7а) принимает следующий вид:

$$x\left(t, s\right) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0\left(t\right) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{s}{2\sqrt{t}}} \exp\left(-z^2 - \frac{s^2 \partial_t}{4z^2}\right) dz \cdot x_0\left(t\right). \qquad (7б)$$

Следовательно, при значениях $\frac{s}{2\sqrt{t}} \ll 1$ формулы (7б) и (6) дают близкие результаты.

Шаг 2. Если $x_0(t)$ – периодическая функция времени, т.е.

$$x_0(t \pm t_0) = x_0(t),$$

где $t_0 < 0$ – примитивный период, то вместо решений (7), (7а) и (7б) получим решение вида

$$x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x_0\left(t - \frac{s^2}{4z^2}\right) \exp\left(-z^2\right) dz, \quad (7в)$$

и тогда решения (7в) и (6) тождественны. Чтобы это показать, достаточно разложить подынтегральную функцию в решении (7в) в ряд Тейлора, и тогда получим:

$$x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-z^2 - \frac{s^2 \partial_t}{4z^2}\right) dz \cdot x_0(t) =$$
$$= \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0(t),$$

что и доказывает такую тождественность.

Итак, формула (6) и следствия из нее справедливы для периодического по параметру t предельного значения $x(t,0) = x_0(t)$, т.е. для решения квазистационарной предельной задачи теплопроводности.

Вторая предельная задача. Из формулы (6) вытекает, что взятая с обратным знаком производная $y(t,s) = -\frac{\partial x}{\partial s}$ вычисляется следующим образом:

$$y(t,s) = \partial_t^{1/2} \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0(t). \quad (8)$$

Пусть $s = 0$. В силу выражения (8),

$$y(t,0) := y_0(t) = \partial_t^{1/2} x_0(t),$$
$$x_0(t) = \partial_t^{-1/2} y_0(t),$$

и решение второй предельной задачи, в силу решения (6), имеет вид

$$x(t,s) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) \partial_t^{-1/2} y_0(t). \quad (9)$$

Третья предельная задача. Указанная задача для уравнения Фурье формулируется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s=0} + \beta\left(x_e - x_0\right) = 0, \quad (10)$$

где x_e – потенциал внешнего источника, β – коэффициент переноса.

Тогда равенство (10) принимает вид

$$\left(\partial_t + \beta\right) x_0(t) = \beta\, x_e,$$

откуда следует, что

$$x_0(t) = \left(\partial_t + \beta\right)^{-1}\left(\beta x_e\right),$$

$$x(t,s) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right)\left(\left(\partial_t + \beta\right)^{-1}\left(\beta\, x_e\right)\right). \quad (11)$$

Итак, если предельные параметры y_0, x_e, β – периодические функции времени, то решения (9) и (11) совпадают с классическими решениями.

Мера носителей распределений для полупрямой $s > 0$

Носитель распределения $x(t,s)$, $\mathrm{supp}(x(t,s))$ определяем как множество значений координаты s, на котором сосредоточено распределение $x(t,s)$. Для непрерывной плотности распределения $x(t,s)$, носитель определим как толщину x-слоя, отнесенную к предельному значению плотности, $x_0(t)$:

$$\delta_x(t) := \frac{1}{x_0} \int_0^\infty x(t,s)\, ds.$$

В силу решения (6), толщина x-слоя выразится как

$$\delta_x(t) = \frac{\partial_t^{-1/2} x_0(t)}{x_0(t)}.$$

В случае периодического распределения $x_0(t)$ указанная толщина следует выражению

$$\delta_x(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, x_0(t)} \int_0^\infty x_0\left(t - z^2\right) dz.$$

Аналогично, толщина y-слоя выразится как

$$\delta_y(t) := \frac{1}{y_0(t)} \int_0^\infty y(t,s)\, ds = \frac{x_0(t)}{\partial_t^{1/2} x_0(t)} =$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{x_0(t)}{\int_0^\infty \dot{x}\left(t-z^2\right)dz},$$

причем точкой обозначена производная по всему аргументу $t-z^2$.

Лемма 1. *Отношение толщин слоев («форм-параметр»), которое выражается формулой*

$$\delta_y / \delta_x = \frac{x_0^2}{\partial_t^{1/2}x_0\cdot\partial_t^{-1/2}x_0} =$$

$$=\frac{\pi x_0^2(t)}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty x_0\left(t-z^2\right)dz\right)^2\right)^{-1},$$

имеет значение не менее единицы для всякого ограниченного распределения $x_0(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, приведенное выражение можно записать в виде

$$\delta_y / \delta_x = \frac{\pi}{2}\frac{\partial_t^{-1}x_0^2}{\left(\partial_t^{-1}x_0\right)^2} \geq \frac{\pi}{2} > 1.$$

Здесь для оценки интегралов использовано неравенство Коши.

В качестве иллюстрации справедливости доказанной леммы приведем пример, позволяющий непосредственно подсчитать длины носителей. Для прямой (луча) $s > 0$ распределение $x(t,s)$ имеет вид

$$x(t,s)=\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right),$$

причем

$$x(t,0):x_0(t)-1=x(0,s)=0.$$

Тогда получим следующие формулы:

$$y(t,s):=-\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{t\pi}}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right),$$

$$y(t,0):=y_0(t)=\frac{1}{\sqrt{t\pi}},$$

$$\delta_x = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$

$$\delta_y = \sqrt{t\pi},$$

$$\delta_y / \delta_x = \pi / 2.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x):=\int_x^\infty \exp\left(-at^m\right)dt, f(0)=\int_0^\infty \exp\left(-at^m\right)dt,$$

где a, m — положительные постоянные, и

$$-f'(x):=\varphi(x)=\exp\left(-ax^m\right), -f(0)=1.$$

Тогда отношение длин носителей функции $f(x)$ и ее деривативa $-f'(x)=\varphi(x)$ (соответственно δ_φ,δ_f) составит значение не менее единицы:

$$\mathcal{K}:=\delta_\varphi/\delta_f=\frac{1}{m}\frac{\left(\Gamma(1/m)\right)^2}{\Gamma(2/m)}\geq 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, справедливы следующие формулы:

$$\delta_f=\frac{\int_0^\infty t\exp\left(-at^m\right)dt}{\int_0^\infty \exp\left(-at^m\right)dt,},$$

$$\delta_\varphi=\int_0^\infty \exp\left(-at^m\right)dt,$$

$$\mathcal{K}=\frac{\left(\int_0^\infty \exp\left(-at^m\right)dt\right)^2}{\int_0^\infty t\exp\left(-at^m\right)dt},$$

и остается привести интегралы к эйлеровскому виду.

Лемма 2 доказана.

Результат леммы 2 можно переписать иначе, если использовать формулу удвоения для функции $\Gamma(z)$ [2, 3]:

$$\mathcal{K}=\frac{\pi}{2^{2/m-1}m}\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(1/m+1/2)}.$$

Пусть $m = 1$, тогда $\mathcal{K} = 1$; если $m = 2$, то $\mathcal{K} = \pi/2$. Легко доказать, используя асимптотику Г-функции, что $\mathcal{K} \underset{m\to\infty}{\to} \infty$.

Итак, для целых убывающих распределений порядка $m > 1$ мера (длина) носителя распределения не превосходит меры носителя дериватива распределения.

В задачах теплопроводности стеновых ограждений величина представляет собой отношение полного сопротивления к активному для одномерной теплопроводной среды (полупрямой $s > 0$) [22].

Предельные задачи Фурье для полуплоскости $s > 0$, $|u| < \infty$

Пусть

$$D(x) = (t,s,u\colon t > 0,\ s > 0,\ |u| < \infty),$$

где u – вторая координата.

Выполняется уравнение Фурье

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \nabla^2_{s,u} x$$

и предельное условие первого рода

$$x(t,0,u) = x_0(t,u).$$

Интегральное по аргументу u преобразование

$$x(t,s,u),\quad \hat{x} = \hat{x}(t,s)$$

определяем как

$$\hat{x}(t,s) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t,s,v)\exp(i\omega v)dv,$$

где верхним значком ^ обозначено преобразование Фурье функции $x(t,s,u)$ по аргументу u.

Преобразование Фурье функции $x(t,s,u)$ удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right)\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial s^2}. \qquad (12)$$

Уравнение (11) можно получить из уравнения (4) путем замены оператора ∂_t оператором

$$\partial_{t,\omega} = \partial_t + \omega^2,$$

где ω – спектральное число.

Предельное условие первого рода ставится как

$$\hat{x}(t,0) = \hat{x}_0(t). \qquad (13)$$

Тогда, по аналогии с решением (6), получаем:

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\hat{x}_0(t). \qquad (6а)$$

Далее, решение второй предельной задачи имеет вид

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\partial^{-1/2}_{t,\omega}\hat{y}_0(t), \qquad (9а)$$

$$\hat{y}_0(t) := -\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial s}\right)_{s=0}.$$

Наконец, решение третьей предельной задачи следует выражению

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\times \times\left(\left(\partial_{t,\omega} + \hat{\beta}\right)^{-1}\left(\hat{\beta x_e}\right)\right). \qquad (11а)$$

В итоге формулы (6а), (9а) и (11а) совпадают с точными решениями периодических предельных задач и получаются из решений одномерных задач заменой оператора ∂_t оператором $\partial_{t,\omega}$.

Обобщение анализа. Уравнение Фурье относительно координат $s, u_1, \ldots, u_{d-1}$ для случая $d > 1$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \sum_{i=1}^{d-1}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i^2},$$

В результате $(d - 1)$-кратного применения преобразования Фурье уравнение записывается как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right)\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial s^2},\quad \Omega^2 := \sum_{i=1}^{d-1}\omega_i^2.$$

В привычных обозначениях решение первой предельной задачи имеет вид

$$\hat{x}(t,s)=\exp\left(-s\partial_{t,\Omega}^{1/2}\right)\hat{x}_0, \qquad (6б)$$

где для $(d-1)$-кратного преобразования Фурье введено обозначение

$$\hat{x}_0(t,\omega_1,...,\omega_{d-1})=\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\times$$

$$\times\int_0^\infty dv_1...\int_0^\infty dv_{d-1}x_0(t,0,v_1,...,v_{d-1})\times$$

$$\times\exp\left(i\sum_{i=1}^{d-1}\omega_i v_i\right).$$

Обратное преобразование Фурье следует представить как

$$x_0(t,0,u_1,...,u_{d-1})=\int_0^\infty d\omega_1...\int_0^\infty d\omega_{d-1}\times$$

$$\times\hat{x}_0(t,\omega_1,...,\omega_{d-1})\exp\left(-i\sum_{i=1}^{d-1}\omega_i u_i\right).$$

Если $x_0(t, 0, u_1, \ldots, u_{d-1})$ – периодическая функция аргумента t, то формула (6б) совпадает с точным решением первой предельной задачи Фурье. Формулы (9а) и (11а) также сохраняют силу при замене нижнего индекса ω на индекс Ω.

Возвратимся к задаче теплопроводности, упомянутой в конце раздела «Мера носителей распределений для полупрямой $s > 0$». Можно доказать, что с увеличением размерности бесконечной области, занятой скалярной теплопроводной средой, ее термическое сопротивление не возрастает с увеличением размерности области $d > 1$.

Действительно, для любого значения $d > 1$

$$\left\|\partial_t+\sum_{1\le i\le d-1}\omega_i^2\right\|^{-s}\le\left\|\partial_t^{-s}\right\|\le\left\|\partial_t\right\|^{-s}.$$

Выводы

Применение алгебры неограниченных операторов дифференцирования и проведенный анализ результатов позволили сформулировать следующие заключения.

1. Неограниченный оператор дробного дифференцирования над кольцом непрерывных функций допускает обращение (оно известно как формула Абеля – Лиувилля). Обратный оператор ограничен на функциях из множества $L_1(0,t)$, где $t \le \infty$. Решение второй и третьей предельных задач Фурье получается как результат обращения дифференциального оператора первой предельной задачи.

2. В квазистационарной (периодической) предельной задаче оператор ∂_t коммутирует с любой дробной обратной степенью. В апериодических задачах коммутации степеней оператора нет.

3. Для целых убывающих распределений порядка $m > 1$, мера (длина) носителя распределения $x(t,s)$ не превосходит меры носителя деривратива распределения $y(t,s) = \partial x/\partial s$. Другими словами, толщина пограничного слоя потока тепла (убывающего распределения порядка $m - 1$) должна быть не менее толщины температурного пограничного слоя.

4. Увеличение размерности области $D(x)$ определения искомой функции $x(t,s)$ не увеличивает меры носителей $\mathrm{supp}(x)$ и $\mathrm{supp}(y)$, при этом $y = \|\nabla x\|$, ($\|\nabla x\|$ – евклидова норма скалярной функции $x(t,s)$). Мера носителя распределения не превосходит меры носителя его производной для любых целых убывающих распределений порядка $m > 1$. Поэтому термическое сопротивление области $D(x)$ с увеличением ее размерности не возрастает: вектор **y** теплового потока получает дополнительную компоненту (дополнительную степень свободы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Селивестров Г.А.** Математическая теория теплоустойчивости // Математический сборник. 1931. Т. 38. № 3–4. С. 70–73.

2. **Титчмарш Е.** Теория функций. Пер. с англ. В.А. Рохлина. М.: Наука, 1980. 464 с.

3. **Валле-Пуссен Ш-Ж.** Курс анализа бесконечно малых. Пер. с франц. Г.М. Фихтенгольца. В 2 тт. Т. 2. Москва – Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1933. 464 с.

4. **Жукова-Малицкая Г.К., Кузьмин Ю.Н.** Математическая физика. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1974. С. 81, задача № 185.

5. **Metzler R., Klafter J.** The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach // Physics Reports. 2000. Vol. 339. No. 1. Pp. 1–77.

6. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

7. **Нахушев А.М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

8. **Псху А.В.** Решение краевых задач для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.

9. **Псху А.В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

10. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 272 p.

11. **Le Mehauté A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.** (Eds.) Fractional differentiation and its applications. In 3 Vols. Vol. 1. Bordeaux: Bordeaux University, 2005. 251 p.

12. **Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.** Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 4. С. 54–68.

13. **Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н.** О применении дробного исчисления Римана – Лиувилля для описания распределений вероятностей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 18. 21 с. Режим доступа: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014.

14. **Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.** Симметрийные свойства дифференциальных уравнений переноса дробного порядка // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9. № 1. С. 59–64.

15. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.** Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. No. T136. P. 014016.

16. **Ibragimov N.H.** (Ed.). CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1. CRCPress, Boca Raton, 1994. 430 p.

17. **Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.** Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 34. С. 3–83.

18. **Громов М.** Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990. 534 с.

19. **Слободецкий Л.Н.** Обобщенные пространства Соболева и их приложения к краевым задачам в частных производных // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.

20. **Слободецкий Л.Н.** Оценка в L_p решений эллиптических систем // Доклады Академии наук СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 616–619.

21. **Бакельман И.Я.** Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Физматлит, 1962. 340 с.

22. **Мусорина Т.А., Заборова Д.Д., Петриченко М.Р.** Математический аппарат для определения термического сопротивления скалярной среды // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 8. С. 1037–1045.

Статья поступила в редакцию 31.10.2019, принята к публикации 05.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, профессор Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

МУСОРИНА Татьяна Александровна – *ассистент Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
flamingo-93@mail.ru

REFERENCES

1. **Selivestrov G.A.,** Mathematical theory of thermostable, Matematicheskii Sbornik. 38 (3–4) (1931) 70–73.

2. **Titchmarsh E.C.,** The theory of functions, 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, 1939.

3. **De laVallée-Poussin Ch.-J.,** Cours d'analyse infinitésimale, Paris, 1914.

4. **Zhukova-Malitskaya G.K., Kuzmin Yu.N.,** Matematicheskaya fizika [Mathematical physics], Leningrad Polytechnic Institute Publishing, Leningrad, 1974, P. 81, Example 185 (in Russian).

5. **Metzler R., Klafter J.,** The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, Physics Reports. 339 (1) (2000) 1–77.

6. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.,** Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and their applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).

7. **Nakhushev A.M.,** Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).

8. **Pskhu A.V.,** Solution of a boundary value problem for a fractional partial differential equation, Differential Equations. 39 (8) (2003)1150–1158.

9. **Pskhu A.V.,** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional partial differential equations], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).

10. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.,** Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

11. **Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.** (Eds.), Fractional differentiation and its applications, Bordeaux University, Bordeaux, 2005.

12. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, Ufa Mathematical Journal. 4 (4) (2012) 54–67.

13. **Zenyuk D.A., Orlov Yu.N.,** On the application of Riemann–Liouville fractional calculus to the analysis of probability distributions, Keldysh Institute preprints, 2014, 018. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014.

14. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Simmetriynyye svoystva differentsialnykh uravneniy perenosa drobnogo poryadka [Symmetrical properties of fractional differential transfer equations], Transactions of Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences. 9 (1) (2012) 59–64 (in Russian).

15. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Symmetry properties of fractional diffusion equations, Physica Scripta. (T136) (2009) 014016.

16. **Ibragimov N.H.** (Ed.), CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1. Symmetries, exact solutions, and conservation laws, CRC Press Inc., Boca Raton (1994).

17. **Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh.,** Nelokalnyye simmetrii. Evristicheskiy podkhod [Nonlocal symmetries, Heuristic approach], In: Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya "Sovremennye Problemy Matematiki. Noveyshie Dostizheniya", VINITI, Moscow. 34 (1989) 3–83.

18. **Gromov M.,** Partial differential relations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

19. **Slobodetskiĭ L.N.,** Obobshchennyye

prostranstva Soboleva i ikh prilozheniya k krayevym zadacham v chastnykh proizvodnykh [Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems in partial derivatives], Uchenyye Zapiski of LSPI named after Herzen. 197 (1958) 54–112.

20. **Slobodetskiĭ L.N.,** Estimates in L_p of solutions of elliptic systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 123 (4) (1958) 616–619(in Russian).

21. **Bakelman I.Ya.,** Geometricheskiye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy [Geometric methods for solving elliptic equations], Fizmatlit, Moscow, 1962 (in Russian).

22. **Musorina T.A., Zaborova D.D., Petrichenko M.R.,** Mathematical apparatus for determination of homogenous scalar medium thermal resistance, Vestnik MGSU. 14 (8) (2019) 1037–1045 (in Russian).

Received 31.10.2019, accepted 05.04.2020.

THE AUTHORS

PETRICHENKO Mikhail R.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fonpetrich@mail.ru

MUSORINA Tatiana A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
flamingo-93@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.13205
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ЦЕПОЧКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМНО-ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ОБЩИМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ЧИСЛОМ

А.С. Бердников[1], К.В. Соловьев[2,1], Н.К. Краснова[2]

[1] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение свойств взаимно-однородных функций (ВОФ), которые являются обобщением функций, однородных по Эйлеру; ВОФ могут использоваться при синтезе электрических и магнитных полей электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами. Рассматривается цепочка функций, соответствующая кратным вещественным собственным значениям матрицы базовых функциональных уравнений для ВОФ. Выведены функциональные соотношения, характеризующие такие функции, а также общие формулы для функций, являющихся решениями полученных функциональных соотношений. Показано, что полученный класс функций представляет собой уточнение присоединенных однородных функций Гельфанда. Исследованы типичные дифференциальные и интегральные свойства полученного класса функций, а для дифференцируемых функций доказано обобщение теоремы Эйлера (критерий Эйлера).

Ключевые слова: функциональное уравнение, однородная функция, присоединенная однородная функция, взаимно-однородные функции

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Цепочки фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 53–71. DOI: 10.18721/JPM.13205

CHAINS OF FUNDAMENTAL MUTUALLY HOMOGENEOUS FUNCTIONS WITH A COMMON REAL EIGENVALUE

A.S. Berdnikov[1], K.V. Solovyev[2,1], N.K. Krasnova[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This work continues our studies in properties of the mutually homogeneous functions (MHF) being a generalization of Euler homogeneous functions. MHF can be used in the synthesis of electric and magnetic fields for electron systems and ion-optical ones with special properties. A chain of functions corresponding to multiple real eigenvalues of the matrix of basic functional relations for MHF has been considered. Functional relations answering such functions were derived. General formulas for the solutions of the obtained functional relations were derived. The obtained functions were shown to be a refinement of the associated homogeneous functions introduced by Gel'fand. Typical differential and integral properties of the obtained functions were investigated, and a generalization of the Euler theorem was proved (Euler criterion) for differentiable functions.

Keywords: functional equation, homogeneous function, associated homogeneous function, mutually homogeneous functions

Citation: Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K., Chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common real eigenvalue, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 53–71. DOI: 10.18721/JPM.13205

Введение

Данная статья продолжает серию работ [1 – 4], посвященных исследованию свойств однородных гармонических функций и их использованию при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами [5 – 8]. Она является прямым продолжением публикации [9] и в значительной степени опирается на приводимые в ней результаты.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной p, если при любых вещественных значениях λ выполняется тождество

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (1)$$

Основные свойства и теоремы о функциях, однородных по Эйлеру, описываются в книге [10]. В частности, любая однородная функция степени p может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ = x_1^p\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)&, \end{aligned} \quad (2)$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ – некоторая функция $(n – 1)$ переменных, а любая функция вида (2) будет однородной функцией степени p.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется положительно однородной по Эйлеру степени p, если тождество (1) выполняется при любых положительных вещественных значениях λ, а при отрицательных вещественных значениях λ его справедливость не гарантируется (например, функция $f(x) = \sqrt{x}$). Ограничение $\lambda > 0$, в частности, позволяет без опасений работать с произвольными вещественными степенями однородности в формуле (1): для произвольной вещественной степени p требуются определенные усилия, чтобы доопределить степенную функцию λ^p при отрицательных значениях λ так, чтобы сохранить условие

$$\lambda_1^p \lambda_2^p = (\lambda_1 \lambda_2)^p.$$

Положительно однородную функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 > 0 \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ = x_1^p\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)&; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 < 0 \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ = (-x_1)^p\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)&, \end{aligned} \quad (4)$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут функциями от $(n – 1)$ переменных, не зависящими друг от друга (в общем случае).

Формулы (3) и (4) получаются из соотношения (1) при подстановке в него значений $\lambda = +1/x_1$ при $x_1 > 0$, и $–1/x_1$ при $x_1 < 0$, если функции $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ определить как

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$g(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n).$$

При $x_1 = 0$ функция $f(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ будет положительно однородной по Эйлеру степени p от меньшего числа переменных, поэтому к ней, в свою очередь, можно применить параметризацию вида (3), (4). Рекурсивный процесс конструирования полной параметризации для положительно однородной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ завершается, когда исчерпывается набор переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Рассмотрим функции вида

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 > 0\text{:} \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ = (1/k!)\, x_1^p\, (q \ln x_1)^k &\times \\ \times\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)&, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{при } x_1 < 0: \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (1/k!)\,(-x_1)^p\,(q \ln(-x_1))^k \times \\ \times\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{6}$$

где p, q — вещественные константы; k — целочисленный индекс ($k = 0, 1, 2, \ldots$); $h(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, $g(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ — некоторые функции от $(n - 1)$ переменных; значения переменной x_1 удовлетворяют условию $x_1 \neq 0$.

Если даны функциональные соотношения

$$f_i(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \\ = \Sigma a_{ij}(\lambda)\, f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, k$, а функции $a_{ij}(\lambda)$ заранее неизвестны, то в частном случае, когда все собственные числа матрицы $\|a_{ij}(\lambda)\|$ будут вещественными числами p, равными друг другу (см. статью [9]), функции вида (5), (6) могут претендовать на роль возможных решений для функциональных уравнений вида (7).

С помощью прямой подстановки можно убедиться, что для $\forall\lambda > 0$ функции (5), (6) подчиняются функциональным соотношениям

$$f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\right) = \\ = \sum_{j=0,k} a_{k-j}\left(\lambda\right) f_{p,j}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \tag{8}$$

где $a_j(\lambda) = (1/j!)\,\lambda^p\,(q \ln \lambda)^j$.

Задачами данной работы являются, во-первых, вывод общих формул для функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям (8) при условии, что функции $a_j(\lambda)$ имеют вид

$$a_j(\lambda) = (1/j!)\,\lambda^p\,(q \ln \lambda)^j,$$

а во-вторых, — доказательство некоторых важных теорем о полученном классе вещественных функций многих переменных.

Связь функций вида (5) с присоединенными однородными функциями Гельфанда

Функции вида (5) и (6), удовлетворяющие функциональным соотношениям вида (8), представляют собой уточнение присоединенных однородных функций Гельфанда, как они определены в работах [11, 12]. Однако в указанных публикациях ошибочно предполагается, что система функциональных соотношений (8) представляет собой двухдиагональную матрицу с заранее неизвестными функциями $a(\lambda)$ для главной диагонали и $b(\lambda)$ для вспомогательной диагонали. К сожалению, эта незначительная ошибка в формальном определении, не влияющая на остальные фундаментальные результаты, полученные в работах [11, 12], в дальнейшем была некритично растиражирована в последующих публикациях других авторов [13 – 20]. Только в работах [21, 22] удается обнаружить указание на эту неточность, но и здесь имеется пробел в рассуждениях, заключающийся в пропуске множителя $1/k!$ в соответствующих формулах. Этот недостаток отсутствует в более ранних формулах, приведенных в монографии [23]. Кроме того, в публикациях [21 – 23] после проверки требуемых функциональных соотношений для рассматриваемых функций (т. е. после получения частного решения) анализ формы *общего* решения для полученных функциональных уравнений не выполнен.

Легко показать, что по крайней мере для дифференцируемых функций[1] у двухдиагональной системы функциональных уравнений вида (8) невырожденные решения, отличные от тождественного нуля, могут иметься только при $a(\lambda) = \lambda^p$ и $b(\lambda) = \lambda^p(q \ln \lambda)$, причем эти решения (если они существуют) обязаны иметь вид линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, составленных из функций вида (7) [21]. К сожалению, уже при $k = 3$ функции (7) перестают удовлетворять системе двухдиагональных соотношений (8) и можно показать, что у этих функциональных соотношений при $k \geq 3$ решения отсутствуют в принципе [21].

[1] На самом деле для такого вывода достаточно требования, чтобы каждая из функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ была непрерывной хотя бы в одной точке $\lambda > 0$. Строгое доказательство этого утверждения несложно, но выходит за рамки основной темы данной работы.

Одной из целей данной работы является возвращение математической строгости присоединенным однородным функциям Гельфанда, а также исследование некоторых интересных свойств полученных функций.

Следует подчеркнуть, что при этом рассматривается достаточно узкий подкласс функций, максимально приближенный к присоединенным однородным функциям Гельфанда. Общее решение функциональных уравнений (8) с заранее неизвестными функциями $a_j(\lambda)$ гораздо шире и планируется как тема отдельной публикации.

Общие формулы

Чтобы не смешивать рассматриваемые нами конструкции с присоединенными однородными функциями в смысле определений Гельфанда [11, 12], добавим следующее определение.

Определение. *Полубесконечная цепочка функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *где* $k = 0, 1, 2, ...$, *а функции* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *при всех* $\lambda > 0$ *удовлетворяют функциональным соотношениям*

$$f_{p,k}(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{k-j} \times \\ \times f_{p,j}(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{9}$$

называется фундаментальными присоединенными однородными функциями степени p и порядка k.

Если изменить порядок суммирования, то соотношения (9) можно записать в эквивалентном виде как

$$f_{p,k}(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/j!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{j} \times \\ \times f_{p,k-j}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Параметр q отвечает за нормировку фундаментальных присоединенных однородных функций и не влияет на их остальные свойства. После подстановки

$$f_{p,j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = q^j\, F_{p,j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

параметр q сокращается в функциональных соотношениях (9), а функции $F_{p,j}(x_1, x_2, ..., x_n)$ приобретают смысл нормированных фундаментальных присоединенных однородных функций, соответствующих выбору $q = 1$.

Требуется найти формулы общего вида для функций, удовлетворяющих функциональным соотношениям (9), аналогичные формулам (3) и (4). Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *степени p и порядка k, которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям* (9), *при* $x_1 \neq 0$ *может быть взаимно-однозначным образом представлена в следующем виде:*

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, x_1^{\,p}\, (q \ln x_1)^{k-j} \times \\ \times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1); \tag{10}$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, (-x_1)^p\, (q \ln (-x_1))^{k-j} \times \\ \times g_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1), \tag{11}$$

где $g_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ – *вещественные функции от* $(n - 1)$ *переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Справедливо также обратное утверждение: цепочка функций, заданная формулами (10) *и* (11), *подчиняется при* $x_1 \neq 0$ *функциональным соотношениям* (9) *при произвольном выборе функций* $g_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ *и* $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$.

При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ процесс конструирования параметризации для фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ степени p и порядка k, осуществляется по аналогии с формулами (10), (11). Процедура конструирования полной параметризации функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ повторяется рекурсивным образом, пока не будет исчерпан набор переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $x_1 > 0$, так как случай $x_1 < 0$ получается из него после подстановки $x_1 = -x_1$, при которой соотношения (9) сохраняются в неизменном виде.

При $k = 0$ соотношения (9) превращаются в соотношение однородности (1), а функция $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ оказывается положительно однородной функцией степени p, которая определена при $x_1 > 0$. Следовательно, формула (10) при $k = 0$ будет верна, так как совпадает с формулой (3) для положительно однородных функций, а функция $h_0(t_2, t_3, ..., t_n)$ взаимно-однозначным образом определяется по имеющейся функции $f_{p,0}(x_1, x_2,..., x_n)$.

Привлечем метод математической индукции.

Пусть формулы (10) доказаны для всех значений k, удовлетворяющих неравенству $0 \le k < m$. Запишем функцию $f_{p,m}(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $x_1 > 0$ в виде

$$f_{p,m}(x_1, x_2,\ldots, x_n) = x_1^{\,p}\, H(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \\ + \Sigma_{j=0,m-1}\, (1/(m-j)!)\, x_1^{\,p}\, (q \ln x_1)^{m-j} \times \\ \times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{12}$$

где функции $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ для $j = 0, 1, m - 1$ были уже определены на предыдущих шагах доказательства. Требуется определить, какой должна быть функция $H(x_1, x_2, ..., x_n)$, имеющая смысл при при $x_1 > 0$, чтобы при $\forall\lambda > 0$ было выполнено тождество

$$f_{p,m}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) - \\ - \lambda^p f_{p,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ - \Sigma_{k=0,m-1}\, (1/(m-k)!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{m-k} \times \\ \times f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{13}$$

После упрощения выражения (13) с учетом того, что функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $0 \le k < m$ можно заменить на соотношения (10), получим условие:

$$\text{при } \forall\lambda > 0,\ x_1 > 0 \\ H(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, функция $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ должна быть положительно однородной функцией нулевой степени, определенной при $x_1 > 0$. Это условие является и необходимым, и достаточным для выполнения равенства (13), поскольку все алгебраические преобразования при упрощении выражения (13) обратимы.

В соответствии с формулой (3), при $x_1 > 0$ функцию $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = h_m(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

где $h_m(t_2, t_3, ..., t_n)$ — некоторая новая функция от $(n - 1)$ переменных.

После этого при подстановке в равенство (12) значения $x_1 = 1$ получим условие

$$f_{p,m}(1, x_2, \ldots, x_n) = h_m(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

откуда следует взаимно-однозначная связь между функциями $f_{p,m}$ и h_m.

Таким образом, формула (10) при $x_1 > 0$ будет справедлива в том числе и при $k = m$.

Теорема 1 доказана.

Имеются и другие способы представить цепочку присоединенных однородных функций в параметризованной форме. Один из таких способов, обеспечивающий конструирование параметризаций наиболее общего вида, может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ *— положительно однородная функция степени* p, $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ *— положительно однородная функция степени* $q \ne 0$, *а* $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\psi_3(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, *— положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в каждой точке области Ω *эти функции определены. Дополнительно пусть в области* Ω *функция* ω_p *не обращается в нуль, функция* ψ_q *является строго положительной, функции* $\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n$ *являются функционально независимыми.*

Тогда фундаментальные присоединенные однородные функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *которые при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняются функциональным соотношениям* (9), *могут быть в области* Ω *взаимно-однозначным образом представлены в виде*

$$f_{p,k}(x) = \\ = \Sigma_{j=0,k} \, (1/(k-j)!) \, \omega_p(x) \, (\ln \psi_q(x))^{k-j} \times \\ \times h_j(\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots, \psi_n(x)), \qquad (14)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут некоторыми вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = 0$ функция $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ будет положительно однородной функцией степени p, а функция

$$f_{p,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\omega_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

будет корректно определенной, положительно однородной функцией нулевой степени. Она может быть представлена в виде $h_0(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$, будучи функционально зависима от функционально независимых функций $\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n$. Действительно, если бы нашлась такая положительно однородная функция $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ нулевой степени, которая бы образовывала с функциями

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

функционально независимый набор, то свободные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ можно было бы выразить через функционально независимые положительно однородные функции $\psi, \psi_2, ..., \psi_n$ нулевой степени, и тогда любая функция от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ должна была бы быть положительно однородной функцией нулевой степени. Этого не может быть, поэтому соответствующая функция $h_0(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ обязана существовать, и тем самым при $k = 0$ формула (14) выполнена. Дальнейшее доказательство по индукции почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

При использовании формул (14) все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конического вида[2], для каждой из которых выбранные функции $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ не обращаются в нуль[3], а функции

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

образуют функционально независимый набор положительно однородных функций нулевой степени. Для каждой из областей Ω_s при конструировании параметризации (14) используется, вообще говоря, свой собственный набор функций $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, никак не связанный с функциями $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, используемых для других областей. Границы между коническими областями представляют собой конические поверхности меньшей размерности, вдоль которых рассматриваемые функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ведут себя как фундаментальные присоединенные однородные функции меньшей размерности, и для них параметризация строится по аналогичной схеме.

Важно отметить, что в результате у параметризации фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ происходит разбиение на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ и, в меньшей степени, функций

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а не отражает внутреннюю структуру параметризуемой цепочки функций.

Можно обойтись без разбиения пространства R^n на несколько независимых ветвей, как это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям* (9), *может быть взаимно-однозначным образом представлена в виде*

[2] Область Ω называется гиперконусом, если из условия $x \in \Omega$ следует, что для любых точек λx при произвольных значениях $\lambda > 0$ также выполнено условие $\lambda x \in \Omega$.

[3] Если функция ψ_q в рассматриваемой области отрицательна, она заменяется на $-\psi_q$.

$$f_{p,k}(x) = \Sigma_{j=0,k}\ (1/(k-j)!)\ r^p\ (q \ln r)^{k-j} \times \\ \times h_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r), \qquad (15)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, *а* $h_j(t_1, t_2, ..., t_n)$ *будут произвольными вещественными функциями, заданными на поверхности единичной гиперсферы*

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1,$$

взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Доказательство. При $k = 0$ справедливость формулы (15) для положительно однородной функции $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ получается после подстановки в соотношение однородности (1) значения $\lambda = 1/r$ и использования функции $h_0(t_1, t_2, ..., t_n) = f_{p,0}(t_1, t_2, ..., t_n)$ (напомним, что каждая из функций $h_j(t_1, t_2, ..., t_n)$ определена лишь для поверхности единичной гиперсферы $t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2 = 1$). Дальнейшее доказательство по индукции почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 3 доказана.

Из соотношений (9) следует, что линейная комбинация с постоянными коэффициентами, составленная из нескольких цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, снова будет цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k. Кроме того, если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то новая цепочка функций

$$g_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{p,k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

со сдвигом индекса, дополненная начальным нулем $g_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, также будет цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k.

Формулы (10), (11) (а также (14) или (15)) иллюстрируют справедливость гипотезы Гельфанда, согласно которой любые цепочки присоединенных однородных функций степени p и порядка k получаются из главных цепочек с ненулевым первым членом с помощью сдвига индекса k и последующего суммирования. При этом все члены главной цепочки функций восстанавливаются однозначным образом по ее первому члену сообразно с некоторым правилом, точная формулировка которого отражает предпочтения исследователя и, вообще говоря, может быть различной для одной и той же начальной функции. В случае доказанных выше теорем, соответствующие цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций имеют вид

а) для формул (10), (11):

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = (x_1^{\,p} / k!)\ (q \ln x_1)^k \times \\ \times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1);$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = ((-x_1)^{\,p} / k!)\ (q \ln (-x_1))^k \times \\ \times g_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1);$$

б) для формул (14):

$$f^{(j)}_{p,k}(x) = \omega_p(x)\ / k!\ (\ln \psi_q(x))^k \times \\ \times h_j(\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots, \psi_n(x));$$

в) для формул (15):

$$f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = (r^p / k!)\ (q \ln r)^k\ h_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r).$$

Замечание. Как следует из формул (14), по сути фундаментальные присоединенные однородные функции – это линейные комбинации цепочек функций вида

$$(1/k!)\ R_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times (\ln S_q(x_1, x_2, \ldots, x_n))^k,$$

где $R_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это произвольные положительно однородные функции степени p, а $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ – фиксированные положительно однородные функции степени q, для которых используется также сдвиг индекса k и дополнение сдвинутых цепочек начальными нулями.

Ситуация не изменится и никаких новых

функций не удастся получить, если потребовать, чтобы функции $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ были произвольными положительно однородными функциями степени q.

В частности, такой подход позволяет записывать фундаментальные присоединенные однородные функции в более изящном виде, не используя искусственным образом выделенные переменные x_1. Изменение выбора функции $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ делает текущие главные цепочки вторичными, перемещая на место главных цепочек те, которые прежде были вторичными. В силу этого понятие главных цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций является весьма условным и зависит от выбора параметризации фундаментальных присоединенных однородных функций.

Дифференцирование и интегрирование присоединенных однородных функций

Если однородная по Эйлеру функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p дифференцируема, то ее частные производные по переменным $x_1, x_2,..., x_n$ будут однородными функциями степени $(p - 1)$ [10]. Аналогичное утверждение справедливо для присоединенных однородных функций. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 4 (о дифференцировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, а функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми, то их первые частные производные $\partial f_{p,k}/\partial x_i$ по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ будут образовывать цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p - 1)$ и порядка k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из почленного дифференцирования правой и левой части формул (9) по переменной x_i.

Теорема 4 доказана.

Аналогичное утверждение справедливо для операции интегрирования.

Теорема 5 (об интегрировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то интегралы вида*

$$F_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \\ = \int_0^{x_i} f_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) dt$$

(если они существуют) образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k.

Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно следует из почленного интегрирования по переменной t на интервале $t \in [0, x_i]$ соотношения (8) после подстановки в него $x_i \to t$ с учетом равенства

$$\int_0^{x_i} f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{i-1}, \lambda t, \lambda x_{i+1}, \ldots, \lambda x_n\right) dt = \\ = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda x_i} f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{i-1}, \tau, \lambda x_{i+1}, \ldots, \lambda x_n\right) d\tau.$$

Теорема 5 доказана.

Возможно также рассмотрение интегралов

$$F_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \\ = \int_{a_k}^{x_i} f_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) dt + \\ + g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\right),$$

где функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ выбираются так, чтобы получившиеся функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ образовывали цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k. Можно показать, что такие функции g_k действительно существуют и могут быть выражены через функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ однозначным образом с точностью до аддитивных членов в виде фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k, которые зависят от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Доказательство этого утверждения приводится в следующем разделе.

Теорема 6 (о дробном дифференцировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то их дробные производные $F_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ порядка $\alpha \in (0, 1)$ (диффероинтегралы порядка α Римана – Лиувилля [24 – 26]), имеющие вид*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx_i^m}\int\limits_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n\right)dt\,,$$

образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($p-\alpha$) *и порядка* k (*если такие интегралы существуют, в частности, если* $m-\alpha>0$).

Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Доказательство. Оно следует из почленного применения к соотношению (8) линейного оператора-свертки $L[f]$:

$$L\left[f\left(x_1,x_2\ldots,x_n\right)\right]=\int\limits_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times f\left(x_1,x_2\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n\right)dt\,,$$

где необходимо также учитывать равенство

$$\int\limits_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda x_1,\lambda x_2\ldots,\lambda x_{i-1},\lambda t,\lambda x_{i+1},\ldots,\lambda x_n\right)dt=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{m-\alpha}}\int\limits_0^{\lambda x_i}\left(\lambda x_i-\tau\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda x_1,\lambda x_2\ldots,\lambda x_{i-1},\tau,\lambda x_{i+1},\ldots,\lambda x_n\right)d\tau\,.$$

На выходе получается цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($m+p-\alpha$) порядка k, которая после m-кратного дифференцирования по переменной x_i становится цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($p-\alpha$) порядка k.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (о свертке с обобщенным ядром Абеля). *Если* $f_{p,k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – *это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени* p *и порядка* k, *то при условии существования соответствующих интегралов их свертка с обобщенным ядром Абеля, имеющая вид*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=$$
$$=\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\left(x_1^{k_1}-t_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\left(x_n^{k_n}-t_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}\times$$
$$\times f_{p,k}\,(t_1,\,t_2\ldots,\,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

где $\forall\mu_i>0$, *образует цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени* $p+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$ *и порядка* k. *Для частичной свертки по переменным* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ *результатом будет цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени* $p+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m$ *и порядка* k. Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Доказательство. Оно следует из почленного применения к соотношению (8) свертки с обобщеным ядром Абеля с учетом равенства

$$\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_n}\left(x_1^{k_1}-t_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\left(x_n^{k_n}-t_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda t_1,\lambda t_2\ldots,\lambda t_n\right)dt_1\ldots dt_n=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{\mu_1}\cdots\lambda^{\mu_n}}\int\limits_0^{\lambda x_1}\cdots\int\limits_0^{\lambda x_n}\left(\left(\lambda x_1\right)^{k_1}-\tau_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\ \times$$
$$\times\left(\left(\lambda x_n\right)^{k_n}-\tau_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}f_{p,k}\left(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\right)d\tau_1\ldots d\tau_n\,.$$

Теорема 7 доказана.

Критерий Эйлера

Напомним читателям теорему Эйлера об однородных функциях [10]:

Теорема Эйлера (критерий Эйлера для однородных функций). *Если функция* $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *является непрерывно дифференцируемой в любой точке пространства* R^n, *то для того, чтобы она была однородной по Эйлеру степени* p, *необходимо и достаточно, чтобы в любой точке пространства* R^n *выполнялось условие*

$$x_1\,\partial f/\partial x_1+x_2\,\partial f/\partial x_2+\ldots+$$
$$+\,x_n\,\partial f/\partial x_n=pf. \qquad (16)$$

Соотношение (13) получается при дифференцировании тождества

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для однородной функции степени p по параметру λ в точке $\lambda = 1$, поэтому его необходимость очевидна. Однако тот факт, что условие (16) будет не только необходимым, но еще и достаточным, чтобы всюду дифференцируемая функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$ была однородной по Эйлеру и имела степень однородности p, является глубоко нетривиальным. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в монографии [10].

Критерий Эйлера (16) работает также и для непрерывно дифференцируемых положительно однородных функций степени p. Единственное отличие состоит в том, что в этом случае функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$ может не иметь производной в точке $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ и, соответственно, условие (16) может нарушаться в этой точке.

Теорема 8 (обобщение критерия Эйлера). *Для того, чтобы всюду непрерывно дифференцируемые функции $f_{p,k}(x_1, x_2 ,..., x_n)$ образовывали цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках пространства R^n, за исключением, возможно, точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, были выполнены равенства*

$$x_1\, \partial f_{p,k}/\partial x_1 + x_2\, \partial f_{p,k}/\partial x_2 + \ldots + x_n\, \partial f_{p,k}/\partial x_n = p\, f_{p,k} + q\, f_{p,k-1}. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость соотношения (17) следует из дифференцирования соотношения (9) как сложной функции по λ в точке $\lambda = 1$ (непрерывная дифференцируемость требуется здесь для того, чтобы соотношение (9) можно было безопасно дифференцировать как сложную функцию). Остается доказать достаточность соотношения (17).

При $k = 0$ достаточность критерия (17) следует из теоремы Эйлера для однородных функций. Далее применяем метод математической индукции.

Пусть утверждение доказано для всех значений индекса k из интервала $0 \le k \le m - 1$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_m(\lambda) = f_{p,m}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)/\lambda^p - \Sigma_{k=0,m} f_{p,m-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, (q \ln \lambda)^k/k!$$

где суммирование выполняется по индексу $1 \le k \le m$.

С точностью до замены индекса суммирования это выражение совпадает с тождеством (9), правую и левую части которого разделили на λ^p. Производная функции $\Phi_m(\lambda)$ по параметру λ приводится к виду

$$\begin{aligned} d\Phi_m(\lambda)/d\lambda = (1/\lambda^{p+1})\, [\lambda x_1\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_1 + {} \\ + \lambda x_2\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_2 + \ldots + {} \\ + \lambda x_n\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_n - {} \\ - p f_{p,m}(\lambda x) - q f_{p,m-1}(\lambda x) + {} \\ + q\, f_{p,m-1}(\lambda x) - q\, \Sigma_{k=1,m} f_{p,m-k}(x)\, \lambda^p \times {} \\ \times (q \ln \lambda)^{k-1}/(k-1)!] = 0, \end{aligned}$$

поскольку соотношение (17) для функции $f_{p,m}(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполняется в том числе и в точке $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, а функция $f_{p,m-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяет условию (9) согласно индуктивному предположению. Поэтому $\Phi_m(\lambda) = \text{const}$ и, в частности, $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1)$.

Однако, как легко убедиться, условие $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1)$ означает, что для функции $f_{p,m}(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполняется соотношение (9). Следовательно, если при $\forall k \ge 0$ во всех точках пространства R^n, кроме, может быть, начала координат, выполнено условие (17), то при $\forall k \ge 0$ выполнено соотношение (9).

Теорема 8 доказана.

Замечание. Чтобы обеспечить условие $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1) = \text{const}$, производная $\Phi'_m(\lambda)$ должна существовать и обращаться в нуль в каждой точке отрезка, соединяющего точки $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ и $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если равенство (14) нарушается хотя бы в одной промежуточной точке, или хотя бы производная $\Phi'_m(\lambda)$ терпит разрыв в одной промежуточной точке, то функция $\Phi_m(\lambda)$ может распадаться на кусочно-постоянные ступеньки. Именно поэтому нарушение непрерывной дифференцируемости функций в нуле обеспечивает лишь положительную однородность по Эйлеру для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а не однородность по Эйлеру общего вида.

Теорема 9 (об интегрировании фундаментальных присоединенных однородных функций). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то существуют такие функции $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, для которых функции*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\int\limits_{a_k}^{x_1} f_{p,k}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)$$

образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $p + 1$ и порядка k.

Естественно, что вместо координаты x_1 может использоваться любая координата x_i.

Доказательство. Согласно теореме 6, необходимо и достаточно, чтобы для функций $F_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнялись соотношения (17). Это приводит к уравнению

$$0=x_1 f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+ \\ +\int\limits_{a_k}^{x_1}\left(t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}+x_2\frac{\partial f_{p,k}}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial f_{p,k}}{\partial x_n}\right)dt- \\ -\int\limits_{a_k}^{x_1} t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}dt-\left(p+1\right)\int\limits_{a_k}^{x_1} f_{p,k}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt- \\ -q\left(\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt+\right. \\ \left.+\int\limits_{a_k}^{x_1} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt\right)+x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial g_k}{\partial x_3}+ \\ +\cdots x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}-\left(p+1\right)g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)- \\ -qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)= \\ =x_1 f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)-\int\limits_{a_k}^{x_1}\left(t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}+f_{p,k}\right)dt- \\ -q\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}- \\ -\left(p+1\right)g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)- \\ -qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)= \\ =x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial g_k}{\partial x_3}+\cdots+x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}- \\ -\left(p+1\right)g_k-qg_{k-1}- \\ -q\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +a_k f_{p,k}\left(a_k,x_2,x_3\ldots,x_n\right).$$

В полученном уравнении отсутствует переменная x_1. Кроме того, функция $g_{k-1}(x_2, x_3, ..., x_n)$ уже известна. Остается найти решение уравнения

$$x_2\,\partial g_k/\partial x_2+x_3\,\partial g_k/\partial x_3+\ldots+ \\ +x_n\,\partial g_k/\partial x_n-(p+1)g_k=G_k(x_2,x_3,\ldots,x_n), \tag{18}$$

где функция $G_k(x_2, x_3, ..., x_n)$ уже известна на k-м шаге интегрирования:

$$G_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)=qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)+ \\ +q\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt- \\ -a_k f_{p,k}\left(a_k,x_2,x_3,\ldots,x_n\right).$$

Это решение удобно искать с помощью подстановки

$$g_k(x_2,x_3,\ldots,x_n)= \\ =x_2^{p+1}\,h_k(x_2,x_3/x_2,x_4/x_2,\ldots,x_n/x_2).$$

Тогда уравнение (18) приобретает вид

$$x_2^{p+2}\partial h_k(x_2,t_3,t_4,\ldots,t_n)/\partial x_2= \\ =G_k(x_2,t_3x_2,t_4x_2,\ldots,t_nx_2).$$

Частное решение этого уравнения находится после переноса множителя x_2^{p+2} в правую часть и интегрирования результата по переменной x_2 при «замороженных» переменных $t_3, t_4, ..., t_n$. Кроме того, к полученному частному решению неоднородного уравнения (18) необходимо прибавить общее решение однородного решения уравнения (18) с нулевой правой частью, т. е. однородную по Эйлеру функцию степени $(p + 1)$, зависящую от переменных $x_2, x_3, ..., x_n$.

Теорема 9 доказана.

В результате удалось не только доказать существование требуемой функции $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, но и определить ее явный вид в квадратурах. Окончательное решение будет представлять собой сумму частного случая цепочки функций $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, рекуррентным образом выраженных в квадратурах через функции $f_{p,k}(a_k, x_2, x_3, ..., x_n)$, и произвольной цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ порядка k по переменным $x_2, x_3, ..., x_n$, которую можно задать в явном виде с помощью формул (10), (11), (14) либо (15).

Задача. Пусть непрерывно дифференцируемые функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ во всех точках пространства R^n, за исключением, возможно, точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} x_1\, \partial g_k/\partial x_1 + x_2\, \partial g_k/\partial x_2 + \dots +\\ + x_n\, \partial g_k/\partial x_n = p_k\, g_k + q_k\, g_{k-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

где p_k, q_k – заданные константы, а функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ с отрицательными индексами считаются равными нулю. Что можно сказать о виде функций $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$?

В случае, когда при $\forall k$ $p_k = p = \text{const}$ и $q_k = q = \text{const}$, критерий Эйлера (17) сразу дает ответ: функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются фундаментальными присоединенными однородными функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p и порядка k. В общем случае потребуются дополнительные вычисления. После подстановки

$$\begin{aligned} g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) =\\ = h_k(\ln x_1, x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1). \end{aligned}$$

цепочка условий (19) сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и двухдиагональной матрицей коэффициентов, где $t = \ln x_1$ будет свободной переменной, а переменные $t_2 = x_2/x_1$, $t_3 = x_3/x_1$, ..., $t_n = x_n/x_1$ «заморожены».

После решения полученной системы дифференциальных уравнений и обратного перехода к переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ будет получен общий вид функций $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$. При этом необходимо будет учесть, что свободные константы, полученные при интегрировании системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, на самом деле будут произвольными функциями, зависящими от временно «замороженных» переменных $t_2 = x_2/x_1$, $t_3 = x_3/x_1$, ..., $t_n = x_n/x_1$. В зависимости от того, чему равны константы p_k и сколько среди них окажутся равными друг другу, структура решения может быть достаточно сложной.

В частном случае пусть имеется цепочка соотношений (19), где все значения p_k равны одному и тому же числу p, а $\forall q_k \neq 0$. Тогда, согласно условию (17), функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, масштабированные в c_k раз, окажутся фундаментальными присоединенными однородными функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые описываются формулами общего вида (10) и (11) (либо (14), либо (15)), если выполняются соотношения $c_k q_k/c_k{-}1 = q$ (где значение параметра $q \neq 0$ выбирается произвольным образом). Другими словами, масштабирующие коэффициенты c_k следует выбирать в соответствии с рекуррентным правилом $c_k = qc_{k-1}/q_k$, где $c_0 = 1$, а результат с точностью до множителей будет совпадать с некоторой цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p и порядка k.

Дифференцирование по степени однородности

В работах [11, 12] рассматривается интересный прием, позволяющий генерировать новые фундаментальные присоединенные однородные функции. А именно, пусть $f_p(x_1,$

$x_2, ..., x_n)$ – это однопараметрическое семейство функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности, равной p, где p – это континуально меняющийся параметр.

При многократном дифференцировании по параметру p соотношения однородности

$$f_p(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

получаем, что функции

$$f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (1/k!)\, \partial^k f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial p_k$$

удовлетворяют функциональным соотношениям (9), т. е. являются частным случаем фундаментальных присоединенных однородных функций.

Однородную функцию $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить с помощью формул (3) и (4):

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_1^{\,p}\, h_p(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \tag{20}$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (-x_1)^p\, g_p(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{21}$$

где $h_p(t_2, t_3, ..., t_n)$, $g_p(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут функциями от $(n - 1)$ переменных, не зависящими друг от друга.

Эти функции определяются однозначным образом по заданной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ в соответствии с формулами

$$h_p(t_2, t_3, \ldots, t_n = f_p(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$
$$g_p(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f_p(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n),$$

и тоже зависят от континуального параметра p.

При многократном дифференцировании выражений (20), (21) по параметру p получаются универсальные формулы (10), (11) для фундаментальных присоединенных однородных функций, если определить новые функции $h_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ как

$$h_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = (1/j!)\, \partial^j h_p(t_2, t_3, \ldots, t_n)/\partial p^j,$$
$$g_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = (1/j!)\, \partial^j g_p(t_2, t_3, \ldots, t_n)/\partial p^j.$$

Аналогичным образом формулы (15) получаются при дифференцировании по параметру p однородной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$, записанной в виде

$$f_p(x_1, x_2, ..., x_n) = r^p\, h_p(x_1/r, x_2/r, ..., x_n/r),$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, а $h_p(t_1, t_2, ..., t_n)$ будет вещественной функцией, заданной на поверхности единичной гиперсферы

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1$$

и связанной с функцией $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ соотношением

$$h_p(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_p(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

где $t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + ... + t_n^{\,2} = 1$.

Из получаемых в результате формул следует, что процесс дифференцирования функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности, равной p, по континуально меняющемуся параметру p, вообще говоря, не приводит к потере возможных цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций.

Важно, что если функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются гармоническими (или удовлетворяют какому-либо другому линейному дифференциальному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами), то гармоническими будут и все фундаментальные присоединенные однородные функции, которые получаются при дифференцировании исходной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ по параметру p.

Заключение

В процессе анализа взаимно-однородных функций, которые соответствуют матрице функциональных уравнений с одинаковыми вещественными собственными числами, был получен уточненный класс присоединенных однородных функций Гельфанда [11, 12]. Определения и теоремы, сформулированные в процессе проведения исследования, позволяют корректным образом определить этот важный класс функций и более подробно исследовать его свойства. В частности, теорема 2 о представлении фундаментальных присоединенных однородных функций позволяет без опаски рассматривать обобщения вида

$$f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (1/k!)\, R_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times (\ln S_q(x_1, x_2, \ldots, x_n))^k$$

и утверждать, что такие функции тождественно совпадают с рассматриваемым классом функций, полностью сохраняя все их свойства и не порождая при этом принципиально новых математических объектов.

Построенные математические конструкции могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение. Свойство однородности по Эйлеру для скалярных потенциалов электрических и магнитных полей [5 – 8] позволяет синтезировать эффективно работающие электронно- и ионно-оптические системы, представленные, например, в серии работ А. Хёршида [27 – 43].

Имеется определенная надежда, что с помощью полученных функциональных конструкций, обобщающих соотношение однородности Эйлера, возможен перенос принципа подобия траекторий Ю.К. Голикова [5 – 8] на более широкие классы электрических и магнитных полей.

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [44].

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за активное участие в обсуждении проблемы.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-01073-20-00 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62.

4. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53.

10. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

11. **Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. Вып. 3. С. 3–70.

12. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Серия «Обобщенные функции». Вып. 1. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.

13. **Иванов В.К.** Об умножении обобщенных однородных функций нескольких переменных // Доклады АН СССР. 1981. Т. 237. № 1. С. 29–33.

14. **Иванов В.К**. Асимптотическая аппроксимация произведения обобщенных функций // Известия вузов. Сер. «Математика». 1981. №. 1. С. 19–26.

15. **Estrada R., Kanwal R.P.** Asymtotic analysis: A distributional approach. Boston: Birkhäuser, 1994. 253 p.

16. **Estrada R., Kanwal R.P.** A distributional approach to asymptotics: Theory and applications. New York: Springer Science, 2002. 454 p.

17. **Албеверио С., Хренников А.Ю., Шелкович В.М.** Присоединенные однородные p-адические распределения // Доклады РАН. 2003. Т. 393. № 3. С. 300–303.

18. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.** Assiciated homogeneous p-adic distributions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 313. No. 1. Pp. 64–83.

19. **Иванов В.К.** Избранные научные труды. Математика. М.: Физматлит, 2008. 553 с.

20. **Хренников А.Ю., Шелкович В.М.** Современный p-адический анализ и математическая физика: Теория и приложения. М.: Физматлит, 2012. 452 с.

21. **Shelkovich V.M.** Associated and quasi associated homogeneous distributions (generalized functions) // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 338. No. 1. Pp. 48–70.

22. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.** Theory of p-adic distributions: Linear and nonlinear models. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 351 p.

23. **von Grudzinski O.** Quasihomogeneous distributions. Amsterdam, North-Holland, 1991. 469 p.

24. **Miller K., Ross B.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York, Wiley, 1993. 384 p.

25. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.

26. **Kilbas A.A, Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204. 1st Ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier. 2006. 540 p.

27. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements // Microelectronic Engineering. 1991. Vol. 14. No. 3–4. Pp. 197–205.

28. **Khursheed A.** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast // Microelectronic Engineering. 1992. Vol. 16. No. 1–4. Pp. 43–50.

29. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets // Scanning. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 87–91.

30. **Khursheed A.** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2000. Vol. 71. No. 4. Pp. 1712–1715.

31. **Khursheed A.** A low voltage time of flight electron emission microscope // Optik (Jena). 2002. Vol. 113. No. 11. Pp. 505–509.

32. **Khursheed A.** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM // Ultramicroscopy. 2002. Vol. 93. No. 3–4. Pp. 331–338.

33. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M.,**

Thong J.T.L. Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2003. Vol. 74. No. 1. Pp. 134–140.

34. **Khursheed A., Osterberg M.** A spectroscopic scanning electron microscope design // Scanning. 2004. Vol. 26. No. 6. Pp. 296–306.

35. **Osterberg M., Khursheed A.** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 2005. Vol. 555. No. 1–2. Pp. 20–30.

36. **Khursheed A., Osterberg M.** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2006. Vol. 556. No. 2. Pp. 437–444.

37. **Luo T., Khursheed A.** Imaging with surface sensitive backscattered electrons // Journal of Vacuum Science and Technology B. 2007. Vol. 25. No. 6. Pp. 2017–2019.

38. **Khursheed A., Hoang H.Q.** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection // Ultramicroscopy. 2008. Vol. 109. No. 1. Pp. 104–110.

39. **Khursheed A.** Scanning electron microscope optics and spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010. 403 p.

40. **Hoang H.Q., Khursheed A.** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2011. Vol. 635. No. 1. Pp. 64–68.

41. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM // Ultramicroscopy. 2011. Vol. 111. No. 8. Pp. 1093–1100.

42. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 2012. Vol. 184. No. 11–12. Pp. 525–532.

43. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source // Nature Communications. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 1288.

44. Wolfram Mathematica // URL: http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 27.03.2020, принята к публикации 17.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико- математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62.

4. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2010.

6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011), 164–170.

7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (3) (2017) 156–158.

9. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53.

10. **Fikhtengol'ts G.M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

11. **Gel'fand I.M., Shapiro Z.Ya.,** Generalized functions and their applications, Uspekhi Mat. Nauk. 10 (3) (1955) 3–70 (in Russian).

12. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.,** Generalized functions, Vol. 1: Properties and Operations, AMS Chelsea Publishing, 1964.

13. **Ivanov V.K.,** On multiplication of generalized homogeneous functions of several variables, Soviet mathematics – Doklady. 237 (1) (1981) 29–33.

14. **Ivanov V.K.,** Asymptotic approximation to the product of generalized functions, Soviet Mathematics (Izvestia VUZ. Matematika). 25 (1) (1981) 20–29 (in Russian).

15. **Estrada R., Kanwal R.P.,** Asymptotic analysis. A distributional approach, Birkhäuser, Boston, 1994.

16. **Estrada R., Kanwal R.P.,** A distributional approach to asymptotic. Theory and applications, Springer Science, New York, 2002.

17. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Associated homogeneous p-adic distributions, Doklady Mathematics. 68 (3) (2003) 354–357.

18. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Associated homogeneous p-adic distributions, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 313 (1) (2006) 64–83.

19. **Ivanov V.K.,** Selected scientific works. Mathematics, Fizmatlit, Moscow, 2008 (in Russian).

20. **Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Modern p-adic analysis and mathematical physics: Theory and applications, Fizmatlit, Moscow, 2012 (in Russian).

21. **Shelkovich V.M.,** Associated and quasi-associated homogeneous distributions (generalized functions), Journal of Mathematical Analysis and Applications. 338 (1) (2008) 48–70.

22. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Theory of p-adic Distributions. Linear and Nonlinear Models, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

23. **von Grudzinski O.,** Quasi-homogeneous

distributions, North-Holland, Amsterdam, 1991.

24. **Miller K., Ross B.,** An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

25. **Samko S., Kilbas A.A., Marichev O.,** Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Taylor & Francis Books, 1993.

26. **Kilbas A.A, Srivastava H. M., Trujillo J.J.,** Theory and applications of fractional differential equations, Vol. 204, 1st Ed., Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2006.

27. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.,** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements, Microelectronic Engineering. 14 (3–4) (1991) 197–205.

28. **Khursheed A.,** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast, Microelectronic Engineering. 16 (1–4) (1992) 43–50.

29. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.,** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets, Scanning. 20 (2) (1998) 87–91.

30. **Khursheed A.,** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 71 (4) (2000) 1712–1715.

31. **Khursheed A.,** A low voltage time of flight electron emission microscope, Optik (Jena). 113 (11) (2002) 505–509.

32. **Khursheed A.,** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM, Ultramicroscopy. 93 (3–4) (2002) 331–338.

33. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.,** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 74 (1) (2003) 134–140.

34. **Khursheed A., Osterberg M.,** A spectroscopic scanning electron microscope design, Scanning. 26 (6) (2004) 296–306.

35. **Osterberg M., Khursheed A.,** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 555 (1–2) (2005) 20–30.

36. **Khursheed A., Osterberg M.,** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 556 (2) (2006) 437–444.

37. **Luo T., Khursheed A.,** Imaging with surface sensitive backscattered electrons, Journal of Vacuum Science and Technology B. 25 (6) (2007) 2017–2019.

38. **Khursheed, A., Hoang, H.Q.,** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection, Ultramicroscopy. 109 (1) (2008) 104–110.

39. **Khursheed A.,** Scanning electron microscope optics and spectrometers, World Scientific, Singapore, 2010.

40. **Hoang H.Q., Khursheed A.,** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 635 (1) (2011) 64–68.

41. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.,** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM, Ultramicroscopy. 111 (8) (2011) 1093–1100.

42. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.,** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 184 (11–12) (2012) 525–532.

43. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.,** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source, Nature Communications. 9 (1) (2018) 1288.

44. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 27.03.2020, accepted 17.04.2020.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences

26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation

asberd@yandex.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.13206
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЦЕПОЧЕК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМНО-ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ОБЩЕЙ ПАРОЙ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

А.С. Бердников[1], К.В. Соловьев[2,1], Н.К. Краснова[2]

[1] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение свойств взаимно-однородных функций (ВОФ), которые являются обобщением однородных по Эйлеру функций и могут использоваться при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами. В дополнение к цепочкам ВОФ, соответствующим кратным вещественным собственным значениям матрицы базовых функциональных уравнений, рассматриваются ВОФ, соответствующие кратным парам комплексно-сопряженных собственных значений матрицы базовых функциональных уравнений. Выведены функциональные соотношения, характеризующие такие функции, получены общие формулы для ВОФ с комплексно-сопряженными кратными собственными значениями.

Ключевые слова: функциональное уравнение, однородная функция, присоединенная однородная функция, взаимно-однородные функции

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Общие формулы для цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общей парой комплексно-сопряженных собственных чисел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 72–88. DOI: 10.18721/JPM.13206

GENERAL FORMULAS FOR CHAINS OF FUNDAMENTAL MUTUALLY HOMOGENEOUS FUNCTIONS WITH A COMMON PAIR OF COMPLEX CONJUGATE EIGENVALUES

A.S. Berdnikov[1], K.V. Solovyev[2,1], N.K. Krasnova[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This work continues our studies in properties of mutually homogeneous functions (MHFs), being a generalization of Euler homogeneous functions and can be used in the synthesis of electric and magnetic fields of electron and ion-optical systems with special properties. MHFs corresponding to multiple pairs of complex conjugate eigenvalues of the matrix of basic functional equations have been considered in addition to MHF chains corresponding to multiple real eigenvalues of the matrix of basic functional relations. Functional equations characterizing such functions were deduced, general formulas for the MHFs with complex conjugate multiple eigenvalues were derived.

Keywords: functional equation, homogeneous function, associated homogeneous function, mutually homogeneous functions

Citation: Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K., General formulas for chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common pair of complex conjugate eigenvalues, St.

Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 72–88. DOI: 10.18721/JPM.13206

Введение

Данная статья продолжает серию работ [1 – 4], посвященных исследованию свойств однородных гармонических функций и их использованию при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами [5 – 8]. Конструируемая в статье система фундаментальных взаимно-однородных функций может использоваться для переноса принципа подобия траекторий Ю.К. Голикова на новые классы электрических и магнитных полей и тем самым послужить основой для синтеза разнообразных электронно- и ионно-оптических систем, представленных, например, в серии работ А. Хёршида [9 – 25].

Данная публикация является прямым продолжением публикаций [26, 27] и в значительной степени опирается на полученные в них результаты.

Рассмотрим функции вида

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1), \quad (1)$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1), \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$; p, q, ω – вещественные константы; k – целочисленный индекс (k = 0, 1, 2, ...); $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ – некоторая функция от $(n - 1)$ переменных; значения переменной x_1 удовлетворяют условию $x_1 > 0$.

Фактически функции (1), (2) представляют собой вещественную и мнимую части для цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом из работы [27] в случае, когда степень однородности p (кратное вещественное собственное число матрицы взаимно-однородных функциональных уравнений) заменяется комплексным числом $p + i\omega$. Поскольку, вообще говоря, порождающая функция $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ в этом случае также должна рассматриваться как комплекснозначная функция

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) + ig(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

с формальной точки зрения, формулы (1), (2) следует записывать в виде

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) - - x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1);$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1) + + x_1^{\,p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1),$$

где выражения (1), (2) являются частным случаем, соответствующие выбору $g(t_2, t_3, ..., t_n) = 0$.

В силу этого, свойства цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общей парой комплексно-сопряженных собственных чисел весьма близко напоминают свойства цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом, рассмотренных в статье [27].

Если даны функциональные соотношения

$$f_i(\lambda \mathbf{x}) = \Sigma a_{ij}(\lambda) f_i(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где i, j = 1, 2, ..., k, а функции $a_{ij}(\lambda)$ заранее неизвестны, то в частном случае, когда все собственные числа матрицы $\|a_{ij}(\lambda)\|$ будут парами комплексно-сопряженных чисел $p \pm i\omega$, равными друг другу, функции вида (1), (2) можно рассматривать как решения функциональных соотношений (3) [26].

С помощью прямой подстановки можно убедиться, что функции (1), (2) подчиняются функциональным соотношениям

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, a_{k-j}(\lambda)\, f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, b_{k-j}(\lambda)\, f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}); \quad (4)$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, b_{k-j}(\lambda)\, f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, a_{k-j}(\lambda)\, f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где функции $a_j(\lambda)$ и $b_j(\lambda)$ определены как

$$a_j(\lambda) = (1/j)!\, \lambda^p (q \ln \lambda)^j \cos(\omega \ln \lambda), \quad (6)$$

$$b_j(\lambda) = (1/j)!\, \lambda^p (q \ln \lambda)^j \sin(\omega \ln \lambda). \quad (7)$$

Если ввести в рассмотрение невырожденные линейные комбинации функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которые можно записать как

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \alpha_k f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) - \beta_k f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \gamma_k f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \delta_k f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0,\ \gamma_k^2 + \delta_k^2 \neq 0,$$

$$\alpha_k\, \delta_k + \beta_k\, \gamma_k \neq 0,$$

то новые функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ можно будет привести к виду

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = C_k\, x_1^p ((q \ln x_1)^k / k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1 + \varphi_k);$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = S_k\, x_1^p ((q \ln x_1)^k / k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1 + \psi_k);$$

$$C_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\ ,\ S_k = \sqrt{\gamma_k^2 + \delta_k^2}\ \ ;$$

$$\varphi_k = \mathrm{arctg}(\beta_k/\alpha_k),\ \psi_k = \mathrm{arctg}(\gamma_k/\ \delta_k),$$

$$C_k \neq 0,\ S_k \neq 0,\ \varphi_k \neq \psi_k \pm \pi/2.$$

Из условий (4), (5) следует, что функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ будут подчиняться функциональным соотношениям

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, c_{kj}(\lambda)\, g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, d_{kj}(\lambda)\, g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, e_{kj}(\lambda)\, g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, s_{kj}(\lambda)\, g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}),$$

где функции $c_{k,j}(\lambda)$, $d_{k,j}(\lambda)$, $e_{k,j}(\lambda)$ и $s_{k,j}(\lambda)$ определены как

$$c_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{C_k / C_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \cos(\omega \ln\lambda + (\varphi_k - \psi_j)),$$

$$d_{k,j}(\lambda) = -\frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{C_k / S_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \sin(\omega \ln\lambda + (\varphi_k - \varphi_j)),$$

$$e_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{S_k / C_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \sin(\omega \ln\lambda + (\psi_k - \psi_j)),$$

$$s_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{S_k / S_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \cos(\omega \ln\lambda + (\psi_k - \varphi_j)).$$

Когда линейное преобразование удовлетворяет условиям

$$\text{при } \forall k\ \varphi_k = \psi_k = \varphi,\ C_k = S_k = C,$$

новые функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ будут подчиняться функциональным соотношениям (4), (5) с функциями (6), (7).

Целями данной работы являются, во-первых, вывод общих формул для функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих функциональным уравнениям (4), (5) с функциями (6), (7), а во-вторых, доказательство некоторых важных теорем о полученном классе взаимно-однородных функций.

Вспомогательные формулы для функций, которые являются положительно однородными по Эйлеру

Функция $f(\mathbf{x})$ называется положительно однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной p [28], если при $\forall\lambda > 0$ выполняется условие

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Для положительно однородных функций могут быть получены универсальные формулы, позволяющие представлять их в удобном для практических приложений унифицированном виде. Типичными примерами являются следующие выражения, которые будут полезны в дальнейшем.

1. При подстановке в условие (8) значений

$$\lambda = +1/x_1 \quad \text{и} \quad -1/x_1$$

после перестановки местами правой и левой частей полученного равенства получаем следующую формулу:
при $x_1 > 0$

$$f(\mathbf{x}) = x_1{}^p\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \tag{9}$$

при $x_1 < 0$

$$f(\mathbf{x}) = (-x_1)^p\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{10}$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут произвольными функциями от $(n - 1)$ переменных, вообще говоря, не зависящими друг от друга и связанными с функцией $f(\mathbf{x})$ соотношениями

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$g(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n).$$

В формулы (9), (10) не вписывается случай $x_1 = 0$. Однако функция $f(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ также является положительно однородной, но при этом зависит от меньшего числа независимых переменных. Поэтому по факту получается целая иерархия формул вида (9), (10), соответствующая последовательно сокращающемуся списку независимых переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$.

2. При подстановке в условие (8) значения $\lambda = 1/r$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, получаем формулу

$$f(\mathbf{x}) = r^p\, s(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r), \tag{11}$$

где $s(t_1, t_2, ..., t_n)$ будет произвольной функцией от n переменных, заданной на единичной гиперсфере

$$t_1{}^2 + t_2{}^2 + \ldots + t_n{}^2 = 1,$$

которая связана с функцией $f(\mathbf{x})$ соотношением

$$s(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

3. В области Ω есть не имеющие сингулярных точек как фиксированная положительно однородная функция $\psi_p(\mathbf{x})$ степени p, не обращающаяся в этой области в нуль, так и фиксированные, положительно однородные функции нулевой степени $\psi_2(\mathbf{x})$, $\psi_3(\mathbf{x})$, ..., $\psi_n(\mathbf{x})$, которые функционально независимы. В этой области Ω получаем формулу

$$f(\mathbf{x}) = \psi_p(\mathbf{x})\, \chi(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})); \tag{12}$$

где $\chi(t_2, t_3, ..., t_n)$ будет произвольной функцией от $(n - 1)$ переменных.

В результате формулы (9) – (11) оказываются частными случаями формулы (12).

Действительно, функция $\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/\psi_p(\mathbf{x})$ определена в области Ω корректно и, как легко убедиться, является положительно однородной функцией нулевой степени.

Функция $\psi(\mathbf{x})$ не может быть функционально не зависимой от функций

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}):$$

иначе переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ можно было бы выразить через функции

$$\psi(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}),$$

которые являются положительно однородными нулевой степени, и тогда любая функция от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ была бы положительно однородной функцией нулевой степени, что лишено смысла.

Следовательно, эту функцию можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \chi(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})).$$

После этого для функции $f(\mathbf{x})$ получается выражение (12).

С другой стороны, если функция $f(\mathbf{x})$ имеет вид (12), то она является положительно однородной по Эйлеру, со степенью однородности, равной p.

Замечание. При фиксированном выборе положительно однородных функций

$$\psi_p(\mathrm{x}) \text{ и } \psi_2(\mathrm{x}), \psi_3(\mathrm{x}), \ldots, \psi_n(\mathrm{x})$$

все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конической формы[1], в которых функция $\psi_p(\mathbf{x})$ не обращается в нуль, функции

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

образуют функционально независимый набор функций, при этом перечисленные функции не имеют сингулярных точек.

Для каждой из областей Ω_s, при конструировании параметризации (12) используется, вообще говоря, своя собственная функция $\chi_s(t_2, t_3, ..., t_n)$, никак не связанная с функциями $\chi_s(t_2, t_3, ..., t_n)$, используемыми для других областей. Кроме того, границы между областями Ω_s представляют собой конические поверхности меньшей размерности, вдоль которых функция $f(\mathbf{x})$ снова ведет себя как однородная функция степени p, зависящая от меньшего числа независимых переменных. Для них, в свою очередь, приходится конструировать отдельный способ параметризации, зависящий от меньшего числа независимых переменных и с участием нового набора фиксированных функций. В результате параметризация положительно однородных функций распадается на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций

$$\psi_p(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

и не отражает внутреннюю структуру положительно однородных функций, параметризуемых с их помощью.

Прямая проверка показывает, что функции, заданные с помощью формул (9) – (12), действительно удовлетворяют соотношению однородности (8) при любом выборе функций, участвующих в параметризации.

Общие формулы для фундаментальных взаимно-однородных функций

Определение. *Полубесконечная цепочка пар функций* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *где индекс* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *а сами эти функции при всех* $\lambda > 0$ *удовлетворяют функциональным соотношениям*

$$\begin{aligned} &f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - \\ &- \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + \\ &+ \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda), \end{aligned} \tag{14}$$

называется фундаментальными взаимно-однородными функциями степени p *и порядка* k *с фактором связи* ω.

Условия (13), (14) можно записать в эквивалентном виде, изменив порядок суммирования:

$$\begin{aligned} &f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^j/j!) \times \end{aligned}$$

[1] Термин «конический» означает, что когда точка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежит некоторому геометрическому объекту, то ему принадлежат также и все точки вида $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, соответствующие произвольным значениям $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}&\times f^{(c)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x})\cos(\omega\ln\lambda)-\\&-\Sigma_{j=0,k}\,\lambda^{p}((q\ln\lambda)^{j}/j!)\times\\&\times f^{(s)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x})\sin(\omega\ln\lambda);\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x})=\\&=\Sigma_{j=0,k}\,\lambda^{p}((q\ln\lambda)^{j}/j!)\times\\&\times f^{(c)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x})\sin(\omega\ln\lambda)+\\&+\Sigma_{j=0,k}\,\lambda^{p}((q\ln\lambda)^{j}/j!)\times\\&\times f^{(s)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x})\cos(\omega\ln\lambda).\end{aligned}\tag{16}$$

При $\omega = 0$ соотношения (13), (14) для функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ расцепляются и становятся не зависимыми друг от друга. В этом случае цепочка функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и цепочка функций $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ оказываются не зависящими друг от друга цепочками фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, которые были подробно рассмотрены в статье [27].

Параметр q отвечает за нормировку фундаментальных взаимно-однородных функций и не влияет на их остальные свойства. После подстановки

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = q^{j}\,F^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}),$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = q^{j}\,F^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$$

параметр q исчезает из функциональных соотношений (13), (14), а функции $F^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$ и $F^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$ приобретают смысл нормированных фундаментальных взаимно-однородных функций, соответствующих выбору $q = 1$.

Для фундаментальных взаимно-однородных функций нулевого порядка получаем функциональные соотношения

$$\begin{aligned}&f^{(c)}{}_{p,0}(\lambda\mathbf{x})=\lambda^{p}f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})\cos(\omega\ln\lambda)-\\&-\lambda^{p}f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})\sin(\omega\ln\lambda);\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&f^{(s)}{}_{p,0}(\lambda\mathbf{x})=\lambda^{p}f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})\sin(\omega\ln\lambda)+\\&+\lambda^{p}f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})\cos(\omega\ln\lambda).\end{aligned}\tag{18}$$

Лемма 1. *Фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), при $x_1 > 0$ могут быть представлены в виде*

$$\begin{aligned}&f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})=\\&=x_1^{\,p}\,h^{(c)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\cos(\omega\ln x_1)-\\&-x_1^{\,p}\,h^{(s)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\sin(\omega\ln x_1);\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})=\\&=x_1^{\,p}\,h^{(c)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\sin(\omega\ln x_1)+\\&+x_1^{\,p}\,h^{(s)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\cos(\omega\ln x_1),\end{aligned}\tag{20}$$

где функции $h^{(c)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут произвольными вещественными от $(n - 1)$ переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$, а при $x_1 < 0$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}&f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})=(-x_1)^{p}\times\\&\times g^{(c)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\cos(\omega\ln(-x_1))-\\&-(-x_1)^{p}\,g^{(s)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\sin(\omega\ln(-x_1));\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})=(-x_1)^{p}\times\\&\times g^{(c)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\sin(\omega\ln(-x_1))+\\&+(-x_1)^{p}\,g^{(s)}(x_2/x_1,x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1)\times\\&\times\cos(\omega\ln(-x_1)),\end{aligned}\tag{22}$$

где $g^{(c)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и выбираются независимо от функций $h^{(c)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$, использованных при $x_1 > 0$.

Доказательство. Подставим в соотношения (17) и (18) значение $\lambda = 1/x_1$, предполагая, что $x_1 > 0$. В результате получим следующие линейные уравнения для функций $f^{(c)}_{p,0}$ $(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}$ $(\mathbf{x})$:

$$x_1^p f^{(c)}_{p,0}(1, x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) = \\ = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln x_1) + \\ + f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda);$$

$$x_1^p f^{(s)}_{p,0}(1, x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) = \\ = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln x_1) + \\ + f(s)p,0(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda).$$

Добавим обозначения:

$$h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(1, t_2, t_3, \ldots, t_n).$$

После этого из полученной системы линейных уравнений получаются формулы (19), (20).

Соответственно, в случае $x_1 < 0$, после подстановки $\lambda = -1/x_1$ в формулы (17) и (18), на выходе получаются формулы (21), (22), где функции $g^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, вообще говоря, не зависящие от функций $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, используемых в формулах (19), (20), задаются соотношениями

$$g^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(-1, -t_2, t_3, \ldots, -t_n),$$

$$g^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(-1, -t_2, \ldots, -t_n).$$

Лемма 1 доказана.

При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ задача о параметризации функций $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$, которые будут подчиняться функциональным соотношениям (17) и (18), но зависят от меньшего числа независимых переменных, решается с помощью формул, аналогичным формулам (19), (20), (21), (22). Процесс повторяется, пока не будет исчерпан список переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Лемма 2. *Фундаментальные взаимнооднородные функции $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть представлены в виде*

$$f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = r^p \times \\ \times h^{(c)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \cos(\omega \ln r) - \\ - r^p h^{(s)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \sin(\omega \ln r); \quad (23)$$

$$f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = r^p \times \\ \times h^{(c)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \sin(\omega \ln r) + \\ + r^p h^{(s)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \cos(\omega \ln r), \quad (24)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, а $h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от n переменных, заданными на единичной гиперсфере

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1,$$

которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 1, за исключением выбора множителя $\lambda > 0$ как $\lambda = 1/r$. Функции

$$h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ и } h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

заданные на единичной гиперсфере

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1,$$

определяются как

$$h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

$$h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $S_p(\mathbf{x})$ – это положительно однородная функция степени p, $S_\omega(\mathbf{x})$ – положительно однородная функция степени $\omega \neq 0$, а $\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$ – положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в области Ω эти функции не имеют сингулярных точек, функция S_p не обращается в нуль, функция S_ω строго больше нуля, функции $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ являются функционально независимыми.

Тогда фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть в области Ω представлены в виде

$$\begin{aligned} f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \cos(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})) - S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \sin(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \sin(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})) + S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \cos(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})), \end{aligned} \tag{26}$$

где $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f(s)_{p,0}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Функции

$$g^{(c)}(\mathbf{x}) = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})/S_p(\mathbf{x}),$$

$$g^{(s)}(\mathbf{x}) = f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})/S_p(\mathbf{x})$$

представляют собой фундаментальные взаимно-однородные функции нулевого порядка и нулевой степени, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} g^{(c)}(\lambda\mathbf{x}) = g^{(c)}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - \\ - g^{(s)}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{(s)}(\lambda\mathbf{x}) = g^{(c)}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda). \end{aligned}$$

Подставим в это соотношение значение $\lambda = S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}$, которое в рассматриваемой области определено корректно и удовлетворяет условию $\lambda > 0$.

Функции

$$g^{(c)}(x_1/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, x_2/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, \ldots, x_n/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}),$$

$$g^{(s)}(x_1/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, x_2/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, \ldots, x_n/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega})$$

будут однородными по Эйлеру нулевой степени, поэтому их можно записать как

$$h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))$$

и, соответственно,

$$h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))$$

(см. формулу (12)).

После этого из соотношений

$$\begin{aligned} h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) = \\ = g^{(c)}(\mathbf{x}) \cos(\ln S_\omega(\mathbf{x})) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \sin(\ln S_\omega(\mathbf{x})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) = \\ = g^{(c)}(\mathbf{x}) \sin(\ln S_\omega(\mathbf{x})) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \cos(\ln S_\omega(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

можно выразить функции $g^{(c)}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}(\mathbf{x})$.

В результате для функций $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ получаются формулы (25), (26).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть представлены в виде*

$$f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln |\Phi_\omega(\mathbf{x})|); \tag{27}$$

$$f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln |\Phi_\omega(\mathbf{x})|), \tag{28}$$

где $R_p(\mathbf{x})$ будет произвольной положительно однородной функцией степени p, а $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ будет произвольной положительно однородной функцией степени ω, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3, где $\Omega = R^n$ и выбраны положительно однородные функции

$$S_p(\mathbf{x}) = r^p,\ S_\omega(\mathbf{x}) = r^\omega,$$

$$\psi_2(\mathbf{x}) = x_2/r,\ \psi_3(\mathbf{x}) = x_3/r,\ \ldots,$$

$$\psi n(\mathbf{x}) = x_n/r,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

которые удовлетворяют условиям леммы во всем пространстве R^n, за исключением начала координат.

Функции $h^{(c)}(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$, входящие в формулы (25), (26), можно представить в виде

$$h^{(c)}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) = \\ = H(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n)\cos(G(\psi_2, \psi_3, \ldots,\psi_n));$$

$$h^{(s)}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) = \\ = H(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n)\sin(G(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n)),$$

где $H(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ и $G(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ – произвольные функции от $(n - 1)$ переменных.

В соответствии с формулой (12), произвольную положительно однородную функцию $R_p(\mathbf{x})$ степени p можно представить в виде

$$R_p(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times H(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})),$$

а произвольную положительно однородную функцию $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ степени ω можно представить в виде

$$\Phi_\omega(\mathbf{x}) = \pm S_\omega(\mathbf{x}) \times \\ \times \exp(G(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))),$$

где $G(\mathbf{x}) = \ln(|\Phi_\omega(\mathbf{x})|/S_\omega(\mathbf{x}))$ будет положительно однородной функцией нулевой степени, а знак выбирается в соответствии со знаком функции $\Phi_\omega(\mathbf{x})$. Здесь следует учесть, что положительно однородная функция $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ сохраняет один и тот же знак во всех точках вида $\lambda\mathbf{x}$.

После указанных подстановок формулы (25), (26) приобретают вид (27), (28).

Лемма 4 доказана.

Теорема. *Цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которая при $\forall\lambda > 0$ подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), во всех точках, в которых функция $S_q(\mathbf{x})$ не равна нулю, может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\,((\ln|S_q(\mathbf{x})|)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})\cos(\ln Q^{(j)}{}_\omega(\mathbf{x})); \qquad (29)$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\,((\ln|S_q(\mathbf{x})|)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})\sin(\ln Q^{(j)}{}_\omega(\mathbf{x})), \qquad (30)$$

где $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$ – произвольные однородные функции степени p; $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ – это произвольные однородные функции степени $\omega \neq 0$, принимающие положительные значения; $S_q(\mathbf{x})$ – фиксированная не равная нулю ни в одной точке однородная функция степени $q \neq 0$.

Между функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и функциями $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$, $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ при фиксированной функции $S_q(\mathbf{x})$ устанавливается взаимно-однозначная связь.

Доказательство. При $k = 0$ справедливость формул (29), (30) устанавливается леммой 4 и формулами (27), (28). С помощью метода индукции принимаем следующее: пусть условия (29), (30) выполнено при $k = 0, 1, ..., m - 1$. Сделаем подстановку

$$f^{(c)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x}) + \Sigma_{k=1,m}((\ln|S_q(\mathbf{x})|)^k/k!) \times \\ \times R_p{}^{(m-k)}(\mathbf{x})\cos(\ln Q^{(m-k)}{}_\omega(\mathbf{x}));$$

$$f^{(s)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x}) + \Sigma_{k=1,m}((\ln|S_q(\mathbf{x})|)^k/k!) \times \\ \times R_p{}^{(m-k)}(\mathbf{x})\sin(\ln Q^{(m-k)}{}_\omega(\mathbf{x})),$$

где $g_c(\mathbf{x})$ и $g_s(\mathbf{x})$ будут пока что произвольными функциями, а функции $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ получены на предыдущих шагах доказательства.

Подставим эти выражения вместе с формулами (29), (30) для $k = 0, 1, ..., m - 1$ в уравнения (13), (14) для $k = m$, которые можно теперь записать в виде

$$0 = f^{(c)}{}_{p,m}(\lambda\mathbf{x}) - \lambda^p\cos(\omega\ln\lambda)\,(f^{(c)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}((q\ln\lambda)^k/k!)\,f^{(c)}{}_{p,m-k}(\mathbf{x})) +$$

$$+ \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda)\, (f^{(s)}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(s)}_{p,m-k}(\mathbf{x}));$$

$$0 = f^{(s)}_{p,m}(\lambda\mathbf{x}) - \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda)\, (f^{(c)}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}\, ((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(c)}_{p,m-k}(\mathbf{x})) - \\ - \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda)\, (f^{(s)}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}\, ((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(s)}_{p,m-k}(x)).$$

Требуется найти такие функции $g_c(\mathbf{x})$ и $g_s(\mathbf{x})$, для которых эти уравнения были бы выполнены. После довольно трудоемкого упрощения уравнения приобретают следующий вид:

$$g_c(\lambda\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x})\, \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda) - \\ - g_s(\mathbf{x})\, \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda);$$

$$g_s(\lambda\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x})\, \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda) + \\ + g_s(\mathbf{x})\, \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda).$$

В соответствии с леммой 4, существуют такие функции $R_p^{(m)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям теоремы, что справедливы равенства

$$g_c(\mathbf{x}) = R_p^{(m)}(\mathbf{x}) \cos(\ln Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x}));$$

$$g_s(\mathbf{x}) = R_p^{(m)}(\mathbf{x}) \sin(\ln Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x})).$$

Следовательно, формула (21) справедлива также при $k = m$, а значит, и при любых $k = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема доказана.

Примечание. Множество точек, для которых $S_q(\mathbf{x}) = 0$, образует коническую поверхность меньшей размерности, вдоль которой функции $f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x})$ снова оказываются фундаментальными взаимно-однородными функциями, но уже от меньшего числа независимых переменных. Поэтому для границ, разделяющих конические области $S_q(\mathbf{x}) \neq 0$, снова применима параметризация вида (29), (30), но уже с другими функциями S_q и с участием меньшего числа переменных, и т. д.

Следствие 1. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций $f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x})$, которая при $\forall\lambda > 0$ подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), при $x_1 > 0$ может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, x_1^{\,p}((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, x_1^{\,p}((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1); \tag{31}$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, x_1^{\,p}((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, x_1^{\,p}((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1), \tag{32}$$

где $h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n-1)$ переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Из формул (31), (32) *путем замены $x_1 \to -x_1$ получаются формулы для случая $x_1 < 0$:*

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(c)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln(-x_1)) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(s)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln(-x_1)); \tag{33}$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(c)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln(-x_1)) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(s)}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln(-x_1)), \tag{34}$$

где $g_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n-1)$ переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x})$, причем функции $g_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ выбираются не зависимо от функций $h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, используемых в случае $x_1 > 0$.

Доказательство. Ограничимся доказательством следствия 1 для условия $x_1 > 0$, так как случай $x_1 < 0$ получается из выкладок для случая $x_1 > 0$ после замены $x_1 = -x_1$, при которой соотношения (29), (30) сохраняются в неизменном виде. Применим доказанную теорему с функцией $S_q(\mathbf{x}) = x_1^{\,q}$, где функции $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ будут представлены в области $x_1 > 0$ в соответствии с формулами (9) в виде

$$R_p^{(j)}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}\, H_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

$$Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x}) = x_1^{\,\omega}\, G_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1).$$

После подстановки и преобразования формул (29), (30) для новых функций

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = \\ = H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n)\cos(\ln G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n));$$

$$h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = \\ = H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n)\sin(\ln G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n))$$

получаются формулы (31), (32).

Поскольку функции

$$H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

являются произвольными, то функции

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),\ h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

– тоже произвольные.

Следствие 1 доказано.

Примечание к следствию 1. При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ задача о параметризации функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которые будут подчиняться функциональным соотношениям (13) и (14), но зависят от меньшего числа независимых переменных, решается с помощью формул, аналогичных формулам (31), (32), (33), (34). Процесс рекурсивно повторяется, пока не будет исчерпан список не равных нулю переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следствие 2. *Цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, *которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\cos(\omega \ln r) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\sin(\omega \ln r); \tag{35}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\sin(\omega \ln r) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\cos(\omega \ln r), \tag{36}$$

где $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, *а*

$$h_j^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

будут произвольными вещественными функциями, которые задаются на поверхности гиперсферы единичного радиуса

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1$$

и которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Используется схема доказательства следствия 2, где $S_q(\mathbf{x}) = r^q$, а для функций $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ применяются формулы (11).

Следствие 2 из теоремы доказано.

Следствие 3. *Пусть* $\psi_p(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* p, $\psi_q(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* $q \neq 0$, $\psi_\omega(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* $\omega \neq 0$, а $\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$ *– это положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в области Ω *эти функции не имеют сингулярных точек или точек разрыва, функция* ψ_p *не обращается в нуль, функции* ψ_q *и* ψ_ω *являются строго положительными*[2], *функции* $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ *– функционально независимы.*

Тогда фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, *которые при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняются функциональным соотношениям (13) и (14), в области* Ω *могут быть представлены взаимно-однозначным образом в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(c)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\cos(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(s)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\sin(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})); \tag{37}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(c)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\sin(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})) +$$

[2] Для функций с отрицательными значениями можно использовать их модули.

$$+ \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \quad (38)$$
$$\times\, h^{(s)}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\cos(\ln \psi_\omega(\mathbf{x}))\ ,$$

где $h_j^{(c)}(t_2, t_3,..., t_n)$ *и* $h_j^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ *будут произвольными вещественными функциями от* $(n-1)$ *переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется схема доказательства следствия 1, где $S_q(\mathbf{x}) = \psi_q(\mathbf{x})$, а для функций $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ применяются формулы (12).

Следствие 3 из теоремы доказано.

Примечание к следствию 3. При использовании формул (37), (38) все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конического вида, в которых функции $\psi_p(\mathbf{x})$, $\psi_q(\mathbf{x})$ и $\psi_\omega(\mathbf{x})$, выбранные фиксированным образом, не обращаются в нуль, функции

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

образуют функционально независимый набор функций, а также в которых перечисленные функции не имеют сингулярных точек и точек разрыва. Для каждой из областей Ω_s при конструировании параметризации (37), (38) используется, вообще говоря, свой собственный набор функций

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

никак не связанный с функциями

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

которые используются для других областей.

В результате параметризация фундаментальных взаимно-однородных функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ разбивается на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций $\psi_p(\mathbf{x})$, $\psi_q(\mathbf{x})$ и $\psi_\omega(\mathbf{x})$ и, в меньшей степени, функций

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}),$$

и в силу этого не отражает внутреннюю структуру параметризуемой цепочки функций.

Линейная комбинация функций с постоянными коэффициентами, составленная из нескольких цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций степени p, снова будет цепочкой фундаментальных взаимно-однородных функций степени p. Кроме того, если $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ – это цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций степени p, то новая цепочка функций

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = f^{(c)}{}_{p,k-1}(\mathbf{x}) \text{ и } g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = f^{(s)}{}_{p,k-1}(\mathbf{x}),$$

полученная с помощью сдвига индекса $k \to k-1$ и дополненная начальными нулями $g^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = 0$ и $g^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = 0$, также будет цепочкой фундаментальных взаимно-однородных функций степени p.

Полученные формулы (29) – (38) иллюстрируют справедливость гипотезы Гельфанда, согласно которой цепочки общего вида получаются из главных цепочек с ненулевым первым членом с помощью линейной комбинации с постоянными коэффициентами, составленной из главных и дочерних цепочек, которые получаются из главных цепочек с помощью сдвига индекса k и дополнения цепочки начальными нулевыми элементами. При этом все члены главной цепочки функций, в отличие от составных цепочек, восстанавливаются однозначным образом по ее первому члену в соответствии с некоторым правилом.

Точная формулировка этого правила отражает субъективные предпочтения исследователя и может варьироваться в широких пределах. Вообще говоря, понятие главной цепочки является в достаточной степени нечетким, поскольку при изменении способа параметризации функций прежние главные цепочки будут становиться составными, и наоборот, некоторые составные цепочки будут приобретать статус главных.

Как следует из формул (21), фундаментальные присоединенные однородные функции есть по сути линейные комбинации с постоянными коэффициентами, порождаемые главными цепочками функций, имеющих вид

$(1/k!)\ (\ln |S_q(\mathbf{x})|)^k\ R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln |S_\omega(\mathbf{x})|),$
$(1/k!)\ (\ln |S_q(\mathbf{x})|)^k\ R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln |S_\omega(\mathbf{x})|),$

где $R_p(\mathbf{x})$ – произвольные, положительно однородные функции степени p, $S_\omega(\mathbf{x})$ – произвольные, положительно однородные функции степени ω, а $S_q(\mathbf{x})$ – это фиксированные, положительно однородные функции степени q. Ситуация не изменится и никаких новых функций не удастся получить, если разрешить, чтобы функции $S_q(\mathbf{x})$ были произвольными, положительно однородными функциями степени q (хотя при таком подходе различать главные и составные цепочки становится совсем уж проблематичным).

Предварительные выводы

В процессе анализа взаимно-однородных функций, которые соответствуют матрице функциональных уравнений с одинаковыми вещественными собственными числами, был получен класс функций, представляющий собой обобщение присоединенных однородных функций Гельфанда [29, 30]. Определения и теоремы, сформулированные в процессе проведения исследования, позволяют корректным образом определить этот важный класс функций и более подробно исследовать его свойства. В частности, теорема о представлении фундаментальных взаимно-однородных функций позволяет без опаски ввести функции вида

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = (1/k!) \times \times (\ln S_q(\mathbf{x}))^k R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln \Phi_\omega(\mathbf{x}));$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = (1/k!) \times \times (\ln S_q(\mathbf{x}))^k R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln \Phi_\omega(\mathbf{x})),$$

а также их линейные комбинации с постоянными коэффициентами (возможно, с предварительным сдвигом индекса k и дополнением цепочки функций начальными нулями),
где $R_p(\mathbf{x})$ – это положительно однородная по Эйлеру функция степени p; $S_q(\mathbf{x})$ – положительно однородная по Эйлеру функция степени q, принимающая положительные значения; $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ – положительно однородная по Эйлеру функция степени ω, принимающая положительные значения.

Такие функции тождественно совпадают с рассматриваемым классом фундаментальных взаимно-однородных функций, полностью сохраняя все их свойства и не порождая при этом принципиально новых математических объектов.

Дальнейшее исследование дифференциальных и интегральных свойств цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций как нового функционального класса функций вещественного переменного будет продолжено в последующих публикациях.

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [31].

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за активное участие в обсуждении проблемы.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-01073-20-00 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсо-

на для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62.

4. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К**. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements // Microelectronic Engineering. 1991. Vol. 14. No. 3–4. Pp. 197–205.

10. **Khursheed A.** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast // Microelectronic Engineering. 1992. Vol. 16. No. 1–4. Pp. 43–50.

11. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets // Scanning. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 87–91.

12. **Khursheed A.** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2000. Vol. 71. No. 4. Pp. 1712–1715.

13. **Khursheed A.** A low voltage time of flight electron emission microscope // Optik (Jena). 2002. Vol. 113. No. 11. Pp. 505–509.

14. **Khursheed A.** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM // Ultramicroscopy. 2002. Vol. 93. No. 3–4. Pp. 331–338.

15. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2003. Vol. 74. No. 1. Pp. 134–140.

16. **Khursheed A., Osterberg M.** A spectroscopic scanning electron microscope design // Scanning. 2004. Vol. 26. No. 6. Pp. 296–306.

17. **Osterberg M., Khursheed A.** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 2005. Vol. 555. No. 1–2. Pp. 20–30.

18. **Khursheed A., Osterberg M.** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2006. Vol. 556. No. 2. Pp. 437–444.

19. **Luo T., Khursheed A.** Imaging with surface sensitive backscattered electrons // Journal of Vacuum Science and Technology B. 2007. Vol. 25. No. 6. Pp. 2017–2019.

20. **Khursheed, A., Hoang, H.Q.** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection // Ultramicroscopy. 2008. Vol. 109. No. 1. Pp. 104–110.

21. **Khursheed A.** Scanning electron microscope optics and spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010. 403 p.

22. **Hoang H.Q., Khursheed A.** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2011. Vol. 635. No. 1. Pp. 64–68.

23. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM // Ultramicroscopy. 2011. Vol. 111. No. 8. Pp. 1093–1100.

24. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Journal of

Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 2012. Vol. 184. No. 11–12. Pp. 525–532.

25. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source // Nature Communications. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 1288.

26. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53.

27. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Цепочки фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 53–71.

28. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

29. **Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. Вып. 3. С. 3–70.

30. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Серия «Обобщенные функции». Вып. 1. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.

31. Wolfram Mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 27.03.2020, принята к публикации 17.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62.

4. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St.

Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2010.

6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

9. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.,** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements, Microelectronic Engineering. 14 (3–4) (1991) 197–205.

10. **Khursheed A.,** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast, Microelectronic Engineering. 16 (1–4) (1992) 43–50.

11. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.,** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets, Scanning. 20 (2) (1998) 87–91.

12. **Khursheed A.,** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 71 (4) (2000) 1712–1715.

13. **Khursheed A.,** A low voltage time of flight electron emission microscope, Optik (Jena). 113 (11) (2002) 505–509.

14. **Khursheed A.,** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM, Ultramicroscopy. 93 (3–4) (2002) 331–338.

15. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.,** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 74 (1) (2003) 134–140.

16. **Khursheed A., Osterberg M.,** A spectroscopic scanning electron microscope design, Scanning. 26 (6) (2004) 296–306.

17. **Osterberg M., Khursheed A.,** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 555 (1–2) (2005) 20–30.

18. **Khursheed A., Osterberg M.,** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 556 (2) (2006) 437–444.

19. **Luo T., Khursheed A.,** Imaging with surface sensitive backscattered electrons, Journal of Vacuum Science and Technology B. 25 (6) (2007) 2017–2019.

20. **Khursheed A., Hoang H.Q.,** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection, Ultramicroscopy. 109 (1) (2008) 104–110.

21. **Khursheed A.,** Scanning electron microscope optics and spectrometers. World Scientific, Singapore, 2010.

22. **Hoang H.Q., Khursheed A.,** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 635 (1) (2011) 64–68.

23. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.,** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM, Ultramicroscopy. 111 (8) (2011) 1093–1100.

24. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.,** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 184 (11–12) (2012) 525–532.

25. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.,** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source, Nature Communications. 9 (1) (2018) 1288.

26. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53.

27. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common real eigenvalue, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 53–71.

28. **Fikhtengol'ts G.M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

29. **Gel'fand I.M., Shapiro Z.Ya.,** Generalized functions and their applications, Uspekhi Mat. Nauk. 10 (3) (1955) 3–70.

30. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.,** Generalized functions, Vol. 1: Properties and operations, AMS Chelsea Publishing, 1964.

31. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 27.03.2020, accepted 17.04.2020.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.13207
УДК 621.384.663

ПРИБОРЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ НА ОСНОВЕ КРИСТАЛЛОВ, ИЗОГНУТЫХ ПУТЕМ НАНЕСЕНИЯ КАНАВОК НА ПОВЕРХНОСТЬ

В.А. Маишеев, Ю.Е. Сандомирский,
М.Ю. Чесноков, Ю.А. Чесноков, А.А. Янович

Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова НИЦ «Курчатовский институт»,
г. Протвино Московской области, Российская Федерация

В статье описан интересный метод изгиба кристаллических пластин кремния с помощью нанесения механическим путем канавок на их поверхности. Метод перспективен для применения как в ускорителе У70 Института физики высоких энергий, так и в устройствах Большого адронного коллайдера (БАК). С использованием указанного метода созданы конкретные устройства: кристаллический ондулятор для пучка позитронов с энергией 3 ГэВ, короткие кристаллические дефлекторы для вывода пучка протонов с энергией 70 ГэВ из ускорителя У70, многополосковые кристаллы для коллимации пучка протонов в БАК при энергии 6500 ГэВ.

Ключевые слова: Большой адронный коллайдер, коллимация пучков, кристаллический ондулятор, многополосковые кристаллы

Ссылка при цитировании: Маишеев В.А., Сандомирский Ю.Е., Чесноков М.Ю., Чесноков Ю.А., Янович А.А. Приборы для управления пучками частиц в ускорителях на основе кристаллов, изогнутых путем нанесения канавок на поверхность // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 89–98. DOI: 10.18721/JPM.13207

DEVICES FOR STEERING PARTICLE BEAMS IN THE ACCELERATORS BASED ON CRYSTALS CURVED BY SCRATCHING THE GROOVES ON THE SURFACE

V.A. Maisheev, Yu.E. Sandomirskiy,
M.Yu. Chesnokov,Yu.A. Chesnokov, A.A. Yanovich

Institute for High Energy Physics named by A.A.Logunov
of NRC “Kurchatov Institute”, Protvino of Moscow region, Russian Federation

An interesting method of bending silicon crystal plates by scratching the grooves on the surface mechanically has been presented in the paper. This method appears to have considerable promise for both the U70 accelerator at the Institute for High Energy Physics and the devices at the Large Hadron Collider (LHC). Using the method mentioned above, specific devices were made: a crystalline undulator for 3 GeV positrons, short crystalline deflectors for extraction of 70 GeV proton beam from the U70 accelerator, and multistrip crystals for collimating the 6500 GeV proton beam into the LHC.

Keywords: Large Hadron Collider, beam collimation, crystal undulator, multistrip crystal

Citation: Maisheev V.A., Sandomirskiy Yu.E., Chesnokov M.Yu., Chesnokov Yu.A., Yanovich A.A., Devices for steering particle beams in the accelerators based on crystals curved by scratching the grooves on the surface, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 89–98. DOI: 10.18721/JPM.13207

Введение

Идея профессора Э.Н.Цыганова из Дубны – использовать каналирование в изогнутых кристаллах для управления пучками частиц [1] – была проверена и продвинута во многих экспериментах (см. работы [1– 3] и ссылки в них). Практическая реализация этой идеи была наиболее широко осуществлена на ускорителе У70 в Институте физики высоких энергий имени А.А. Логунова (ИФВЭ, г. Протвино Московской области), где кристаллы используют в регулярных сеансах работы для вывода и формирования пучка. Вопросы физики каналирования пучков частиц были изложены в работах [4, 5].

Данная статья посвящена одному из способов изгиба кристаллов с целью их применения в ускорителях. Следует отметить, что эффективность отклонения частиц изогнутым кристаллом (см., например, монографию [4]) определяется отношением критического угла каналирования θ_c к расходимости пучка φ и убывает экспоненциально с длиной кристалла L:

$$\mathrm{Eff} \sim (\theta_c / \varphi)\exp(-L / L_d),$$

где характерный параметр L_d, называемый длиной деканалирования, линейно растет с энергией частиц; в кристаллах кремния для протонов с энергией 100 ГэВ он составляет 5 см.

Критический угол каналирования (угол Линдхарда) довольно мал:

$$\theta_c \approx (1/E)^{1/2} = 0{,}020 - 0{,}002 \text{ мрад}$$

для протонов с энергиями E от 100 до 10000 ГэВ соответственно.

В связи с малостью указанного угла, такой метод управления пучками не универсален, но может быть очень полезным в ряде случаев, особенно для вывода циркулирующего пучка и его деления в каналах частиц, где изогнутые кристаллы выполняют роль миниатюрных магнитов.

Размеры кристаллических пластин (вдоль пучка) варьируются от 0,1 мм до 10 см, в зависимости от величины изгиба кристалла и типа решаемых задач. Метод изгиба кристалла, который зачастую используется, основан на приложении к нему момента сил, создаваемого металлическим держателем [4, С. 85]. Для малых углов изгиба в нескольких случаях применялся метод, основанный на нанесении механическим способом канавок на поверхности кристалла.

Суть метода изгиба путем нанесения канавок

В оптике известен эффект Тваймана [6], который заключается в том, что небольшие механические повреждения поверхности создают за счет микротрещин напряжение, которое вызывает изгиб структуры вещества, причем на довольно большие расстояния. Для каналирования частиц высоких энергий важно, чтобы эти деформации были плавными. В экспериментах по отклонению частиц кристаллами, проводимых в ИФВЭ [4], были замечены интересные явления, возникающие на торце кристалла, когда траектории каналированных частиц, выходящих из кристалла, формируются особым образом при наличии микротрещин на поверхности («чувствуют» микротрещины).

Этот эффект объясняется тем, что протоны вблизи (например) царапины каналируются в деформированных слоях кристалла и огибают эти царапины. Реконструкция углов отклонения частиц показывает, что деформация кристаллографических плоскостей проникает на значительные (вплоть до нескольких сотен микрометров) глубины (рис. 1). Этот эффект был успешно использован для решения нескольких задач создания ускорений, когда изгиб кристаллов кремния создавался путем механического нанесения на их поверхности канавок с определенным периодом (с помощью алмазного резца).

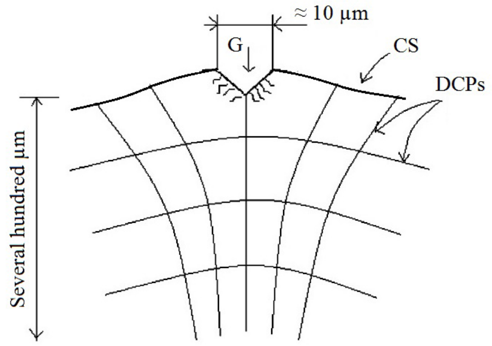


Рис. 1. Эффект деформации кристаллографических плоскостей, вызванной царапиной на поверхности кристалла: G– канавка, CS– поверхность кристалла, DCPs – деформированные кристаллографические плоскости

Примеры применения метода в ускорителях

В работе [7] впервые была показана возможность создания кристаллического ондулятора – периодически изогнутого кристалла – путем двустороннего нанесения механических канавок. С помощью рентгеновского дифрактометра было установлено, что достигнута амплитуда деформаций 40 Å в 10 периодах с шагом 0,5 мм, что достаточно для генерации жестких фотонов. Первый эксперимент с таким ондулятором был проведен на ускорителе У70 с позитронным пучком, обладающим энергией 10 ГэВ [8]. Схема ондулятора с нанесенными канавками, разработанного в ИФВЭ, показана на рис. 2.

Период двустороннего нанесения канавок d должен быть не менее толщины кристаллической пластины h, чтобы синусоидальные деформации проникли вглубь, на всю толщину кристалла, согласно принципу Сен-Венана, известному из теории упругости [9]. Если канавки наносить с малым периодом, так что $d << h$, то на глубине, примерно равной d, напряжения становятся однородными, что приводит к равномерному изгибу кристалла (рис. 3,*a*).

При этом толщина рабочего слоя, где будет эффективное каналирование, равна $h - d$. Такой способ приготовления изогнутого кристалла впервые был применен на кристаллической станции деления пучка с энергией 70 ГэВ в ускорителе У70 [10]. Угол изгиба кристалла длиной 16 мм и толщиной 0,5 мм составил 10 мрад. Опыт работы с протонными пучками интенсивностью 10^{12} частиц/(см^2·с$^{-1}$)в течение нескольких лет (с 2009 года) показал, что кристалл сохраняет изгиб и каналирующие свойства, а также делит пучок с прежней эффективностью. На рис. 3,*b* показан фрагмент этого кристалла после облучения протонами (в количестве около $5 \cdot 10^{19}$).

Следует отметить, что метод изгиба кристаллов путем нанесения канавок на их поверхности применим и для создания кристаллических полосок, изогнутых на малые углы (около 50 мкрад), оптимальных для энергий на уровне тераэлектронвольт. Такие кристаллы были проверены на пучке протонов с энергией 400 ГэВ в ускорителе суперпротонного синхротрона (СПС) в Европейском совете ядерных исследований (ЦЕРН, Швейцария), в режиме отклонения частиц за счет объемного отражения [11].

На рис. 4,*b* приведена фотография кристалла, приготовленного для этого эксперимента сотрудниками ИФВЭ, а на рис. 4,*a* – схема его работы в режиме кратного отражения частиц. Глубокие канавки с шероховатой поверхностью, выполненные треугольной фрезой с крупной алмазной крошкой, создают необходимый изгиб образовавшихся полосок на полированной грани толстой кремниевой пластины. В эксперименте, поставленном в работе [11], пучок отклонялся на угол 50 мкрад и соответствовал расчетному значению с эффективностью около 90%.

На Курчатовском источнике синхротронного излучения («КИСИ-Курчатов», НИЦ «Курчатовский институт», г. Москва) с помощью параллельного рентгеновского пучка были проведены исследования изгиба отдельных полосок и их взаимной ориентации [12]. Анализ полученных результатов показал, что эта конструкция, т.е. серия изогнутых полосок, образованная между крупными канавками на толстой пластине,

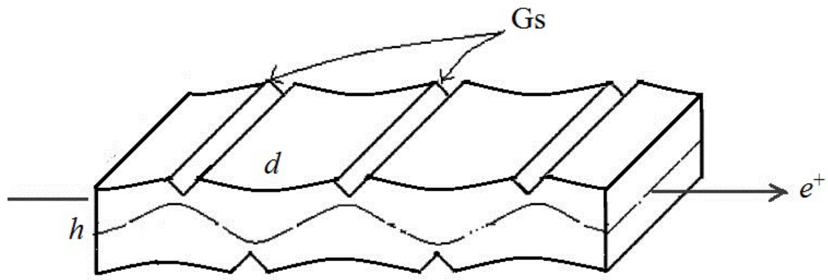


Рис. 2. Схематическое изображение кристаллического ондулятора:
Gs – канавки, *d* – период нанесения канавок, *h* – толщина кристаллической пластины, e^+ – пучок позитронов. Синусоидой показаны изогнутые кристаллографические плоскости в толщине кристалла

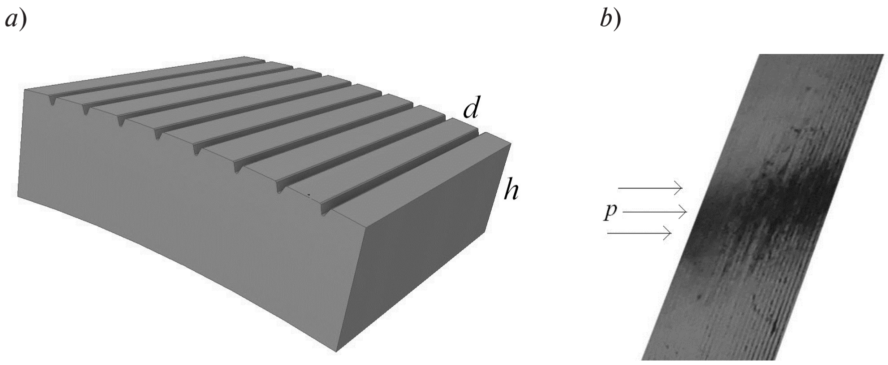


Рис. 3. Схематическое изображение изогнутой пластины кристаллического кремния:
a – равномерный изгиб получен с помощью частого нанесения канавок на поверхности;
b – фрагмент пластины в зоне взаимодействия с пучком протонов *p*

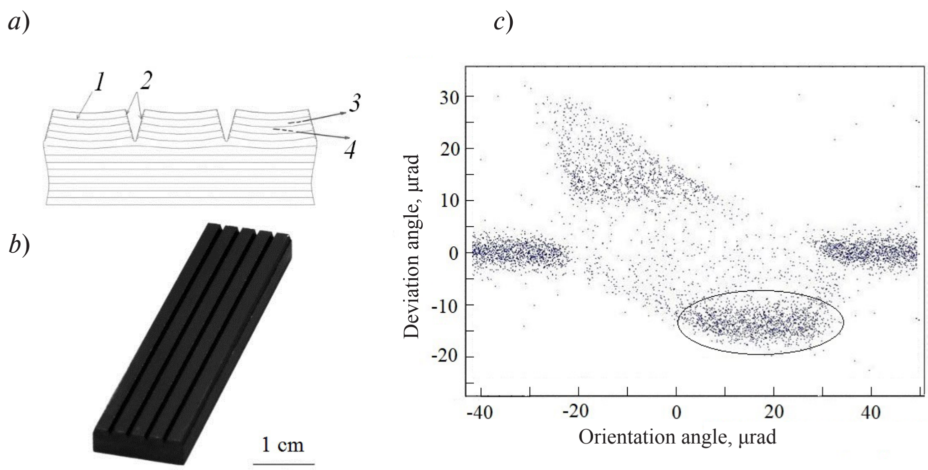


Рис. 4. Изогнутый многополосковый толстый кристалл кремния
с нанесенными периодическими канавками на поверхности:
a – схема его работы в режиме кратного отражения частиц; *b* – его фотография; *c* – результат расчета эффективного отклонения протонов с энергией 6,5 ТэВ за счет кратного отражения в изогнутых полосках (расчет выполнен методом Монте-Карло по программе СКРЕПЕР). На рис. 4,*a* показаны изогнутые кристаллографические плоскости (*1*); угловые канавки (*2*); треки частиц, отклоненных вследствие каналирования (*3*) и кратно отраженных изогнутыми плоскостями (*4*); на рис. 4,*c* овалом показана зона отражения

настолько хорошо взаимно ориентирована, что подходит для коллимации пучка протонов на Большом адронном коллайдере (БАК, ЦЕРН) и даже в планируемом ускорителе на Будущем циклическом коллайдере (БЦК, ЦЕРН) на энергию 50 ТэВ, с помощью кратного отражения частиц. При этом параметры кристаллического прибора можно легко адаптировать к такой энергии путем вариации размеров канавок и расстояния между ними.

На рис. 4,*c* показан результат расчета зависимости углов отклонения частиц пучка с энергией 6,5 ТэВ от ориентации кристаллической пластины в виде двумерной плотности, обозначенной точками. Расчет был выполнен методом Монте-Карло по нашей программе СКРЕПЕР [14]. Можно видеть, что по краям пучка (справа и слева) частицы не отклоняются, так как не попадают в створ углов изгиба кристаллических полосок. В зоне отражения, отмеченной на рисунке, практически весь пучок смещается вниз на угол 15 мкрад, соответствующий кратному отражению на пяти кристаллических полосках. Расчетная эффективность отклонения пучка, согласно проведенным оценкам, составляет свыше 92%.

Новшества на ускорителе У70 с использованием предложенного метода изгиба кристаллов

Оптимизация вывода пучка из ускорителя. Вывод пучка короткими кристаллами кремния используется на ускорителе У70 с 1998 года [13]. Новый метод изгиба позволит увеличить эффективность указанного вывода за счет уменьшения длины кристаллов, при сохранении нужного угла изгиба, так как нанесенные на поверхности канавки увеличивают кривизну кристалла. Кроме того, если канавки наносить неравномерно, можно добиться изгиба со спадающей кривизной. При этом уменьшается деканалирование частиц по длине кристалла, что также уменьшит потери частиц [14].

Нами подготовлены несколько экземпляров кристаллов, изогнутых с помощью поверхностных канавок, в том числе с неравномерной насечкой (рис. 5). Проведена оптическая проверка изгиба с помощью лазерного устройства (эта методика описана в работе [4]). На вставках рис. 5 показаны графики распределений функции угла изгиба вдоль длины кристаллов. Видно, что равномерная насечка приводит к равномерному изгибу, неравномерная насечка дает спадающую кривизну. На рис. 5,*a* также показано, что идентичные кристаллы уложены в стопку для увеличения поперечного размера кристаллического дефлектора пучка с целью дополнительного увеличения эффективности его работы.

На рис. 6 показана схема вывода пучка улучшенными кристаллами. Она поясняет, как эффективность вывода пучка можно увеличить за счет снижения доли деканалированных частиц. На вставке рис. 6 показано угловое распределение частиц, отклоненных кристаллом с постоянной (кривая *1*) и со спадающей (кривая *2*) кривизной, рассчитанное методом Монте-Карло по нашей программе СКРЕПЕР [14]. Видно, что эффект спадающей кривизны уменьшает долю деканалированных частиц в несколько раз. Эксперименты по улучшению кристаллического вывода на У70 планируются сразу после завершения модернизации ускорителя. На кристаллической станции СКД19 используется кристалл длиной 5 мм и углом изгиба 2 мрад. Приготовленные кристаллы (см. рис. 5) позволят уменьшить их длину до 3 мм, что увеличит эффективность вывода с 70 до 85%.

Испытание кристаллического ондулятора на пучке позитронов с энергией 3 ГэВ. Энергия фотонов, генерируемых в ондуляторе, пропорциональна квадрату Лоренц-фактора частицы γ и обратно пропорциональна периоду ондулятора L. В обычном электромагнитном ондуляторе период достигает нескольких сантиметров. Таким образом, фотоны с энергией в несколько кэВ достигают в электронном ускорителе энергии около 1 ГэВ в пучке. Поэтому кристаллический ондулятор с периодом субмиллиметрового ди-

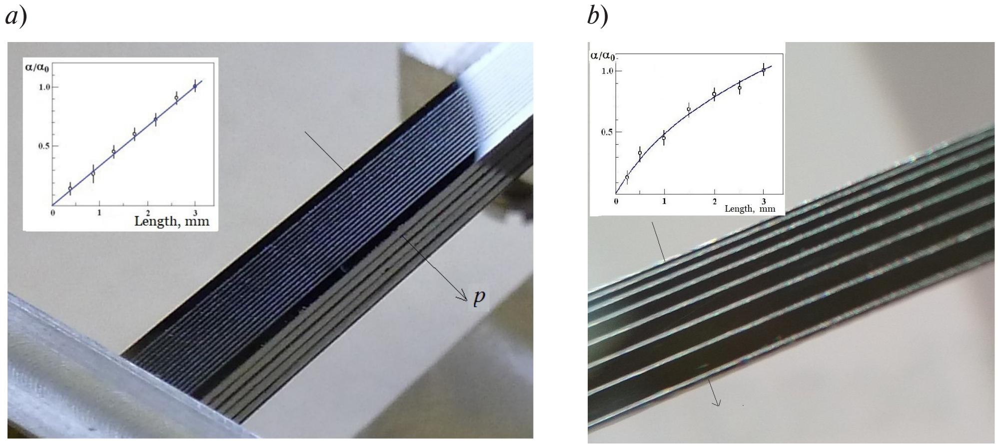


Рис. 5. Внешний вид кристаллов кремния с равномерным (*a*) и неравномерным (*b*) нанесением канавок; на вставках показаны графики распределения функции угла изгиба вдоль длины кристаллов

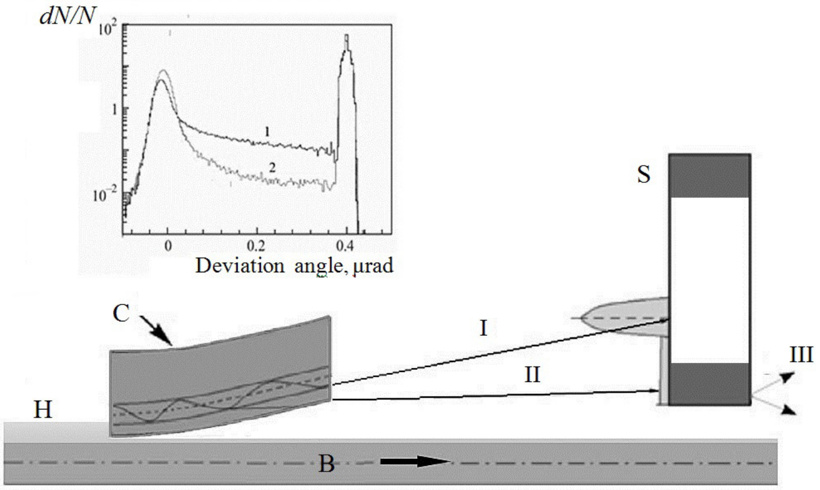


Рис. 6. Схема вывода пучка кристаллом (С): I – пик каналированных частиц, которые эффективно выведены; II – фракция деканалированных частиц; III – потери на септуме (S);
H, B – гало и пучок соответственно.
На вставке показаны угловые распределения частиц, отклоненных кристаллом с постоянной (кривая *1*) и со спадающей (кривая *2*) кривизной; рассчитаны методом Монте-Карло по нашей программе СКРЕПЕР [14]

апазона привлекает пристальное внимание исследователей, для того чтобы увеличить энергию фотонов.

Первые данные по излучению с помощью кристаллического ондулятора были получены на пучке позитронов с энергией 10 ГэВ в ИФВЭ [8]. Однако большинство ускорителей электронов, где могут использоваться кристаллические ондуляторы, работает при энергии ниже 6 ГэВ. Нами подготовлены новые образцы кристаллических ондуляторов (рис. 7,*a*), оптимизированных для более низких энергий позитронов, которые можно достичь на действующих ускорителях электронов. Первые опыты предполагается провести в ИФВЭ на установке «Кристалл» при энергии позитронов 3 ГэВ. При достигнутых параметрах, а именно – периоде 0,4 мм, амплитуде 50 Å, числе периодов 9, мы планируем получить ондуляторный пик фотонов примерно 0,23 МэВ. Результаты расчета спектра фотонов, выполненные по

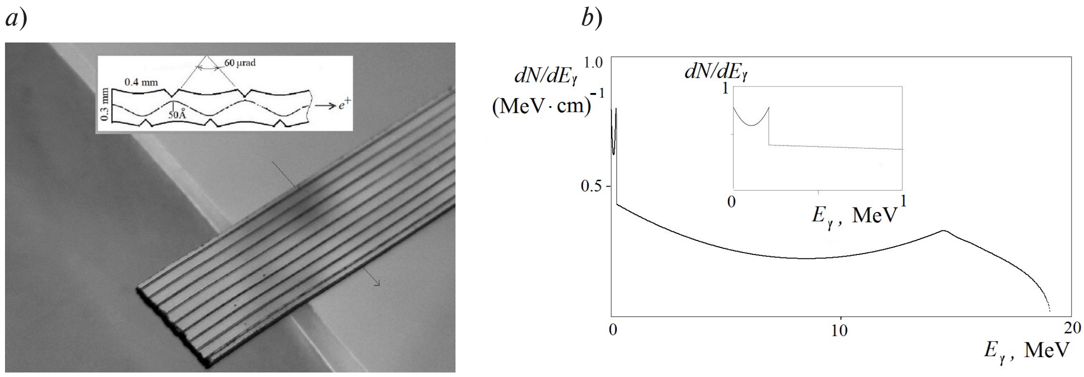


Рис. 7. Кристаллический ондулятор на пучке позитронов с энергией 3ГэВ: *a* – его фотография и схематическое изображение его сечения (на вставке); *b* – расчетный спектр фотонов, полученных с помощью ондулятора, и ондуляторный пик в области 0,23 МэВ (на вставке)

программе [15], представлены на рис. 7,*b*. Эта программа реализует алгоритм расчета ондуляторного излучения в кристалле с учетом довольно интенсивного излучения при каналировании позитронов, предложенный в работе [16]. Ондуляторный пик в области 0,23 МэВ подробно показан на вставке рис. 7,*b*. Фоновое излучение до 20 МэВ обусловлено каналированием.

Заключение

В данной статье описан интересный метод изгиба кристаллических пластин путем нанесения механическим способом канавок на их поверхности. Такой метод уже применялся для решения ряда задач управления потоками частиц, но еще важнее его развитие для новых, обозначенных здесь задач. С помощью метода нанесения канавок созданы конкретные устройства: кристаллический ондулятор для позитронов 3 ГэВ, короткие кристаллические дефлекторы для вывода пучка протонов с энергией 70 ГэВ из ускорителя У70, многополосковые кристаллы для коллимации пучка протонов в Большом адронном коллайдере при энергии 6500 ГэВ. Последние перспективны для решения глобальной задачи коллимации пучка на будущих мульти-ТэВ коллайдерах.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 20-02-00045).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Elishev A.F., Filatova N.A., Golovatyuk V.M., et al.** Steering of charged particle trajectories by a bent crystal // Physics Letters. B. 1979. Vol. 88. No. 3–4. Pp. 387–391.

2. **Shiltsev V.** Experience with crystals at Fermilab accelerators // International Journal of Modern Physics. A. 2019. Vol. 34. P. 1943007.

3. **Scandale W., Taratin A.M.** Channeling and volume reflection of high-energy charged particles in short bent crystals. Crystal assisted collimation of the accelerator beam halo // Physics Reports. 2019. Vol. 815. 25 June. Pp. 1–107.

4. **Biryukov V.M., Chesnokov Yu.A., Kotov V.I.** Crystal channeling and its application at high-energy accelerators. Berlin, Germany: Springer, 1997. 219 p.

5. **Chesnokov Yu.A., Afonin A.G., Baranov V.T., et al.** Modern success in channeling study and applications at the U-70 accelerator of IHEP// Nuovo Cimento.C. 2011. Vol. 034. No. 4. Pp. 407–415.

6. **Lambropoulos J.C., Xu S., Fang T., Golini D.** Twyman effect mechanics in grinding and microgrinding // Applied Optics. 1996. Vol. 35. No. 28. Pp. 5704–5713.

7. **Bellucci S., Bini S., Biryukov V.M., et al.** Experimental study for the feasibility of a crystalline undulator // Physical Review Letters.

2003. Vol. 90. No. 3. P. 034801.

8. **Баранов В.Т., Беллуччи С., Бирюков В.М. и др.** Первые результаты исследования излучения позитронов в кристаллическом ондуляторе//Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2005. Т. 82. № 9. С. 638–641.

9. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. Пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 560 с.

10. **Архипенко А.А., Афонин А.Г., Баранов В.Т. и др.** Деление пучка протонов с энергией 50 ГэВ слабовозмущающим изогнутым кристаллом // Приборы и техника эксперимента. 2009. №2. С. 5–8.

11. **Scandale W., Arduini G., Butcher M., et al.** Deflection of high energy protons by multiple volume reflections in a modified multi-strip silicon deflector// Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. B. 2014. Vol. 338. 1 November. Pp. 108–111.

12. **Калоян А.А., Тихомиров С.А., Подурец К.М.,Маишеев В.А., Сандомирский Ю.Е., Чесноков Ю.А.** Исследование кристаллического прибора для отклонения протонного пучка с помощью дифракции синхротронного излучения // Кристаллография. 2017. Т. 62. № 3. С. 370–373.

13. **Афонин А.Г.,Маишеев В.А., Троянов Е.Ф. и др.** Вывод протонного пучка из ускорителя ИФВЭ с помощью коротких кристаллов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2005. Т. 36. № 1. С. 43–99.

14. **Язынин И.А., Маишеев В.А., Чесноков Ю.А.** Использование кристалла со спадающей кривизной для увеличения эффективности вывода пучка из ускорителя // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 94. № 3. С. 267–270.

15. **Маишеев В.А.** Программа для расчета ондуляторного спектра фотонов. http://phpc01.ihep.su/~laba/chesn/Simulation%20of%20photon%20spectrum%20in%20undulator/.

16. **Bellucci S., Maisheev V.A.** Calculations of intensity of radiation in crystal undulator //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. B. 2006. Vol. 252. No. 2. Pp. 339–346.

Статья поступила в редакцию 26.03.2020, принята к публикации 21.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

МАИШЕЕВ Владимир Александрович – *кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики высоких энергий имени А.А. Логунова НИЦ «Курчатовский институт», г. Протвино Московской обл., Российская Федерация.*

142281, Российская Федерация, г. Протвино Московской обл., пл. Науки, 1
maisheev@ihep.ru

САНДОМИРСКИЙ Юрий Евгеньевич – *инженер-технолог Института физики высоких энергий имени А.А. ЛогуноваНИЦ «Курчатовский институт», г. Протвино Московской обл., Российская Федерация.*

142281, Российская Федерация, г. Протвино Московской обл., пл. Науки, 1
Yury.Sandomirskiy@ihep.ru

ЧЕСНОКОВ Михаил Юрьевич – *инженер-исследователь Института физики высоких энергий имени А.А. Логунова НИЦ «Курчатовский институт», г. Протвино Московской обл., Российская Федерация.*

142281, Российская Федерация, г. Протвино Московской обл., пл. Науки, 1
Michail.Chesnokov@ihep.ru

ЧЕСНОКОВ Юрий Андреевич – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики высоких энергий имени А.А. Логунова НИЦ «Курчатовский институт», г. Протвино Московской обл., Российская Федерация.*

142281, Российская Федерация, г. Протвино Московской обл., пл. Науки, 1
chesnokov@ihep.ru

ЯНОВИЧ Андрей Антонович – *научный сотрудникИнститута физики высоких энергий имени А.А. Логунова НИЦ «Курчатовский институт», г. ПротвиноМосковской обл., Российская Федерация.*

142281, Российская Федерация, г. Протвино Московской обл., пл. Науки, 1
yanovich@ihep.ru

REFERENCES

1. **Elishev A.F., Filatova N.A., Golovatyuk V.M., et al.,** Steering of charged particle trajectories by a bent crystal, Physics Letters. B. 88 (3–4) (1979) 387–391.

2. **Shiltsev V.,** Experience with crystals at Fermilab accelerators, International Journal of Modern Physics. A.34 (2019) 1943007.

3. **Scandale W., Taratin A.M.,** Channeling and volume reflection of high-energy charged particles in short bent crystals. Crystal assisted collimation of the accelerator beam halo, Physics Reports. 815 (25 June) (2019) 1–107.

4. **Biryukov V.M., Chesnokov Yu.A., Kotov V.I.,** Crystal channeling and its application at high-energy accelerators, Springer, Berlin, Germany, 1997.

5. **Chesnokov Yu.A., Afonin A.G., Baranov V.T., et al.,** Modern success in channeling study and applications at the U-70 accelerator of IHEP, Nuovo Cimento, C. 034 (4) (2011) 407–415.

6. **Lambropoulos J.C., Xu S., Fang T., Golini D.,** Twyman effect mechanics in grinding and microgrinding, Applied Optics. 35 (28) (1996) 5704–5713.

7. **Bellucci S., Bini S., Biryukov V.M., et al.,** Experimental study for the feasibility of a crystalline undulator, Physical Review Letters. 90 (3) (2003) 034801.

8. **Baranov V.T., Bellucci S., Biryukov V.M., et al.,** First results of investigation of radiation from positrons in a crystalline undulator, JETP Letters, 82 (9) (2005) 562–564.

9. **Timoshenko S.P., Goodier J.N.,** Theory of elasticity, McGraw-Hill, New-York, 1951.

10. **Arkhipenko A.A., Afonin A.G., Baranov V.T., et al.,** Splitting of a 50-GeV proton beam by a slightly disturbing bent crystal, Instruments and Experimental Techniques. 52 (1 May) (2009) 155–158.

11. **Scandale W., Arduini G., Butcher M., et al.,** Deflection of high energy protons by multiple volume reflections in a modified multi-strip silicon deflector, Nucl. Instrum. Meth. B. 338 (1 November) (2014) 108–111.

12. **Kaloyan A.A., Tikhomirov S.A., Podurets K.M., et al.,** Study of the crystal device for deflecting high-energy proton beams using synchrotron radiation diffraction, Crystallography Reports. 62 (3) (2017) 370–373.

13. **Afonin A.G., Maisheev V.A., Troyanov E.F., et al.,** Proton beam extraction from the IHEP accelerator using short silicon crystals, Phys. Part. Nucl. 36 (1) (2005) 21–54.

14. **Yazynin I.A., Maisheev V.A., Chesnokov Yu.A.,** Use of a bent crystal with a decreasing curvature to increase the efficiency of the extraction and collimation of a beam in an accelerator, JETP Letters. 94 (3) (2011) 248–250.

15. **Maisheev V.A.,** Programma dlya rascheta ondulyatornogo spektra fotonov [Programm for calculation of undulator photon spectra] http://phpc01.ihep.su/~laba/chesn/Simulation%20of%20photon%20spectrum%20in%20undulator/.

16. **Bellucci S., Maisheev V.A.,** Calculations of intensity of radiation in crystal undulator, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. B. 252 (2) (2006) 339–346.

Received 26.03.2020, accepted 21.04.2020.

THE AUTHORS

MAISHEEV Vladimir A.
Institute for High Energy Physics named by A.A. Logunov of NRC «Kurchatov Institute»
1, Nauki Sq., Protvino of Moscow Reg., 142281, Russian Federation
maisheev@ihep.ru

SANDOMIRSKIY Yury E.
Institute for High Energy Physics named by A.A. Logunov of NRC «Kurchatov Institute»
1, Nauki Sq., Protvino of Moscow Reg., 142281, Russian Federation
Yury.Sandomirskiy@ihep.ru

CHESNOKOV Mikhail Yu.
Institute for High Energy Physics named by A.A. Logunov of NRC «Kurchatov Institute»
1, Nauki Sq., Protvino of Moscow Reg., 142281, Russian Federation
Michail.Chesnokov@ihep.ru

CHESNOKOV Yury A.
Institute for High Energy Physics named by A.A. Logunov of NRC «Kurchatov Institute»
1, Nauki Sq., Protvino of Moscow Reg., 142281, Russian Federation
chesnokov@ihep.ru

YANOVICH Andrey A.
Institute for High Energy Physics named by A.A. Logunov of NRC «Kurchatov Institute»
1, Nauki Sq., Protvino of Moscow Reg., 142281, Russian Federation
yanovich@ihep.ru

DOI: 10.18721/JPM.13208
УДК 621.455.4; 621.455.34

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ИОННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ С КОНТАКТНОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

О.Ю. Цыбин[1], С.Б. Макаров[1], Д.Б. Дюбо[1], Ю.В. Кулешов[2], П.С. Гончаров[2], В.В. Мартынов[2], Н.А. Шуневич[2]

[1] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Выполнены экспериментальные измерения ряда характеристик лабораторного образца электростатического ионного ускорителя (ЭИУ) с контактной ионизацией, предназначенного для электрических ракетных двигателей космических аппаратов. В крупногабаритной вакуумной камере (2,4 м^3, 10^{-3} Па) в Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского были обеспечены необходимые физико-технологические процессы, параметры и режимы работы ЭИУ и использованы соответствующие методы и средства измерений. Выполнен теоретический анализ, в том числе методом компьютерного моделирования, особенностей конструкции ЭИУ, а также физических процессов и рабочих параметров. Установлено, что реализованные и тестируемые методы измерений, технологии и ионно-физические характеристики лабораторного образца ЭИУ соответствуют задачам разработки перспективных электрических ракетных двигателей.

Ключевые слова: вакуумная камера, компьютерное моделирование, ионизация, ионный поток, ионный ускоритель

Ссылка при цитировании: Цыбин О.Ю., Макаров С.Б., Дюбо Д.Б., Кулешов Ю.В., Гончаров П.С., Мартынов В.В., Шуневич Н.А. Электростатический ионный ускоритель с контактной ионизацией для перспективных электрических ракетных двигателей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 99–115. DOI: 10.18721/JPM.13208

AN ELECTRICALLY POWERED ION ACCELERATOR WITH CONTACT IONIZATION FOR PERSPECTIVE ELECTRICALLY POWERED THRUSTERS

O.Yu. Tsybin[1], S.B. Makarov[1], D.B. Dyubo[1], Yu.V. Kuleshov[2], P.S. Goncharov[2], V.V. Martynov[2], N.A. Shunevich[2]

[1] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky, St. Petersburg, Russian Federation

A number of characteristics of ionic and ion-plasma accelerators laboratory samples designed for electrically powered spacecraft propulsion have experimentally been studied. A large-sized vacuum chamber (2.4 m^3, 10^{-3} Pa) made at the Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky provided the necessary physical and technological processes, methods and means of measurement, parameters and operation modes of the ionic accelerators with contact ionization. The samples' design features, physical processes and operating parameters were theoretically analyzed, including the use of computer simulation. The implemented and tested measuring methods, technologies and ion-physical laboratory samples' characteristics were found to correspond to the tasks of developing the promising electrically powered spacecraft propulsion.

Keywords: vacuum chamber, experimental studies, computer simulation, ionization, ion beam, ion accelerator, electrically powered spacecraft propulsion

Citation: Tsybin O.Yu., Makarov S.B., Dyubo D.B., Kuleshov Yu.V., Goncharov P.S., Martynov V.V., Shunevich N.A., An electrically powered ion accelerator with contact ionization for perspective electrically powered thrusters, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 99–115. DOI: 10.18721/JPM.13208

Введение

Ускоренные потоки ионов в вакууме широко используются в физических исследованиях, медицине, технологиях производства материалов и микроэлектроники, а также в электрических ракетных двигателях (ЭРД) космических летательных аппаратов [1 – 13]. В мировой науке признана необходимость систематизированного изложения физических проблем ЭРД [2 – 6, 14 – 17]. Недостаточные теоретические фундаментальные положения сдерживают совершенствование имеющихся и создание новых ЭРД. Актуальной задачей является разработка ЭРД нового поколения, в которых должны сочетаться альтернативные виды рабочего тела (РТ), эффективные конструктивные и эксплуатационные решения, высокая надежность, увеличенный срок службы, относительная простота и невысокая стоимость.

Типовые ЭРД представляют собой вакуумные электронно-механические устройства, в которых электромагнитная энергия преобразуется в механическую энергию реактивного движения. Для создания механического импульса движения используют рабочий цикл, включающий преобразование РТ в ионизованную парогазовую фазу, ускорение ионов с помощью электрической энергии с последующей нейтрализацией заряда ускоренных частиц и свободным расширением факела нейтрализованного вещества в космическое пространство. Основным условием достижения требуемой тяги является увеличение механического импульса массы РТ за счет повышения его массового расхода или скорости истечения.

Снижение расхода массы РТ в ЭРД принципиально основано на достижении высокой скорости реактивного факела от 50 до 100 км/с. При этом ЭРД имеют КПД от 50 % и выше, тогда как КПД химических двигателей составляет не более 35 %. Масса РТ на борту КА с ЭРД составляет 5 – 15 % начальной массы и до 70% и выше – для ракеты с химическим двигателем. Важнейшим отличительным преимуществом ЭРД является возможность его многократного управляемого включения в работу (10^6 раз и более) и большой срок службы (10 тыс. ч и более).

Современные ЭРД в основном представлены группой электростатических двигателей, в том числе ионных двигателей (ИД) с сеточными перфорированными электродами, а также плазменных двигателей с эффектом Холла, включающих стационарные плазменные двигатели (СПД), двигатели с анодным слоем (ДАС), торцевые холловские двигатели (ТХД) и многоступенчатые холловские двигатели [1 – 17].

Сеточные ИД имеют наиболее высокую эффективность (КПД составляет от 60 до 80 % и выше), большой удельный импульс от 2000 до 10000 с (определяется как скорость истечения РТ в окружающее пространство, деленная на ускорение свободного падения у поверхности Земли, приблизительно 9,8 м/с^2) при разности напряжений на сетках до 10 кВ и выше. Такие двигатели экономно расходуют топливо и имеют большое время жизни (от 10 до 12 лет эксплуатации в космическом полете).

Холловские двигатели конструктивно проще ионных сеточных и требуют меньшее количество источников электропитания. В отличие от сеточных, в них используется магнитное поле для создания дрейфового движения электронов в направлении вектора $\vec{E}\times\vec{B}$, т.е. в направлении, поперечном векторам магнитного и электрического полей. Такое движение заряженных частиц в вакууме можно отнести не к эффекту Холла (классический эффект Холла заключается в возникновении разности потенциалов в полупроводнике, помещенном в магнитное поле), а к известному с конца XIX века фильтру Вина с дрейфом электронов в скрещенных полях в вакууме. Принципы фильтра Вина были использованы впервые Дж. Томсоном в масс-анализаторах в начале XX века. В отечественной литературе и практике иногда обоснованно принято называть СПД по имени А.И. Морозова, доказавшего реальность получения пространственно-распределенного электростатического поля в плазме, что и лежит в основе функционирования СПД [2, 3].

В мировой практике за данными двигателями закрепилось название – двигатели с эффектом Холла или холловские двигатели. Эти ЭРД обеспечивают наиболее практически значимые и надежные параметры эксплуатации, создают несколько меньший импульс, чем ионные сеточные, но большую силу тяги при одинаковой потребляемой электрической мощности. Типовые параметры холловских двигателей (производство ОКБ «Факел», г. Калининград, Россия) в разных конфигурациях находятся в пределах энергетической цены тяги от 13 до 19 Вт/мН, при потреблении электрической мощности от 200 Вт до 2,5 кВт. При этом удельный импульс составляет от 1600 до 2500 с. Для сравнения в таблице приведены основные характеристики таких двигателей отечественного производства.

Холловским двигателем на ксеноне СПД-50 оснащены космические аппараты «Метеор», «Космос-1066», «Канопус-В», «БКА» и ряд других.

Добавим еще информацию для сравнения: отношение значений силы тяги к мощности электромагнитной волны в проектах «Солнечный парус», «Лазерный двигатель» или «Фотонный двигатель» составляет 3,33 и 6,67 мкН/кВт при падении прямого солнечного излучения или отраженного, соответственно.

В соответствии с фундаментальными законами физики, реактивное движение может быть реализовано в устройстве с излучением электромагнитного поля (ЭМП). При излучении ЭМП реактивная сила производит механическое давление на антенну, что было предсказано в 1873 году Дж. Максвеллом и экспериментально доказано П.Н. Лебедевым в 1899 году, а также подтверждено теоретически на основе уравнений Максвелла в рамках классической электродинамики для процессов на границе проводника.

При этом максимальное давление ЭМП на антенну приблизительно определяется из соотношения $F_{EMF} \approx 2 \cdot W/V_g$, где W, Вт – мощность излучения, свободно распространяющегося в пространство; V_g , м/с – групповая скорость волны (которая имеет значение, близкое к скорости света); коэффициент 2 появляется, когда падающая волна отражается и излучается в обратном направлении.

Для производства заметных значений ускорения силой примерно 1 Н требуется большая мощность волны – около 150 МВт.

Обычно в конструкции ЭРД наиболее сложным и критически значимым элементом считается ионизатор РТ [2, 3, 11 – 13, 16, 18]. Способ и характеристики ионизации РТ существенно определяют достижение требуемых механических параметров. Ионизатор должен обеспечивать по возможности более полную ионизацию РТ с тем, чтобы число нейтральных частиц, попадающих в ускоряющий промежуток, не превышало 10 – 20 % от общего количества частиц, выходящих из ионизатора. Заряды и массы всех ионов, как правило, должны быть одинаковыми, а число посторонних примесей минимальным. При этом необходимо обеспечить однородность процессов в камере объемной ионизации. Кроме того, энергия, потребляемая ионизатором, и его масса должны быть ми-

Таблица 1

Основные рабочие параметры холловских двигателей

Параметр	Единица измерения	Значение		
		СПД-50	СПД-70	СПД-РРТ
Тяга	мН	14,3	40	80
Удельный импульс	с	860	1450	1600
КПД	%	26	44	48
Мощность	Вт	220	650	1350

нимальными. Плотность тока на выходе из ионизатора должна соответствовать заданным режимам ионного ускорителя и двигателя в целом.

Основной способ ионизации в СПД и в сеточных ИД состоит в объемной ионизации электронами. Конструкция объемного ионизатора должна удовлетворять определенному комплексу требований. В частности, для газа частиц РТ, имеющих сечение ионизации σ и концентрацию n, размер L камеры ионизации должен превышать ионизационную длину λ пробега электрона в газе ($\lambda = 1/\sigma n$), т. е. $L > \lambda$.

Указанные условия должны сочетаться с большим жизненным ресурсом (порядка 10 тыс. ч), в течение которого необходимо обеспечивать безотказные управляемые включения в работу и стабильную ионизацию. Кроме ионизации электронами, способы объемной ионизации в СПД, ИД и опытных моделях двигателей включают разрядную, плазменную, лазерную, высокочастотную ионизацию и др. [2, 3, 14 – 16].

Высокую плотность силы тяги на локальных участках поверхности обеспечивает полевая ионизация с сильным локальным электрическим полем вблизи острийных элементов, например, с РТ в виде жидкого металла: ртуть, магний, индий, цезий, цинк, галлий и др., а также электрораспылительные капиллярные, в которых частицы РТ находятся в коллоидном растворе. Полевые ионизаторы при использовании многоострийной поверхности в ИД создают тягу около 10 мН при потреблении электрической мощности около 300 Вт. Коллоидные двигатели обеспечивают импульс 2500 с, тягу силой 100 мкН, с энергетической ценой приблизительно 40 мН/кВт. У коллоидного двигателя объем камеры ионизации составляет 0,3 дм^3, а КПД достигает 50 %. Однако, в силу высокой концентрации энергии, разрушающей микроскопические участки поверхности, такие конструкции не могут конкурировать с объемными электронными ионизаторами, особенно в части долговечности.

Можно сделать вывод о том, что в известных ЭРД широко используют самые многообразные способы ионизации, в том числе ионизацию и ускоренное движение заряженных частиц, получаемых из сжатых газов (азот, аргон, ксенон, криптон и т. п.), жидких металлов, а также коллоидных растворов органических веществ. Считается, что хорошие перспективы могут иметь испаряемые твердые вещества, например йод, тефлон и т. п. Несмотря на большой объем выполненных исследований, широкий перечень материалов РТ относится в основном к апробациям в лабораторных установках. В ЭРД, применяемых на космических аппаратах, в основном используется ксенон, что обусловлено рядом его преимуществ: химическая инертность, достаточно большие значения атомной массы и сечения ионизации, приемлемая энергия ионизации. Тем не менее, в связи с высокой стоимостью и ограничением ресурса, актуальна замена ксенона альтернативными РТ. Для альтернативного РТ необходима разработка соответствующей новой конструкции ЭРД.

В этой связи привлекает внимание поверхностная, или контактная ионизация, распределенная по поверхности твердого тела [17 – 23]. Контактные источники с поверхностным ионизатором в виде пористой вольфрамовой пластины, сквозь которую пропускали пары цезия, были испытаны в электростатических ИД [2 – 6]. Однако этот опыт, по понятным теперь причинам, не был достаточно успешным, и работа не получила конструктивного продолжения.

В настоящее время, в связи с развитием теории и технологии пористых материалов, новый этап исследований поверхностной ионизации выглядит более обоснованным. В пористом материале вероятность туннелирования электронов и поверхностной ионизации может быть увеличена за счет новых материалов и технологий, нестационарных процессов, повышения энергии нейтральных частиц и электронов в веществе, а также неоднородности поверхности [12, 13, 16 – 23].

Для реализации новой разработки требуется большой объем экспериментальных исследований, проводимых в наземных лабораториях. Важное место в таких исследованиях должны занимать поверхностная ионизация в сочетании с реализацией и диагностикой комплекса ионно-плазменных процессов.

Наземные испытания образцов ЭРД космических аппаратов в процессе их разработки осуществляются в вакуумных установках большого объема с высокой скоростью откачки. К ним относится установка ВУ-М с вакуумным объемом 2,4 $м^3$ и давлением 10^{-3} Па, созданная в Военно-космической академии (ВКА) имени А.Ф. Можайского [24, 25].

С использованием данной установки проведен цикл совместных исследований рабочей группой из сотрудников двух организаций: ВКА имени А.Ф. Можайского и СПбПУ Петра Великого. Выполнены измерения характеристик и проведен теоретический анализ, в том числе методом компьютерного моделирования, физических процессов, а также рабочих параметров лабораторного образца ЭИУ с контактной ионизацией (далее в тексте – лабораторного образца) для электрических ракетных двигателей космических аппаратов. В вакуумной камере были обеспечены необходимые физико-технологические процессы, параметры и режимы работы ЭИУ и использованы соответствующие методы и средства измерений. Определено, что реализованные и тестируемые ионно-физические характеристики лабораторного образца соответствуют задачам разработки перспективных электрических ракетных двигателей. В данной статье рассматривается основные методики проведения исследования лабораторного образца, его этапы, полученные характеристики и результаты.

Методы исследования и аппаратура

Характеристика лабораторного образца. Требуемые параметры лабораторного образца для тестирования были получены методом компьютерного моделирования, преимущественно с использованием пакета Computer Simulation Technology (CST) [26 – 30]. Указанный подход позволил получить размеры и форму электродов, а также вольтамперные характеристики (ВАХ) потока заряженных частиц в цепи инжектора и распределения скорости частиц и электрического поля по координатам в объеме ускорителя. Дополнительно применялись новые физические и технологические решения, а также ионно-механический алгоритм, с помощью которого вычисляли силу тяги в различных сечениях ускорителя при варьировании рабочих режимов [31 – 35]. Измерялись значения следующих параметров лабораторного образца:

электрическое напряжение ускорения ионов,

дрейфовый ионный ток ускорителя,

коэффициент ионизации инжектируемого парогазового потока,

коэффициент нейтрализации ускоренного ионного потока,

сила давления факела.

На основе полученных значений вычислялись основные эксплуатационные параметры разрабатываемого лабораторного образца.

Блок-схема лабораторного образца в виде одноступенчатого линейного ускорителя прямого действия и электрическая схема измерений представлены на рис. 1. Принцип работы лабораторного образца для случая получения в ионизаторе катионов следующий. Рабочее тело *1* подается в ионизатор *2*. В ионизаторе РТ ионизируется, и катионы инжектируются в ускорительный зазор *4* между электродами-формирователями электрического поля *3* и *6*. В нем формируется дрейфовый ток *5* ускоряемых катионов. Катионы притягиваются кулоновской силой к электроду-формирователю электрического поля *6*, находящемуся под отрицательным потенциалом. За счет этого создаются ускорение катионов и сила тяги. Ускоренные катионы нейтрализуются в нейтрализаторе *7*, после чего силу тяги больше не создают, и расширяются в вакуумный объем в виде факела *8*. Электрическая энергия источника *10* вкладывается в ионный поток в зазоре *4*, и затем в виде кинетической энергии потока нейтральных частиц уносится факелом. Для измерения импульса нейтральных частиц в факеле используется измеритель *9*.

На рис. 3 показан лабораторный образец, соответствующий схеме на рис. 2.

Конструкция лабораторного образца основана на поверхностной, или контактной ионизации в модуле инжекции потока ионов в ускорительную секцию. Ионизация с образованием положительно или отрицательно заряженных частиц происходит за счет туннелирования электрона от нейтральной частицы к поверхности или

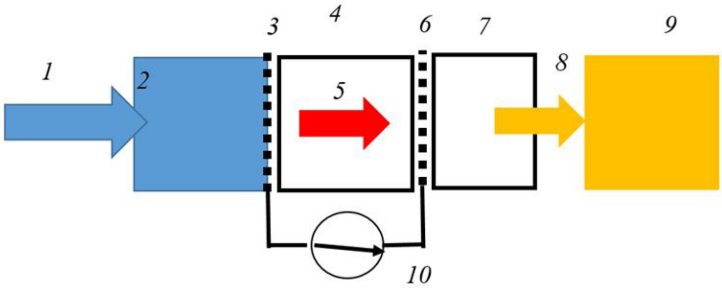


Рис. 1. Блок-схема лабораторного образца
и электрическая схема измерений (при получении катионов):
1 – газовый поток РТ; *2* – ионизатор; *3, 6* – электроды-формирователи электрического поля;
4 – ускорительный зазор; *5* – дрейфовый ток ионов в ускорительном зазоре; *7* – нейтрализатор;
8 – факел нейтральных частиц; *9* – измеритель импульса факела; *10* – источник ЭДС

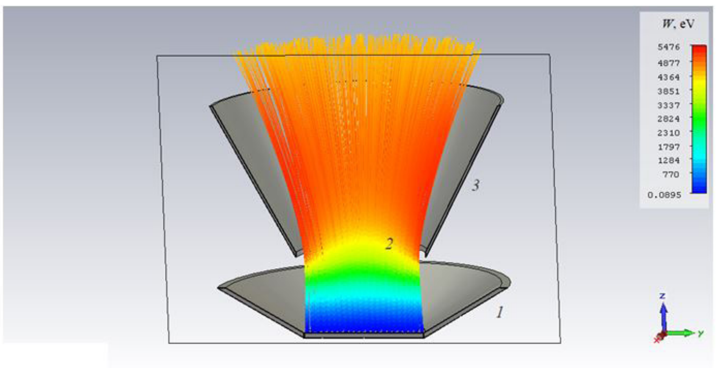


Рис. 2. Схематическое изображение лабораторного образца с траекториями ионов
в ускорительном зазоре, полученного в результате компьютерного CST-моделирования
(область расчета выделена прямоугольником):
1 – электрод с ионизатором, *2* – ионно-плазменный поток,
3 – электрод-формирователь электрического поля; цветовая шкала отражает энергетический спектр плазмы

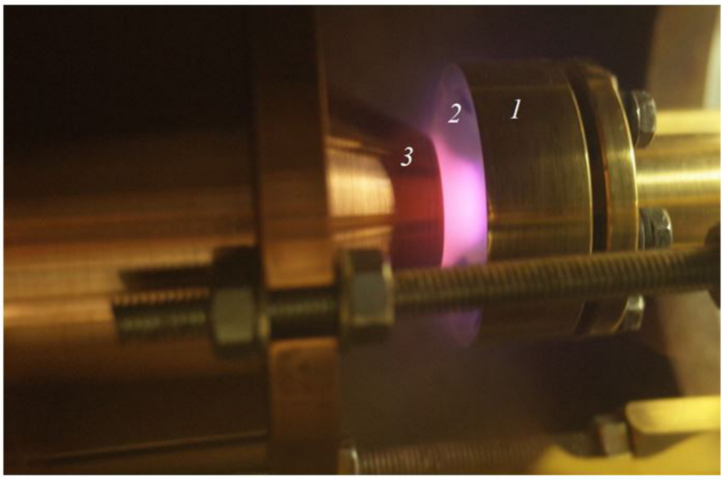


Рис. 3. Фотография тестируемого лабораторного образца (см. рис. 2):
1 – электрод с ионизатором,
2 – ионно-плазменный поток, *3* – электрод-формирователь электрического поля

в обратном направлении. В лабораторном образце использован структурированный микропористый газовый распределитель-ионизатор с плоской электропроводящей пластиной (поз. *1* на рис. 3), изготовленный в соответствии с описанием, представленным в работе [23]. Кроме эффективной генерации ионного потока и плазмы, такая форма пространственно-развитой поверхности ионизатора позволила реализовать фокусировку ионного потока в электростатическом поле ускорителя. Электроды *1* и *3* (см. рис. 3) изготовлены из меди. Диаметр газового распределителя-ионизатора составлял 25 мм, межэлектродный зазор между указанными электродами устанавливали в пределах от 2 до 20 мм.

Измеряемые значения параметров лабораторного образца сравнивали с полученными результатами компьютерного моделирования, а также с известными типовыми значениями параметров современных ЭРД.

Исследовательская вакуумная установка. При испытаниях лабораторного образца в крупногабаритной исследовательской вакуумной установке ВУ-М были обеспечены необходимые параметры процессов и режимов работы, технических средств и технологий [22 – 23].

При проведении испытаний измеряли параметры ионных и ионно-плазменных процессов, в том числе значения следующих величин:

электрическое напряжение на электродах;

электрические токи в цепях электродов;

массовый расход РТ, поступающего в ионизатор;

характеристики излучений в видимом диапазоне;

механическая сила тяги, создаваемой факелом частиц.

Измерения выполнялись при подаче на лабораторный образец непрерывного или импульсного высоковольтного напряжения. Измеряемые значения параметров лабораторного образца сравнивали как с теоретическими, так и с типовыми значениями известных параметров существующих и разрабатываемых ионных двигателей.

Лабораторной образец устанавливали в приборный отсек, подключенный к вакуумной камере ВУ-М объемом 2,4 м^3 через шиберный затвор (рис. 4).

Приборный отсек представляет собой металлическую конструкцию в форме цилиндра с объемом около 0,03 м^3. Между фланцем и цилиндрическим корпусом установлен шиберный затвор. Такое техническое решение

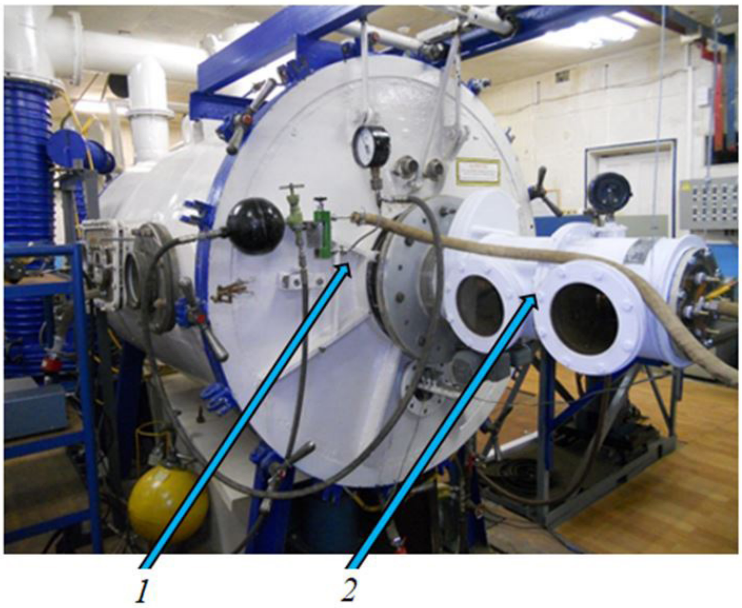


Рис. 4. Фотография основной вакуумной камеры ВУ-М (*1*) с приборным отсеком (*2*)

позволяет осуществлять оперативный доступ к лабораторному образцу. При этом в вакуумной камере сохраняется вакуум. Приборный отсек оснащен двумя прозрачными окнами для регистрации оптического излучения, и торцевым фланцем для крепления лабораторного образца, высоковольтных вводов и штуцера для подачи РТ. Измерение силы тяги, создаваемой факелом, осуществляется с помощью баллистического маятника, установленного в приборном отсеке.

Схема вакуумной установки ВУ-М представлена на рис. 5. При испытаниях установка обеспечивает требуемое вакуумное разрежение в камере, а также в приборном отсеке при подаче РТ.

В состав вакуумной установки ВУ-М входят:

два паромасляных бустерных насоса НВБМ-5;

паромасляный диффузионный насос НВДМ-400;

турбомолекулярный насос ТМН-500;

система трубопроводов с запорными вентилями и затворами;

манометрические преобразователи контроля вакуума;

форвакуумная система, включающая механические насосы, систему трубопроводов с запорными вентилями и затворами, а также манометрические преобразователи контроля вакуума;

контрольно-измерительная аппаратура.

Параметры вакуумной установки ВУ-М:

давление остаточных газов (без напуска рабочего газа) – не выше 10^{-3} Па;

давление при напуске РТ – не выше 10^{-2} Па;

время откачки от атмосферного давления воздуха до уровня давления остаточных газов ниже 10^{-3} Па – не более 4 ч.

Входящие в состав установки ВУ-М высоковакуумные насосы обеспечивают общую производительность около 18 м^3/с при давлении 10^{-1} Па, что позволяет при подаче РТ в лабораторный образец обеспечивать остаточное давление в вакуумной камере, необходимое для свободного пролета ионами ускорительного зазора.

Измерение и регулирование массового расхода подаваемого РТ осуществлялось с помощью ротаметра РС-3А. Значения массовых расходов различных РТ, используемых в экспериментах (сжатый воздух, гелий, аргон и др.), устанавливали в диапазоне 0,5 – 15 мг/с. Верхний предел измерения для воздуха составлял 0,06 м^3/ч, погрешность измерения – не более ±4,0 % от этого значения.

Градуировку ротаметра осуществляли по

атмосферному воздуху; для измерения расходов РТ производили перерасчет по формуле

$$Q_{wm} = Q_{a.gr}\sqrt{\frac{\rho_{a.gr}}{\rho_{wm}}}, \qquad (1)$$

где $Q_{a.gr}$, м^3/ч, – расход воздуха при градуировке; $\rho_{a.gr}$, кг/м^3, – плотность воздуха при градуировке; ρ_{wm}, кг/м^3, – плотность РТ при напуске в вакуумную камеру.

Массовый расход рабочего тела $\dot{m}$ на входе в ионизатор определяли из соотношения:

$$\dot{m} = \dot{m}_{wm} = Q_{wm}\rho_{wm} = Q_{a.gr}\sqrt{\rho_{a.gr}\rho_{wm}}. \qquad (2)$$

В процессе экспериментальных исследований измеряли одновременно массовый расход РТ и ионный ток в цепи инжектора в ускорительном зазоре, что позволяло определять коэффициент ионизации атомов РТ в потоке газа с помощью соотношения

$$K_i\,(\dot{m}, I) = [(e\dot{m}/\mu I) - 1]^{-1} \qquad (3)$$

где $\dot{m}$, мг/с, – массовый расход; I, А, – ионный ток; μ, мг, – масса иона; e, Кл, – заряд электрона.

Коэффициент ионизации зависит от геометрических и физических параметров лабораторного образца.

Приближенная оценка значения механической силы тяги основана на формальном учете механического импульса факела:

$$F_T\left(z = d\right) = \frac{dm}{dt}\cdot v = \sqrt{\frac{2\mu U_d}{q}}\cdot I,$$

где U_d, В, – напряжение; q, Кл, – заряд иона; v, м/с, – скорость ионов на выходе из зазора, d, мм, – ширина зазора.

В этом выражении не учитываются упругие взаимодействия ионов с нейтралами, резонансная перезарядка, радиационные потери и рассеяние ионов в ускорительном модуле, поэтому данная формула использовалась только для первичной грубой оценки.

Мощность источника питания неподвижного лабораторного образца преобразуется в мощность дрейфового движения ионов в зазоре, тепловые и радиационные потери. Механические свойства неподвижного лабораторного образца на стенде по потребляемой мощности источника питания соответствуют режиму холостого хода, в котором энергия движения устройства равна нулю.

Результаты измерений и их обсуждение

При подаче постоянного напряжения от 0 до 5 кВ на электроды лабораторного образца при нулевом потоке РТ, разрядные явления (пробои) отсутствовали, измеряемые токи в цепях ускорительного модуля были близки к нулевым значениям.

При подаче напряжения и РТ запуск лабораторного образца в рабочий режим происходил практически безынерционно. Измеряемый ток в цепи электрода (поз. *3* на рис. 1) достигал максимальных значений до 1 А в зависимости от типа РТ, значений напряжения (до 5 кВ) и массового расхода. Для различных РТ порог включения (среднее значение напряженности электрического поля в ускорительном зазоре) составлял приблизительно от 250 до 500 В/см. Одновременно наблюдалось яркое свечение сфокусированного потока, обусловленное, как обычно в подобных устройствах, зарядовой и энергетической релаксацией ионов в потоке. Свечение было равномерно распределенным по поверхности плоской микроструктурированной пластины, стабильным и неизменным в течение времени непрерывного испытания. В частности, видимое излучение из ускорительного зазора лабораторного образца (см. рис. 3) получено при напуске осушенного воздуха в режиме генерации отрицательных ионов. Подобные результаты получены также для других РТ.

Типовые экспериментальные и их экстраполирующие характеристики в виде зависимостей ионного тока в цепи электрода с ионизатором от приложенного постоянного напряжения при разных значениях массового расхода РТ, а также за-

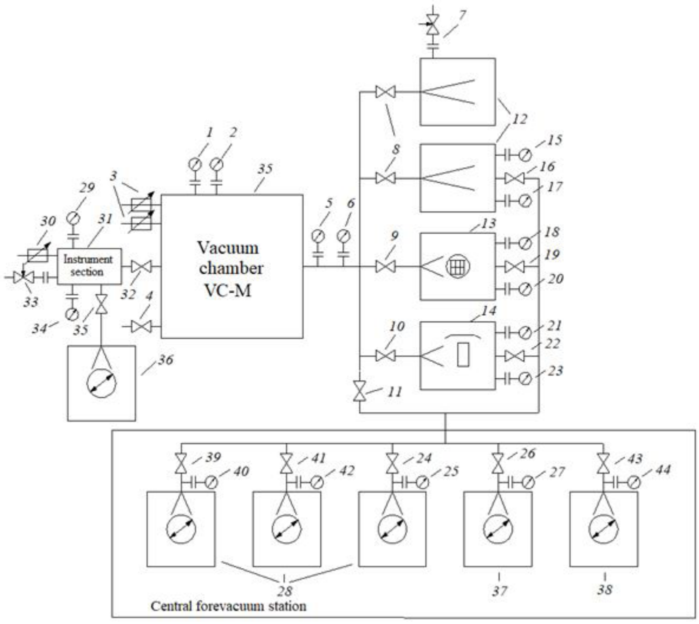


Рис. 5. Схема вакуумной установки ВУ-М:
1, *5*, *15*, *18*, *21*, *25*, *27*, *29*, *40*, *42*, *44* – термопарные манометрические преобразователи типа ПМТ-2;
2, *6*, *17*, *20*, *23*, *34* – ионизационные манометрические преобразователи типа ПМИ-2;
3, *30* – электрические вводы; *7*, *33* – натекатели; *4*, *8* – *11*, *16*, *19*, *22*, *24*, *26*, *32*, *35*, *39*, *41*, *43* – клапаны;
12 – высоковакуумные паромасляные бустерные насосы НВБМ-5;
13 – высоковакуумный турбомолекулярный насос ТМН-500;
14 – высоковакуумный паромасляный диффузионный насос НВДМ-400;
28 – форвакуумные насосы с масляным уплотнением ВН-6Г; *31* – приборный отсек;
35 – вакуумная камера ВК-М; *36* – форвакуумный насос с масляным уплотнением ВН-461М;
37 – форвакуумный насос с масляным уплотнением ВН-6Гм; *38* – форвакуумный насос с масляным уплотнением ВН-7

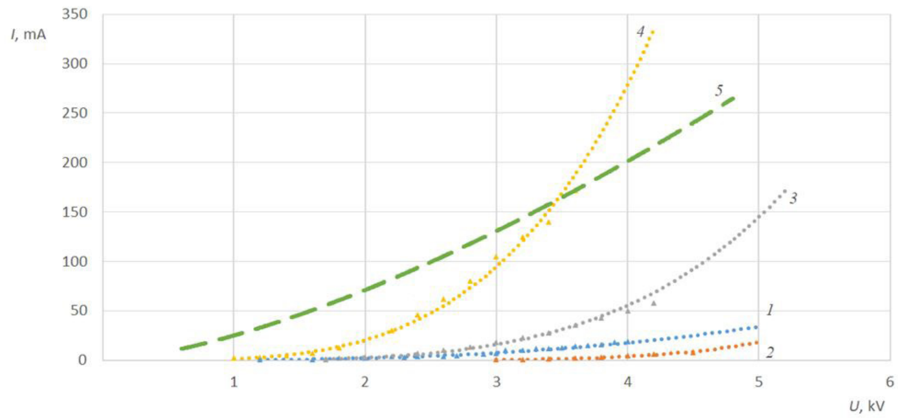


Рис. 6. Типовые экспериментальные вольтамперные характеристики (точки) потока отрицательных ионов в цепи инжектора и их экстраполирующие кривые (линии) для разных РТ и значениях их массового расхода $\dot{m}$:
1 – воздух, $\dot{m}$ = 8 мг/с; *2* – *4* – элегаз SF_6, $\dot{m}$ = 3, 6 и 9 мг/с соответственно. Приведены для условий d = 16 мм, h = 4 мм (*1* – *4*); *5* – теоретическая кривая, полученная методом CST-моделирования для условий, соответствующих зависимости *4*. Экстраполирующие степенные зависимости сведены в табл. 2.

висимости коэффициента ионизации от массового расхода РТ представлены на рис. 6 и 7. Данные получены для двух расстояний между электродами *d* и двух значений толщины микропористой пластины *h*. Для сравнения с экспериментальными данными на рис. 6 приведена кривая *5* – теоретическая зависимость, полученная методом CST-моделирования для условий, соответствующих экспериментальной зависимости *4*. Экстраполирующие степенные зависимости сведены в табл. 2.

Согласно виду экстраполирующих степенных зависимостей, теоретическая вольт-амперная характеристика *5* на рис. 6 компьютерной модели (см. рис. 2) соответствует кинетической ионной модели, соответствующей закону «степени 3/2» Чайльда – Ленгмюра. Экспериментальные кривые, полученные в широком диапазоне режимов, однако, имели существенные различия и особенности в отношении возрастания тока. Это указывает на влияние ионно-плазменных явлений, в том числе сильных радиационных эффектов, столкновений, нейтрализацию и резонансную перезарядку частиц. Наряду с этим, процессы в целом имели квазистационарный характер и не сопровождались неконтролируемыми разрядными явлениями. Типовые зависимости коэффициента ионизации от массового расхода РТ (рис. 7), вычисленные на основании экспериментальных кривых по формуле (3), соответствуют приблизительно линейному нарастанию эффектов плазмообразования в широком диапазоне параметров.

Заключение

Таким образом, в вакуумной установке ВУ-М были обеспечены необходимые физико-технологические процессы, параметры и режимы работы лабораторного образца и использованы соответствующие методы и средства измерений, а также выполнены вакуумные условия при подаче различных РТ (воздух, гелий, аргон и др.) при массовых расходах в диапазоне от 0,5 до 15 мг/с.

Измерения и анализ характеристик лабораторного образца подтвердили, что значения расчетных и экспериментальных ионно-физических характеристик испытанного лабораторного образца удовлетворяют требованиям, предъявляемым к существующим и перспективным ЭРД. Для испытанного лабораторного образца характерны следующие свойства:

усиленная поверхностная ионизация;

ионный и ионно-плазменный биполярные режимы;

равномерное распределение излучения и температуры по развитой поверхности инжектора;

практически безынерционный запуск ионной инжекции.

При этом установлена возможность применения различных РТ, альтернативных ксенону.

Установлено, что реализованные и тестируемые ионно-физические характеристики

Таблица 2

Экстраполирующие функции для вольтамперных характеристик на рис. 6

Номер кривой	Зависимость $I(U)$
1	$I_1 = 0{,}3244U^{2{,}8949}$
2	$I_2 = 0{,}0004U^{6{,}7266}$
3	$I_3 = 0{,}1466U^{4{,}2848}$
4	$I_4 = 25{,}178U^{1{,}5000}$

Примечание. Приведенные функции относятся исключительно к данным на рис. 6

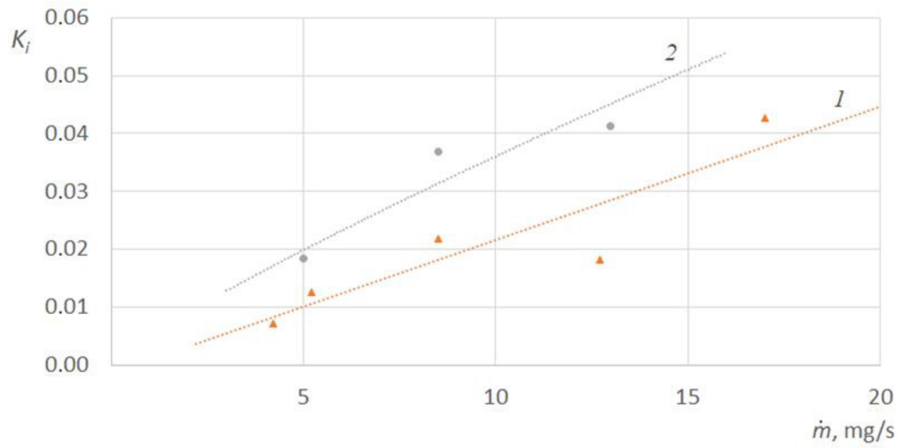


Рис. 7. Типовые зависимости коэффициента ионизации от массового расхода РТ (см. формулу (3)) для двух значений приложенного напряжения
U, кВ: 2,5 (*1*) и 3,0 (*2*);
РТ – элегаз SF_6, d = 12 мм, h = 3 мм

лабораторного образца с контактной ионизацией могут соответствовать задачам разработки перспективных электрических ракетных двигателей.

Предполагается, что разрабатываемая конструкция лабораторного образца в новом физико-технологическом исполнении с указанными характеристиками будет представлять интерес для разработчиков перспективных ЭРД. В целом, вакуумная установка ВУ-М, ее измерительные и технологические возможности, а также испытанная конструкция лабораторного образца создают значительный задел для дальнейших целенаправленных исследований и разработки перспективных электрических ракетных двигателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плазменные и электростатические ракетные двигатели. Пер. с англ. Под ред. Д.В. Развига. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962, 170 с.

2. **Морозов А.И.** Плазменные ускорители и ионные инжекторы. М.: Наука, 1984. 269 с.

3. **Морозов А.И.** Физические основы космических электрореактивных двигателей. Т. 1. Элементы динамики потоков в ЭРД. М.: Атомиздат, 1978. 328 с.

4. **Гришин С.Д., Лесков Л.В., Козлов Н.П.** Электрические ракетные двигатели. М.: Машиностроение, 1975, 272 с.

5. **Фаворский О.Н., Фишгойт В.В., Янтовский Е.И.** Основы теории космических электрореактивных двигательных установок. М.: Высшая школа, 1978. 384 с.

6. **Горшков О.А., Муравлев В.А., Шагайда А.А.** Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. Под ред. акад. РАН А.С. Коротеева. М.: Машиностроение, 2008. 280 с.

7. **Гусев Ю.Г., Пильников А.В.** Роль и место электроракетных двигателей в Российской космической программе // Труды МАИ (электронный журнал). 2012. Вып. № 60. С. 1–20. Режим доступа: www.mai.ru/science/trudy/.

8. **Гопанчук В.В., Потапенко М.Ю.** Электрореактивные двигатели для малых космических аппаратов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 4. С. 60–67.

9. **Aston G.** High efficiency ion beam accelerator system // Review of Scientific Instruments. 1981. Vol. 52. No. 9. Pp. 1325 –1327.

10. **Hassan A., Elsaftawy A., Zakhary S.G.** Analytical studies of the plasma extraction electrodes and ion beam formation // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A.

2008. Vol. 586. No. 2. Pp. 148–152.

11. **Goebel D.M., Katz I.** Fundamentals of electric propultion ion and Hall thrusters. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2008. Ch. 1, 6 and 7.

12. **Mazouffre S.** Electric propulsion for satellites and spacecraft: established technologies and novel approaches // Plasma Sources Sci. Technol. 2016. Vol. 25. No. 3. P. 033002.

13. **Kaufman H.R.** Technology of electron-bombardment ion thrusters // Advances in Electronics and Electron Physics. Vol. 36. Ed. by L. Marton, New York: Academic Press, 1975. Pp. 265–373.

14. **Charles C.** Plasmas for spacecraft propulsion // J. Phys. D: Applied Phys. 2009. Vol. 42. No. 16. P. 163001.

15. **King J.G., Zacharias J.R.** Some new applications and techniques of molecular beams // Advances in electronics and electron physics. Vol. 8. Ed. by L. Marton. New York: Academic Press, 1956. Pp. 1–88.

16. **Kaminsky M.** Atomic and ionic impact phenomena on metal surfaces. New York: Springer Verlag, 1965. 402 p.

17. **Alton G.D.** Characterization of a cesium surface ionization source with a porous tungsten ionizer. I // Review of Scientific Instruments. 1988. Vol. 59. No. 7. Pp. 1039–1044.

18. **Datz S., Taylor E.H.** Ionization on platinum and tungsten surfaces. I. The alkali metals // Journal of Chemical Physics. 1956. Vol. 25. No. 3. Pp. 389–394.

19. **Dresser M.J.** The Saha – Langmuir equation and its application // Journal of Applied Physics. 1968. Vol. 39. No. 1. Pp. 338–339.

20. **Зандберг Э.Я.** Поверхностно-ионизационное детектирование частиц (Обзор) // Журнал технической физики. 1995. Т. 65. № 9. С. 1–38.

21. **Зандберг Э.Я., Ионов Н.И.** Поверхностная ионизация. М.: Наука, 1969. 432 с.

22. **Блашенков Н.М., Лаврентьев Г.Я.** Исследование неравновесной поверхностной ионизации методом полевой поверхностно-ионизационной масс-спектрометрии // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. № 1. С. 59–85.

23. **Tsybin O.Yu., Tsybin Yu.O., Hakansson P.** Laser or/and electron beam activated desorption of ions: a comparative study //Desorption 2004, Papers of 10th International Conference. Saint Petersburg, 2004. P. 61.

24. **Гончаров П.С., Кулешов Ю.В., Мартынов В.В., Цыбин О.Ю., Шуневич Н.А.** Вакуумная установка для огневых испытаний электрических ракетных двигателей//Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2019. Вып. 668. С. 216–223.

25. **Гончаров П.С., Мартынов В.В., Пеньков М.М., Скутницкий В.М., Цыбин О.Ю., Шуневич Н.А.** Импульсный источник питания для проведения испытаний электрических ракетных двигателей//Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2019. Вып. 668. С. 224–228.

26. **Kalentev O., Matyash K., Duras J., Lüskow K.F., Schneider R., Koch N., Schirra M.** Electrostatic ion thrusters – towards predictive modeling // Contributions to Plasma Physics. 2014. Vol. 54. No. 2. Pp. 235–248.

27. **Lovtsov A.S., Kravchenko D.A.** Kinetic simulation of plasma in ion thruster discharge chamber. Comparison with experimental data // Procedia Engineering. 2017. Vol. 185. Pp. 326–331.

28. **Peng X., Keefert D., Ruytent W.M.** Plasma particle simulation of electrostatic ion thrusters// Journal of Propulsion and Power. 1992. Vol. 8. No. 2. Pp. 361–366.

29. **Kurushin A.** Basic course of design of microwave devices using CST Studio Suite. Moscow: One-Book, 2014. 433 p.

30. **Курушин А.А., Пластиков А.Н.** Проектирование СВЧ устройств в среде CST Microwave Studio. М.: Изд-во МЭИ, 2011. 155 с.

31. **Tsybin O.Y., Makarov S.B., Ostapenko O.N.** Jet engine with electromagnetic field excitation of expendable solid-state material // Acta Astronautica. 2016. Vol. 129. December. Pp. 211–213.

32. **Макаров С.Б, Цыбин О.Ю.** Ионный ракетный двигатель космического аппарата. Пат. № 2682962. Российская Федерация. МПК H05H1/54 (2006.01); F03H1/00 (2006.01); B64G1/00 (2006.01); заявитель и патентообладатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего

образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУВО «СПбПУ»). № 2018121762, заявл. 14. 06. 2018; опубл. 25.03. 2019. Бюлл. № 9. 17 с., с илл.

33. **Макаров С.Б., Цыбин О.Ю.** Мембранный ионно-плазменный ракетный двигатель космического аппарата. Патент № 2709231. Российская Федерация. МПК F03H 1/00 (2006.01); заявитель и патентообладатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУВО «СПбПУ»). № 2018142412, заявл. 01.12.2018; опубл. 17.12.2019. Бюл. № 35.

34. **Дюбо Д.Б., Цыбин О.Ю.** Механические свойства ускорителя ионов для электроракетного двигателя космического аппарата // Неделя науки СПбПУ. 18 – 23 ноября 2019. Материалы научной конференции с международным участием. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2019. С. 144–147.

35. **Дюбо Д.Б., Цыбин О.Ю.** Компьютерная модель ускорителя ионов с контактной ионизацией для электроракетных двигателей космических летательных аппаратов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 78–91.

Статья поступила в редакцию 31.03.2020, принята к публикации 18.05.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЦЫБИН Олег Юрьевич – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
otsybin@rphf.spbstu.ru

МАКАРОВ Сергей Борисович – *доктор технических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, главный научный сотрудник научной лаборатории «Космические телекоммуникационные системы» того же университета, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
makarov@cee.spbstu.ru

ДЮБО Дмитрий Борисович – *аспирант Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
doobinator@rambler.ru

КУЛЕШОВ Юрий Владимирович – *доктор технических наук, профессор, заместитель начальника Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского по учебной и научной работе Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13
vka@mil.ru

ГОНЧАРОВ Павел Сергеевич – *кандидат технических наук, доцент, начальник отдела (научно-исследовательского) Военного института (научно-исследовательского) Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13
vka@mil.ru

МАРТЫНОВ Виктор Васильевич – *старший научный сотрудник лаборатории (научно-исследовательской) Военного института (научно-исследовательского) Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13

vka@mil.ru

ШУНЕВИЧ Николай Александрович – *кандидат технических наук, начальник лаборатории (научно-исследовательской) Военного института (научно-исследовательского) Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13

vka@mil.ru

REFERENCES

1. Plazmennye i elektrostaticheskie raketnye dvigateli [Plasma and electrically powered spacecraft propulsion], Ed. by D.V. Razevig, Foreign Literature Publishing, Moscow, 1962.

2. **Morozov A.I.,** Plazmennyye uskoriteli i ionnyye inzhektory [Plasma accelerators and ion injectors], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

3. **Morozov A.I.,** Fizicheskie osnovy kosmicheskih elektroreaktivnyh dvigatelej. T. 1. Elementy dinamiki potokov v ERD [Physical foundations of electrically powered spacecraft propulsion. Vol. 1: Elements of flow dynamics in EPSP], M.: Atomizdat, Moscow, 1978 (in Russian).

4. **Grishin S.D., Leskov L.V., Kozlov N.P.,** Elektricheskie raketnye dvigateli [Electrically powered spacecraft propulsion], Mashinostroenie, Moscow, 1975 (in Russian).

5. **Favorskij O.N., Fishgojt V.V., Yantovskij E.I.,** Osnovy teorii kosmicheskih elektroreaktivnyh dvigatel'nyh ustanovok [Fundamentals of the theory of electrically powered spacecraft propulsion setups], Vysshaya Shkola, Moscow, 1978 (in Russian).

6. **Gorshkov O.A., Muravlev V.A., Shagayda A.A.,** Khollovskiye i ionnyye plazmennyye dvigateli dlya kosmicheskikh apparatov [Hall and ion plasma thrusters for spacecrafts], Ed. by Koroteyev A.S., Mashinostroyeniye, Moscow, 2008 (in Russian).

7. **Gusev Yu.G., Pilnikov A.V.,** The electric propulsion role and place within the Russian Space Program, Trudy MAI (Network scientific periodic publication) (60) (2012) 1–20. Access Mode: www.mai.ru/science/trudy/.

8. **Gopanchuk V.V., Potapenko M.Yu.,** Hall effect thrusters for small-sized spacecrafts, IKBFU's Vestnik. (4) (2012) 60–67.

9. **Aston G.,** High efficiency ion beam accelerator system, Review of Scientific Instruments. 52 (9) (1981) 1325 – 1327.

10. **Hassan A., Elsaftawy A., Zakhary S.G.,** Analytical studies of the plasma extraction electrodes and ion beam formation, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 586 (2) (2008) 148–152.

11. **Goebel D.M., Katz I.,** Fundamentals of electric propultion ion and Hall thrusters, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2008, Ch. 1, 6 and 7.

12. **Mazouffre S.,** Electric propulsion for satellites and spacecraft: established technologies and novel approaches, Plasma Sources Sci. Technol. 25 (3) (2016) 033002.

13. **Kaufman H.R.,** Technology of electron-bombardment ion thrusters, In the book: Advances in electronics and electron physics. Vol. 36. Ed. by L. Marton, Academic Press, New York (1975) 265–373.

14. **Charles C.,** Plasmas for spacecraft propulsion, J. Phys. D: Applied Phys. 42 (16) (2009) 163001.

15. **King J.G., Zacharias J.R.,** Some new applications and techniques of molecular beams, Advances in electronics and electron physics, Vol. 8, Ed. by L. Marton, Academic Press, New York (1956) 1–88.

16. **Kaminsky M.,** Atomic and ionic impact phenomena on metal surfaces, Springer Verlag, New York, 1965.

17. **Alton G.D,** Characterization of a cesium surface ionization source with a porous tungsten ionizer. I, Review of Scientific Instruments. 59 (7) (1988) 1039–1044.

18. **Datz S., Taylor E.H.,** Ionization on platinum and tungsten surfaces. I. The alkali metals, Journal of Chemical Physics. 25 (3) (1956) 389–394.

19. **Dresser M.J.,** The Saha – Langmuir equation and its application, Journal of Applied Physics. 39 (1) (1968) 338–339.

20. **Zandberg E.Ya.,** Surface-ionization detection of particles (Review), Technical Physics. 40 (1995) 865–890.

21. **Zandberg E. Ya., Ionov N.I.,** Poverhnostnaya ionizaciya [Surface ionization], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

22. **Blashenkov N.M., Lavrent'ev G.Ya.,** Surface-ionization field mass-spectrometry studies of nonequilibrium surface ionization, Phys. Usp. 50 (1) (2007) 53–78.

23. **Tsybin O.Yu., Tsybin Yu.O., Hakansson P.,** Laser or/and electron beam activated desorption of ions: a comparative study, In: Desorption 2004, Papers of 10th International Conference, Saint Petersburg (2004) 61.

24. **Goncharov P.S., Kuleshov Yu.V., Martynov V.V., et al.,** Vacuum equipment for fire tests of electric rocket engines, Proceedings of the Military Space Academy Named after A.F. Mozhaisky, St. Petersburg. (668) (2019) 216–223.

25. **Goncharov P.S., Martynov V.V., Pen'kov M.M., et al.,** Switching power supply for fire tests of electric rocket engines, Proceedings of the Military Space Academy Named after A.F. Mozhaisky, St. Petersburg. (668) (2019) 224–228.

26. **Kalentev O., Matyash K., Duras J., et al.,** Electrostatic ion thrusters – towards predictive modeling, Contributions to Plasma Physics. 54(2) (2014) 235–248.

27. **Lovtsov A.S., Kravchenko D.A.,** Kinetic simulation of plasma in ion thruster discharge chamber. Comparison with experimental data, Procedia Engineering. 185 (2017) 326–331.

28. **Peng X., Keefert D., Ruytent W.M.,** Plasma particle simulation of electrostatic ion thrusters, Journal of Propulsion and Power. 8 (2) (1992) 361–366.

29. **Kurushin A.,** Basic course of design of microwave devices using CST Studio Suite, One-Book, Moscow, 2014.

30. **Kurushin A.A., Plastikov A.N.,** Proyektirovaniye SVCh ustroystv v srede CST Microwave Studio [Design of microwave devices in CST Microwave Studio], MEI Press, 2011.

31. **Tsybin O.Y., Makarov S.B., Ostapenko O.N.,** Jet engine with electromagnetic field excitation of expendable solid-state material, Acta Astronautica. 129 (December) (2016) 211–213.

32. **Makarov S.B., Tsybin O.Yu.,** Ionic rocket engine of spacecraft, Pat. No. 2682962, Russian Federation, MPK H05H1/54 (2006.01); F03H1/00 (2006.01); B64G1/00 (2006.01); Federalnoe gosudarstvennoe avtonomnoe obrazovatelnoe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya "Sankt-Peterburgskij Politekhnicheskij Universitet Petra Velikogo" (FGAOUVO "SPbPU") is a declarant and patentee. No. 2018121762, declar. 14. 06. 2018; publ. 25.03. 2019, Bull. No. 9, 17 p.

33. **Makarov S.B., Tsybin O.Yu.,** Diaphragm ion plasma thruster for spacecraft, Pat. No 2709231, Russian Federation, MPK F03H 1/00 (2006.01); Federalnoe gosudarstvennoe avtonomnoe obrazovatelnoe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya "Sankt-Peterburgskij Politekhnicheskij Universitet Petra Velikogo" (FGAOUVO "SPbPU"). No 2018142412, declar. 01.12.2018; publ. 17.12.2019. Bull. № 35.

34. **Dyubo D.B., Tsybin O.Yu.,** Mekhanicheskie svojstva uskoritelya ionov dlya elektroraketnogo dvigatelya kosmicheskogo apparata [Mechanical properties of an ion accelerator for an electrically powered spacecraft propulsion of a spacecraft], In: Proceedings of the Science Conference with International Participation "Nedelya nauki SPbPU [Scientific Week at SPbPU]", November 18–23 (2019) 144–147.

35. **Dyubo D.B., Tsybin O.Yu.,** The contact ionization ion accelerator for the electrically powered spacecraft propulsion: a computer model // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2020. Vol. 13. No. 1. Pp. 78–91.

Received 31.03.2020, accepted 18.05.2020.

THE AUTHORS

TSYBIN Oleg Yu.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
otsybin@rphf.spbstu.ru

MAKAROV Sergey B.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
makarov@cee.spbstu.ru

DYUBO Dmitry B.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
doobinator@rambler.ru

KULESHOV Yuri V.
Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky
13 Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation
vka@mil.ru

GONCHAROV Pavel S.
Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky
13 Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation
vka@mil.ru

MARTYNOV Viktor V.
Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky
13 Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation
vka@mil.ru

SHUNEVICH Nikolay A.
Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky
13 Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation
vka@mil.ru

DOI: 10.18721/JPM.13209
UDC: 535.417; 535.317; 778.38

IMAGING PROPERTIES OF COMPUTER-GENERATED HOLOGRAMS: THE PHASE DISTRIBUTION EFFECT IN THE OBJECTS' SPACE

S.N. Koreshev, D.S. Smorodinov, M.A. Frolova, S.O. Starovoitov

St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the influence of phase distribution over the objects' space on resolution and depth of field of computer-generated holograms has been investigated. The study was carried out through mathematical simulation of real physical processes of synthesis and reconstruction of binary transparent holograms. The possibility of a significant increase (up to several times) in the resolution and depth of field of the reconstructed image because of using phase-shift masks was found. Moreover, this increase was achieved due to representation of the object wave in hologram synthesis as a superposition of object waves emanating light from two identical objects located at different, strictly fixed distances from the hologram synthesis plane.

Keywords: synthesized hologram, binarization, threshold processing, depth of field, phase mask

Citation: Koreshev S.N., Smorodinov D.S., Frolova M.A., Starovoitov S.O. Imaging properties of computer-generated holograms: the phase distribution effect in the object's space, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 116–125. DOI: 10.18721/JPM.13209

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА СИНТЕЗИРОВАННЫХ ГОЛОГРАММ

С.Н. Корешев, Д.С. Смородинов, М.А. Фролова, С.О. Старовойтов

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе изучено влияние распределения фазы в пространстве предметов на разрешающую способность и глубину резкости синтезированных голограмм. Исследование проведено методом математического моделирования реальных физических процессов синтеза и восстановления голограмм бинарных транспарантов. Установлена возможность существенного (в нескольких раз) увеличения разрешения и глубины резкости восстановленного изображения благодаря использованию при синтезе голограммы фазовых масок и представлению объектной волны в виде суперпозиции объектных волн, исходящих от двух одинаковых объектов, расположенных на различных, строго фиксированных расстояниях от плоскости синтеза голограммы.

Ключевые слова: синтезированная голограмма, бинаризация, пороговая обработка, глубина резкости, фазовая маска

Ссылка при цитировании: Корешев С.Н., Смородинов Д.С., Фролова М.А., Старовойтов С.О. Влияние распределения фазы в пространстве объектов на изображающие свойства синтезированных голограмм // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 116–125. DOI: 10.18721/JPM.13209

Introduction

Holography is widely used in electronics, microtechnology and other spheres. In addition to well-known holographic methods of protection against counterfeiting of goods, holographic diffraction gratings, complex wave front shapers, sights, three-dimensional projection, and other holographic technologies can be applied in photolithography.

The advances of holography in projection photolithography is primarily due to the possibility of simultaneous aberration-free reconstruction of large-sized real images, including images of binary two-dimensional transparencies, namely, photomasks [1 – 3]. The application of holograms in projection photolithography makes it possible to avoid the usage of sophisticated optical systems, complex in design due to strict requirements for quality of the images formed using a photolithographic lens. In particular, the current tendency of size reduction of electronic devices leads to gradual increase in resolution of optical systems. This is usually achieved by reducing the operating wavelength, which in turn leads to a reduction in the size of the aberration-free area of an image.

Particularly noteworthy is the possibility of using images of photolithographic objects of computer-generated Fresnel holograms as projectors, which are a set of discrete pixel-cells with different phase and intensity values and can be easily calculated using modern computers and displayed on physical media. The methods of hologram synthesis for extreme ultraviolet, as well specific requirements for synthesis scheme parameters that would allow to reconstruct a high-quality image were presented earlier [4 – 6].

Imaging properties of the computer-generated holograms in some cases differ from the properties of analog holograms and have their own characteristics. These features are well studied and exist primarily due to the discrete structure of the hologram and image [7 – 11].

This paper presents our findings of the phase distribution effect in the objects' space during synthesis of the Fresnel holograms on its resolution and depth of field of the image formed using these holograms. Real physical processes of synthesis and reconstruction of reflection holograms have been mathematically simulated.

The discrete object-transparency is usually presented as a set of coherent point sources with each source emanating light uniformly in all directions. In this case, the ratio between the values of the amplitude at two selected points on the hologram registration plane is determined by the ratio of the areas of the spheres on which the points are located (Fig. 1). Thus, if the amplitude located at a point on the normal and restored from the source to the hologram plane is taken as a unit, it becomes possible to determine the amplitude at any point on the plane.

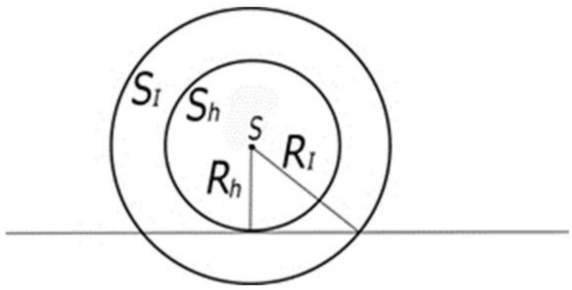


Fig. 1. Distribution of amplitude from a point source (*s*) emanating light over the hologram registration plane (a straight line);
R_l, R_h are the spherical radii of light rays;
S_l, S_h are the spherical areas

Furthermore, since all the point sources making up the object are coherent, the phase shift from the source to the point on the hologram also depends solely on the radius of the sphere R_l and the wavelength λ:

$$\varphi_l = \frac{2\pi R_l}{\lambda} + \varphi_0 \tag{1}$$

where φ_0 is the initial value of the light source phase.

The final value of the amplitude at each point on the hologram plane is defined as the vector sum of the amplitudes from all points of the object, taking into account distances between the point of the object and the point on the hologram. At the same time, the structure of the hologram and the image formed are significantly influenced by initial phase distributions during hologram synthesis in the object space.

The phase distribution effect in the object's space on the resolution of computer-generated Fresnel holograms-projectors

The phenomenon of the overlap between diffraction maxima from closely spaced elements of the object which leads to resolution lowering is called proximity effect. To correct it, it is proposed to apply a method like the one used in traditional projection photolithography: the installation of phase-shifting masks in the object space, which makes phase difference between wave fronts that form images of neighboring elements of the object structure equal π [12]. Since the synthesis of holograms is performed in virtual space, this could be achieved through the correction of the mathematical model of the photomask, i.e., the introduction of the necessary phase modulation in its transmission function.

Let us find out the applicability limits of the proximity effect compensation method, i.e. conditions under which the elements of the structure of the photomask can be considered neighboring, so that the method under consideration would have a positive effect on the quality of the reconstructed image. This could be done either by diffraction integral calculation, or experimentally, for example, by using mathematical simulation. It was carried out in a software package for synthesis and digital reconstruction of Fresnel holograms [4]. The research included a series of numerical experiments of synthesis and digital reconstruction of the phase-relief reflective Fresnel hologram of a flat object: two slits located closely in a non-transparent screen. It was assumed that the effectiveness of the method for correcting the proximity effect should depend on the distance between the slits.

The parameters for the hologram synthesis scheme were selected based on the requirements described in Refs. [5, 6]. Thus, laser wavelength λ was 13.5 nm; the pixel size of the object and the hologram d_d was 20 × 20 nm. The characteristic size of the minimum element of objects' structure was 80 nm. The pixel size of the object was chosen to satisfy the requirements of the Rayleigh criterion [5]. The angle of the parallel reference beam incidence was chosen equal to 14.7 ° in all experiments, and the distance between the plane of the object and the plane of hologram registration was R_h = 20345 nm.

The influence of proximity effect on image quality for different distances between the structural elements of the object was studied by synthesizing and digitally reconstructing the holograms of two slits of 4 × 40 pixels, i.e., 80 × 800 nm each. The resulting numerically reconstructed images are shown in Fig. 2. According to the Rayleigh criterion, two point-sources (in this experiment, narrow slits could be considered as point sources) are completely resolved if the diffraction maximum of one of them is superimposed on the diffraction minimum of the other. Therefore, experiments should be carried out only for those distances between slits that are smaller than Rayleigh resolution criterion for coherent radiation, which is equal to 57 nm for the slits under study.

Thus, the distances between the slits in the experiments ranged from 1 to 2 pixels, i.e. from 20 to 40 nm. Two holograms were synthesized for each of the indicated distances between the slits – one for the case when all the radiation incident on the object was in phase, the other for the case when the beams incident on slits were out of phase. Thus, four holograms were synthesized, and the corresponding images were numerically reconstructed.

To assess the quality of the reconstructed images, we used a method based on comparing the number of threshold processing levels, which imitates photoresist response to actinic radiation exposure. Since the pixels of reconstructed images are encoded using 8 bits, the total number of possible threshold processing levels (intensity gradations) is 256, from 0 (black) to 255 (white), in accordance with so called "gray scale" [13]. So, the greater the number of threshold processing levels (gradations) at which the intensity distribution on the image is identical to intensity distribution on the object, the higher the quality of reconstructed image. The eligibility of using this criterion is explained by the threshold properties of photoresists. The larger the number of acceptable threshold levels for the reconstructed image, the larger the range of exposure doses is permissible in the photolithographic process.

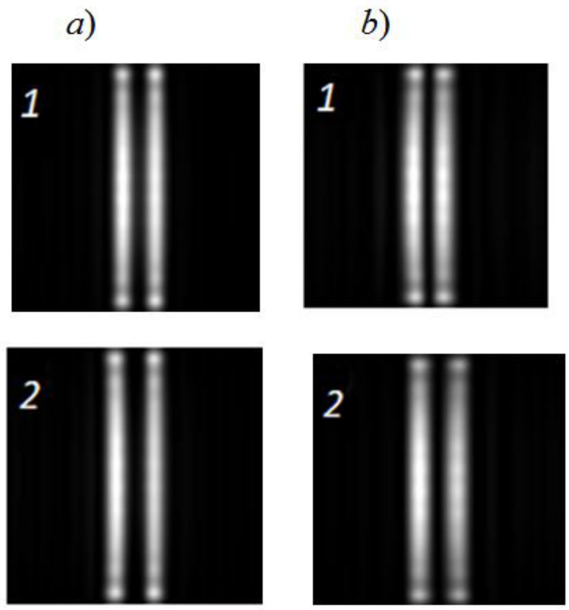


Fig. 2. Reconstructed images obtained with in-phase (*a*) and out-of-phase (*b*) radiation for two distances (nm) between segments: 20 (*1*) and 40 (*2*)

Images reconstructed using holograms recorded with all incident radiation being in phase, corresponded to the original objects in the interval of zero gradations of threshold processing at a distance between slits of 20 nm and 12 gradations at 40 nm. With waves incident on slits being out of phase, the image corresponded to the original object in the range of 14 gradations with a distance between slits of 20 nm and 17 gradations at 40 nm. Thus, in the case of the smallest possible distance between the slits (20 nm), the use of phase masks makes the slits resolvable, while if the distance between the slits is 40 nm, its quality is almost the same regardless of using the phase masks.

Thus, numerical experiments have shown that the application of the phase correction method for the proximity effect allows one to successfully resolve structural elements of the object that are at the minimum possible (equal to the size of the object's pixel) distance between them.

The phase distribution effect in the object's space on the depth of field of the computer-generated Fresnel holograms

The image is considered to be sharp within the limits of such a displacement of the observation plane, at which the diameter of a point object image represented as a geometric point does not exceed the Airy disc diameter. The expression that allows the depth of field of the optical system to be determined in accordance with this criterion is presented as [14]:

$$|b| = \pm \frac{\lambda n}{2A^2} \tag{2}$$

where A is the system numerical aperture, λ is the wavelength of the laser used, n is a refractive index of a medium, equals 1 for air.

Thus, the numerical aperture of the radiation diffracted on the smallest element of the object structure, a pixel with the size a_t, is described as follows:

$$A = n \sin \alpha = \frac{\lambda}{a_t} \tag{3}$$

where α is the aperture angle of the diffracted radiation.

From Eqs. (2) and (3) the only parameters affecting the depth of field are the operating wavelength λ and the size of one pixel a_t. Currently, various methods are known to further increase the depth of field of images. In particular, there are methods based on phase-shift masks [15], modifications of optical devices

[16], special digital processing of images at the stage of their registration [17].

However, not all these methods are suitable for photolithography. The best results in this case can be obtained by the method based on representation of an object wave during the hologram synthesis as a superposition of several object waves generated by the same object, a photomask, located at different distances from the hologram [18].

In this case, the increase in the depth of field of the reconstructed image is due to the fact that the hologram restores not one, but several images with a small offset, not exceeding the depth of field. Since the objects used are flat, the sequence of such images will be perceived as a single image with an increased depth-of-field.

Practical implementation of the hologram synthesis mentioned above requires representation of the object beam as a superposition of two or more object waves generated by the same objects. Such an operation would require a very precise installation of objects during the physical registration of the hologram, inversely to holograms synthesized in virtual space. The distance between flat objects leads to a certain phase difference between the object waves, which obviously affects the recorded hologram structure, the final intensity distribution in the reconstructed image and, accordingly, and the depth of field. In this case, the reconstructed image has the best quality when the object beams are fully in-phase.

If the object and the reconstructed image are in-phase, as proposed above, then the reconstructed images has a constant phase difference in each plane of the image space. If the wavelength is considered as a constant, then the only factor affecting the phase difference between the object waves is the distance between the planes of the objects.

These data are almost completely consistent with the results of phase distribution in the reconstructed image [18]. It should be noted that for small distance values Δ between objects, the main factor affecting phase distribution in the hologram synthesis plane is the point position on the hologram relative to its axis. At the same time, as the Δ value increases, the influence of the point position gradually decreases and the distance between light sources becomes the main factor affecting the phase difference.

Another equally significant factor is discretization. Theoretically, the value of the complex amplitude calculated at a particular point is actually set for the entire pixel due to the limited size of discrete cells of the hologram plane, calculated with Eq. (3). This leads to uncertainty and, as a consequence, to an increase in difference between the recorded values of the phase and the complex amplitude and the real value, as it shifts from the center of the pixel to its boundaries. Note that an offset of one spatial period leads to a phase shift of the reconstructed image of 2π [11]. A sharp change in the phase and amplitude values occurs at the boundaries of adjacent pixels.

The relationship of distance between the object planes and the quality of the reconstructed image was demonstrated experimentally with the above mentioned software package. Experimental evaluation included the synthesis of half-tone Fresnel holograms of the test object called "corners". The object is shown in Fig. 3,*a*.

a) *b*) *c*)

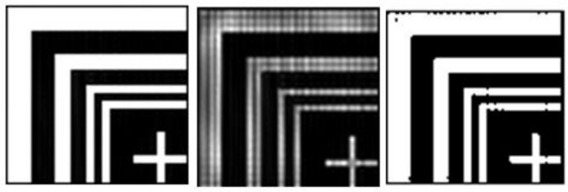


Fig. 3. The original image of the test object (*a*) and the image reconstructed using a synthesized hologram: before (*b*) and after (*c*) threshold processing

The test object was characterized by cross-lines of 1 × 7 pixels. Two corners closest to the cross were made up of 1 pixel-thick segments, the distance between them equaled 1 pixel. This was followed by a gap of 2 pixels in width, and a third corner with 2 pixels in width. The width of the fourth corner was 3 pixels. The total size of the object was 23 × 23 pixels.

The synthesis parameters were chosen in

accordance with the conditions defined in [11] and generally coincided with the parameters used in the previous experiment. That is, the size of the minimum element of the object was 80×80 nm, the pixel size of the object planes and holograms d_d was 20×20 nm, and the wavelength λ was 13.5 nm. Under such conditions, the angle of incidence of the reference beam α was 14.67°, and the distance between the hologram and the plane of the nearest object was at least 20345 nm. Since the structure of the object is rather complex, R_h value was doubled to 40690 nm. The distance was increased two times to avoid overlapping of restored orders of diffraction. This step is needed to address the problem of interference which starts to influence the quality of the image when high resolution is applied [5]. The depth of field of the reconstructed image at the parameters specified above were $b = \pm 237$ nm, according to Eq. (3).

The second plane of the object was placed a little farther from the hologram at some distance Δ relative to the first, with this distance changing during the experiment.

The reconstructed image quality estimate was carried out using the method based on comparing the number of threshold processing levels described above. The only difference was that due to the high resolution on the reconstructed image, it was considered identical to the object not only when their intensity distributions were the same, but also when the difference between their intensity distributions did not exceed 15 %.

Fig. 4 shows dependence between the allowable levels of threshold image processing obtained in the plane of the best installation at a distance R_h related to the maximum number of gradations achieved with the above described hologram synthesis and reconstruction, and the distance Δ between the planes of two objects.

As long as the Δ value remains sufficiently small (within several wavelengths), the image quality as a whole is not strongly dependent on Δ. The exceptions are the individual maxima corresponding to the object images with higher quality, characteristic of the distances, at which the registered object waves are in phase in the synthesis process. Thus, the minima on the chart correspond to the distances at which the object waves are out of phase.

As Δ increases, the values of the minima approach zero: the influence of the aperture can no longer compensate for the violation of in-phase. As a result, restoration of a high-quality image using such holograms becomes almost impossible. At the same time, the in-phase recording of object waves in absence of the aperture influence can significantly improve the image quality. The "phase uncertainty in hologram synthesis" described above leads to abrupt transitions between adjacent minimum and maximum due to abrupt changes in phase values.

At large distances Δ, close to b, the influence of the hologram aperture practically disappears: the image quality is, on the average, noticeably lower, except for individual maxima arising from the in-phase recording due to the influence of discretization.

The distance between the adjacent maxima corresponds to the working wavelength λ; thus, checking a series of values when shifting within the wavelength, allows to accurately determine the position of the maximum.

To directly estimate the depth of field of the reconstructed images using holograms synthesized at given Δ values, a series of images was reconstructed at distances δ different from the distance R_h by values from -1000 to $+1000$ nm with a step of 50 nm. The results of the study of image quality in gradations, normalized by their maximum number, are shown in Fig. 5.

Thus, it was established that the addition of a second object plane, provided that the phase of the object waves coincides, made it possible to increase not only the depth of field, but also the overall image quality (maximum number of gradations). The best quality of the reconstructed images was achieved by installing the second plane of the object at distances close to the b value of the limiting depth of field, in this case the depth of field of the image increases by 2 times.

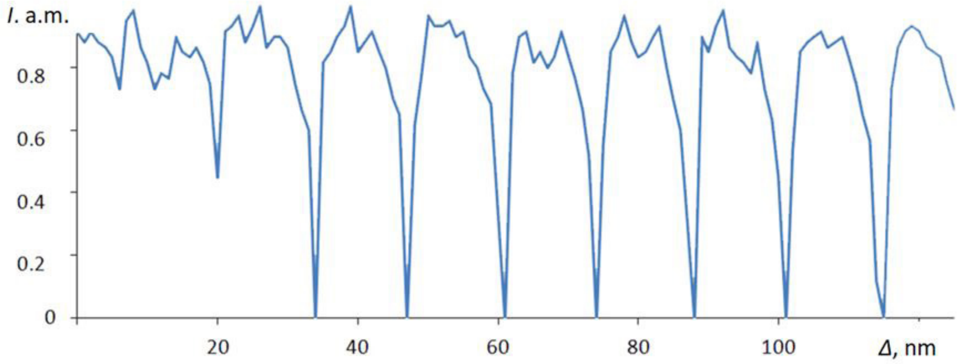


Fig. 4. Graph of the quality of the image of the test object obtained in the plane of the best installation vs the distance Δ between the planes of the objects during the synthesis

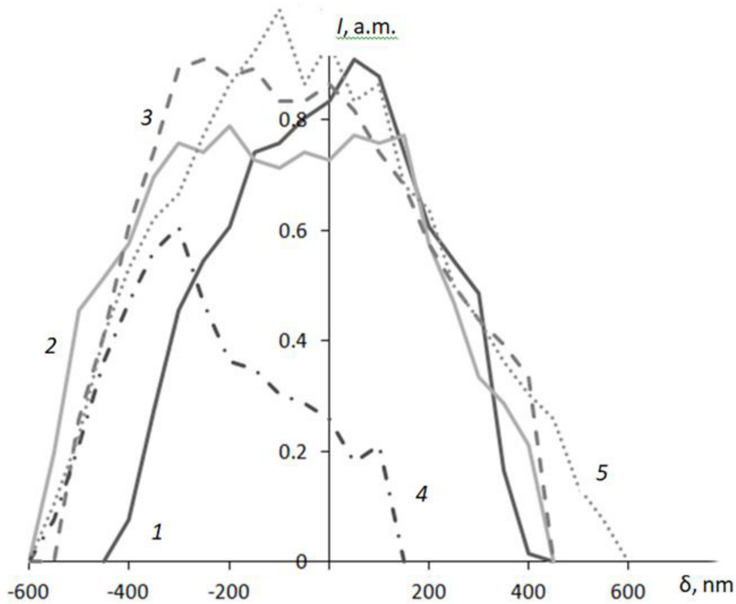


Fig. 5. Graphs of the quality of the test object's image reconstructed vs. defocus δ for different Δ values, nm: Δ = 0, i.e., without installing the second plane (*1*), Δ = 4 (*2*), 21 (*3*), 194 (*4*), 199 (*5*);
Δ is the distance between the planes of the objects during the synthesis

Summary

In this paper, the influence of phase distribution in the object's space on the quality of the images reconstructed from computer-generated Fresnel holograms has been studied. The main features of image formation were considered and the factors affecting their resolution and depth of field were identified. It was established that modifications of the structure of the digital hologram, inaccessible to holograms recorded by traditional methods, could significantly improve the image quality. In particular, the use of phase correction of the proximity effect allows to resolve features being as close as one pixel to each other. Installation of the second object plane in addition to the original one made it possible to increase the depth of field up to 1.5 – 2.0 times depending on the distance between planes.

The results obtained can be used for recording and reconstruction of holograms in real physical space.

REFERENCES

1. **Cube F., Gray S., Struchen D., et al.,** Holographic microlithography, Optical Engineering. 34 (9) (1995) 2724–2730.

2. **Maiden A., McWilliam R., Purvis A., et al.,** Nonplanar photolithography with computer-generated holograms, Optics Letters. 30 (11) (2005) 1300–1302.

3. **Bay C., Hübner N., Freeman J., Wilkinson T.,** Maskless photolithography via holographic optical projection, Optics Letters. 35 (13) (2010) 2230–2232.

4. **Koreshev S.N., Nikanorov O.V., Gromov A.D.,** Method of synthesizing hologram projectors based on breaking down the structure of an object into typical elements, and a software package for implementing it, Journal of Optical Technology. 79 (12) (2012) 769–774.

5. **Koreshev S.N., Nikanorov O.V., Smorodinov D.S., Gromov A.D.,** How the method of representing an object affects the imaging properties of synthesized holograms, Journal of Optical Technology. 82 (4) (2015) 246–251.

6. **Koreshev S.N., Smorodinov D.S., Nikanorov O.V.**, Influence of the discreteness of synthetic and digital holograms on their imaging properties, Computer Optics. 40 (6) (2016) 793–801.

7. **Collier R.J., Burckhardt C.B., Lin L.H.,** Optical holography, Academic Press, New York – London, 1971.

8. **Levenson M.D., Johnson K.M., Hanchett V.C., Chiang K.,** Projection photolithography by wave-front conjugation, Journal of the Optical Society of America. 71 (6) (1981) 737–743.

9. **Martinez-Leon L., Clemente P., Mori Y., et al.,** Single-pixel digital holography with phase-encoded illumination, Optics Express. 25 (5) (2017) 4975–4984.

10. **Zhang Y., Lu Q., Ge B.,** Elimination of zero-order diffraction in digital off-axis holography, Optics communications. 240 (4–6) (2004) 261–267.

11. **Koreshev S.N., Nikanorov O.V., Smorodinov D.S.,** Imaging properties of discrete holograms. I. How the discreteness of a hologram affects image reconstruction, Journal of Optical Technology. 81 (3) (2014) 123–127.

12. **Moreau W.M.,** Semiconductor lithography. Principles, practices, and materials, Plenum Press, New York, 1988.

13. **Johnson S.,** Stephen Johnson on digital photography, O'Reilly Media Incorp., USA, Sebastopol, 2006.

14. **Tsukanova G.I., Karpova G.V., Bagdasarova O.V., et al.,** Prikladnaya optika, Chast 2 [Applied optics, part 2], Saint Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Saint Petersburg, 2003 (in Russian).

15. **Castro A., Ojeda-Castañeda J.,** Asymmetric phase masks for extended depth of field, Applied Optics. 43 (17) (2004) 3474–3479.

16. **Shain W.J., Vickers N.A., Goldberg B.B., et al.,** Extended depth-of-field microscopy with a highspeed deformable mirror, Optics Letters. 42 (5) (2017) 995–998.

17. **Basov I.V., Krasnobaev A.A.,** Methods of increasing the depth of field of optical-digital image recorders, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2010, No. 37 (in Russian).

18. **Koreshev S.N., Smorodinov D.S., Nikanorov O.V., Frolova M.A.,** Distribution of the complex amplitude and intensity in a 3D scattering pattern formed by the optical system for an on-axispoint object, Computer Optics. 2018, 42 (3) (2018) 377–384.

Received 12.02.2020, accepted 19.05.2020.

THE AUTHORS

KORESHEV Sergey N.

St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics

49 Kronverkskiy Ave., St. Petersburg, 197101, Russian Federation

koreshev@list.ru

SMORODINOV Denis S.
St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics
49 Kronverkskiy Ave., St. Petersburg, 197101, Russian Federation
smorodinov.denis@gmail.com

FROLOVA Marina A.
St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics
49 Kronverkskiy Ave., St. Petersburg, 197101, Russian Federation
marrain6@yandex.ru

STAROVOITOV Sergei O.
St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics
49 Kronverkskiy Ave., St. Petersburg, 197101, Russian Federation
s.starovoitov95@gmail.com

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cube F., Gray S., Struchen D., Tisserand J., Malfoy S., Darbellay Y.** Holographic microlithography // Optical Engineering. 1995. Vol. 34. No. 9. Pp. 2724–2730.

2. **Maiden A., McWilliam R., Purvis A., Johnson S., Williams G.L., Seed N.L., Ivey P.A.** Nonplanar photolithography with computer-generated holograms // Optics Letters. 2005. Vol. 30. No. 11. Pp. 1300–1302.

3. **Bay C., Hübner N., Freeman J., Wilkinson T.** Maskless photolithography via holographic optical projection // Optics Letters. 2010. Vol. 35. No. 13. Pp. 2230–2232.

4. **Корешев С.Н., Никаноров О.В., Громов А.Д.** Метод синтеза голограмм-проекторов, основанный на разбиении структуры объекта на типовые элементы, и программный комплекс для его реализации // Оптический журнал. 2012. Т. 79. № 12. С. 30–37.

5. **Корешев С.Н., Смородинов Д.С., Никаноров О.В., Громов А.Д.** Влияние способа представления объекта на изображающие свойства синтезированных голограмм // Оптический журнал. 2015. Т. 82. № 4. С. 66–73.

6. **Корешев С.Н., Смородинов Д.С., Никаноров О.В.** Влияние дискретности синтезированных и цифровых голограмм на их изображающие свойства // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40. № 6. С. 793–801.

7. **Collier R.J., Burckhardt C.B., Lin L.H.** Optical holography. New York – London: Academic Press, 1971.

8. **Levenson M.D., Johnson K.M., Hanchett V.C., Chiang K.** Projection photolithography by wave-front conjugation // Journal of the Optical Society of America. 1981. Vol. 71. No. 6. Pp. 737–743.

9. **Martinez-Leon L., Clemente P., Mori Y., Climent V., Lancis J., Tajahuerce E.** Single-pixel digital holography with phase-encoded illumination // Optics Express. 2017. Vol. 25. No. 5. Pp. 4975–4984.

10. **Zhang Y., Lu Q., Ge B.** Elimination of zero-order diffraction in digital off-axis holography // Optics Communications. 2004. Vol. 240. No. 4–6. Pp. 261–267.

11. **Корешев С.Н., Никаноров О.В., Смородинов Д.С.** Изображающие свойства дискретных голограмм. I. Влияние дискретности голограмм на восстановленное изображение // Оптический журнал. 2014. Т. 81. № 3. С. 14–19.

12. **Moreau W.M.** Semiconductor lithography. Principles, practices, and materials. New York: Plenum Press, 1988. 919 p.

13. **Johnson S.** Stephen Johnson on digital photography. USA, Sebastopol: O'Reilly Media Incorp., 2006. 305 p.

14. **Цуканова Г.И., Карпова Г.В., Багдасарова О.В.** Прикладная оптика. Ч. 2. СПб.: Университет ИТМО, 2014. 83 с.

15. **Castro A., Ojeda-Castañeda J.** Asymmetric phase masks for extended depth of field // Applied Optics. 2004. Vol. 43. No. 17. Pp. 3474–3479.

16. **Shain W.J., Vickers N.A., Goldberg B.B., Bifano T., Mertz J.** Extended depth-of-field microscopy with a highspeed deformable mirror // Optics Letters. 2017. Vol. 42. No. 5. Pp. 995–998.

17. **Басов И.В., Краснобаев А.А.** Методы увеличения глубины резкости оптико-цифровых регистраторов изображения. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2010. Вып. 37. 32 с.

18. **Корешев С.Н., Смородинов Д.С., Никаноров О.В., Фролова М.А.** Распределение комплексной амплитуды и интенсивности в трехмерной фигуре рассеяния, формируемой оптической системой при осевом расположении точечного объекта // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42. № 3. С. 377–384.

Статья поступила в редакцию 12.02.2020, принята к публикации 19.05.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОРЕШЕВ Сергей Николаевич – *доктор технических наук, профессор кафедры прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197101, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49.
koreshev@list.ru

СМОРОДИНОВ Денис Сергеевич – *кандидат технических наук, инженер кафедры прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197101, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49.
smorodinov.denis@gmail.com

ФРОЛОВА Марина Алексеевна – *аспирантка кафедры прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197101, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49.
marrain6@yandex.ru

СТАРОВОЙТОВ Сергей Олегович – *аспирант кафедры прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197101, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49.
s.starovoitov95@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.13210
УДК 535.3, 535-15, 535.417

АНАЛИЗ ВЫХОДНОЙ МОЩНОСТИ ОПТОВОЛОКОННЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ СХЕМ С МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАННЫМИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А.О. Костромитин[1,2], Л.Б. Лиокумович[2], Ф.В. Скляров[1,2], О.И. Котов[2]

[1] АО "Концерн «ЦНИИ "Электроприбор"»",
Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье предложена идеология расчета параметров элементов и анализа выходной мощности в волоконно-оптических интерферометрических схемах с мультиплексированием чувствительных элементов по времени (TDM). Метод расчета параметров элементов позволяет обеспечивать равенство оптической мощности от всех мультиплексированных чувствительных элементов, а также оценивать влияние отклонения параметров оптической схемы от расчетных. На примере двух оптических схем показана реализация такой идеологии расчета, последовательность получения математических выражений и примеры расчетных результатов. Описанный метод расчета предлагается применять при проектировании интерферометрических измерителей с мультиплексированием волоконно-оптических чувствительных элементов.

Ключевые слова: волоконно-оптический датчик, волоконно-оптический разветвитель, оптическая мощность, потери оптической мощности

Ссылка при цитировании: Костромитин А.О., Лиокумович Л.Б., Скляров Ф.В., Котов О.И. Анализ выходной мощности оптоволоконных интерферометрических схем с мультиплексированными чувствительными элементами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 126–141. DOI: 10.18721/JPM.13210

THE FIBER-OPTIC INTERFEROMETRIC SCHEMES WITH MULTIPLEXED SENSITIVE ELEMENTS: AN ANALYSIS OF OUTPUT OPTICAL POWER LEVEL

A.O. Kostromitin[1,2], L.B. Liokumovich[2], P.V. Skliarov[1,2], O.I. Kotov[2]

[1] Concern CSRI "Elektropribor", St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A concept for calculation of element parameters and analyzing the output power in the fiber-optic interferometric schemes with time-division multiplexing of the sensitive elements (TDM) has been put forward in the paper. The calculation procedure of element parameters allows ensuring the equality of the optical power from all multiplexed sensitive elements, as well as evaluating the effect of deviation of the optical scheme parameters from the calculated ones. Using two optical schemes as an example, the implementation of this calculation concept, the sequence of obtaining mathematical expressions, and examples of calculation results were presented. The proposed calculation method could be successfully applied in the design of interferometric meters with multiplexing of fiber-optic sensitive elements.

Keywords: fiber-optic sensor, fiber-optic splitter, optical power, optical loss, time-division multiplexing

Citation: Kostromitin A.O., Liokumovich L.B., Skliarov P.V., Kotov O.I., The fiber-optic interferometric schemes with multiplexed sensitive elements: an analysis of output optical power level, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 126–141. DOI: 10.18721/JPM.13210

Введение

Волоконно-оптические датчики на основе интерферометров активно разрабатываются и внедряются для измерения различных физических величин [1]. Возможность мультиплексирования значительного числа волоконно-оптических чувствительных элементов (ЧЭ) в одной волоконной линии позволяет создавать эффективные квазираспределенные интерферометрические измерительные системы, в том числе большой протяженности. Такие технологии перспективны, например, при создании буксируемых гидроакустических антенн для сейсморазведки полезных ископаемых на шельфе [2, 3], а также многих других подобных систем.

Существует несколько подходов к организации мультиплексирования в оптоволоконных интерферометрических измерителях, которые используют разделение сигналов от отдельных ЧЭ по времени (TDM), по частоте несущих амплитудно- или частотно-модулированных сигналов (FDM), по длине волны (WDM), по степени взаимной когерентности (CDM) или по состоянию поляризации (PDM) [4]. Наибольшее распространение получила технология TDM, обеспечивающая максимальное число мультиплексируемых элементов при использовании одного лазера и фотоприемника [5]. Часто предлагается применение комбинированного варианта TDM/WDM, хотя в этом случае основной технологией остается TDM, а технологии WDM используются для вторичного мультиплексирования массивов ЧЭ, разделяемых по времени, что позволяет сократить число используемых волоконных линий [6].

Важным вопросом при реализации оптоволоконных схем с мультиплексированием ЧЭ по технологии TDM является обоснованный выбор параметров элементов оптической схемы, обеспечивающих мультиплексирование, возможность оценки и оптимизации значений ключевых параметров получаемых интерференционных сигналов, таких как относительный уровень интерференционных сигналов и его различие для разных ЧЭ, отношение сигнал/шум, контраст и т.п.

Однако в публикациях, где рассматриваются схемы мультиплексированных оптоволоконных интерферометрических измерителей, практически не приводится четкого описания методик расчета и оценки параметров таких схем в части методов обоснованного выбора оптимальных вариантов светоделительных элементов. Если и приводятся выражения для подобных расчетов [7, 8], то обычно их получают с целым рядом упрощений. Часто предполагается пренебрежение потерями оптической мощности в элементах, приближения большого числа мультиплексированных ЧЭ [8], хотя на практике часто используются системы, имеющие 4, 8 и 16 элементов в одной волоконной линии [9, 10].

В большинстве публикаций даются оценки фазовой разрешающей способности в зависимости от количества чувствительных элементов N, т.е. расчеты связаны с определенными методами создания вспомогательной модуляции и обработки интерференционного сигнала [8, 9].

В данной статье представлена методика энергетического расчета параметров характеристик волоконно-оптической части, не зависимого от принципов функционирования, на примере двух типовых вариантов оптоволоконных интерферометрических схем с мультиплексированием ЧЭ.В таком виде методику можно применять для схем с разными типами организации вспомогательной модуляции и обработки сигнала. Предлагаемые подходы к расчетам позволяют учитывать влияние отклонений от значений параметров пассивных оптоволоконных элементов на значения параметров интерференционных сигналов, которые формируются в схемах от мультиплексированных ЧЭ.

Постановка задачи

Мультиплексирование по времени подразумевает, что от лазерного источника на вход оптической схемы с массивом из N чувствительных элементов поступают короткие оптические импульсы с высокой скважностью и оптической мощностью P_{in}. Оптоволоконная схема содержит светоделительные элементы (разветвители или полупрозрачные отражатели) и должна быть построена так, чтобы каждый входной импульс проходил разные пути и через разные комбинации ЧЭ, формируя последовательность из $N + 1$ выходных импульсов мощностью p_n (n – номер выходного импульса, меняющийся от 0 до N), задержанных во времени друг относительно друга. Большинство практических схем (в том числе рассмотренные ниже) организовано так, что каждый последующий выходной импульс проходит на один ЧЭ больше, чем предыдущий. Разность задержек выходных импульсов относительно друг друга связана с разностью оптических путей ΔL, которые проходит входной импульс, формируя выходные импульсы, и эти разности должны быть одинаковыми. Для формирования интерферометрического сигнала на выходе схемы используется так называемый компенсирующий интерферометр (КИ) с оптической разностью хода, также равной ΔL. Когда выходные импульсы проходят КИ, они разделяются и попарно совмещаются со смещением на один импульс. В результате на выходе компенсирующего интерферометра формируется и далее поступает на фотоприемное устройство новая последовательность из $N + 2$ импульсов с мощностями P_{rn} (их удобно нумеровать от 0 до $N + 1$), в которой каждый исходный выходной импульс совмещен с предыдущим. Каждый импульс P_{rn} представляет собой результат интерференции импульсов p_n и p_{n-1}. Исключение составляют только первый и последний импульсы: P_{r0} и $P_{r(N+1)}$, которые при прохождении КИ не совмещаются с предыдущим и с последующим, ввиду отсутствия у них предыдущих и последующих импульсов. Воздействия на n-й волоконный ЧЭ меняют фазовую задержку $\Delta\varphi_n$ оптического излучения, проходящего через данный ЧЭ. Поэтому интерференция импульсов p_n и p_{n-1} связана с $\Delta\varphi_n$, поскольку импульс p_{n-1} прошел через ЧЭ от первого до (n–1)-го, а импульс p_n – через чувствительные элементы с первого по n-й. С учетом того, что P_{rn} определяется интерференцией двух выходных импульсов, то они имеют вид

$$P_{rn}(t) = C\{P_{0n} + P_{mn}\cdot\cos[\Delta\varphi_n(t)]\}, \qquad (1)$$

где $P_{0n} = p_n + p_{n-1}$ – постоянная составляющая; $P_{mn} = 2(p_n p_{n-1})^{1/2}$ – амплитуда интерференционной составляющей.

Аргумент интерференционного сигнала $\Delta\varphi_n$ содержит целевые осцилляции фазовой задержки n-го ЧЭ, связанные с измеряемым воздействием, и может быть определен в ходе последующей обработки. Коэффициент C связан с потерями при прохождении КИ, и в идеальном случае $C = 1/2$. Следует отметить, что КИ может быть расположен и на входе оптоволоконной схемы. При этом детали прохождения импульсов через схему будут отличаться, но в результате также будут формироваться интерференционные сигналы вида (1).

При комплексном анализе оптоволоконных интерференционных схем с мультиплексированными ЧЭ, необходимо рассматривать различные системы соотношений, включающие различные типы параметров элементов оптической схемы, характеристики других элементов системы и опрашивающих импульсов. В контексте энергетических соотношений одна из ключевых проблем – выбор элементов, обеспечивающих оптимальные значения параметров интерференционных сигналов P_{0n} и P_{mn}. Набор значений P_{0n} и P_{mn} играет ключевую роль для организации корректной регистрации сигналов, оценки достигаемого отношения сигнал/

шум и, как следствие, разрешающей способности системы.

С точки зрения проектирования схемы, важный результат энергетического расчета – это определение требуемых коэффициентов деления светового потока в делительных элементах оптоволоконной схемы. В зависимости от используемых в схеме элементов, к таковым параметрам относятся коэффициенты деления волоконных разветвителей либо коэффициент отражения полупрозрачных отражателей.

Если использовать одинаковые делительные элементы, то неизбежно значения p_n и P_{rn} будут существенно зависеть от n и вопрос об оптимальном выборе коэффициентов деления требует сложного анализа критериев оптимальности. Более привлекательный вариант в отношении достигаемого эффекта и одновременно более простой в отношении критерия оптимальности, предусматривает выбор делительных элементов, исходящий из требования выполнения условия равенства всех p_n:

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_n = \ldots = p_N = P_0. \qquad (2)$$

В этом случае $P_{0n} = P_{mn} = 2P_0$, контраст всех интерференционных сигналов равен единице (если обеспечено согласование по состоянию поляризации).

В данной работе рассматривается построение схемы, отвечающейименно такому требованию. При этом важным показателем выступает нормированный уровень мощности импульсов:

$$p_{norm} = P_0/P_{in}; \qquad (3)$$

по нему удобно сравнивать «энергетическую эффективность», достигаемую в разных схемах или при разных значениях N.

При выполнении условия (2), в общем случае очевидно, что чем больше p_{norm}, тем меньше различные шумы и флуктуации влияют на результирующие выходные сигналы измерительной системы.

Очевидно, что для выполнения условия (2) необходимо использовать специальный набор значений коэффициентов деления разветвителей или отражателей, однако современные технологии позволяют изготавливать эти элементы практически с произвольными параметрами, и указанный подход к оптимальному построению схемы по критерию (2) вполне реализуем на практике. Но при проектировании подобных схем важно не только найти оптимальные коэффициенты делительных элементов, но и иметь возможность детального анализа влияния на параметры интерференционных сигналов других параметров делительных элементов схемы, флуктуаций этих параметров и прочих факторов, которые надо учитывать при проектировании.

Общие принципы организации методики расчета

При рассмотрении методики расчета следует отметить разные группы параметров элементов схемы, которые задействованы в анализе и расчетах. Прежде всего, это коэффициенты пропускания (по мощности) в волоконных отрезках, соединяющих элементы схемы, включая отрезки волокна в ЧЭ. Эти коэффициенты пропускания отличны от единицы, вследствие наличия потерь оптической мощности в световоде и дополнительных условий (отрезки волокна могут быть намотаны в катушки, содержать соединения и т.п.). Исходно указанные коэффициенты пропускания предполагаются заданными и не подлежат непосредственному определению в процессе расчетов; при этом они могут быть как одинаковыми, так и разными для разных ЧЭ, но рассматриваются как известные параметры.

К другому типу параметров следует отнести коэффициенты деления оптической мощности в разветвителях или в полупрозрачных отражателях (обычно это волоконно-оптические брэгговские решетки), если схемы используют первый или второй тип элементов для деления потоков оптической мощности. Коэффициенты деления могут выбираться, и именно они должны быть оптимально подобраны на основе методики расчета, обеспечивающей выполнение условия (2).

Отдельно необходимо отметить, что в разветвителях или волоконно-оптических брэгговских решетках также есть внутренние потери, которые, строго говоря, следует учитывать в расчетах. В общем случае потери делительных элементов могут зависеть от коэффициентов деления или пропускания. Это можно учесть в расчетах в том случае, если эта зависимость известна. В нижеприведенном анализе для простоты и наглядности получения конкретных результатов рассматривается вариант, когда такие потери фиксированы и также рассматриваются как известный параметр.

При расчете оптимальных коэффициентов деления разветвителей или отражателей, разумеется, возможно и целесообразно учитывать только заранее известные регулярные компоненты коэффициентов пропускания в волоконных отрезках схемы и потери в делительных элементах. Однако в целом методика расчета должна предусматривать возможность анализа влияния возможных отклонений расчетных и исходно заданных параметров элементов от реальных. Такие явления могут быть вызваны как регулярными отклонениями от номинальных значений, так и флуктуациями параметров в процессе эксплуатации; изменения могут возникать, например, вследствие старения, нестабильности температуры и состояния поляризации оптического излучения.

Методика энергетического расчета и анализа оптоволоконных элементов схемы предполагает получение и применение двух систем соотношений:

во-первых, формул мультипликативной структуры для расчета значений p_n с учетом всех ключевых параметров элементов оптоволоконной схемы;

во-вторых, рекуррентных соотношений, связывающих выбираемые параметры делительных элементов соседних звеньев схемы и позволяющих рассчитать коэффициенты деления всех делительных элементов с учетом определенных условий на граничные элементы.

Для вывода первой системы соотношений нужно рассмотреть прохождение светового импульса, связанного n-м делительным элементом, от входа на выход.

Вторая система соотношений требует рассмотрения условия баланса мощности $p_{n-1} = p_n = P_0$ и решения уравнения баланса относительно параметра элемента деления.

В связи с выбором схем, рассмотренных далее в настоящей работе, следует пояснить, что разнообразные варианты построения оптических схем с TDM уместно разделить на два типа: работающие «на отражение» (возвратные) и «на проход» (проходные).

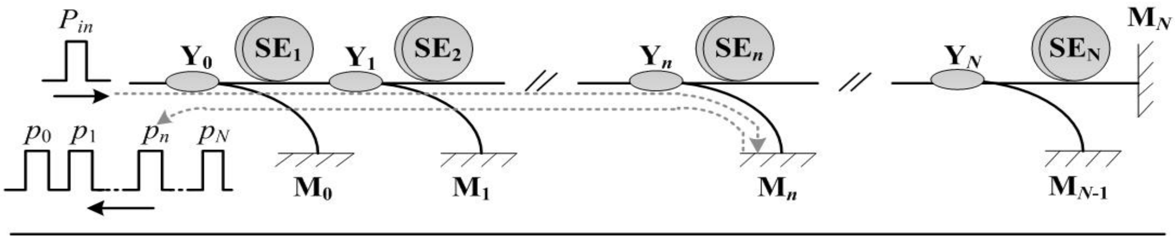
В случае отражательной схемы, сканирующий импульс, проходя звенья схемы от первого до n-го ЧЭ, далее идет в обратном направлении и поступает в качестве n-го выходного импульса в ту же часть схемы (или непосредственно в ту же волоконную линию), что и входной импульс, но во встречном направлении. В таком случае в схеме необходимы зеркала (часто для подавления поляризационного фединга используются так называемые фарадеевские зеркала).

В случае проходной схемы, входной импульс поступает с одной стороны схемы, и далее пройдя через ЧЭ от первого до n-го, формирует n-й выходной импульс с противоположной стороны схемы. Для рассмотренных далее схем обычно считается, что снижение p_{norm} с ростом значения N, при отсутствии потерь, имеет характер ~ $1/N^2$ [9].

Есть варианты организации схем, где спад имеет характер $1/N$, но в них могут присутствовать многократные прохождения через ЧЭ и паразитное наложение разных импульсов, а также кросс-толк [8]. Схемы с кросс-толком имеют свою специфику, но их рассмотрение выходит за рамки данной работы.

Анализ мощности выходных импульсов в схеме отражательного типа

Рассмотрим типовую схему отражательного типа (рис. 1). Схема включает N катушек а)



b)

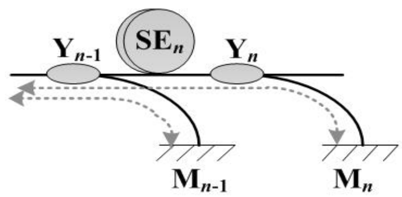


Рис. 1. Схема отражательного типа и формирование выходных импульсов (*a*),
а также *n*-е звено данной схемы (*b*):
SE_i – чувствительные элементы; M_i – зеркала;
Y_i – разветвители; P_{in} – входной импульс; p_i – выходные импульсы

чувствительных элементов (SE) с номерами $n = 1,2, ..., N$, а также $(N + 1)$ Y-разветвителей (Y) и зеркал (M) с номерами $n = 0, 1, 2, ..., N$.

В качестве ключевых параметров схемы целесообразно ввести в рассмотрение прямой (K_d) и перекрестный (K_c) коэффициенты передачи разветвителя, коэффициент передачи K_{sf} отрезка волокна с чувствительным элементом, коэффициент передачи K_f технологического отрезка между разветвителем и зеркалом, коэффициент отражения зеркала R (в идеальном случае $R = 1$, однако реальный коэффициент отражения может быть меньше единицы). При наличии в схеме соединений, потери в соединениях следует учесть в коэффициентах передачи волоконных отрезков K_f и K_{sf}. Коэффициенты K_d и K_c жестко связаны с коэффициентом деления D и параметром внутренних потерь разветвителя α, как описано в Приложении 1.

Если рассмотреть путь прохождения входного импульса до *n*-го зеркала и обратно (см. рис. 1), то нетрудно сформировать мультипликативные формулы для p_n, которые имеют вид

$$p_n = P_{in} K_{fn}^2 K_{cn}^2 R_n \cdot \prod_{q=1}^{n} (K_{d(q-1)}^2 K_{sfq}^2). \qquad (4)$$

В формуле (4) подразумевается, что если верхний предел произведения меньше нижнего, что имеет место при $n = 0$, то произведение равно единице. Также нужно учесть отличие случая $n = N$, связанное с отличием конечного звена схемы от остальных, поскольку для последнего *N*-го ЧЭ нет надобности направлять оптическую мощность далее и нецелесообразно использовать разветвитель между *N*-м ЧЭ и *N*-м зеркалом. Однако выражение (4) будет актуально для всех *n*, если по определению принять наличие формальных коэффициентов $K_{cN} = K_{fN} = 1$. На практике часто можно полагать, что все ЧЭ эквивалентны и K_{sf} не зависит от *n*. Тогда в выражении (4) этот параметр можно исключить из произведения и использовать множитель $(K_{sf})^{2n}$.

Из анализа одного звена схемы и сравнения разности путей $(n - 1)$-го и *n*-го импульса (см. рис. 1,*b*) можно получить уравнение, соответствующее балансу $p_{n-1} = p_n$. В рассматриваемой схеме (при сохранении определения $K_{cN} = K_{fN} = 1$) это уравнение имеет вид

$$K_{c(n-1)}^2 K_{f(n-1)}^2 R_{n-1} = K_{d(n-1)}^2 K_{cn}^2 K_{sfn}^2 K_{fn}^2 R_{n-1} . \qquad (5)$$

Для получения рекуррентного соотношения на параметры разветвителей, необходимо учесть связь между K_d и K_c. Если с учетом пояснений в Приложении 1 использовать модель параметров разветвителя в виде

$$K_d = (1 - \alpha_{el})\cdot D/(1 + D) \quad \text{и} \quad K_c = (1 - \alpha_{el})/(1 + D), \tag{6}$$

то уравнение (6) непосредственно преобразуются к рекуррентному виду:

$$D_{n-1} = A_n(1 + D_n), \tag{7}$$

где использовано допущение, что параметр избыточных потерь разветвителя α_{el} не зависит от D и одинаков для любых n, а также введена константа

$$A_n = K_{f(n-1)}\sqrt{R_{n-1}} \times \times [(1 - \alpha_{el})\, K_{sfn}\, K_{fn}\sqrt{R_n}\,]^{-1}. \tag{8}$$

При расчетах практических схем часто допустимо полагать коэффициенты K_{sf}, K_f и R одинаковыми для всех n. В этом случае расчет оптимальных значений D_n не зависит от значений K_f и R, а константа A_n не будет зависеть от n и становится более простой:

$$A = 1/(1 - \alpha_{el})\, K_{sf} \tag{9}$$

(при этом на расчет оптимальных значений D_n влияют избыточные потери в разветвителях и потери в ЧЭ).

Если допустимо пренебрегать избыточными потерями в разветвителях, то следует полагать $\alpha_{el} = 0$.

Для использования выражения (7) необходимо определить начальное условие для рекуррентного расчета оптимальных значений D_n. Для данной схемы, это условие непосредственно связано с отсутствием разветвителя с номером N. Другое включение последнего ЧЭ однозначно ухудшит полученные значения p_0 и P_{norm}. При этом рассмотрение оконечного звена, содержащего последний ЧЭ, дает условие баланса мощности (5) при подстановке $K_{cN} = K_{sfN} = 1$ в правой части. Тогда учет соотношений (6) для $(N - 1)$-го разветвителя приводит к простому соотношению:

$$D_{N-1} = \frac{K_{f(N-1)}}{K_{sfN}}\sqrt{\frac{R_{N-1}}{R_N}}, \tag{10}$$

которое соответствует рекуррентному выражению (7) при исключении из выражения (8) параметров K_{cn}, K_{fn} и α_{el} для определения константы A_n.

Нетрудно видеть, что для малых потерь в элементах, когда коэффициенты $K_{f(n-1)}$, K_{sfN}, R_{N-1} и R_N близки к единице, выражение (10) даст $D_{N-1} \approx 1$, т.е. логичный для баланса такого звена результат с разветвлением, близким к разветвителю 50:50, независимо от потерь в разветвителе.

Далее по рекуррентному выражению (7) можно поочередно получать значения для остальных разветвителей с номерами от $n = N - 2$ до $n = 0$, сформировав набор значений $\{D\}$, а затем на основе формулы (6) и заданного α_{el}, пересчитать значения $\{D\}$ в наборы значений $\{K_d\}$ и $\{K_c\}$ всех разветвителей.

Если подставить полученные наборы значений $\{K_d\}$ и $\{K_c\}$ в выражения (4), то, в силу метода получения этих наборов, для любого n будет получено одно и то же значение p_0, причем максимально возможное при заданных параметрах, использованных в расчете.

Однако важным результатом такого вычисления является непосредственно значение уровня p_{norm}, а также возможность анализа его зависимости от N и других параметров, задействованных в расчетах.

В Приложении 2 приведены рассчитанные наборы значений $\{D\}$, $\{K_d\}$ и $\{K_c\}$ разветвителей для $N = 8$ и

$$\alpha_{el[\text{дБ}]} = \alpha_{sf[\text{дБ}]} = 0{,}10 \text{ дБ}, \quad \alpha_{f[\text{дБ}]} = 0{,}05 \text{ дБ и } R = 0{,}99,$$

где подразумевается, что

$$\alpha_{sf[\text{дБ}]} = -10\cdot\lg(K_{sf}), \quad \alpha_{f[\text{дБ}]} = -10\cdot\lg(K_f),$$

$$\alpha_{el[\text{дБ}]} = -10\cdot\lg(1-\alpha_{el}).$$

Эти значения коэффициентов деления важны при практической реализации данной схемы, поскольку их нужно знать для установки соответствующих разветвителей. Однако для анализа энергетической эффективности схемы более актуальны показанные на рис. 2 примеры зависимостей p_{norm} от N для этого же набора параметров, а также для случаев, когда отличается значение параметра α_{sf} или α_{el}.

Пример зависимостей на рис. 2 показывает достигаемые уровни относительной мощности для схем с указанными параметрами при оптимальном выборе коэффициентов деления разветвителей, степенной вид зависимости $p_{norm}(N)$, а также демонстрируют возможность изучения влияния других параметров элементов схемы на достигаемый уровень p_{norm}.

Важно отметить, что приведенные системы выражений позволяют не только анализировать влияние параметров элементов схемы на достигаемый уровень p_{norm}, но и учитывать и изучать влияние отклонений реальных параметров от идеальных значений на значения p_n. Если при изготовлении реальных разветвителей коэффициенты D задаются в формате $(1-\delta)/\delta$ с точностью выбора δ, например, до 1 или до 2%, то можно применять соответствующие округления к набору оптимальных значений $\{D\}$, полученных после рекуррентной процедуры. Далее в выражения (4) можно подставить округленные значения и, посчитав p_{0n}, оценить разброс этих значений и отклонения от результатов расчетов без округления.

Аналогичным образом можно учитывать влияние как фиксированных отклонений параметров элементов от исходно рассчитанных, так и случайных.

Первый случай реализуется, если провести прецизионные измерения параметров реального набора разветвителей, изготовленных для схемы, и использовать эти фактические параметры в расчетах.

Второй случай предполагает, что параметры элементов в процессе эксплуатации могут иметь некоторые флуктуации. Тогда после исходных расчетов оптимальных наборов $\{D\}$ разветвителей с применением регулярных частей α_{el}, K_f, K_{sf} и R, на втором этапе расчетов в формулы (4) следует подставлять параметры, имеющие, кроме регулярной компоненты, еще и случайные добавки. Тогда расчет будет давать набор значений p_n, имеющих случайные отклонения относительно оценки p_0 при вычислении с регулярными параметрами.

Это важные возможности предлагаемой методики расчетов, хотя примеры изучения таких возможностей выходят за рамки данной работы.

Анализ мощности выходных импульсов в схеме проходного типа

Рассмотрим характерную схему проходного типа (рис. 3). Схема включает пары Y-разветвителей в «верхней» и «нижней» линиях. Последовательность выходных импульсов формируется за счет того, что n-й импульс проходит часть пути по «верхней» линии, ответвляется в нижнюю часть через n-ю пару разветвителей и далее по «нижней» линии распространяется к выходу. Можно показать, что в рамках рассматриваемой задачи оба n-х разветвителя должны иметь одинаковые коэффициенты деления. Отличаются случаи для $n = 0$ и $n = N$, когда импульс проходит в «нижнюю» линию только через нулевой или только через N-й разветвитель, которые не имеют пары. Также в расчетах надо учесть коэффициент пропускания отрезков волокна: K_{sfn} для отрезка волокна с n-м чувствительном элементом; K_{fn} для технологических отрезков, соединяющих $(n-1)$ й и n-й разветвители в «нижней» линии, K'_{fn} для «вертикальных» отрезков между парой n-х разветвителей. Разность оптических путей ΔL формируется за счет разности длин отрезков волокна между соседними разветвителями в «верхней» и в «нижней» линиях (обычно волокно в ЧЭ больше технологического участка в «нижней» линии). Схему можно было бы построить по симметричному варианту с расположением ЧЭ в нижней линии, но идеоло-

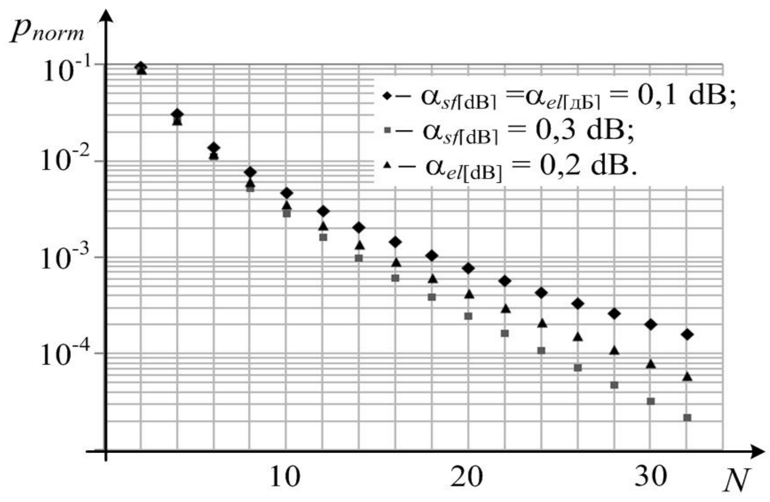


Рис. 2. Случай схемы отражательного типа. Зависимости нормированного уровня мощности импульсов от количества чувствительных элементов (ЧЭ) для различающихся значений потерь α_{sf} и α_{el}

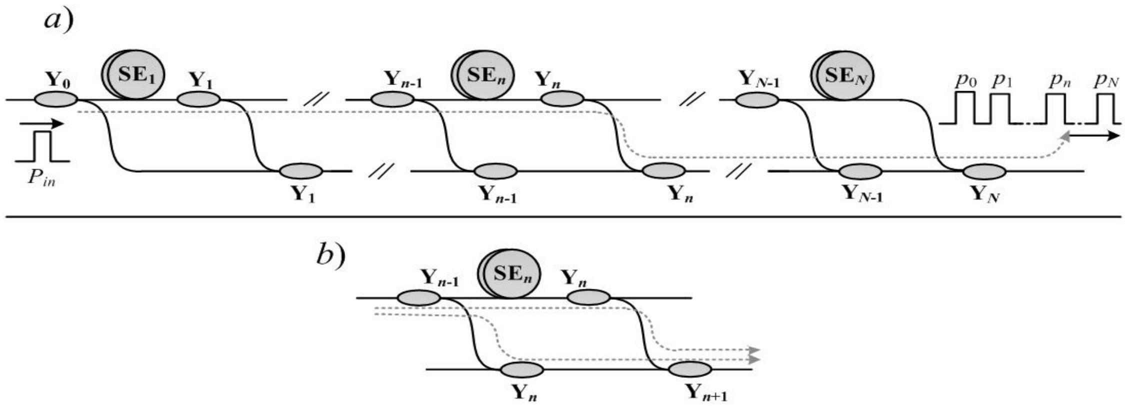


Рис. 3. Схема проходного типа и формирование выходных импульсов (*a*), а также *n*-е звено данной схемы (*b*); обозначения идентичны приведенным на рис. 1

гия функционирования и принцип расчета от этого не меняются.

Учитывая маршрут прохождения схемы n-м выходным импульсом, нетрудно составить мультипликативные формулы для определения p_n. Поскольку структуры первого и последнего звена отличаются от структуры центральных звеньев, то выражения имеют отличия для случаев $n = 0$ и $n = N$:

$$p_0 = P_{in} K_{f0} K_{c0} K_{d1} \cdot \prod_{q=1}^{N} K_{dq} K_{fq} \text{ при } n = 0;$$

$$p_n = P_{in} K'_{fq} K_{cn}^2 \cdot \prod_{q=1}^{n} K_{d(q-1)} K_{sfq} \cdot \prod_{q=n+1}^{N} K_{dq} K_{fq}$$

$$\text{при } n = 1, 2, \ldots (N-1); \qquad (11)$$

$$p_N = P_{in} K_{cN} \cdot \prod_{q=1}^{n} K_{d(q-1)} K_{sfq} \text{ при } n = N.$$

Уравнения баланса мощности соседних импульсов для первого и последнего звена также будут отличаться от уравнения для «центральных» звеньев и, как следует из разности путей ($n - 1$)-го и n-го выходного импульсов (рис. 3,*b*), для этих трех случаев имеют вид

$$K_{c0} K_{d1} K_{f1} = K_{d0} K_{c1}^2 K_{sf1} K'_{f1} \text{ при } n = 1;$$

$$K^2_{c(n-1)}K_{dn}K'_{f(n-1)}K_{fn} = K_{d(n-1)}K^2_{cn}K_{sf1}K'_{fn}$$

$$\text{при } n = 2, 3, ..., (N-1); \quad (12)$$

$$K^2_{c(N-1)}K_{dN}K'_{f(N-1)}K_{f(N-1)} = \\ = K_{cN}K_{d(N-1)}K_{sfN} \text{ при } n = N;$$

где n соответствует звену, охватывающему n-й ЧЭ.

Важно отметить, что в формулы(11) заложено равенство коэффициентов для n-го разветвителя в «верхней» и «нижней» линиях.

На основе формул (12) можно получить рекуррентные соотношения, связывающие параметры разветвителей. С учетом модели (6), из уравнений (12) для первого звена (при $n = 0$) получается уравнение вида

$$D_1^{\ 2} + D_1 - A_0D_0 = 0, \quad (13)$$

где введена константа

$$A_0 = (1 - \alpha_{el})\ K_{sf1}K'_{f1}/K_{f0}. \quad (14)$$

Решение этого квадратного уравнения (из двух корней только один положителен и приемлем) имеет вид

$$D_1 = 0{,}5\ [(4D_0A_0 + 1)^{1/2} - 1]. \quad (15)$$

Для последующих звеньев (кроме последнего) из модели(6) и уравнений(12) получается соотношение

$$D_n^{\ 2} + D_n - A_n[(D_{n-1})^2 + D_{n-1}] = 0, \quad (16)$$

где введена константа

$$A_n = K_{sf1}\ K'_{fn}/(K'_{f(n-1)}K_{fn}). \quad (17)$$

Решение уравнения дает рекуррентное соотношение вида

$$D_n = 0{,}5\ \{[4((D_{n-1})^2 + \\ + D_{n-1})A_n + 1]^{1/2} - 1\}. \quad (18)$$

И, наконец, для последнего звена ($n = N$) из модели (6) и уравнений (12) следует уравнение

$$(D_{N-1})^2 + D_{N-1} = A_ND_N, \quad (19)$$

где введена константа

$$A_N = (1 - \alpha_{el})\ K_{f(N-1)}K'_{f(N-1)}/K_{sfN}. \quad (20)$$

В данном случае нужно определить D_N, поэтому решение имеет вид

$$D_N = [(D_{N-1})^2 + D_{(N-1)}]/A_N\ . \quad (21)$$

Следует отметить, что вывод выражений для проходной схемы подразумевал, что $N > 2$. Случай $N = 2$ необходимо рассмотреть отдельно и получить соответствующие выражения, но, ввиду малой практической значимости, он в данной работе рассматриваться не будет.

Если задать некоторое значение D_0, то далее на основе выражений (15), (18), (21) можно получить значения D_n для всех остальных разветвителей, т.е. полный набор $\{D\}$. Понятно, что если набор $\{D\}$ пересчитать в наборы$\{K_d\}$ и $\{K_c\}$ и далее рассчитать p_n по формулам (10), то будет выполнено условие (2) и получено некоторое значение p_{norm}, не зависящее от n. Однако это значение будет зависеть от исходного выбора D_0.

Таким образом, в данной схеме условием получения максимального значения p_{norm} является выбор оптимального значения D_0. Простой прямой путь решения данной проблемы состоит в переборе значений D_0 и выборе в качестве оптимального значения D_{opt} такого значения D_0, при котором p_{norm} достигнет максимума. Очевидно, что конкретное значение D_{opt}, как и достигаемый максимум p_{norm}, зависит от N и от значений остальных параметров, задействованных в расчетах.

Приведем примеры расчетов, где, как и ранее, для простоты полагаем K_f, K'_f и K_{sf} не зависящими от n. На рис. 4,*а* приведены примеры зависимостей p_{norm} от D_0 при $\alpha_{el[\text{дБ}]} = \alpha_{sf[\text{дБ}]} = 0{,}1$ дБ и $\alpha_{f[\text{дБ}]} = \alpha'_{f[\text{дБ}]} = 0{,}05$ дБ для случаев $N = 8$ и $N = 16$. В первом случае из расчета следует, что $D_{opt} = 16{,}86$ и обеспечивается $p_{norm} = 6{,}63 \cdot 10^{-3}$. Во втором случае $D_{opt} = 62{,}67$ и до-

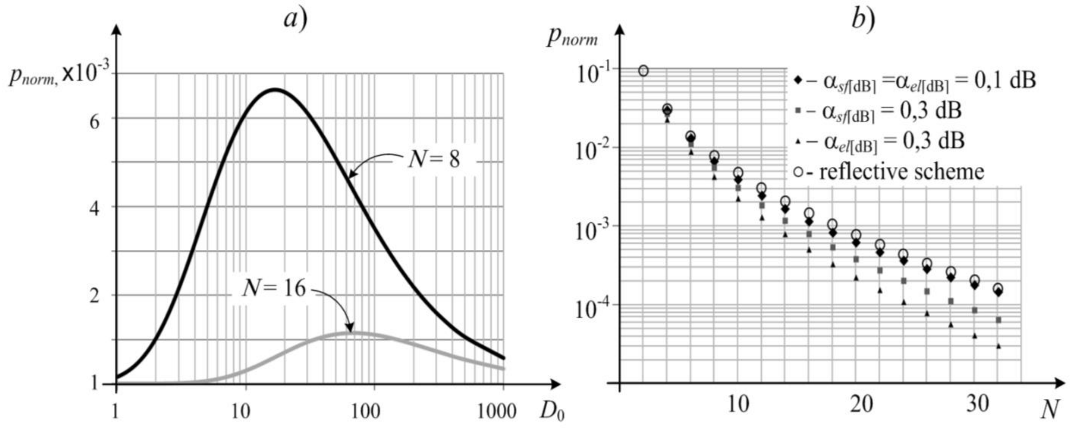


Рис. 4. Случай схемы проходного типа. Примеры рассчитанных зависимостей нормированного уровня мощности импульсов p_{norm} от коэффициента деления первого разветвителя для двух значений N (a) и от количества чувствительных элементов N для двух разных значений потерь в ЧЭ и в разветвителях.
Для сравнения показана зависимость p_{norm} для отражательной схемы (b)

стигается $p_{norm} = 1{,}15\cdot10^{-3}$.

Также для $N = 8$ в Приложении 2 указаны рассчитанные наборы значений $\{D\}$, $\{K_c\}$ и $\{K_d\}$, которые могут быть использованы при практической реализации схемы с такими исходными данными.

С точки зрения анализа энергетики, в такой схеме показательны представленные на рис. 4,b примеры зависимостей p_{norm} от N, полученные при выборе $D_0 = D_{opt}$ для каждого N. Как и ранее, кроме расчета зависимости с указанными выше значениями параметров потерь, приведены также еще две кривые для случаев, когда различаются значения параметров α_{fs} и α_{el}. Также для сравнения с отражательной схемой на рис. 4 показана зависимость, полученная ранее для основных наборов параметров.

Если сопоставить результаты расчетов, приведенные на рис. 2 и 4, то видно, что при оптимальном выборе коэффициентов деления разветвителей достигаемые уровни p_{norm} при равных потерях в ЧЭ почти одинаковы для обеих схем при небольшом выигрыше в случае возвратной схемы (выигрыш растет при больших значениях N). Это ожидаемый результат, поскольку, несмотря на разные конфигурации схем, в обеих схемах импульс проходит равное число разветвителей в прямом направлении, равное количество ответвлений и отрезков ЧЭ.

Во второй схеме, в каждом звене, есть дополнительный соединительный отрезок, но в первой есть потери при отражении от зеркала (изменение соотношений потерь в этих элементах может сделать немного более выигрышной по мощности вторую схему).

На рис. 4,b также можно видеть, что зависимость от N имеет степенной характер p_{norm} (N) ~ N^{-q}, причем при снижении потерь значение q близко к 2, но возрастает при увеличении потерь. Для приведенных зависимостей, q имеет значения в диапазоне 2,5 – 3,3. Здесь следует отметить, что при анализе ограниченных диапазонов N, аппроксимация дает разные показатели и лучшую точность. Так, в диапазоне $4 \le N \le 16$ значения показателя для кривых, приведенных на рис. 2 и 4, находятся в диапазоне 2,4 – 2,8, а в диапазоне $10 \le N \le 32$ значения q для приведенных кривых лежат в диапазоне 2,8 – 3,7.

Однако данная статья не нацелена на комплексное изучение закономерностей такого рода, а посвящена идеологии корректного расчета подобных зависимостей и выражениям, которые надо для этого использовать. При этом корректный расчет подразумевает обеспечение оптимального выбора параметров разветвителей.

Как и в случае возвратной схемы, предлагаемый принцип расчетов для проходной схемы позволяет (кроме выбора оптимальной системы разветвителей и оценки значения p_{norm}) анализировать влияние различных дополнительных факторов: ограничение точности изготовления разветвителей, случайные флуктуации параметров элементов и т.п. Однако при этом надо учитывать, что мультипликативные выражения (11) ограничивают такой анализ, поскольку предполагают идентичность параметров в парах разветвителей на «верхней» и «нижней» линиях. За счет этого формулы (11) упрощаются, и главное – можно получить простое и понятно интерпретируемое рекуррентное выражение (18). Для анализа влияния округления коэффициентов деления, регулярных или случайных отклонений этих коэффициентов и тому подобных факторов, необходимо использовать мультипликативные формулы, имеющие следующий вид:

$$p_0 = P_{in} K_{f0} K_{c0} K_{d1} \cdot \prod_{q=1}^{N} k_{dq} K_{fq} \text{ при } n = 0;$$

$$p_n = P_{in} K'_{fq} K_{cn} k_{cn} \cdot \prod_{q=1}^{n} K_{d(q-1)} K_{sfq} \cdot \prod_{q=n+1}^{N} k_{dq} K_{fq}$$

$$\text{при } n = 1, 2, \ldots (N-1); \tag{22}$$

$$p_N = P_{in} k_{cN} \cdot \prod_{q=1}^{n} K_{d(q-1)} K_{sfq} \text{ при } n = N,$$

где разделены коэффициенты передачи K_{dn}, K_{cn} разветвителей «верхней» линии и коэффициенты передачи k_{dn}, k_{cn} разветвителей «нижней» линии.

Заключение

Предложена идеология расчета параметров элементов оптических схем мультиплексированных волоконно-оптических датчиков, позволяющая оптимизировать схему с точки зрения достижения максимального уровня и контраста формируемых интерференционных сигналов, при этом учитываются потери оптической мощности как в делительных элементах, так и в отрезках волокон и в зеркалах, входящих в волоконно-оптическую схему.

Показана процедура получения выражений для расчета параметров элементов на примере двух оптических схем.

Приведены примеры расчетов параметров элементов в рассмотренных схемах для числа чувствительных элементов $N = 8$ и расчетов зависимостей нормированного уровня мощности оптического импульса на выходе схем от числа N для некоторых наборов параметров элементов.

Предложенная идеология организации расчета позволяет не только выполнять расчет оптимальных коэффициентов деления разветвителей в схеме и достигаемую мощность импульсов на выходе схемы, но и оценивать влияние изменения параметров отдельных элементов оптической схемы (в том числе случайных)на характеристики системы в целом.

Формирование расчетных выражений для рассмотренных схем также демонстрирует принцип организации аналогичных расчетов для других конфигураций подобных схем.

Представленные методы и результаты расчетов могут непосредственно использоваться при проектировании оптоволоконных интерферометрических измерительных систем на основе мультиплексирования чувствительных элементов.

Приложение 1

Параметры Y-разветвителя

Y-разветвитель имеет три порта и формально описывается девятью коэффициентами передачи по мощности K_{ij}. С учетом симметрии, хорошо выполняемой на практике, $K_{ij} \approx K_{ji}$. Выберем нумерацию так, что при подаче света в первый порт свет передается во второй и третий порты. Тогда вследствие направленности, $K_{23} \approx 0$ так же, как малы коэффициенты отражения от разветвителя $K_{ii} \approx 0$ (на практике эти коэффициенты соответствуют ослаблению на несколько десятков дБ). В этом случае существенными являются два коэффициента: K_{12} и K_{13}. Если предположить, что $K_{12} \geq K_{13}$ (связь между портами 1 и 2 – прямая, и $K_{12} = K_d$, а связь между портами 1 и 3 – перекрестная, и $K_{13} = K_c$), то ключевой параметр разветвителя – коэффициент деления – задается отношением $D = K_{12}/K_{13}$ (полагается $D > 1$). Если K_{23}, $K_{ii} \ll K_{13}$, то, исходя из требования баланса мощности, – $K_{12} + K_{13} = 1$. Однако учитывая возможность внутренних (избыточных) потерь оптической мощности, для реального разветвителя $K_{12} + K_{13} = 1 - \alpha_{el}$ (где α_{el} – малый параметр, характеризующий потери). Последнее равенство из определения D дает формулы

$$K_{12} = K_d = (1 - \alpha_{el})D/(D + 1);$$
$$K_{13} = K_c = (1 - \alpha_{el})/(D + 1),$$

которые введены как выражение (4).

Для реальных разветвителей часто более наглядным и принятым является задание не коэффициентов K_{12} и K_{13}, а параметров D и α_{el} (обычно указывают $\alpha_{el[\text{дБ}]} = 10 \cdot \lg(1 - \alpha_{el})$).

Приложение 2

Примеры расчета значений параметров $\{D\}$, $\{K_c\}$ и $\{K_d\}$

Приведем в виде сводной таблицы результаты расчета коэффициентов деления D и коэффициентов передачи K_d, K_c для рассмотренных схем в случае $N = 8$, $\alpha_{el} = 0{,}977$, $K_{sf} = 0{,}977$, $K_f = 0{,}989$, а также $R = 0{,}99$ для отражательной схемы и $K'_f = 0{,}989$ для проходной схемы (указанные коэффициенты соответствуют уровням $\alpha_{el[\text{дБ}]} = \alpha_{sf[\text{дБ}]} = 0{,}1$; $\alpha_{f[\text{дБ}]} = \alpha'_{f[\text{дБ}]} = 0{,}05$).

Хотя приведенные в таблице значения не столь показательны и интересны для рассмотренных зависимостей p_{norm} от N и от других параметров подобных характеристик, но при практической реализации оптимального варианта схемы с выполнением условия (2), необходимо выбирать разветвители с рассчитанным набором параметров $\{K_c\}$ и $\{K_d\}$.

Таблица

Результаты расчета значений параметров $\{D\}$, $\{K_c\}$ и $\{K_d\}$ для отражательной и проходной схем при заданных значениях потерь оптической мощности в элементах схемы

n	Отражательная схема			Проходная схема		
	D	K_d	K_c	D	K_d	K_c
0	9,848	0,887	0,09	16,857	0,923	0,055
1	8,405	0,873	0,104	3,543	0,762	0,215
2	7,026	0,855	0,122	3,520	0,761	0,216
3	5,71	0,832	0,146	3,498	0,76	0,217
4	4,453	0,798	0,179	3,475	0,759	0,218
5	3,253	0,747	0,23	3,453	0,758	0,219
6	2,106	0,663	0,315	3,43	0,757	0,221
7	1,012	0,491	0,486	3,408	0,756	0,222
8	–	–	–	15,374	0,918	0,06

Обозначение: n – номер Y-разветвителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Measures R.M.** Structural monitoring with fiber optic technology. Cambridge, Massachusetts, USA: Academic Press, 2001. 716 p.

2. **Langhammer J., Eriksrud M., Berg C., Nakstad H.** Fiber optic permanent seismic system for increased hydrocarbon recovery // Proceedings

of the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, European Association of Geoscientists & Engineers, Salvador, Brasil, 24–28 August, 2009. cp-195-00408.

3. **Plotnikov M.Y., Lavrov V.S., Dmitraschenko P.Y., Kulikov A.V., Meshkovskiy I.K.** Thin cable fiber-optic hydrophone array for passive acoustic surveillance applications // IEEE Sensors Journal. 2019. Vol. 19. No. 9. Pp. 3376–3382.

4. **Kersey A.D., et al.** Multiplexed interferometric fiber sensors // 7th Optical Fibre Sensors Conference. The Institution of Radio and Electronics Engineers Australia, 1990. Pp. 313–319.

5. **Akkaya O.C., Digonnet M.J.F., Kino G.S., Solgaard O.** Time-division-multiplexed interferometric sensor arrays // Journal of Lightwave Technology. 2013. Vol. 31. No. 16. Pp. 2701–2708.

6. **Liao Y., Austin E., Nash P.J., Kingsley S.A., Richardson D.J.** Highly scalable amplified hybrid TDM/DWDM array architecture for interferometric fiber-optic sensor systems // Journal of Lightwave Technology. 2013. Vol. 31. No. 6. Pp. 882–888.

7. **Kersey A.D., Dandridge A., Dorsey K.L.** Transmissive serial interferometric fiber sensor array //Journal of Lightwave Technology. 1989. Vol. 7. No. 5. Pp. 846–854.

8. **Brooks J., Moslehi B., Kim B., Shaw H.** Time-domain addressing of remote fiber-optic interferometric sensor arrays // Journal of Lightwave Technology.1987. Vol. 5. No. 7. Pp. 1014–1023.

9. **Lijuan Gu, Xiangge He, Duo Yi, et al.** Common-mode noise suppression technique in interferometric fiber-optic sensors // Journal of Lightwave Technology. 2019. Vol. 37. No. 21. Pp. 5619–5627.

10. **Yoshida M., Hirayama Y., Takahara A.** Real-time displacement measurement system using phase-shifted optical pulse interferometry: Application to a seismic observation system // Japanese Journal of Applied Physics. 2016. Vol. 55. No. 2. P. 022701.

Статья поступила в редакцию 16.04.2020, принята к публикации 25.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОСТРОМИТИН Алексей Олегович – *инженер АО “Концерн «ЦНИИ “Электроприбор”»”, Санкт-Петербург; аспирант Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197046, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Малая Посадскаяул., 30.
kostromitin.aleksei@yandex.ru

ЛИОКУМОВИЧ Леонид Борисович – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
leonid@spbstu.ru

СКЛЯРОВ Филипп Владимирович – *начальник группы АО “Концерн «ЦНИИ “Электроприбор”»”, Санкт-Петербург; аспирант Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197046, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Малая Посадскаяул., 30.
sklyarov.fil@gmail.com

КОТОВ Олег Иванович – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

kotov@rphf.spbstu.ru

REFERENCES

1. **Measures R.M.,** Structural monitoring with fiber optic technology, Academic Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 2001.

2. **Langhammer J., Eriksrud M., Berg C., Nakstad H.,** Fiber optic permanent seismic system for increased hydrocarbon recovery, In: Proceedings of the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, European Association of Geoscientists & Engineers, Salvador, Brasil, 24–28 Aug. 2009, cp-195-00408.

3. **Plotnikov M.Y., Lavrov V.S., Dmitraschenko P.Y., et al.,** Thin cable fiber-optic hydrophone array for passive acoustic surveillance applications, IEEE Sensors Journal. 19 (9) (2019) 3376–3382.

4. **Kersey A.D., et al.,** Multiplexed interferometric fiber sensors, 7th Optical Fibre Sensors Conference, The Institution of Radio and Electronics Engineers Australia (1990)313–319.

5. **Akkaya O.C., Digonnet M.J.F., Kino G.S., Solgaard O.,** Time-division-multiplexed interferometric sensor arrays, Journal of Lightwave Technology. 31 (16) (2013) 2701–2708.

6. **Liao Y., Austin E., Nash P.J., et al.,** Highly scalable amplified hybrid TDM/DWDM array architecture for interferometric fiber-optic sensor systems, Journal of Lightwave Technology. 31 (6) (2013) 882–888.

7. **Kersey A.D., Dandridge A., Dorsey K.L.,** Transmissive serial interferometric fiber sensor array, Journal of Lightwave Technology. 7 (5) (1989) 846–854.

8. **Brooks J., Moslehi B., Kim B., Shaw H.,** Time-domain addressing of remote fiber-optic interferometric sensor arrays, Journal of Lightwave Technology. 5 (7) (1987) 1014–1023.

9. **Lijuan Gu,Xiangge He, Duo Yi, et al.,** Common-mode noise suppression technique in interferometric fiber-optic sensors, Journal of Lightwave Technology. 37 (21) (2019) 5619–5627.

10. **Yoshida M., Hirayama Y., Takahara A.,** Real-time displacement measurement system using phase-shifted optical pulse interferometry: Application to a seismic observation system, Japanese Journal of Applied Physics. 55 (2) (2016) 022701.

Received 16.04.2020, accepted 25.04.2020.

THE AUTHORS

KOSTROMITIN Aleksey O.

Concern CSRI "Elektropribor"; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

30 Malaya Posadskaya St., St. Petersburg, 197046, Russian Federation

kostromitin.aleksei@yandex.ru

LIOKUMOVICH Leonid B.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

leonid@spbstu.ru

SKLIAROV Philipp V.
Concern CSRI "Elektropribor"; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
30 Malaya Posadskaya St., St. Petersburg, 197046, Russian Federation
sklyarov.fil@gmail.com

KOTOV Oleg I.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
kotov@rphf.spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.13211
УДК 539.126.3

РОЖДЕНИЕ K^*-МЕЗОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР МЕДИ И ЗОЛОТА ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ

В.С. Борисов, Я.А. Бердников, А.Я. Бердников, Д.О. Котов, Ю.М. Митранков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье приведены результаты измерений инвариантных спектров рождения и факторов ядерной модификации K^*(892)-мезонов в столкновениях ядер меди и золота (Cu + Au) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ. Измерения выполнены в пяти классах событий по центральности в диапазоне поперечных импульсов от 2,00 до 5,75 ГэВ/c в эксперименте PHENIX на коллайдере RHIC. Значения факторов ядерной модификации сравнивались с ранее полученными данными на PHENIX в (Cu + Cu)-столкновениях при такой же энергии (200 ГэВ). Установлено, что факторы ядерной модификации K^*-мезонов в столкновениях Cu + Cu и Cu + Au, при одинаковом числе участников N_{part}, имеют одинаковые значения (в пределах неопределенностей).

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, эффект гашения струй, странность, фактор модификации

Ссылка при цитировании: Борисов В.С., Бердников Я.А., Бердников А.Я., Котов Д.О., Митранков Ю.М. Рождение K^*-мезонов в столкновениях ядер меди и золота при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 142–151. DOI: 10.18721/JPM.13211

PRODUCTION OF K^*-MESONS IN THE COPPER-GOLD NUCLEI COLLISIONS AT $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV

V.S. Borisov, Ya.A. Berdnikov, A.Ya. Berdnikov, D.O. Kotov, Iu.M. Mitrankov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This paper presents invariant transverse momentum spectra and nuclear modification factors of K^*(892)-mesons measured in the Cu + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV. The measurements were performed in five centrality bins in the range of transverse momentum from 2.00 to 5.75 GeV/c in the PHENIX experiment at the RHIC. Nuclear modification factors were compared with previously obtained PHENIX data in Cu + Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV. The nuclear modification factors of K^*-mesons in Cu + Cu and Cu + Au collisions at the same values of a number of participants N_{part} were found to have similar values (within uncertainties).

Keywords: gluon plasma, jet quenching heavy ion collision, strangeness, nuclear modification factor

Citation: Borisov V.S., Berdnikov Ya.A., Berdnikov A.Ya., Kotov D.O., Mitrankov Iu.M., Production of K^*-mesons in the copper-gold nuclei collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 142–151. DOI: 10.18721/JPM.13211

Введение

Изучение свойств ядерной материи при экстремальных условиях, в которых возможно состояние деконфайнмента (несвязанное состояние между кварками и глюонами), направлено на решение важной проблемы в области ядерной физики высоких энергий. Предполагается, что состояние деконфайнмента существовало на ранних этапах зарождения Вселенной [1].

Известно, что при высоких плотностях энергии, приблизительно 1 ГэВ/фм^3, квантовая хромодинамика предсказывает фазовый переход от обычной адронной ядерной материи, свойства которой определяются бесцветными адронами, к новому состоянию вещества – кварк-глюонной плазме (КГП), степенями свободы которой являются кварки и глюоны, выходящие за пределы области конфайнмента, имеющей радиус порядка 1 фм [2]. В лабораторных условиях, экстремально высокой плотности энергии можно достичь путем столкновения тяжелых ультрарелятивистских ядер.

Одним из основных признаков образования КГП является эффект гашения струй, который проявляется в сильном подавлении выходов частиц в центральных столкновениях тяжелых ядер ввиду потерь энергии кварков и глюонов в среде [3, 4].

Среди интересных эффектов, наблюдаемых в столкновениях тяжелых ядер, следует выделить увеличение выхода странных адронов. Поскольку рождение кварк-антикварковой пары $s\bar{s}$ происходит главным образом в процессах глюон-глюонного ($gg \to s\bar{s}$) взаимодействия, вероятность процесса в КГП возрастает по следующей причине. Восстановление киральной симметрии в КГП приводит к уменьшению массы странного кварка, что снижает энергетический порог образования странности, и рождение $s\bar{s}$-пары становится выгоднее, чем рождение пар $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$ [5]. Следовательно, измерение выходов векторного K^*(892)-мезона (его масса покоя равна 0,8916 ГэВ/c^2 ≈ 892 МэВ/c^2) с открытой странностью ($d\bar{s}$) является эффективным способом изучения свойств КГП [6].

В настоящей работе представлены экспериментальные данные по измерению выходов K^*-мезонов, их инвариантные спектры по поперечному импульсу p_T и факторы ядерной модификации R_{AB} для K^*-мезонов, измеренные в столкновениях ядер меди и золота (далее такие столкновения обозначаются как Cu + Au) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ в области малых быстрот и в диапазоне поперечного импульса 2,00 – 5,75 ГэВ/c с использованием детектора PHENIX на коллайдере RHIC (The Relativistic Heavy Ion Collider, находится в Брукхейвенской национальной лаборатории (США)) [7–9].

Методика измерений

При анализе выходов K^*-мезонов использовались две методики с целью обеспечения независимых источников систематических ошибок. Экспериментальные данные были получены от разных детекторов, чтобы охватить разные области значений поперечного импульса p_T и достичь тем самым максимально широкого диапазона его значений, возможных в этой системе столкновений. Поскольку в области промежуточных значений импульсов применялись обе методики, имеющие разные источники систематических неопределенностей, тем самым обеспечивалась ценная проверка достоверности полученных результатов.

Выход K^*-мезонов получен с применением следующих детекторных подсистем эксперимента PHENIX: дрейфовая камера, третий слой падовых камер [10] и времяпролетная камера [11].

В дрейфовой и падовой камерах измеряют поперечные импульсы K- и π-мезонов. Во времяпролетной камере идентифицируют K- и π-мезоны, а также протоны. Выходы K^*- и $\bar{K}^*$-мезонов измеряют в адронных каналах распада $K^+ + \pi^-$ и $K^- + \pi^+$. Для этого разнозаряженные частицы, зарегистрированные в одном столкновении, комбинируют в пары. Исследователи учитывают только частицы, поперечный импульс которых превышает 0,3 ГэВ/c. Считается, что заряженная частица является K- либо π-мезоном, и в зависимости от исследуемого канала распада и ее заряда ей приписывается масса заряженного K- либо π-мезона. Для увеличения статистической значимости экспериментальных данных в широкой области поперечных импульсов, спектры инвариантной массы пар ($K\pi$)-мезонов восстанавливают с использованием двух методик, описанных ниже.

Первая методика – ToF-PC3 – предполагает, что поперечный импульс K-мезона был измерен в дрейфовой камере и K-мезон был идентифицирован во времяпролетной камере, а поперечный импульс π-мезона был измерен в дрейфовой камере и в третьем слое падовой камеры. Эта методика позволяет регистрировать и вычислять кинематические характеристики K*-мезонов при малых значениях поперечного импульса p_T (1,9 – 2,9 ГэВ/c).

Вторая методика – PC3-PC3 – предполагает, что поперечные импульсы K- и π-мезонов измерены в дрейфовой камере и в третьем слое падовой камеры. Эта методика позволяет определять выход K*-мезонов при промежуточных и больших значениях p_T (2,6 – 6,5 ГэВ/c). Недостатком второй методики является наличие значительно большего уровня комбинаторного фона, по сравнению с таковым для первой методики, что исключает измерения выхода K*-мезонов при значениях поперечного импульса ниже значения p_T = 2,0 ГэВ/c при (Cu+Au)-взаимодействиях.

На рис. 1 представлены примеры аппроксимации распределений по инвариантной массе пар ($K\pi$)-мезонов для центральных столкновений; результаты получены с использованием обеих методик.

Поскольку невозможно отличить K- и π-мезоны, рожденные в распадах K*-мезона, от других таких же частиц, все треки этих частиц от каждого события, удовлетворяющие требованиям выбора трека, объединяются в пары с одинаковым зарядом и в пары с разноименными зарядами. Для каждого трека компоненты вектора 3-импульса **p** измеряются с помощью дрейфовой камеры:

$$p_x = p\sin\theta_0 \cdot \cos\varphi_0,$$

$$p_y = p\sin\theta_0 \cdot \sin\varphi_0,$$

$$p_z = p\cos\theta_0.$$

Затем вычисляется инвариантная масса и поперечный импульс для пары ($K\pi$)-мезонов на основе кинематики двухчастичного распада:

$$m^2_{K\pi} = \left(E_K + E_\pi\right)^2 - \left(\mathbf{p}_K + \mathbf{p}_\pi\right)^2,$$

$$p^2_{T_{K\pi}} = \left(p_{x_K} + p_{x_\pi}\right)^2 + \left(p_{y_K} + p_{y_\pi}\right)^2,$$

где $E_K = \sqrt{\mathbf{p}_K^2 + m_K^2}$ и m_K = 0,43667 ГэВ; E_π = $= \sqrt{\mathbf{p}_\pi^2 + m_\pi^2}$ и m_π = 0,13957 ГэВ.

Спектр инвариантной массы для пары мезонов с разными знаками содержит как полезный сигнал K*-мезонов, так и собственный комбинаторный фон. Последний включает две составляющие: коррелированный фон и некоррелированный. Для оценки комбинаторного фона применяется метод смешения событий. Цель анализа состоит в том, чтобы извлечь выходы K*-мезонов из выходов инклюзивных пар $(K\pi)^\pm$. Во всех анализах выходы K*-мезонов были получены путем интегрирования распределения по инвариантной массе в интервале ±100 МэВ/c^2 вблизи массы K*-мезона (892 МэВ/c^2) после вычитания комбинаторного фона.

Экспериментальные данные, которые имеют вид двумерных распределений выхода K*-мезонов по инвариантной массе и по поперечному импульсу, разбиваются на интервалы по поперечному импульсу и аппроксимируются функцией Брейта – Вигнера в релятивистском представлении (RBW), свернутой с функцией Гаусса, плюс полином второй степени для учета остаточного фона:

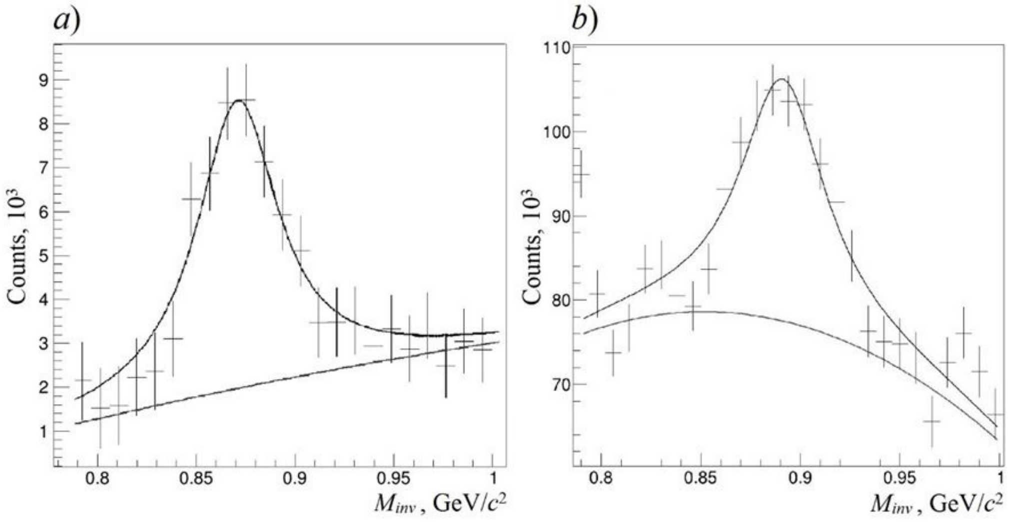


Рис. 1. Распределения числа рождений K- и π-мезонов по инвариантной массе в центральных (Cu + Au)-столкновениях, полученные по двум методикам: ToF-PC3 (*a*) и PC3-PC3 (*b*) в диапазонах значений поперечного импульса p_T 2,3 – 2,6 и 2,9 – 3,4 ГэВ/c соответственно

$$RBW = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{MM_0\Gamma}{(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2\Gamma^2},$$

где M_0, ГэВ/c^2; Г, ГэВ/c^2, – значения массы и ширины распада из PDG для K^*-мезона, соответственно (PDG – Particle Data Group); M, ГэВ/c^2 – экспериментальное значение массы частицы.

Остаточный фон в основном возникает вследствие распада мезонов другого типа.

Инвариантный спектр рождения K^*-мезона в каждом интервале по поперечному импульсу вычисляется как

$$\frac{1}{2\pi p_T} \cdot \frac{d^2N}{dp_T dy} = \frac{1}{2\pi p_T} \cdot \frac{1}{2} \times$$
$$\times \frac{1}{N_{events}\mathrm{Br}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{eff}(p_T)} \cdot \frac{N(\Delta p_T)}{\Delta p_T \Delta y},$$

где p_T, Δp_T, ГэВ/c, – поперечный импульс мезона и его интервал; y, Δy – быстрота и ее интервал; $N(\Delta p_T)$ – число мезонов, зарегистрированных экспериментальной установкой (выходы мезонов); N_{events} – полное число анализируемых событий в выбранном диапазоне центральности; $\varepsilon_{eff}(p_T)$ – эффективность восстановления K^*-мезонов, полученная методом Монте-Карло с помощью моделирования распада, прохождения и восстановления мезонов в экспериментальной установке PHENIX; Br = 0,666 – вероятность распада мезона по исследуемому каналу. Коэффициент 1/2 необходим в формуле для усреднения инвариантных выходов K^*- и $\overline{K}^*$-мезонов.

Факторы ядерной модификации частиц в столкновениях тяжелых ядер используются для изучения коллективных эффектов, влияющих на спектры рождения частиц по поперечному импульсу, и вычисляются в соответствии с формулой:

$$R_{\mathrm{CuAu}} = \frac{d^2N_{\mathrm{CuAu}}(p_T)/dydp_T}{N_{coll}/\sigma_{pp}^{inel} \cdot d^2\sigma_{pp}/dydp_T},$$

где числитель выражения – величина, характеризующая инвариантный спектр рождения мезонов в столкновениях тяжелых ядер меди и золота; $d^2\sigma_{pp} / dydp_T$ – инвариантное дифференциальное сечение рождения этих частиц в столкновениях указанных ядер при той же энергии в системе центра масс; N_{coll} – среднее число бинарных столкновений на событие в (Cu + Au)-столкновениях; σ_{pp}^{inel} – неупругое сечение рассеяния протона на протоне (здесь σ_{pp}^{inel} = 42,2 мб).

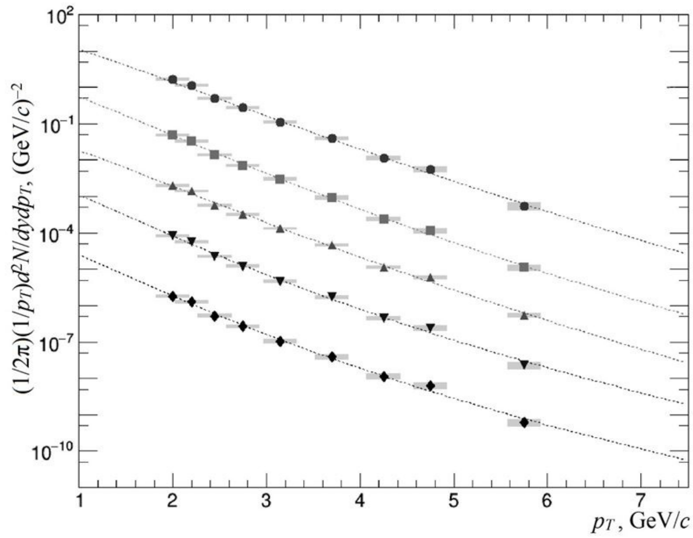


Рис. 2. Инвариантные спектры рождения K*-мезонов в (Cu+Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ для пяти классов событий по центральности, %:
0 – 80 (●); 0 – 20 (■); 20 – 40 (▲); 40 – 60 (▼); 60 – 80 (♦).
Статистические погрешности измерений не превышают размеров маркеров.
Уровень систематических погрешностей показан прямоугольниками

Результаты измерений и их обсуждение

Результаты измерения инвариантных спектров рождения K*-мезонов по поперечному импульсу представлены на рис. 2. Измерения выполнены в пяти классах событий по центральности в диапазоне поперечных импульсов от 2,00 до 5,75 ГэВ/c. Указанные спектры для K*-мезонов были аппроксимированы функцией Леви [12].

На рис. 3 представлены результаты измерений факторов ядерной модификации R_{AB} с систематическими погрешностями, в зависимости от поперечного импульса, полученные для K*-мезонов в (Cu + Au)-взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ и различной центральности столкновений. Представленные результаты были получены с использованием двух методик: ToF-PC3 и PC3-PC3. Установлено, что при одинаковых значениях поперечного импульса они хорошо согласуются друг с другом.

В центральных (Cu+Au)-столкновениях значения факторов ядерной модификации R_{AB} для K*-мезонов в области больших поперечных импульсов принимают значения меньше единицы (для p_T = 5–6 ГэВ/c значения R_{AB} лежат в диапазоне от 0,4 до 0,7). По мере увеличения центральности взаимодействия ядер, подавление выходов K*-мезонов уменьшается и значения R_{AB} приближаются к единице.

На рис. 4 показано сравнение факторов R_{AB} ядерной модификации K*-мезонов, измеренных в столкновениях ядер меди и золота, Cu+Au, с факторами R_{AA} в столкновениях одинаковых ядер – Cu+Cu при одной и той же энергии – 200 ГэВ. Видно, что при сходном числе участников результаты находятся в хорошем согласии (в пределах неопределенностей).

На рис. 5 сравниваются данные по p_T-распределению факторов ядерной модификации K*-, φ-, π^0-, η-, K_S- и ω-мезонов в (Cu+Au)-столкновениях при энергии 200 ГэВ. Видно, что факторы R_{AB} ядерной модификации K*- и φ-мезонов равны единице в центральных столкновениях для промежуточных значений p_T; тогда как факторы R_{AB} мезонов π^0, η, K_S, ω подавляются в центральных столкновениях во всем диапазоне значений p_T. При больших значениях p_T, в наиболее центральных столкновениях, все

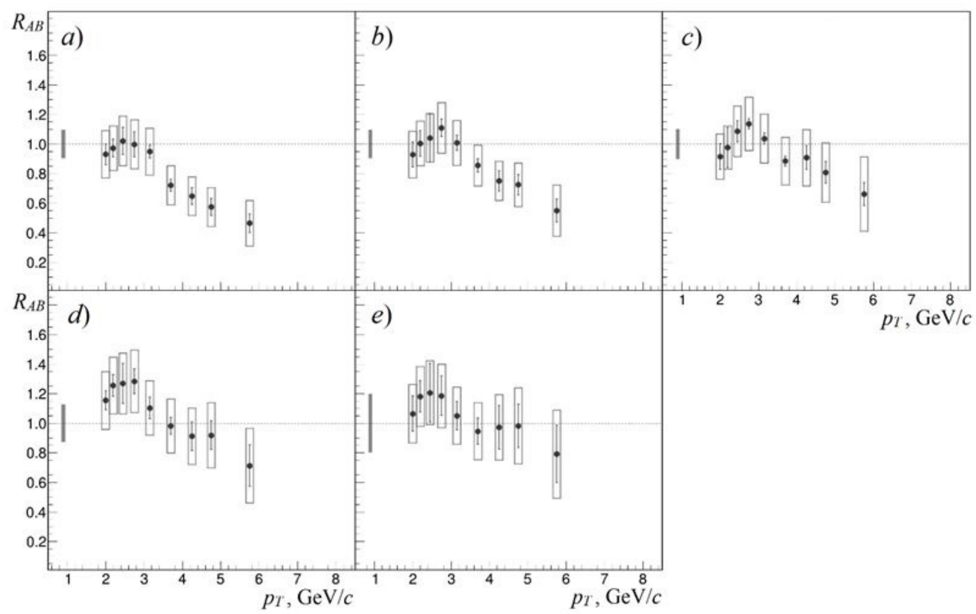


Рис. 3. Распределения факторов ядерной модификации K^*-мезонов по поперечному импульсу в (Cu + Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ для пяти классов событий по центральности, %: 0 – 20 (*a*), 20 – 40 (*b*), 0 – 80 (*c*), 40 – 60 (*d*), 60 – 80 (*e*).
«Усы» и прямоугольники показывают уровни статистических и систематических погрешностей измерений

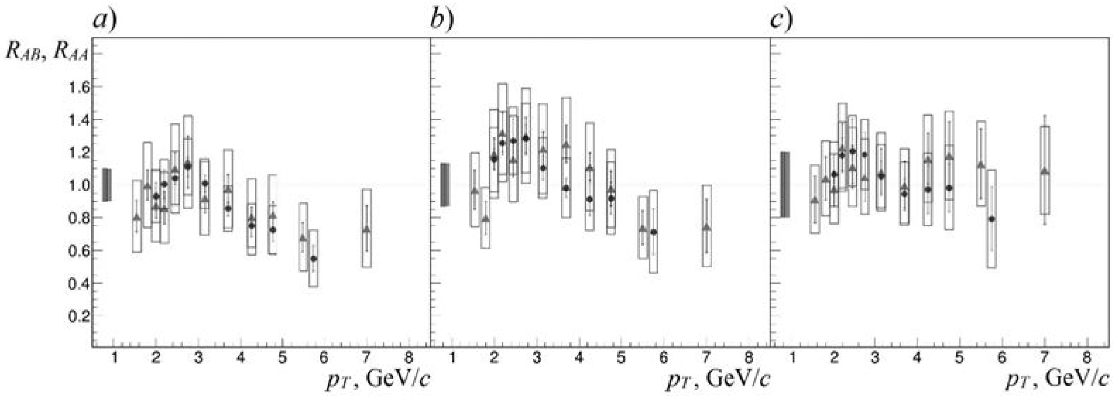


Рис. 4. Сравнение факторов R_{AB} ядерной модификации K^*-мезонов в (Cu+Au)-столкновениях (точки) с факторами R_{AA} в (Cu + Cu)-столкновениях (треугольники) при одинаковой энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ и при сходных числах участников N_{part}: 80,37 (Cu + Au) и 85,90 (Cu + Cu) (*a*); 34,92 и 45,20 (*b*) ; 11,54 и 6,40 (*c*).
«Усы» и прямоугольники показывают уровни статистических и систематических погрешностей измерений

легкие мезоны демонстрируют одинаковый уровень подавления. В периферийных столкновениях факторы ядерной модификации R_{AB} для всех рассмотренных мезонов равны единице (в пределах неопределенностей). Такое же поведение легких мезонов наблюдалось и в (Cu + Cu)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ [12].

Заключение

В данной работе представлены результаты измерения инвариантных спектров рождения и факторов ядерной модификации K^*-мезонов в столкновениях ядер меди и золота (Cu+Au) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ, в области псевдобыстроты $|\eta| < 0{,}35$, в интервале значений поперечного импульса

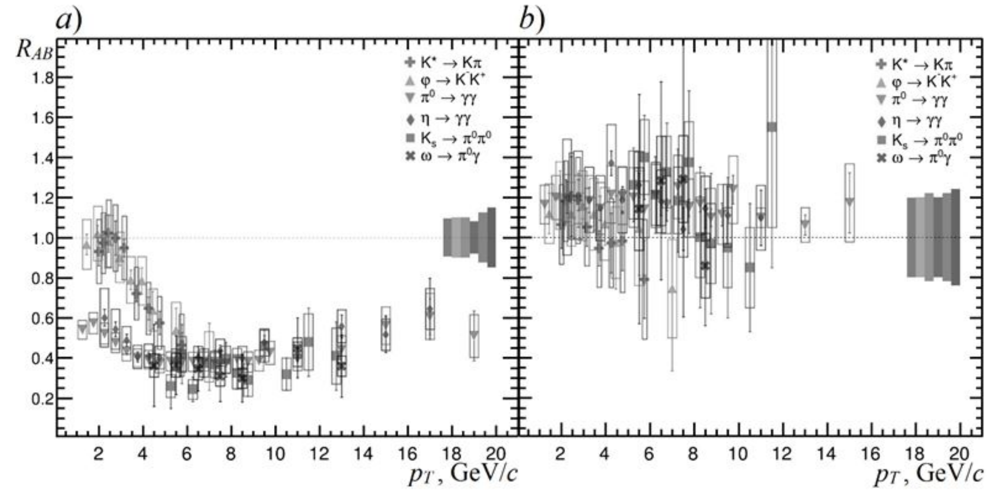


Рис. 5. Эксперимент по столкновению ядер Cu + Au при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ. Сравнение данных по распределению по поперечному импульсу факторов ядерной модификации различных легких мезонов в центральных (*a*) и периферийных (*b*) столкновениях. «Усы» и прямоугольники показывают уровни статистических и систематических погрешностей измерений

$2{,}00 < p_T < 5{,}75$ ГэВ/*c* и для пяти классов событий по центральности. Все данные, на основе которых были произведены измерения, получены в эксперименте PHENIX в 2012 году.

Проведен сравнительный анализ функций ядерной модификации K^*-мезонов во взаимодействиях Cu+Cu и Cu+Au при одинаковой энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ и функций ядерной модификации K^*-, φ-, π^0-, η-, K_S- и ω-мезонов в (Cu+Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ. Установлено, что при почти одинаковом числе участников выходы K^*-мезонов в столкновениях Cu+Au и Cu+Cu при одинаковой энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ имеют одинаковые значения во всем исследованном диапазоне значений поперечных импульсов.

Таким образом, подавление мезонов в случае большого числа участников зависит от размера области перекрытия ядер, но не зависит от формы ядер [13—15].

Выходы K^*- и φ-мезонов в центральных (Cu+Au)-столкновениях менее подавлены в области промежуточных значений p_T, чем мезонов, состоящих только из кварков первого поколения, что указывает на избыточный выход странности. Выходы K^*-мезонов и других легких мезонов подавлены в области больших поперечных импульсов в центральных столкновениях меди и золота, что подтверждает наличие эффекта гашения струй.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1—2. Pp. 184—283.

2. **Accardi A., Gyulassy M.** Cronin effect vs. geometrical shadowing in *d* + Au collisions at RHIC // Phys. Lett. B. 2004. Vol. 586. No. 3—4. Pp. 244—253.

3. **Berdnikov A., Berdnikov Ya., Kotov D., et al.** Phi meson measurements in Cu+Au collisions at 200 GeV and in U+U collisions at 192 GeV // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. Vol.1135. No. 1. P. 012044.

4. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Measurement of K_S^0 and K_*^0 in *p* + *p*, *d* + Au, and Cu + Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV // Physical Review. C. 2014. Vol. 90. No. 5. P. 054905.

5. **Кондратьев В.П., Феофилов Г.А.** Рожде-

ние странных частиц в релятивистских столкновениях тяжелых ионов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2011. Т. 42. Вып. 6. С. 1721–1803.

6. **Ilner A., Cabrera D., Markert C., et al.** *K** vector meson resonance dynamics in heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. 2017. Vol. 95. No. 1–2. P. 014903.

7. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.** Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 1–27.

8. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.** The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // Nucl. Phys. A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 28–101.

9. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.** Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 102–183.

10. **Lokesh K.** *K**0(892) and φ(1020) resonance production at RHIC // EPJ Web of Conferences. 2015. Vol. 97. No. 1–2. P. 00017.

11. **Ghiglieri J.** Energy loss at NLO in a hightemperature quark-gluon plasma // Nuclear Physics. A. 2016. Vol. 956. December. Pp. 801–804.

12. **Adler S.S., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Nuclear modification of electron spectra and implications for heavy quark energy loss in Au+Au collisions at sqrt (sNN) = 200 GeV // Phys.Rev. Lett. 2006. Vol. 96. No. 1–2. P. 032301.

13. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.** Low-mass vector-meson production at forward rapidity in $p+p$ collisions at sqrt(sNN) = 200 GeV // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90. No. 5. P. 052002.

14. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Measurement of neutral mesons in $p+p$ collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV and scaling properties of hadron production // Physical Review. D. 2011. Vol. 83. No. 5. P. 052004.

15. **Mitrankov I.** Scaling properties of high-p_T light hadrons from small to large systems by PHENIX // Proceedings of Science. 2018. Vol. 345. No. 1. P. 0108.

Статья поступила в редакцию 26.03.2020, принята к публикации 08.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БОРИСОВ Владислав Сергеевич – *инженер Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
borisov_vs@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

КОТОВ Дмитрий Олегович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

МИТРАНКОВ Юрий Михайлович – *ассистент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
mitrankovy@gmail.com

REFERENCES

1. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.,** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.

2. **Accardi A., Gyulassy M.** Cronin effect vs. geometrical shadowing in d + Au collisions at RHIC // Phys. Lett. B. 586 (3–4) (2004) 244–253.

3. **Berdnikov A., Berdnikov Ya., Kotov D., et al.,** Phi meson measurements in Cu+Au collisions at 200 GeV and in U+U collisions at 192 GeV // J. Phys.: Conf. Ser. 1135 (1) (2018) 012044.

4. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.,** Measurement of K_S^0 and K^{*0} in p+p, d+Au, and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Physical Review. C. 90 (5) (2014) 054905.

5. **Kondratiev V.P., Feofilov G.A.,** Strange particles production in relativistic heavy-ion collisions, Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. 42 (6) (2011) 1721–1803 (in Russian).

6. **Ilner A., Cabrera D., Markert C., et al.,** K^* vector meson resonance dynamics in heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. 95 (1–2) (2017) 014903.

7. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.,** Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 1–27.

8. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.,** The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // Nucl. Phys. A. 757 (1–2) (2005) 28–101.

9. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.,** Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 102–183.

10. **Lokesh K.,** $K^*0(892)$ and φ(1020) resonance production at RHIC // EPJ Web of Conferences. 97 (1–2) (2015) 00017.

11. **Ghiglieri J.,** Energy loss at NLO in a high-temperature quark-gluon plasma, Nuclear Physics, A. 956 (December) (2017) 801–804.

12. **Adler S.S., Afanasiev S., Aidala C., et al.,** Nuclear modification of electron spectra and implications for heavy quark energy loss in Au+Au collisions at sqrt(sNN) = 200 GeV // Phys. Rev. Lett. 96 (1–2) (2006) 032301.

13. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.,** Low-mass vector-meson production at forward rapidity in p+p collisions at sqrt(sNN) = 200 GeV // Phys. Rev. D. 90 (5) (2014) 052002.

14. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.,** Measurement of neutral mesons in p+p collisions at sqrt(sNN) = 200 GeV and scaling properties of hadron production // Phys. Rev. D. 83 (5) (2011) 052004.

15. **Mitrankov I.,** Scaling properties of high-p_T light hadrons from small to large systems by PHENIX // Proceedings of Science. 345 (1) (2018) 0108.

Received 26.03.2020, accepted 08.04.2020.

THE AUTHORS

BORISOV Vladislav S.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
borisov_vs@spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

BERDNIKOV Alexander Ya.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

KOTOV Dmitry O.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

MITRANKOV Iurii M.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
mitrankovy@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.13212
УДК 539.12

ИЗМЕРЕНИЕ ФАКТОРОВ ЯДЕРНОЙ МОДИФИКАЦИИ φ-МЕЗОНА В СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРОТОННЫХ ПУЧКОВ С ЯДРАМИ АЛЮМИНИЯ ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГэВ

М.М. Митранкова, Я.А. Бердников, А.Я. Бердников,
Ю.М. Митранков, Д.О. Котов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе изучено рождение φ-мезонов в релятивистских столкновениях пучков протонов с ядрами алюминия (p + Al, малая система) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ, проведенных в эксперименте PHENIX на коллайдере RHIC. Измерены инвариантные спектры φ-мезонов по поперечному импульсу и их факторы ядерной модификации для четырех классов событий по центральности, %: 0 – 20, 20 – 40, 40–72, 0 – 72. Проведено сравнение полученных результатов с аналогичными данными по рождению π^0-мезонов. Анализ полученных экспериментальных данных привел к заключению, что во всех доступных диапазонах по центральности и поперечному импульсу факторы ядерной модификации φ-мезонов равны единице в пределах неопределенностей измерения. Полученный результат свидетельствует в пользу того, что в рассматриваемых столкновениях кварк-глюонная плазма не образуется.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, эффект холодной ядерной материи, фактор ядерной модификации

Ссылка при цитировании: Митранкова М.М., Бердников Я.А., Бердников А.Я., Митранков Ю.М., Котов Д.О. Измерение факторов ядерной модификации φ-мезона в столкновениях протонных пучков с ядрами алюминия при энергии 200 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 152–159. DOI: 10.18721/JPM.13212

MEASUREMENT OF φ-MESON'S NUCLEAR MODIFICATIION FACTORS IN THE COLLISIONS OF PROTON BEAMS WITH ALUMINUM NUCLEI AT AN ENERGY OF 200 GeV

M.M. Mitrankova, Ya.A. Berdnikov, A.Ya. Berdnikov,
Iu.M. Mitrankov, D.O. Kotov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The φ-mesons production in the relativistic collisions of proton beams with aluminum nuclei (p + Al, small system) at $\sqrt{s_{NN}}$ energy of 200 GeV has been studied. The PHENIX experiment was carried out at the RHIC. The φ-mesons' invariant transverse momentum spectra and their nuclear modification factors were measured in four centrality bins of the range of transverse momentum (%): 0 – 20, 20 – 40, 40 – 72, 0 – 72. The obtained results were compared with similar data on the π^0-mesons production. The experimental data analysis led to the conclusion that the φ-mesons' nuclear modification factors were equal to one (within the measurement uncertainties) over all available ranges of centrality and transverse momenta. The findings of the work testified that quark-gluon plasma did not produce in the performed collisions.

Keywords: quark-gluon plasma, cold nuclear matter effect,nuclear modification factor, relativistic ion collision

Citation: Mitrankova M.M., Berdnikov Ya.A., Berdnikov A.Ya., Mitrankov Iu.M., Kotov D.O., Measurement of φ-meson's nuclear modificatiion factors in the collisions of proton beams with aluminum nuclei at an energy of 200 GeV, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 152–159. DOI: 10.18721/JPM.13212

Введение

Квантовая хромодинамика предсказывает существование такого состояния вещества как кварк-глюонная плазма (КГП), в котором кварки и глюоны находятся в несвязанном состоянии.

Ультрарелятивистские столкновения тяжелых ионов позволяют изучать поведение ядерной материи при значениях температуры и давления, достаточных для образования КГП [1]. Таким образом, можно контролируемо создавать и изучать свойства КГП и ее эволюцию в адронный газ, что является основным назначением эксперимента PHENIX [2] на коллайдере RHIC (Relativistic HeavyIon Collider, находится в Брукхейвенской национальной лаборатории, штат Нью-Йорк, США) [3].

Одним из способов экспериментального исследования свойств КГП является измерение выходов частиц в конечном состоянии. Среди многочисленных элементарных частиц φ-мезон обладает рядом отличительных свойств, в частности малым сечением взаимодействия с нестранными адронами, и его время жизни (42 фм/с) гораздо больше времени существования КГП [4]. Благодаря этим свойствам, на образование φ-мезона меньше влияют адронные взаимодействия на поздней стадии эволюции системы, образованной в столкновении тяжелых ядер, а также его дочерние частицы не перерассеиваются в адронной фазе.

Таким образом, свойства φ-мезона в первую очередь определяются условиями в ранней партонной фазе, и измерение его выходов можно считать «чистым» способом исследования свойств вещества, образованного в столкновениях релятивистских ядер.

С помощью измерения выхода φ-мезона можно исследовать так называемые эффекты холодной ядерной материи в столкновениях малых систем [5]. Под эффектами холодной ядерной материи подразумевают модификации функций распределения партонов в ядре [6], эффект Кронина [7], который связывают с процессом многократного перерассеяния входящего партона внутри ядра-мишени, и другие эффекты.

Исследование эффектов холодной ядерной материи путем измерения рождения φ-мезонов в малых системах позволяет установить, связаны ли наблюдаемые эффекты в столкновении тяжелых ядер с эффектами холодной или горячей ядерной материи. В частности, результаты подобного исследования помогают объяснить разницу между значениями факторов ядерной модификации π^0-мезонов, φ-мезонов и протонов, полученными в столкновениях ядер золота (Au+Au), меди (Cu+Cu), меди и золота (Cu+Au) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, а также ядер урана (U+U) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 192$ ГэВ [8, 9].

Методика измерения

В настоящей работе используются результаты измерений, выполненных с помощью детектора PHENIX на коллайдере RHIC. Проведенное исследование направлено на изучение рождения φ-мезонов по каналу распада на заряженные каоны по схеме $\varphi \to K^+ K^-$ в столкновениях протонов с ядрами алюминия (p+Al) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Главной задачей анализа является получение инвариантных спектров по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации R_{AB} φ-мезона в столкновениях p + Al.

Каоны, образующиеся при распаде φ-мезона, невозможно отличить от других каонов, поэтому все треки каонов от каждого события объединяются в пары с разноименными зарядами. Для каждого трека компоненты вектора 3-импульса **p** измеряются с помощью дрейфовой камеры. Инвариантная масса и поперечный импульс для пары каонов вычисляются на основе кинематики двухчастичного распада.

Спектр инвариантной массы для пары каонов с разными знаками содержит как полезный сигнал φ-мезонов, так и комбинаторный фон. Комбинаторный фон состоит из двух составляющих: коррелированный фон и некоррелированный. Для оценки последнего применяется метод смешанных событий [12]. После вычитания некоррелированного фона из общего спектра необходимо оценить коррелированный фон путем аппроксимации распределения инвариантной массы сверткой функции Брейта – Вигнера с функцией Гаусса (с дисперсией, равной экспериментальному массовому разрешению детектора) для описания сигнала и с полиномиальной функцией для описания фона.

Экспериментальное массовое разрешение детектора оценивается с использованием моделирования работы спектрометра методом Монте-Карло с нулевой шириной $\varphi \to K^+ K^-$, в котором φ-мезон имеет бесконечное время жизни. Выходы φ-мезонов были получены путем интегрирования распределения по инвариантной массе в интервале ±9 МэВ/c^2 вблизи массы φ-мезона (1,019 ГэВ/c^2 [13]) после вычитания комбинаторного фона.

Инвариантный спектр рождения φ-мезона в каждом интервале по поперечному импульсу вычисляется следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi p_T}\frac{d^2N}{dp_T dy} = \frac{1}{2\pi p_T}\frac{1}{N_{event}\mathrm{Br}}\frac{1}{\varepsilon_{eff}(p_T)}\frac{N(\Delta p_T)}{\Delta p_T \Delta y}, \quad (1)$$

где p_T, Δp_T, ГэВ/c, – поперечный импульс мезона и интервал по нему, соответственно; y, Δy – быстрота и интервал по ней; $N(\Delta p_T)$ – число мезонов, зарегистрированных экспериментальной установкой (выход мезонов); N_{event} – полное число анализированных событий в выбранном диапазоне центральности; $\varepsilon_{eff}(p_T)$ – эффективность восстановления φ-мезонов, полученная с помощью моделирования распада, прохождения и восстановления мезонов в экспериментальной установке PHENIX методом Монте-Карло; Br – вероятность распада мезона по исследуемому каналу.

Подавление выходов частиц в столкновениях релятивистских ядер изучается путем определения факторов ядерной модификации R_{AB}, вычисляемых как отношение инвариантных выходов частиц, измеренных в релятивистских столкновениях тяжелых ионов, к выходам этих же частиц, измеренных в элементарных столкновениях протонов ($p + p$); величина выхода в (A+B)-столкновении нормируется на число неупругих нуклон-нуклонных столкновений.

Факторы ядерной модификации частиц в столкновениях различных ядер используются для изучения коллективных эффектов, влияющих на спектры рождения частиц по поперечному импульсу, и вычисляются в соответствии с формулой

$$R_{AB}(p_T) = \frac{f_{bias}\sigma_{pp}^{inel}}{N_{coll}}\frac{dN_{AB}(p_T)}{d\sigma_{pp}(p_T)}, \quad (2)$$

где

$$dN_{AB}(p_T) = \frac{1}{2\pi p_T}\frac{d^2N_{AB}(p_T)}{dp_T dy}$$

– инвариантный спектр рождения мезонов в столкновениях тяжелых ядер;

$$d\sigma_{pp}(p_T) = \frac{1}{2\pi p_T}\frac{d^2\sigma_{pp}}{dp_T dy}$$

– инвариантное дифференциальное сечение рождения этих частиц в ($p + p$)-столкновениях при той же энергии в системе центра масс; f_{bias} – Байес-фактор, корректирующий неточность определения центральности столкновения; σ_{pp}^{inel} = 42,2 мб – полное сечение неупругого протон-протонного взаимодействия; N_{coll} – число бинарных столкновений в выбранном диапазоне по центральности.

Если $R_{AB}(p_T) \approx 1$, то вероятно, что коллективные эффекты во взаимодействиях тяжелых ядер отсутствуют, а взаимодействия могут быть представлены в виде суперпозиции взаимодействий отдельных нуклонов. Если R_{AB} $(p_T) < 1$ (> 1), то выходы частиц подавлены (находятся в избытке), что может свидетельствовать о наличии коллективных эффектов во взаимодействиях тяжелых ядер.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Инвариантные спектры рождения φ-мезонов по поперечному импульсу в столкновениях p + Al при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ представлены на рис. 1. Данные спектры были измерены для четырех классов событий по центральности, %: 0 – 72, 0 – 20, 20 – 40 и 40 – 72, в диапазоне значений поперечного импульса 1,0 – 4,0 ГэВ/c. Аппроксимация выполнялась с помощью функции Леви:

$$\frac{1}{2\pi p_T}\frac{d^2N}{dp_T dy}=\frac{m}{2\pi}\times$$
$$\times\frac{(n-1)(n-2)}{\left(k+m_\varphi(n-1)\right)\left(k+m_\varphi\right)}\left(\frac{k+\sqrt{p_T^2+m_\varphi^2}}{k+m_\varphi}\right), \quad (3)$$

где m_φ, ГэВ/c^2, – инвариантная масса φ-мезона; k, m, n – свободные параметры.

Полученные спектры по поперечному импульсу использовались для расчетов факторов ядерной модификации φ-мезонов в (p + Al)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ.

На рис. 2 представлены распределения факторов ядерной модификации R_{AB} по поперечному импульсу, измеренные для φ-мезонов в (p + Al)-взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ, при различных интервалах центральности столкновений. Видно, что для всех интервалов центральности, на всем диапазоне поперечного импульса значения факторов ядерной модификации R_{AB} для φ-мезонов равны единице в пределах неопределенностей измерений.

На рис. 3 приведены сравнения факторов ядерной модификации φ- и π^0-мезонов в (p + Al)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ. Видно, что для всех интервалов центральности и на всем диапазоне поперечного импульса значения факторов ядерной модификации φ- и π^0-мезонов принимают одинаковые значения в пределах неопределенностей измерений. Это может свидетельствовать о том, что эффекты холодной ядерной материи не оказывают какого-либо влияния на различие значений факторов ядерной модификации φ- и π^0-мезонов в столкновениях тяжелых ядер золота, меди и урана (Au+Au, Cu+Cu, Cu+Au и U+U) [8, 9].

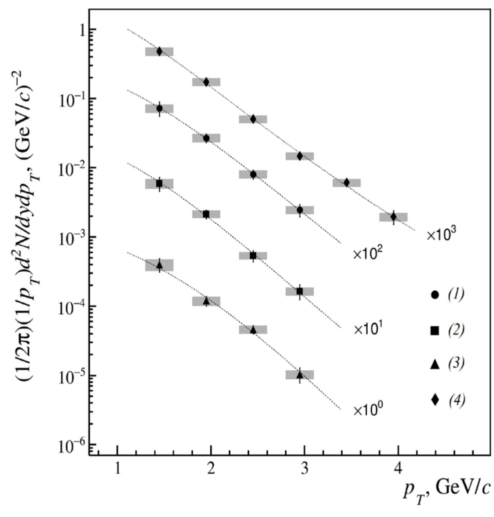


Рис. 1. Инвариантные спектры рождения φ-мезонов по поперечному импульсу в (p + Al)-столкновениях при $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ для четырех классов событий по центральности, %: 0 – 20 (*1*), 20 – 40 (*2*), 40–72 (*3*), 0 – 72 (*4*).
Аппроксимация кривых функцией Леви представлена точечными линиями.
Здесь и далее «усы» и «прямоугольники» обозначают статистическую и систематическую неопределенности измерений

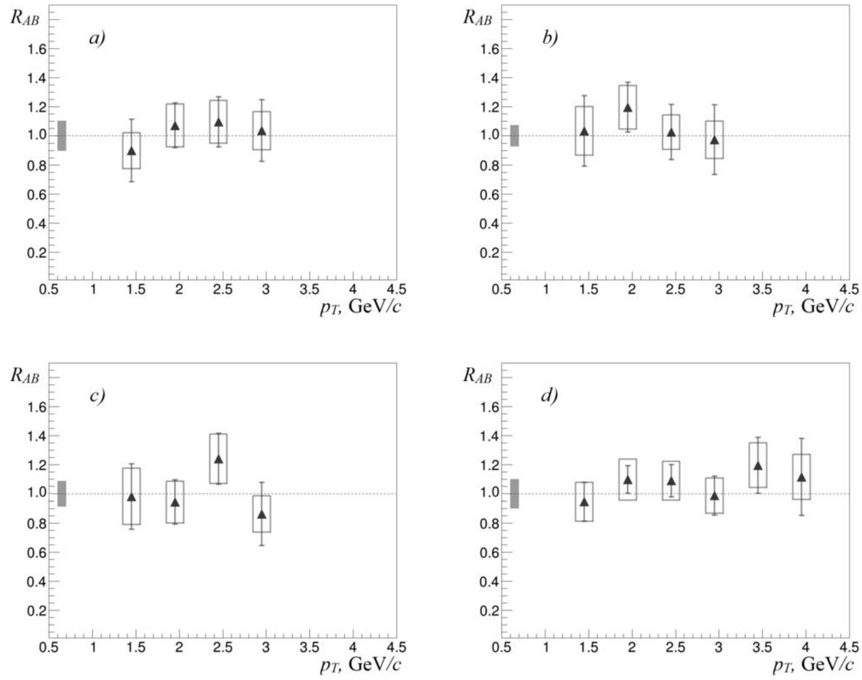


Рис. 2. Распределения факторов ядерной модификации φ-мезонов по поперечному импульсу в (p + Al)-столкновениях при $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ для четырех классов событий по центральности, %: 0 – 20 (a), 20 – 40 (b), 40–72 (c), 0 – 72 (d); $|y| < 0{,}35$

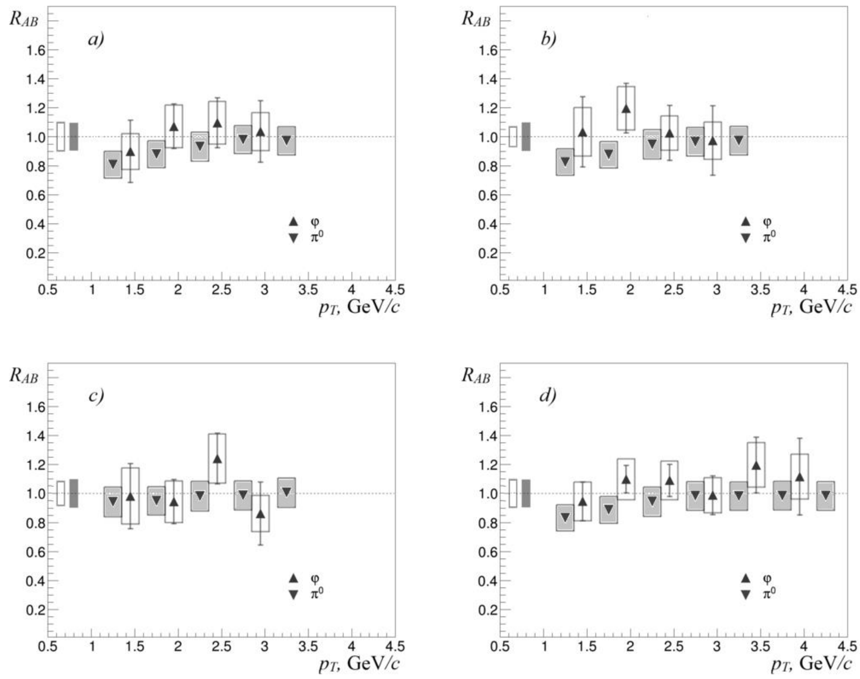


Рис. 3. Распределения факторов ядерной модификации φ- и π^0-мезонов по поперечному импульсу в (p + Al)-столкновениях при $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ для четырех классов событий по центральности, %: 0 – 20 (a), 20 – 40 (b), 40–72 (c), 0 – 72 (d); $|y| < 0{,}35$

Заключение

В настоящей работе было проведено измерение инвариантных спектров по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации φ-мезонов в (p + Al)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ.

Во всех доступных диапазонах по центральности и поперечному импульсу факторы ядерной модификации φ-мезонов равны единице в пределах неопределенностей измерения. Полученный результат свидетельствует в пользу того, что в рассматриваемых столкновениях кварк-глюонная плазма не образуется.

Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы 0784-2020-0024)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.

2. **Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al.** (PHENIX Collaboration). PHENIX detector overview // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 469–479.

3. **Harrison M., Ludlam T., Ozaki S.** RHIC project overview // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 235–244.

4. **Koch P., Müller B., Rafelski J.** Strangeness in relativistic heavy ion collisions // Physics Reports. 1986. Vol. 142. No. 4. Pp. 167–262.

5. **Armesto N.** Small collision systems: theory overview on cold nuclear matter effects // EPJ Web of Conferences. 2018. Vol. 171. P. 11001.

6. **Arneodo M.** Nuclear effects in structure functions // Physics Reports. 1994. Vol. 240. No. 5–6. Pp. 301–393.

7. **Kopeliovich B.Z., Nemchik J., Schäfer A., Tarasov A.V.** Cronin effect in hadron production of nuclei // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88. No. 23. P. 232303.

8. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Nuclear modification factors of φ mesons in d+Au, Cu+Cu and Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV // Physical Review. C. 2011. Vol. 83. No. 2. P. 024909.

9. **Berdnikov A., Berdnikov Ya., Kotov D., et al.** Phi meson measurements in Cu+Au collisions at 200 GeV and in U+U collisions at 192 GeV // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. Vol. 1135. No. 1. P. 012044.

10. **Adcox K., Ajitanand N.N., Alexander J., et al.** (PHENIX Collaboration). PHENIX central arm tracking detectors // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 489–507.

11. **Ikematsu K., Iwata Y., Kaimi K., et al.** A start-timing detector for the collider experiment PHENIX at RHIC-BNL // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 1998. Vol. 411. No. 2–3. Pp. 238–248.

12. **L'Hôte D.** About resonance signal extraction from multiparticle data: combinatorics and event mixing methods // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 1994. Vol. 337. No. 2–3. Pp. 544–556.

13. **Beringer J., et al.** (Particle Data Group). Review of particle physics // Physical Review. D. 2012. Vol. 86. No. 1. P. 010001.

Статья поступила в редакцию 31.03.2020, принята к публикации 20.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

МИТРАНКОВА Мария Максимовна – *аспирантка Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
mashalario@gmail.com

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

МИТРАНКОВ Юрий Михайлович – *ассистент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
mitrankovy@gmail.com

КОТОВ Дмитрий Олегович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

REFERENCES

1. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.,** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.

2. **Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al.** (PHENIX Collaboration), PHENIX detector overview, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2–3) (2003) 469–479.

3. **Harrison M., Ludlam T., Ozaki S.,** RHIC project overview, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A., 499 (2–3) (2003) 235–244.

4. **Koch P., Müller B., Rafelski J.,** Strangeness in relativistic heavy ion collisions, Physics Reports. 142 (4) (1986) 167–262.

5. **Armesto N.,** Small collision systems: theory overview on cold nuclear matter effects, EPJ Web of Conferences. 171 (2018) 11001.

6. **Arneodo M.,** Nuclear effects in structure functions, Physics Reports. 240 (5–6) (1994) 301–393.

7. **Kopeliovich B.Z., Nemchik J., Schäfer A., Tarasov A.V.,** Cronin effect in hadron production of nuclei, Physical Review Letters. 88 (23) (2002) 232303.

8. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Nuclear modification factors of φ mesons in d + Au,

Cu + Cu and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, Physical Review. C. 83 (2) (2011) 024909.

9. **Berdnikov A., Berdnikov Ya., Kotov D., et al.,** Phi meson measurements in Cu+Au collisions at 200 GeV and in U+U collisions at 192 GeV, J. Phys.: Conf. Ser. 1135 (1) (2018) 012044.

10. **Adcox K., Ajitanand N.N., Alexander J., et al.** (PHENIX Collaboration), PHENIX central arm tracking detectors, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A. 499 (2–3) (2003) 489–507.

11. **Ikematsu K., Iwata Y., Kaimi K., et al.,** A start-timing detector for the collider experiment PHENIX at RHIC-BNL, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 411 (2–3) (1998) 238–248.

12. **L'Hôte D.,** About resonance signal extraction from multiparticle data: combinatorics and event mixing methods, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section, A. 337 (2–3) (1994) 544–556.

13. **Beringer J., et al.** (Particle Data Group), Review of particle physics, Physical Review, D. 86 (1) (2012) 010001.

Received 31.03.2020, accepted 20.04.2020.

THE AUTHORS

MITRANKOVA Mariia M.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
mashalario@gmail.com

BERDNIKOV Yaroslav A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

BERDNIKOV Alexander Ya.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

MITRANKOV Iurii M.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
mitrankovy@gmail.com

KOTOV Dmitry O.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.13213
УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЮНГА СРЕДЫ С МИКРОСТРУКТУРОЙ, ХАРАКТЕРНОЙ ДЛЯ ВОДОРОДНОЙ ДЕГРАДАЦИИ

К.П. Фролова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Работа посвящена определению эффективных упругих свойств металлов с микроструктурой, характерной для водородной деградации. С целью определения эффективных модулей Юнга решается задача гомогенизации по схеме Максвелла в терминах тензоров вклада. Микротрещины, возникающие по границам зерен, моделируются сплюснутыми сфероидами, поры – сферами. Рассматривается три варианта ориентации осей симметрии сфероидов в материале: произвольная, преимущественная ориентация с параметром рассеяния, произвольная ориентация в одной плоскости. Исследуются зависимости эффективных модулей Юнга от пористости материала и от соотношения длин полуосей сфероидов.

Ключевые слова: эффективный модуль Юнга, схема гомогенизации Максвелла, водородная деградация, сфероидальная неоднородность

Ссылка при цитировании: Фролова К.П. Определение эффективного модуля Юнга среды с микроструктурой, характерной для водородной деградации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 160–174. DOI: 10.18721/JPM.13213

DETERMINATION OF THE EFFECTIVE YOUNG'S MODULUS OF MEDIUM WITH MICROSTRUCTURE TYPICAL FOR HYDROGEN DEGRADATION

K.P. Frolova

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russian Federation;
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The paper aims at calculation of the effective elastic properties of metals with a microstructure typical for hydrogen-enhanced degradation. For the purpose of this study, we use the Maxwell homogenization scheme and explicit expression for compliance contribution tensor to determine the overall Young's moduli. The model introduces oblate spheroids to describe intergranular microcracks and spheres to describe pores. Within the frame of the paper, we consider random orientations of the microcracks, certain preferential orientation accompanied by random scatter with the scattering parameter and random orientations of the spheroids' axes in the same plane. The dependences of the effective Young's moduli on the porosity and aspect ratio of the spheroid have been studied.

Keywords: effective Young's modulus, Maxwell homogenization scheme, hydrogen degradation, spheroidal inhomogeneity

Citation: Frolova K.P., Determination of the effective Young's modulus of medium with microstructure typical for hydrogen degradation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 160–174. DOI: 10.18721/JPM.13213

Введение

Растворенный в металлах водород может приводить к деградации механических свойств и преждевременному разрушению металлических изделий. Влияние водорода на свойства и характер разрушения материала во многом зависит как от внешних факторов, так и от особенностей внутренней структуры и характеристик материала, а потому явление водородной деградации, под которым понимается вся совокупность отрицательного влияния водорода, остается актуальной проблемой материаловедения и требует тщательного и разностороннего изучения [1, 2].

Множество работ посвящено исследованию влияния водорода на изменение микроструктуры материала [3 – 9]. Считается, что водород диффундирует сквозь кристаллическую решетку металла и взаимодействует с дефектами структуры, такими как дислокации, поры, вакансии и т. п., в результате чего инициируется развитие микротрещин. Дефекты образуются в процессе изготовления деталей и, как правило, располагаются по границам зерен или по границам включений в сплавах (дефекты внутри зерен также имеют место, но в меньшем количестве). В конечном итоге, при отсутствии больших внутренних и внешних напряжений, под действием водорода образуются микротрещины, развивающиеся по границам зерен [3 – 5, 9], или блистеры, приводящие к вспучиванию поверхности [7, 9]. При этом микротрещины могут наблюдаться также в местах тройного стыка зерен [4, 5, 8, 9]. Зачастую можно видеть, что микротрещины имеют преимущественное направление развития – параллельно направлению прокатки [3, 7].

В ряде работ [10 – 12] исследовалась диффузия водорода по границам зерен. Определялся эффективный коэффициент диффузии в композитном материале, одна фаза которого представляла собой границы зерен с высоким коэффициентом диффузии, а другая – сами зерна с низким коэффициентом диффузии. При этом изменение микроструктуры под действием водорода не моделировалось. Связная задача переноса водорода и изменения дефектности материала решалась, например, в работе [13], с использованием феноменологических подходов. Влияние водорода на материал учитывалось в рамках теории накопления повреждений. Ряд работ посвящен исследованию деградации упругих свойств материала под влиянием водорода [9, 14, 15]. Водородная деградация низкоуглеродистых сталей изучалась в работе [9] на различных масштабных уровнях. Было обнаружено, что длительное насыщение водородом приводит к снижению объемного модуля упругости. Анализ микроструктуры показал, что причиной подобного изменения может быть деформация зерен, образование микротрещин и блистеров. В работе [14] показано, что длительное наводораживание может приводить к снижению до 15% модуля Юнга сплава на основе гамма-алюминида титана. В работе [15] проводились эксперименты с тремя различными типами высокопрочных сталей. Насыщение сталей водородом во всех случаях приводило к деградации механических свойств и изменению микроструктуры.

Обобщая вышеизложенные сведения, отметим, что аналитические модели водородной деградации, как правило, направлены на учет диффузии водорода, являющейся, как считается, основным процессом, приводящим к изменению микроструктуры и деградации механических свойств. При этом меньший акцент делается на описании деградации упругих свойств в результате самого изменения микроструктуры.

Цель данной работы – определить эффективные упругие модули материала, микроструктура которого предполагается уже сформированной в результате водородной деградации.

В связи с этим решается задача гомогенизации, позволяющая оценить вклад неоднородностей в конкретное свойство. Исследуется влияние на эффективные модули Юнга материала как возможной формы и ориентации в нем микротрещин, так и его пористости.

Микроструктура материала

В данной работе исследуется влияние микротрещин, близких по форме к монетообразным, а также пор на эффективные свойства материала, в предположении, что первые учитывают растрескивание между двумя соседними зернами, а вторые – влияние тех пор, которые не слились в микротрещины, и пустот в местах тройного стыка зерен. В статье [16] отмечается, что умеренная неровность границы плоской трещины или отклонение от округлой формы не оказывает существенного влияния на упругие свойства материала, а потому подобная неоднородность может моделироваться как эллиптическая. В рамках настоящей работы микротрещины моделировались сплюснутыми сфероидами, а поры – сферами. При этом были рассмотрены три варианта ориентации неоднородностей в материале.

В первом случае считалось, что микротрещины имеют случайное (изотропное) распределение в объеме. Такая картина характерна для металлических изделий, слабо деформированных в процессе производства.

Во втором случае предполагалось, что микротрещины имеют преимущественную ориентацию (например, при прокатке и слоистой структуре материала). Принималось во внимание, что при этом микротрещины могут отклоняться от преимущественного направления.

В третьем случае для полноты картины был рассмотрен вариант, когда оси симметрии сфероидальных микротрещин имеют произвольную ориентацию в некоторой плоскости. Подобная ситуация наблюдается, например, при сжатии материала и отсутствии развития трещин в плоскости нагружения.

Тензор вклада сфероидальной микротрещины в податливость

Для описания вклада отдельной неоднородности в конкретное свойство, в рамках метода гомогенизации используются тензоры вклада [17].

Рассмотрим однородный упругий материал (матрицу) с тензором податливости $\mathbf{S}^0$. Выделим из него представительный объем V, содержащий изолированную неоднородность объемом V_1 с тензором податливости $\mathbf{S}^1$. Объем V, с одной стороны, должен быть достаточно большим, чтобы отображать характерную микроструктуру, а с другой – достаточно малым по сравнению с объемом материала, чтобы можно было пренебречь изменениями полей на макроуровне. Вопрос корректного выбора представительного объема в микромеханике обсуждается, например, в монографии [17]. Для оценки эффективных упругих свойств материала необходимо определить тензор вклада неоднородности в податливость – тензор четвертого ранга $\mathbf{H}$, описывающий дополнительную деформацию $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, возникающую в объеме V ввиду присутствия неоднородности:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V_1}{V}\mathbf{H}:\boldsymbol{\sigma}_0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0$ – определяемое граничными условиями поле напряжений, которое было бы в представительном объеме в отсутствие неоднородности.

Тензор вклада эллипсоидальной неоднородности в податливость может быть выражен через тензоры податливости матрицы и неоднородности, характеризующие свойства материала, и через второй тензор Хилла $\mathbf{Q}$, отражающий влияние формы неоднородности:

$$\mathbf{H} = \left[\left(\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0\right)^{-1} + \mathbf{Q}\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Тензор четвертого ранга $\mathbf{Q}$ связан с первым тензором Хилла $\mathbf{P}$ соотношением

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^0 - \mathbf{C}^0 : \mathbf{P} : \mathbf{C}^0,$$

где $\mathbf{C}^0$ – тензор жесткости матрицы.

В свою очередь, тензор четвертого ранга $\mathbf{P}$ выражается через производные функции Грина для перемещений $\mathbf{G}$ как

$$\mathbf{P} = \left(\nabla\int_{V_1}\mathbf{G}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\nabla dV'\right)^S_{(1,2)(3,4)}, \qquad (3)$$

где $(\ )^S_{(1,2)(3,4)}$ означает симметрию по перестановке индексов в первой и второй паре.

Поры и микротрещины характеризуются нулевыми упругими модулями. Тогда $\mathbf{S}^1 \to \infty$, а выражение (2) сводится к $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^{-1}$. Для сфероидальной микротрещины, находящейся в изотропной матрице, тензоры **H** и **Q** являются трансверсально-изотропными (ось симметрии сонаправлена с осью симметрии неоднородности) и могут быть представлены как линейные комбинации элементов тензорного базиса $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, ..., \mathbf{T}_6$ [18]:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{6} h_k \mathbf{T}_k, \ \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{6} q_k \mathbf{T}_k. \tag{4}$$

Элементы базиса имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{T}_1 = \boldsymbol{\theta\theta},\ \mathbf{T}_2 = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\theta\theta})^T_{(1,4)} + (\boldsymbol{\theta\theta})^T_{(2,4)} - \boldsymbol{\theta\theta} \right), \\ \mathbf{T}_3 = \boldsymbol{\theta}\mathbf{nn},\ \mathbf{T}_4 = \mathbf{nn}\boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{T}_5 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}\mathbf{n} + (\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}\mathbf{n})^T_{(1,2)(3,4)} + (\boldsymbol{\theta}\mathbf{nn})^T_{(1,4)} + (\boldsymbol{\theta}\mathbf{nn})^T_{(2,3)} \right), \\ \mathbf{T}_6 = \mathbf{nnnn}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ (**I** – единичный тензор второго ранга) – проектор на плоскость, ортогональную орту оси симметрии **n**.

Введенный базис позволяет представить трансверсально-изотропный тензор $\mathbf{B} = \sum b_i \mathbf{T}_i$ (суммирование по повторяющемуся индексу от 1 до 6) и обратный к нему в одном базисе [17]:

$$\begin{gathered} \mathbf{B}^{-1} = \frac{b_6}{2\Delta}\mathbf{T}_1 + \frac{1}{b_2}\mathbf{T}_2 - \frac{b_3}{\Delta}\mathbf{T}_3 - \\ - \frac{b_4}{\Delta}\mathbf{T}_4 + \frac{4}{b_5}\mathbf{T}_5 + \frac{2b_1}{\Delta}\mathbf{T}_6, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\Delta = 2(b_1 b_6 - b_3 b_4)$.

Таким образом, определение тензоров **Q** и **H** для поры или микротрещины сводится к определению компонент тензора **Q**, которые в случае сфероидального включения вычисляются следующим образом [19]:

$$\begin{gathered} q_1 = \mu^0 \left[4\kappa - 1 - 2(3\kappa - 1) f_0 - 2\kappa f_1 \right], \\ q_2 = 2\mu^0 \left[1 - (2-\kappa) f_0 - \kappa f_1 \right], \\ q_3 = q_4 = 2\mu^0 \left[(2\kappa - 1) f_0 + 2\kappa f_1 \right], \\ q_5 = 4\mu^0 \left[f_0 + 4\kappa f_1 \right], \\ q_6 = 8\mu^0 \kappa \left[f_0 - f_1 \right],\ \kappa = \left(1 - \nu^0\right) / 2, \end{gathered} \tag{7}$$

где μ^0, ν^0 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона матрицы, соответственно.

Параметры f_0 и f_1 зависят от соотношения длин полуосей сфероида $\gamma = a_3/a$ (a_3 – полуось вращения) следующим образом:

$$f_0 = \frac{1-g}{2\left(1-\gamma^{-2}\right)},$$

$$f_1 = \frac{1}{4\left(1-\gamma^{-2}\right)^2}\left[\left(2+\gamma^{-2}\right) g - 3\gamma^{-2} \right],$$

где

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} \arctan \dfrac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}, & \gamma \le 1; \\ \dfrac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} \ln\left(\dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}} \right), & \gamma \ge 1. \end{cases}$$

Для сферической неоднородности $\gamma = 1$, $g = 1$, $f_0 = 1/3$, $f_1 = 1/15$. Тензор вклада сферической поры в податливость $\mathbf{H}_p$ является изотропным и может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{H}_p = \frac{15(1-\nu)}{2\mu} \times \\ \times \left[\frac{1}{10(1+\nu)} \frac{1}{3}\mathbf{II} + \frac{1}{7-5\nu}\left(\mathbf{J} - \frac{1}{3}\mathbf{II} \right) \right], \end{gathered} \tag{8}$$

где **I** – единичный тензор второго ранга,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\left((\mathbf{II})^T_{(1,4)} + (\mathbf{II})^T_{(2,4)} \right)$$

– единичный тензор четвертого ранга.

Тензоры **II** и **J** можно представить в трансверсально-изотропном базисе следующим образом [17]:

$$\begin{gathered} \mathbf{II} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 + \mathbf{T}_6, \\ \mathbf{J} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + 2\mathbf{T}_5 + \mathbf{T}_6. \end{gathered} \tag{9}$$

Эффективные свойства металлов со сфероидальными микротрещинами и порами

Эффективные свойства гетерогенных материалов могут определяться с помощью различных методов, исторический обзор которых можно найти, например, в книге [20], а анализ современного состояния проблемы – в монографии [17]. Все аналитические методы представляют собой приближенное решение, тогда как точное решение можно получить только численно для конкретных материалов с известной микроструктурой. К наиболее известным аналитическим методам относятся следующие:

приближение без учета взаимодействия между неоднородностями,

метод эффективной среды,

дифференциальная схема,

метод эффективного поля (к которому можно отнести схемы Мори – Танака и Канауна – Левина),

схема Максвелла.

Перечисленные методы различаются способом учета взаимовлияния множественных неоднородностей и имеют границы применимости, определяемые симметрией материала, формой и ориентацией включений. Схема Максвелла представляется оптимальной при описании вклада неоднородностей, различных по форме и ориентации [21].

Найдем эффективный тензор податливости по схеме Максвелла в терминах тензоров вклада [21]:

$$\mathbf{S}^{eff} = \mathbf{S}^0 + \left\{ \left[\frac{1}{V_\Omega} \sum_i V_i \mathbf{H}_i \right]^{-1} - \mathbf{Q}_\Omega \right\}^{-1}, \quad (10)$$

где $\mathbf{Q}_\Omega$ – второй тензор Хилла, определенный для гомогенизированной области Ω, содержащей изолированные неоднородности и обладающей искомыми эффективными свойствами.

В отсутствие $\mathbf{Q}_\Omega$ эффективный тензор податливости совпадает со значением, определенным без учета взаимодействия неоднородностей.

Определим суммарный вклад изолированных неоднородностей в податливость. Если неоднородности имеют одинаковую форму и размер, а также ориентированы различным образом, то их суммарный вклад можно определить как произведение осредненной величины вклада на объемную долю неоднородностей [17]. Для сферических включений осредненное значение тензора вклада совпадает с тензором вклада отдельной сферической поры $\mathbf{H}_p$ в силу симметрии. В случае присутствия в материале сфероидальных микротрещин и сферических пор их суммарный вклад будет определяться как

$$\frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{H}_i = \varphi_{mc} \left\langle \mathbf{H}_{mc} \right\rangle + \varphi_p \mathbf{H}_p, \quad (11)$$

где φ_{mc}, φ_p – объемные доли сплюснутых сфероидов и сфер соответственно, $\left\langle \mathbf{H}_{mc} \right\rangle$ – осредненное значение суммарного тензора вклада микротрещин в податливость.

Для определения $\left\langle \mathbf{H}_{mc} \right\rangle$ достаточно осреднить элементы тензорного базиса, т. е.

$$\left\langle \mathbf{H}_{mc} \right\rangle = \sum_{k=1}^{6} h_{mc(k)} \left\langle \mathbf{T}_k \right\rangle.$$

При наличии преимущественного направления **m**, оси симметрии сфероидальных микротрещин **n** имеют тенденцию совпадать с **m** с некоторым отклонением, задаваемым параметром рассеяния λ.

Введем функцию плотности распределения ориентации осей симметрии сфероидов по полусфере ($0 \le \theta \le \pi/2$) согласно [22]:

$$\Psi_\lambda(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\lambda^2 + 1 \right) e^{-\lambda\theta} + \lambda e^{-\lambda\pi/2} \right]. \quad (12)$$

При $\lambda = 0$ микротрещины имеют произвольную ориентацию в представительном объеме и материал ведет себя изотропно, при $\lambda \to \infty$ оси симметрии микротрещин направлены строго вдоль преимущественного направления и материал является трансверсально-изотропным с осью симметрии, совпадающей с **m**. Для осреднения элементов тензорного базиса проинтегрируем их по поверхности полусферы единичного радиуса $\tilde{\Omega}_{1/2}$:

$$\left\langle \mathbf{T}_i \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\tilde{\Omega}_{1/2}} \mathbf{T}_i d\tilde{\Omega}_{1/2}. \qquad (13)$$

При произвольной ориентации осей симметрии сфероидов **n** в некоторой плоскости, ортогональной **m**, материал является трансверсально-изотропным, а его ось симметрии сонаправлена с **m**. Для осреднения элементов тензорного базиса проинтегрируем их по единичной окружности l_1, лежащей в ортогональной **m** плоскости:

$$\left\langle \mathbf{T}_i \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_1} \mathbf{T}_i dl_1. \qquad (14)$$

Осредненные значения элементов трансверсально-изотропного базиса представлены в Приложении.

Вопрос выбора формы гомогенизированной области Ω, используемой в схеме Максвелла для учета взаимодействия неоднородностей, детально обсуждается в статье [22].

В случае сфероидальных неоднородностей данная область также является сфероидом с соотношением длин полуосей, выраженным как

$$\gamma_\Omega = \begin{cases} \sum\limits_i V_i Q_{3333}^{(i)} \Big/ \sum\limits_i V_i Q_{1111}^{(i)}, \\ \quad \text{если } \sum\limits_i V_i Q_{3333}^{(i)} \Big/ \sum\limits_i V_i Q_{1111}^{(i)} \le 1; \\ \sum\limits_i V_i P_{1111}^{(i)} \Big/ \sum\limits_i V_i P_{3333}^{(i)}, \\ \quad \text{если } \sum\limits_i V_i Q_{3333}^{(i)} \Big/ \sum\limits_i V_i Q_{1111}^{(i)} > 1, \end{cases} \qquad (15)$$

где Q_{ijkl}, P_{ijkl} – компоненты тензоров Хилла **Q** и **P** соответственно.

В общем случае форма гомогенизированной области зависит от концентрации, ориентации и формы неоднородностей. При изотропном распределении неоднородностей по ориентации, форма является сферической; в ином случае, при наличии в материале одинаковых по размерам сферических пор и одинаковых по размерам и форме сфероидальных микротрещин, необходимо определить величину

$$\frac{1}{V} \sum_i V_i \mathbf{Q}_i = \varphi_{mc} \left\langle \mathbf{Q}_{mc} \right\rangle + \varphi_p \mathbf{Q}_p,$$
$$\left\langle \mathbf{Q}_{mc} \right\rangle = \sum_{k=1}^{6} q_{mc(k)} \left\langle \mathbf{T}_k \right\rangle. \qquad (16)$$

После нахождения компонент эффективного тензора податливости S_{ijkl}^{eff} можно найти эффективные модули Юнга. Примем для определенности, что ось симметрии материала совпадает с направлением $\mathbf{e}_3$ декартового базиса ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$).

Тогда эффективные модули Юнга трансверсально-изотропного материала $E_{11}^{eff} = E_{22}^{eff}$, E_{33}^{eff} можно вычислить следующим образом:

$$E_{11}^{eff} = E_{22}^{eff} = \frac{1}{S_{1111}^{eff}}, \; E_{33}^{eff} = \frac{1}{S_{3333}^{eff}}. \qquad (17)$$

Результаты и их обсуждение

В данной работе были определены эффективные упругие свойства стали с модулем сдвига $\mu^0 = 80$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu^0 = 0{,}3$. Модуль Юнга стали E^0 следует выражению

$$E^0 = 2\mu^0(1 + \nu^0).$$

При произвольном распределении неоднородностей по ориентациям материал будет изотропным, т.е.

$$\mathbf{S}^{eff} = K^{eff}\mathbf{II} + \mu^{eff}\left(\mathbf{J} - \frac{1}{3}\mathbf{II}\right), \qquad (18)$$

где K^{eff}, μ^{eff} – эффективные величины коэффициента объемного сжатия и модуля сдвига соответственно.

Полученные зависимости модулей K^{eff}/K^0, μ^{eff}/μ^0 от пористости материала φ для сферической поры ($\gamma = 1$) и сфероидальной микротрещины (при $\gamma = 0{,}1$) представлены на рис. 1, *а*. Видно, что пористость материала при наличии в нем сферических неоднородностей теоретически может достигать 100 % (при этом материал исчезает). В случае микротрещин, имеющих форму сплюснутых сфероидов, упругие модули стремятся к нулю при достижении значений пористости, меньшей 100 % (около 26 % при $\gamma = 0,1$). Отрицательные значения модулей упругости при больших концентрациях неоднородностей свидетельствуют о том, что для данного материала задача гомогенизации не может быть решена корректно.

Таким образом, допустимая пористость материала определяется соотношением длин полуосей микротрещин. Для учета такой корреляции можно ввести в модель плотность трещин

$$\rho = (4/3)\pi a^3 N/V$$

(N – количество микротрещин) [17], связанную с пористостью φ соотношением $\varphi = \rho\gamma$.

Зависимости модулей K^{eff}/K^0 и μ^{eff}/μ^0 от плотности трещин представлены на рис. 1, *b*.

Для возможного объяснения ограниченности допустимого значения пористости, была исследована зависимость эффективного модуля сдвига μ_{12}^{eff}/μ^0 от пористости при различных значениях параметра рассеяния λ. Рассмотрены сфероидальные микротрещины с $\gamma = 0,10$ и $0,05$. Результаты расчетов представлены на рис. 2.

Согласно представленным результатам, при одном и том же значении соотношения длин полуосей сфероида γ пористость материала теоретически может достигать 100 % при наличии в нем параллельно ориентированных микротрещин ($\lambda \to \infty$), тогда как при отклонении микротрещин от преимущественного направления допустимая пористость уменьшается и становится минимальной при изотропном распределении ($\lambda = 0$). При сравнении рис. 2, *a* и *b* также видно, что для сфероидов с большим значением γ допустимая пористость выше. По всей видимости, при достижении некоторого значения пористости, обусловленного как степенью отклонения сфероидальных микротрещин от преимущественной ориентации, так и степенью их сплюснутости, множественные узкие микротрещины не могут рассматриваться как изолированные. Поскольку это делается при использовании самосогласованных схем (к которым относится в том числе и метод Максвелла), то, следовательно, возникает необходимость учета взаимовлияния неоднородностей более точными методами.

В данной работе была определена зависимость эффективных модулей Юнга E_{ii}^{eff}/E^0 от пористости материала φ для трех вариантов распределения неоднородностей по ориентациям:

изотропное распределение (I),

наличие преимущественного направления с параметром рассеяния λ (II),

произвольное распределение осей симметрии неоднородностей в некоторой плоскости (III).

Предполагалось, что в материале имеется два типа неоднородностей: микротрещины,

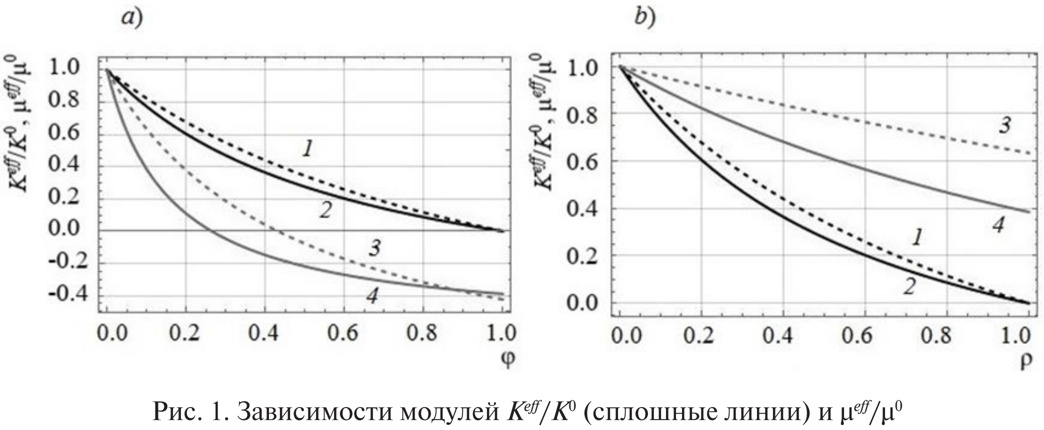


Рис. 1. Зависимости модулей K^{eff}/K^0 (сплошные линии) и μ^{eff}/μ^0 (пунктирные линии) от пористости материала (*a*) и плотности трещин (*b*). Поры моделируются сферами (*1*, *2*), микротрещины моделируются сфероидами с соотношением длин полуосей $\gamma = 0,1$ (*3*, *4*)

имеющие форму сплюснутых сфероидов с $\gamma = 0{,}1$, и сферические поры.

Было принято, что значения суммарной пористости φ всех неоднородностей лежат в пределах от 0 до 10 %.

Был рассмотрен материал со следующими типами микроструктуры:

присутствуют только сплюснутые сфероиды ($\varphi_{mc} = \varphi$, $\varphi_p = 0$);

суммарный объем сплюснутых сфероидов относится к суммарному объему пор как 2 : 1 ($\varphi_{mc} = 2\varphi/3$, $\varphi_p = \varphi/3$);

суммарный объем сплюснутых сфероидов равен суммарному объему пор ($\varphi_{mc} = \varphi/2 = \varphi_p$);

присутствуют только поры ($\varphi_{mc} = 0$, $\varphi_p = \varphi$).

Результаты расчетов, учитывающих представленные условия, приведены на рис. 3. Как и следовало ожидать, во всех случаях увеличение пористости приводит к снижению упругих модулей. Видно, что при изотропном распределении (рис. 3, *a*) поры оказывают меньшее влияние на значение модуля Юнга, чем микротрещины при том же значении φ. Например, если $\varphi = 0{,}10$, то значение модуля $E_{ii}^{eff}/E^0 \approx 0{,}82$ при $\varphi_{mc} = 0$, $\varphi_p = \varphi$ и $E_{ii}^{eff}/E^0 \approx 0{,}58$ при $\varphi_{mc} = \varphi$, $\varphi_p = 0$.

При наличии преимущественного направления ориентации микротрещин в материале (рис. 3, *b*, *c*) модуль Юнга в направлении оси симметрии материала уменьшается сильнее, чем модуль Юнга в плоскости изотропии. Узкие микротрещины оказывают больший, по сравнению с порами, вклад в величину E_{33}^{eff} и меньший – в E_{11}^{eff}. Наоборот, при распределении осей симметрии микротрещин в плоскости изотропии (рис. 3, *d*, *e*) модуль Юнга в направлении оси симметрии материала уменьшается в меньшей степени, по сравнению с модулем Юнга в плоскости изотропии. Узкие микротрещины оказывают больший, по сравнению с порами, вклад в величину E_{11}^{eff} и меньший – в E_{33}^{eff}.

Далее, нами изучалась зависимость эффективных модулей Юнга E_{ii}^{eff}/E^0 от соотношения длин полуосей микротрещин γ. Увеличение параметра γ от 0 до 1 описывает изменение формы сфероида от дискообразной до сферической. Как показано выше, в случае узких микротрещин общая пористость не может быть произвольной, а потому концентрация трещин была принята постоянной и, таким образом, общая пористость варьировалась за счет изменения значений γ.

Было принято, что плотность трещин $\rho = 0{,}1$; в этом случае при значении $\gamma = 0{,}1$ общая пористость материала составляет 1 %, что дает наилучшее приближение к экспериментальным данным.

Расчетные результаты для рассмотренных в работе случаев распределения неоднородностей по ориентациям представлены на рис. 4. Видно (см. рис. 4, *a*, *b*), что при

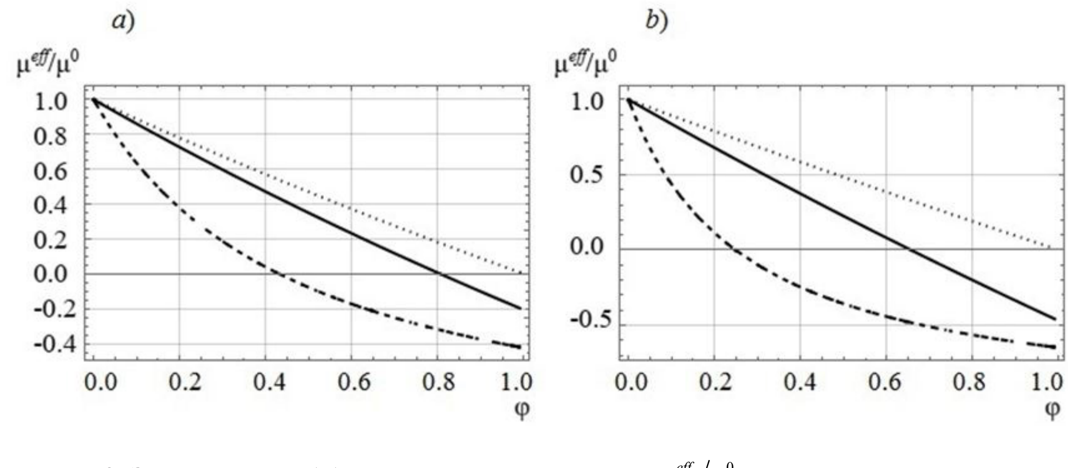


Рис. 2. Зависимости эффективного модуля сдвига μ_{12}^{eff}/μ^0 от пористости материала при соотношении длин полуосей сфероидов $\gamma = 0{,}10$ (*a*) и $\gamma = 0{,}05$ (*b*).
Параметр рассеяния $\lambda = 0$ (пунктирные линии), $\lambda = 10$ (сплошные линии) и $\lambda \to \infty$ (точечные линии)

$\lambda > 0$ наличие сплюснутых сфероидов приводит к более существенному снижению модуля Юнга в направлении оси симметрии и менее существенному – в плоскости изотропии. Например, значения модулей составляют $E_{33}^{eff}/E_0 \approx 0{,}86$, $E_{11}^{eff}/E_0 \approx 0{,}92$ при $\lambda = 10$, $\gamma = 0{,}5$. В случае произвольного распределения осей симметрии микротрещин по ориентациям в некоторой плоскости (см. рис. 4, *c*) модуль Юнга в плоскости изотропии материала оказывается более чувствительным к уменьшению соотношения длин полуосей сфероидов γ, чем модуль Юнга в направлении оси симметрии. Например, получено, что $E_{11}^{eff}/E_0 \approx 0{,}89$, $E_{33}^{eff}/E_0 \approx 0{,}92$ при $\gamma = 0{,}5$. Для всех вариантов распределения неоднородностей по ориентациям наблюдается снижение модулей Юнга при увеличении γ, поскольку общая пористость материала линейно зависит от параметра γ.

Отдельно был рассмотрен случай преимущественной ориентации сфероидов и исследована зависимость эффективных свойств материала от параметра рассеяния λ, где взяты значения параметров $\gamma = 0{,}1$, $\varphi = 0{,}01$. Результаты расчетов представ-

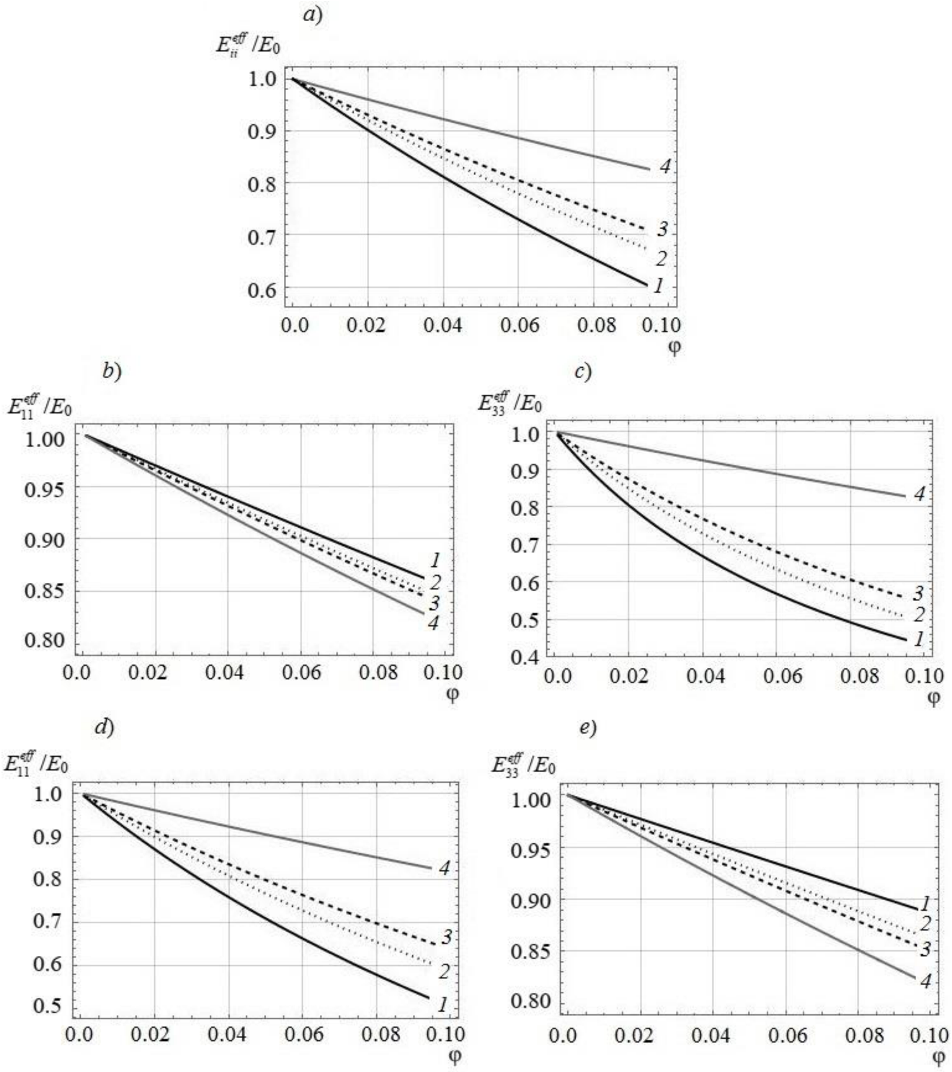


Рис. 3. Зависимости модулей E_{ii}^{eff}/E_0 от пористости материала при различных вариантах распределения неоднородностей по ориентациям ($\gamma = 0{,}1$): I (*a*), II (при $\lambda = 10$) (*b*, *c*) и III (*d*, *e*) (см. пояснения в тексте). Рассмотрены следующие типы микроструктуры: $\varphi_{mc} = \varphi$, $\varphi_p = 0$ (*1*); $\varphi_{mc} = 2\varphi/3$, $\varphi_p = \varphi/3$ (*2*); $\varphi_{mc} = \varphi/2 = \varphi_p$ (*3*); $\varphi_{mc} = 0$, $\varphi_p = \varphi$ (*4*)

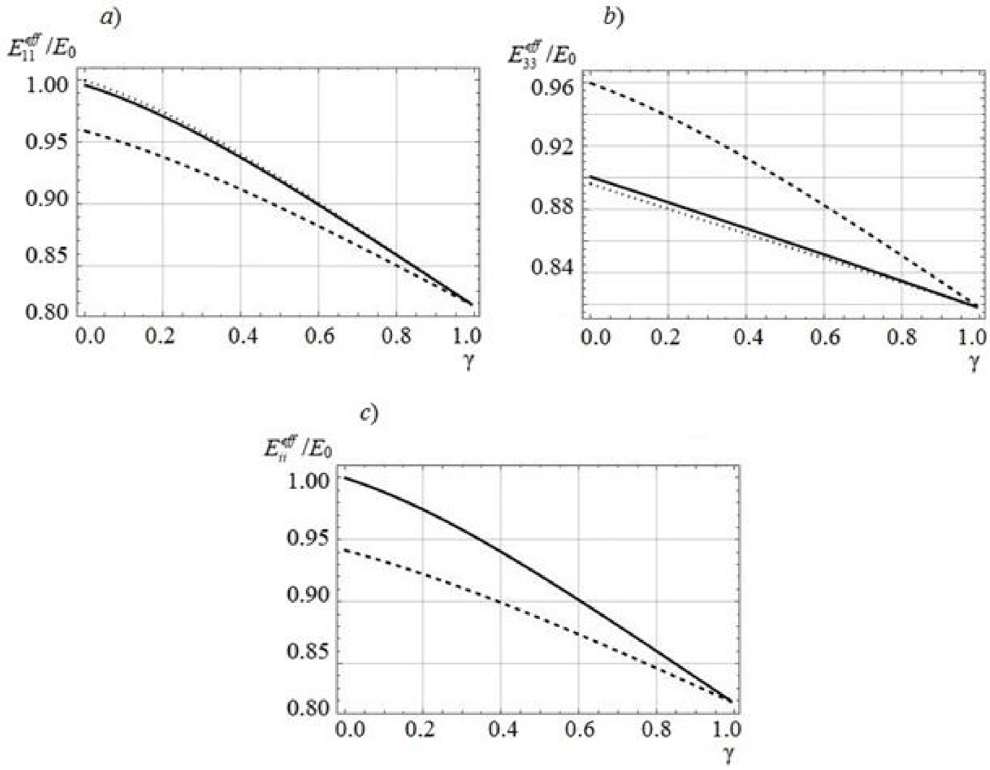


Рис. 4. Зависимости модулей E_{ii}^{eff}/E_0 от параметра γ при различном распределении неоднородностей по ориентациям (плотность трещин ρ = 0,1): I, II (*a*, *b*) и III (*c*) (см. пояснения в тексте);
a, *b* – параметр рассеяния λ = 0 (пунктирные линии), λ = 10 (сплошные линии) и λ→∞ (точечные линии);
c – приведены модули E_{11}^{eff}/E_0 (пунктирная линия) и E_{33}^{eff}/E_0 (сплошная линия)

лены на рис. 5. При значении λ = 0 материал является изотропным и характеризуется эффективным модулем Юнга $E_{ii}^{eff}/E_0 \approx 0{,}95$. Из представленных на рис. 5 графиков видно, что при большем отклонении осей симметрии неоднородностей

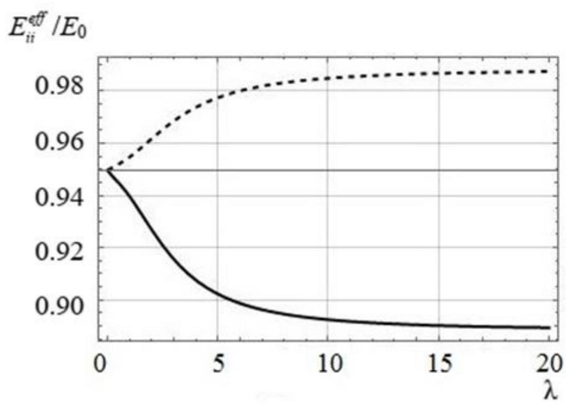


Рис. 5. Зависимости модулей E_{11}^{eff}/E_0 (пунктирная линия) и E_{33}^{eff}/E_0 (сплошная линия) от параметра рассеяния;
приняты значения параметров γ = 0,1, φ = 0,01

от преимущественного направления (при уменьшении λ) наблюдается более существенное изменение значений эффективных модулей. При этом характер изменения модулей Юнга в направлении оси симметрии и в плоскости изотропии различен: модуль Юнга в направлении оси симметрии материала снижается при выравнивании неоднородностей (λ → ∞), тогда как модуль Юнга в плоскости изотропии снижается, наоборот, при увеличении разброса по ориентациям (λ → 0).

Заключение

В работе представлен анализ изменения эффективных модулей Юнга металлов с микроструктурой, характерной для этих материалов, подверженных водородной деградации, а именно: при наличии в них микротрещин, возникающих между соседними зернами, и пор. Микротрещины моделировались сплюснутыми сфероидами, а поры – сферами. Задача гомогенизации решалась с помощью схемы Максвелла в терминах тензоров вклада. Исследовались зависимости эффективных упругих свойств от пористости материала, степени сплюснутости сфероидов и распределения неоднородностей по ориентациям. Показано, что эффективные модули Юнга существенно зависят от соотношения длин полуосей сфероидальных микротрещин и пористости материала. В зависимости от ориентации микротрещин в материале эффективные модули Юнга в разных направлениях могут меняться в большей или меньшей степени, что говорит о важности учета структуры металлических изделий (например, слоистости металла) и, следовательно, метода их изготовления (например, наличия прокатки) при определении характеристик материалов, насыщаемых водородом. Более того, в зависимости от ориентации микротрещин они могут оказывать больший или меньший, по сравнению с порами, вклад при одной и той же концентрации микротрещин и пор. Помимо этого показано, что при решении задачи гомогенизации необходимо учитывать корреляцию между пористостью материала и формой микротрещин.

Приложение

Осредненные значения элементов трансверсально-изотропного базиса

При изотропном распределении неоднородностей по ориентациям осредненные значения элементов трансверсально-изотропного базиса имеют следующий вид [16]:

$$\langle \mathbf{T}_1 \rangle = \frac{1}{15}\left[7\mathbf{T}_1 + 2\mathbf{T}_2 + 6(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + 4\mathbf{T}_5 + 8\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle \mathbf{T}_2 \rangle = \frac{1}{15}\left[\mathbf{T}_1 + 6\mathbf{T}_2 - 2(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + 12\mathbf{T}_5 + 4\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle \mathbf{T}_3 \rangle = \langle \mathbf{T}_4 \rangle = \frac{1}{15}\left[3\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 + 4(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) - 4\mathbf{T}_5 + 2\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle \mathbf{T}_5 \rangle = \frac{1}{30}\left[\mathbf{T}_1 + 6\mathbf{T}_2 - 2(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + 12\mathbf{T}_5 + 4\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle \mathbf{T}_6 \rangle = \frac{1}{15}\left[2(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 + 4\mathbf{T}_5 + 3\mathbf{T}_6\right].$$

При наличии преимущественной ориентации осей симметрии неоднородностей вдоль оси **m** с параметром рассеяния λ, осредненные значения элементов трансверсально-изотропного базиса выражаются как

$$\langle \mathbf{T}_1 \rangle = (1 - 2g_1(\lambda) + g_3(\lambda))\mathbf{T}_1 + g_3(\lambda)\mathbf{T}_2 + (1 - g_1(\lambda) - g_2(\lambda) + g_4(\lambda))(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + 4g_4(\lambda)\mathbf{T}_5 + (1 - 2g_2(\lambda) + g_5(\lambda))\mathbf{T}_6,$$

$$\langle \mathbf{T}_2 \rangle = \frac{g_3(\lambda)}{2}\mathbf{T}_1 + \left(1 - 2g_1(\lambda) + \frac{g_3(\lambda)}{2}\right)\mathbf{T}_2 + \frac{1}{2}(g_1(\lambda) + g_2(\lambda) + g_4(\lambda) - 1)(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + 2(g_4(\lambda) - g_1(\lambda) - g_2(\lambda) + 1)\mathbf{T}_5 + \frac{1}{2}(g_5(\lambda) - 2g_2(\lambda) + 1)\mathbf{T}_6,$$

$$\langle \mathbf{T}_3 \rangle = (g_1(\lambda) - g_3(\lambda))\mathbf{T}_1 - g_3(\lambda)\mathbf{T}_2 + (g_2(\lambda) - g_4(\lambda))\mathbf{T}_3 + (g_1(\lambda) - g_4(\lambda))\mathbf{T}_4 - 4g_4(\lambda)\mathbf{T}_5 + (g_2(\lambda) - g_5(\lambda))\mathbf{T}_6,$$

$$\langle \mathbf{T}_4 \rangle = (g_1(\lambda) - g_3(\lambda))\mathbf{T}_1 - g_3(\lambda)\mathbf{T}_2 + (g_1(\lambda) - g_4(\lambda))\mathbf{T}_3 + (g_2(\lambda) - g_4(\lambda))\mathbf{T}_4 - 4g_4(\lambda)\mathbf{T}_5 + (g_2(\lambda) - g_5(\lambda))\mathbf{T}_6,$$

$$\langle \mathbf{T}_5 \rangle = \left(\frac{g_1(\lambda)}{2} - g_3(\lambda)\right)\mathbf{T}_1 + (g_1(\lambda) - g_3(\lambda))\mathbf{T}_2 - g_4(\lambda)(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + (g_1(\lambda) + g_2(\lambda) - 4g_4(\lambda))\mathbf{T}_5 + (g_2(\lambda) - g_5(\lambda))\mathbf{T}_6,$$

$$\langle \mathbf{T}_6 \rangle = g_3(\lambda)(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) + g_4(\lambda)(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 + 4\mathbf{T}_5) + g_5(\lambda)\mathbf{T}_6.$$

Здесь

$$g_1(\lambda)=\frac{18-\lambda e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}\left(\lambda^2+3\right)}{6\left(\lambda^2+9\right)},$$

$$g_2(\lambda)=\frac{\left(3+\lambda e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}\right)\left(\lambda^2+3\right)}{3\left(\lambda^2+9\right)},$$

$$g_3(\lambda)=\frac{30}{\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)}-$$

$$-\lambda e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}\frac{\left(7\lambda^4+178\lambda^2+435\right)}{60\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)},$$

$$g_4(\lambda)=\frac{3\left(5+\lambda^2\right)}{\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)}+$$

$$+\lambda e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}\frac{\left(\lambda^4+19\lambda^2+30\right)}{15\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)},$$

$$g_5(\lambda)=\frac{\left(\lambda^4+22\lambda^2+45\right)}{\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)}+$$

$$+\lambda e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}\frac{\left(\lambda^4+34\lambda^2+105\right)}{5\left(\lambda^2+9\right)\left(\lambda^2+25\right)}.$$

При произвольной ориентации осей симметрии неоднородностей в ортогональной оси **m** плоскости, осредненные значения элементов трансверсально-изотропного базиса выражаются следующим образом [16]:

$$\langle\mathbf{T}_1\rangle=\frac{1}{4}\left[\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2+2\left(\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_4\right)+4\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle\mathbf{T}_2\rangle=\frac{1}{8}\left[\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2-2\left(\mathbf{T}_3+\mathbf{T}_4\right)+8\mathbf{T}_5+4\mathbf{T}_6\right],$$

$$\langle\mathbf{T}_3\rangle=\frac{1}{4}\left[\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2+2\mathbf{T}_4\right],$$

$$\langle\mathbf{T}_4\rangle=\frac{1}{4}\left[\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2+2\mathbf{T}_3\right],$$

$$\langle\mathbf{T}_5\rangle=\frac{1}{4}\left[\mathbf{T}_2+2\mathbf{T}_5\right],$$

$$\langle\mathbf{T}_6\rangle=\frac{1}{4}\left[\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Koyama M., Akiyama E., Lee Y.K., Raabe D., Tsuzaki K.** Overview of hydrogen embrittlement in high-Mn steels // International Journal of Hydrogen Energy. 2017. Vol. 42. No. 17. Pp. 12706–12723.

2. **Яковлев Ю.А., Третьяков Д.А., Фролова К.П.** Водородная диагностика элементов конструкций и инженерных конструкций // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2019. № 3. С. 117–120.

3. **Shen C.H., Shewmon P.G.** A mechanism for hydrogen-induced intergranular stress corrosion cracking in alloy 600 // Metallurgical Transactions. A. 1990. Vol. 21. No. 5. Pp. 1261–1271.

4. **Koyama M., Springer H., Merzlikin S.V., Tsuzaki K., Akiyama E., Raabe D.** Hydrogen embrittlement associated with strain localization in a precipitation-hardened Fe–Mn–Al–C light weight austenitic steel // International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39. No. 9. Pp. 4634–4646.

5. **Kuhr B., Farkas D., Robertson I.M.** Atomistic studies of hydrogen effects on grain boundary structure and deformation response in FCC Ni // Computational Materials Science. 2016. Vol. 122. September. Pp. 92–101.

6. **Villalobos J.C., Serna S.A., Campillo B., López-Martínez E.** Evaluation of mechanical properties of an experimental microalloyed steel subjected to tempering heat treatment and its effect on hydrogen embrittlement // International Journal of Hydrogen Energy. 2017. Vol. 42. No. 1. Pp. 689–698.

7. **Merson E.D., Myagkikh P.N., Klevtsov G.V., Merson D.L., Vinogradov A.** Effect of fracture mode on acoustic emission behavior in the

hydrogen embrittled low-alloy steel // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 210. 1 April. Pp. 342–357.

8. **Sun B., Krieger W., Rohwerder M., Ponge D., Raabe D.** Dependence of hydrogen embrittlement mechanisms on microstructure-driven hydrogen distribution in medium Mn steels // Acta Materialia. 2020. Vol. 183. 15 January. Pp. 313–328.

9. **Wasim M., Djukic M.B.** Hydrogen embrittlement of low carbon structural steel at macro-, micro- and nanolevels // International Journal of Hydrogen Energy. 2020. Vol. 45. No. 3. Pp. 2145–2156.

10. **Jothi S., Croft T.N., Wright L., Turnbull A., Brown S.G.R.** Multi-phase modelling of intergranular hydrogen segregation/trapping for hydrogen embrittlement // International Journal of Hydrogen Energy. 2015. Vol. 40. No. 43. Pp. 15105–15123.

11. **Hoch B.O., Metsue A., Bouhattate J., Feaugas X.** Effects of grain-boundary networks on the macroscopic diffusivity of hydrogen in polycrystalline materials // Computational Materials Science. 2015. Vol. 97. 1 February. Pp. 276–284.

12. **Knyazeva A.G., Grabovetskaya G.P., Mishin I.P., Sevostianov I.** On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material // Philosophical Magazin. 2015. Vol. 95. No. 19. Pp. 2046–2066.

13. **Архангельская Е.А., Лепов В.В, Ларионов В.П.** Связная модель замедленного разрушения повреждаемой среды // Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4. № 5. С. 81–87.

14. **Ruales M., Martell D., Vazquez F., Just F.A., Sundaram P.A.** Effect of hydrogen on the dynamic elastic modulus of gamma titanium aluminide // Journal of Alloys and Compounds. 2002. Vol. 339. No. 1–2. Pp. 156–161.

15. **Rahman K.M., Mohtadi-Bonab M.A., Ouellet R., Szpunar J.A.** Comparative study of the role of hydrogen on degradation of the mechanical properties of API X60, X60SS, and X70 pipeline steels // Steel Research International. 2019. Vol. 90. No. 8. P. 1900078.

16. **Kachanov M., Sevostianov I.** On quantitative characterization of microstructures and effective properties // International Journal of Solids and Structures. 2005. Vol. 42. No. 2. Pp. 309–336.

17. **Kachanov M., Sevostianov I.** Micromechanics of materials, with applications. Berlin, Germany: Springer, 2018. Vol. 249. 712 p.

18. **Канаун С.К., Левин В.М.** Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского гос. ун-та, 1993. 598 с.

19. **Sevostianov I., Kachanov M.** Compliance tensors of ellipsoidal inclusions // International Journal of Fracture. 1999. Vol. 96. No. 1. Pp. 3–7.

20. **Markov K.Z.** Elementary micromechanics of heterogeneous media // Heterogeneous Media. Birkhäuser, Boston, MA, 2000. Pp. 1–62.

21. **Sevostianov I., Kachanov M.** On some controversial issues in effective field approaches to the problem of the overall elastic properties // Mechanics of Materials. 2014. Vol. 69. No. 1. Pp. 93–105.

22. **Sevostianov I.** On the shape of effective inclusion in the Maxwell homogenization scheme for anisotropic elastic composites // Mechanics of Materials. 2014. Vol. 75. August. Pp. 45–59.

Статья поступила в редакцию 30.03.2020, принята к публикации 20.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ФРОЛОВА Ксения Петровна – *младший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация; аспирантка Высшей школы теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.

kspfrolova@gmail.com

REFERENCES

1. **Koyama M., Akiyama E., Lee Y.K., et al.,** Overview of hydrogen embrittlement in high-Mn steels, International Journal of Hydrogen Energy. 42(17) (2017) 12706–12723.

2. **Yakovlev Yu.A., Tretyakov D.A., Frolova K.P.,** Hydrogen diagnostics structural elements and engineering constructions, Methods of Control and Diagnostics in Mechanical Engineering. (3) (2019) 117–120.

3. **Shen C.H., Shewmon P.G.,** A mechanism for hydrogen-induced intergranular stress corrosion cracking in alloy 600, Metallurgical Transactions A. 21(5) (1990) 1261–1271.

4. **Koyama M., Springer H., Merzlikin S.V., et al.,** Hydrogen embrittlement associated with strain localization in a precipitation-hardened Fe–Mn–Al–C light weight austenitic steel, International Journal of Hydrogen Energy. 39 (9) (2014) 4634–4646.

5. **Kuhr B., Farkas D., Robertson I.M.,** Atomistic studies of hydrogen effects on grain boundary structure and deformation response in FCC Ni, Computational Materials Science. 122 (September) (2016) 92–101.

6. **Villalobos J.C., Serna S.A., Campillo B., López-Martínez E.** Evaluation of mechanical properties of an experimental microalloyed steel subjected to tempering heat treatment and its effect on hydrogen embrittlement, International Journal of Hydrogen Energy. 42(1) (2017) 689–698.

7. **Merson E.D., Myagkikh P.N., Klevtsov G.V., et al.,** Effect of fracture mode on acoustic emission behavior in the hydrogen embrittled low-alloy steel, Engineering Fracture Mechanics. 210 (1 April) (2019) 342–357.

8. **Sun B., Krieger W., Rohwerder M., et al.,** Dependence of hydrogen embrittlement mechanisms on microstructure-driven hydrogen distribution in medium Mn steels, Acta Materialia. 183 (15 January) (2020) 313–328.

9. **Wasim M., Djukic M.B.,** Hydrogen embrittlement of low carbon structural steel at macro-, micro-and nanolevels, International Journal of Hydrogen Energy. 45 (3) (2020) 2145–2156.

10. **Jothi S., Croft T.N., Wright L., et al.,** Multi-phase modelling of intergranular hydrogen segregation/trapping for hydrogen embrittlement, International Journal of Hydrogen Energy. 40 (43) (2015) 15105–15123.

11. **Hoch B.O., Metsue A., Bouhattate J., Feaugas X.,** Effects of grain-boundary networks on the macroscopic diffusivity of hydrogen in polycrystalline materials, Computational Materials Science. 97 (1 February) (2015) 276–284.

12. **Knyazeva A.G., Grabovetskaya G.P., Mishin I.P., Sevostianov I.,** On the micromechanical modelling of the effective diffusion coefficient of a polycrystalline material, Philosophical Magazin. 95 (19) (2015) 2046 –2066.

13. **Arkhangelskaya E.A., Lepov V.V., Larionov V.P.,** The connected model for delayed fracture of damaged media, Physical Mesomechanics. 4 (5) (2001) 75–80.

14. **Ruales M., Martell D., Vazquez F., et al.,** Effect of hydrogen on the dynamic elastic modulus of gamma titanium aluminide, Journal of Alloys and Compounds. 339 (1–2) (2002) 156–161.

15. **Rahman K.M., Mohtadi-Bonab M.A., Ouellet R., Szpunar J.A.,** Comparative study of the role of hydrogen on degradation of the mechanical properties of API X60, X60SS, and X70 pipeline steels, Steel Research International. 90 (8) (2019) 1900078.

16. **Kachanov M., Sevostianov I.,** On quantitative characterization of microstructures and effective properties, International Journal of Solids and Structures. 42 (2) (2005) 309–336.

17. **Kachanov M., Sevostianov I.,** Micromechanics of materials, with applications, Vol. 249, Springer, Berlin, Germany, 2018.

18. **Kanaun S.K., Levin V.M.,** Metod effektivnogo polya v mekhanike kompozitnykh materialov [Effective field method in the mechanics of composite materials], Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, 1993 (in Russian).

19. **Sevostianov I., Kachanov M.,** Compliance tensors of ellipsoidal inclusions, International Journal of Fracture. 96 (1) (1999) 3–7.

20. **Markov K.Z.,** Elementary micromechanics of heterogeneous media, In the book: Heterogeneous Media, Birkhäuser, Boston, MA, 2000.

21. **Sevostianov I., Kachanov M.,** On some controversial issues in effective field approaches to the problem of the overall elastic properties, Mechanics of Materials. 69 (1) (2014) 93–105.

22. **Sevostianov I.,** On the shape of effective inclusion in the Maxwell homogenization scheme for anisotropic elastic composites, Mechanics of Materials. 75 (August) (2014) 45–59.

Received 30.03.2020, accepted 20.04.2020.

THE AUTHOR

FROLOVA Ksenia P.

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

61 Bolshoi Ave. of V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

kspfrolova@gmail.com

Научное издание

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS»
ТОМ 13, № 2, 2020

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-51457 от 19.10.2012 г

Телефон редакции 294-22-85

Сайт http://ntv.spbstu.ru

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *А.А. Кононовой*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Адрес университета: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под сдвоенными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 01.02.04, 01.02.05, 01.04.01, 01.04.02, 01.04.03, 01.04.04, 01.04.05, 01.04.06, 01.04.07, 01.04.10, 01.04.15, 01.04.21.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНИТИ РАН, а также в международной системе по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word**.

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Рисунки представляются только в черно-белом варианте. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без переносов. Абзацный отступ – 1 см.

2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (http://journals.spbstu.ru). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

2.3. Рассмотрение материалов

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться ДОСРОЧНО.

Более подробную информацию можно получить по телефону редакции:
(812) 294-22-85 с 10.00 до 18.00 – Бушманова Наталья Александровна
или по e-mail: physics@spbstu.ru