

## ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ RANS-МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАСЧЕТОВ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ, РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ВБЛИЗИ ВНЕЗАПНО НАГРЕТОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

**А.М. Левченя, С.Н. Трунова, Е.В. Колесник**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлены результаты тестирования нескольких RANS-моделей турбулентности на примере решения задачи развития во времени свободной конвекции воздуха у поверхности внезапно нагретой безграничной вертикальной пластины. Результаты решения с использованием различных моделей сопоставлены с литературными данными, полученными методом прямого численного моделирования. Численные решения получены с применением четырех моделей, две из которых основаны на концепции изотропной турбулентной вязкости, а остальные предполагают решение уравнений переноса компонент тензора реинольдсовых напряжений. Получены характеристики течения и теплообмена на разных стадиях развития пограничного слоя – от ламинарного режима до турбулентного. На основе сопоставления полученных результатов с данными прямого численного моделирования сделаны выводы о предсказательных возможностях рассмотренных RANS-моделей турбулентности.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, RANS-моделирование, прямое численное моделирование, пограничный слой

**Ссылка при цитировании:** Левченя А.М., Трунова С.Н., Колесник Е.В. Оценка возможностей RANS-моделей турбулентности по результатам расчетов свободной конвекции, развивающейся вблизи внезапно нагретой вертикальной пластины // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 27–40. DOI: 10.18721/JPM.13203

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## ASSESSMENT OF RANS TURBULENCE MODELS CAPABILITIES BASED ON COMPUTATIONAL RESULTS FOR FREE CONVECTION DEVELOPING NEAR A SUDDENLY HEATED VERTICAL PLATE

**A.M. Levchenya, S.N. Trunova, E.V. Kolesnik**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The results of testing several RANS turbulence models in solving a problem of free air convection temporal development near the surface of a suddenly heated infinite vertical plate have been presented in the paper. The solution results with the use of the different models were compared with the literature data obtained by direct numerical simulation. Numerical solutions were carried out using the four models, two of them based on the isotropic turbulent viscosity concept and the rest ones involved solving the transport equations of the Reynolds stress tensor components. The flow and heat transfer characteristics for different stages of boundary layer development, from laminar to turbulent, were analyzed. Based on a comparison with the literature data on direct numerical simulation, conclusions about the predictive capabilities of the RANS models considered were drawn.

**Keywords:** free convection, RANS simulation, time-developing, direct numerical simulation, boundary layer

**Citation:** Levchenya A.M., Trunova S.N., Kolesnik E.V., Assessment of RANS turbulence models capabilities based on computational results for free convection developing near a suddenly heated vertical plate, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 27–40. DOI: 10.18721/JPM.13203

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

Свободно-конвективное течение у поверхности нагретой вертикальной пластины привлекает внимание исследователей на протяжении долгого времени, поскольку правильное предсказание теплообмена в пограничном слое имеет важное значение для многих практических приложений. Одним из эффективных методов численного исследования развивающихся пограничных слоев является подход, при котором анализируется эволюция течения во времени (подход Time Developing).

Основная идея этого подхода заключается в рассмотрении временного развития пограничного слоя вместо его пространственного развития (подход Spatial), которое обычно наблюдается на практике. Таким образом время выступает как бы в роли координаты, в направлении которой происходит эволюция течения. Данный подход, по сравнению с методами, предполагающими моделирование течения, эволюционирующего по продольной (пространственной) координате, позволяет существенно сэкономить на размере расчетной области и, как следствие, на общем времени вычислений.

Подход Time Developing активно используется для моделирования динамического турбулентного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластине [1, 2]. В частности, в работе [1] применяется ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока, для чего методом прямого численного моделирования (Time Developing Direct Numerical Simulation, далее TDDNS) решается модельная задача о росте пограничного слоя на безграничной пластине, которая находится в изотропно турбулизованной, в среднем покоящейся жидкости и внезапно

приводится в движение в своей плоскости. Для задач свободной конвекции впервые данный метод был использован в работе [3], а многообещающие результаты расчетов по данному методу подробно представлены в статье [4].

Несмотря на то, что наиболее полные данные о ламинарно-турбулентном переходе способны дать только методы прямого численного моделирования, вопрос о том, насколько полуэмпирические RANS-модели турбулентности способны удовлетворительно описать переход, до сих пор остается актуальным [5]. Несомненный интерес представляет и оценка эффективности применения той или иной модели турбулентности для расчета течения в полностью развитом турбулентном свободно-конвективном пограничном слое как в случае моделей, основанных на концепции изотропной турбулентной вязкости [6], так и при использовании моделей рейнольдсовых напряжений [7].

Следует отметить, что проблема выбора подходящих моделей турбулентности особенно актуальна для расчета сложных свободно-конвективных течений, в том числе для случая возмущения свободно-конвективных слоев препятствиями разного рода. Например, в работе [8] представлены результаты RANS-расчетов (с использованием модели SST  $k-\omega$ ) обтекания круглого цилиндра конечной высоты, закрепленного на вертикальной нагретой пластине, а в недавно опубликованной работе [9] – результаты расчетно-экспериментального исследования, выполненного для той же конфигурации.

Целью работы является оценка работоспособности ряда RANS-моделей турбулентности путем сопоставления полученных авторами численных решений с тестовыми (образцовыми) данными, имеющи-

мися в литературе [4] для модельной задачи о развитии во времени свободной конвекции около вертикальной безграничной пластины. Расчеты проводились с использованием пакета ANSYS Fluent 18.2.

**Метод TDDNS  
как источник тестовых данных**

Рассматривается модельная задача о развитии свободной конвекции около безгра-

ничной, внезапно нагреваемой вертикальной пластины. Схема течения приведена на рис. 1. Параметры рассматриваемой в данном разделе задачи (она описана идентично работе [4]) соответствуют условиям ранее проведенных известных экспериментов [10], в которых изучалось развитие свободно-конвективного слоя вдоль вертикальной пластины (по пространственной координате). Они представлены в таблице.

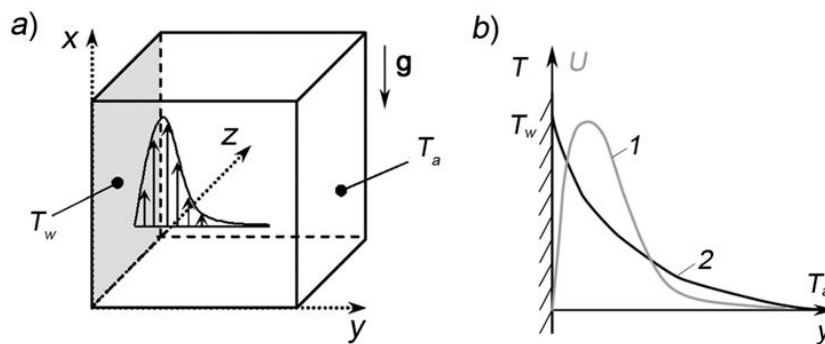


Рис. 1. Схема к постановке задачи развития турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя у нагретой вертикальной пластины: *a* – пластина (затухающая область) с примыкающим к ней пространством окружающей среды (куб); *b* – графики распределения скорости (1) и температуры (2) окружающей воздушной среды по расстоянию до пластины

Т а б л и ц а

**Значения параметров рассмотренной задачи**

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Температура пластины	$T_w$	К	333,15
Температура окружающей среды	$T_a$	К	289,15
Плотность среды	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	1,135
Вязкость среды	$\mu$	Па·с	$1,906 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент теплопроводности среды	$\lambda$	Вт/(м·К)	0,0274
Теплоемкость при постоянном давлении	$c_p$	Дж/(кг·К)	1006
Коэффициент термического расширения	$\beta$	1/К	$3,458 \cdot 10^{-3}$
Число Прандтля	Pr	–	0,71

П р и м е ч а н и я. 1. Физические свойства воздуха предполагаются постоянными, рассчитанными при средней температуре  $T_f = (T_w + T_a)/2$ .

2. Коэффициент  $\beta$  рассчитан при температуре  $T = T_a$ .

3. Число Прандтля  $Pr = c_p \mu / \lambda$ .

Математическая модель, принятая за основу для описания турбулентной свободной конвекции несжимаемой ньютоновской

среды с постоянными физическими свойствами, базируется на системе нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса,

дополненных уравнением баланса энергии, при учете эффектов плавучести в поле силы тяжести в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0; \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho \beta_T (T - T_a) g_i, \\ i &= 1, 2, 3; \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_i$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$  в декартовой системе координат ( $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ );  $p$  (Па),  $T$  (К),  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>),  $c_p$  (Дж/(кг·К)) – давление, температура, плотность и теплоемкость воздуха.

Компоненты тензора молекулярных вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  и вектора плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  за счет молекулярной теплопроводности определяются, соответственно, с помощью закона Фурье и реологического закона Ньютона:

$$q_j = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad j = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

При вычислениях по методу TDDNS в качестве расчетной области выступает часть примыкающего к пластине пространства в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 1,а). Параллельная стенке внешняя граница рассматривается как проницаемая, с заданным на ней постоянным давлением  $p$  и температурой  $T_a$ . По однородным координатам (вертикальной  $x$  и трансверсальной  $z$ ) ставятся условия периодичности. После расчета полей течения на очередном временном шаге проводится их осреднение вдоль однородных координат (вдоль осей  $x$  и  $z$ ), что позволяет рассматривать нестационарную задачу как статистически одномерную, в которой осредненные параметры течения меняются только вдоль оси  $y$  (рис. 1,б).

Для построения безразмерных параметров, характеризующих состояние рассматриваемого течения в разные моменты времени, вводится понятие интегральной толщины скоростного пограничного слоя, которая определяется по следующей формуле (интегрирование по  $y$  ведется по всему внешнему пространству):

$$\delta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_m} dy. \quad (4)$$

Вводится также понятие безразмерной температуры:

$$\theta = (T - T_a) / (T_w - T_a). \quad (5)$$

Толщина температурного пограничного слоя  $\delta_T$  определяется как координата  $y$ , где  $\theta = 0,01$ .

Число Грасгофа, число Нуссельта и безразмерное трение, построенные по толщине пограничного слоя, определяются следующим образом:

$$Gr_\delta = g \beta \Delta T \delta^3 / \nu^2, \quad (6)$$

$$Nu_\delta = q_w \delta / (\lambda \Delta T), \quad (7)$$

$$\bar{\tau} = \tau_w / (\rho g \beta \Delta T \delta), \quad (8)$$

где  $\Delta T = T_w - T_a$  – перепад температуры между пластиной и внешним пространством.

В работе [4] представлены подробные данные расчетной модели TDDNS по коэффициенту трения и числу Нуссельта в зависимости от числа Грасгофа, а также данные по профилям средних величин и характеристик турбулентности при нескольких значениях  $Gr_\delta$ ; эти данные и будут использованы в настоящей работе для сопоставления.

### Постановка задачи на основе RANS-подхода

При расчете рассматриваемого, развивающегося во времени течения на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS) изначально вводится осреднение вдоль однородных координат ( $x$  и  $z$ ). В результате получаются нестационарные одномерные уравнения относительно средней

продольной составляющей скорости  $u$  и средней температуры  $T$ :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (\tau_{xy} + \tau_{t,xy})}{\partial y} - \rho \beta_T (T - T_a) g, \quad (9)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial (q_y + q_{t,y})}{\partial y},$$

при этом поперечная скорость  $v$  полагается равной нулю.

В возникающей одномерной нестационарной задаче, из всех составляющих тензора турбулентных напряжений и вектора турбулентного потока тепла остаются только составляющие  $\tau_{t,xy}$  и  $q_{t,y}$ , отражающие турбулентный перенос по нормали к стенке:

$$\tau_{t,xy} = -\rho \overline{u'v'}, \quad (10)$$

$$q_{t,y} = -\rho c_p \overline{v'T'} \quad (11)$$

(штрихом обозначаются пульсационные составляющие, чертой сверху – осреднение по однородным координатам).

Система уравнений (9) является незамкнутой, поскольку необходимо определить способ расчета турбулентных составляющих тензора напряжений (10) и вектора плотности теплового потока (11). Для этого используются полуэмпирические модели турбулентности (их описание приводится ниже).

Отметим, что представляемые ниже решения получены по коду общего назначения ANSYS Fluent, в котором одномерные задачи решаются как двумерные, с введением условий трансляционной однородности. На стенке задается условие прилипания и постоянное значение температуры  $T_w$ . Параллельная стенке внешняя граница рассматривается как проницаемая с заданными на ней постоянными величинами давления и температуры. По однородной координате  $x$  ставятся условия периодичности. В начальный момент времени предполагается, что воздух находится при температуре  $T_a$  и является в среднем неподвижным, при этом в области присутствует начальная турбулентность, ха-

рактеризуемая следующими параметрами: интенсивность турбулентности  $I = 0,1 \%$ , отношение турбулентной вязкости к молекулярной  $\nu_t/\nu = 0,1$ .

### Модели турбулентности

Приведем общую (трехмерную) формулировку моделей турбулентности, реализованных в коде ANSYS Fluent, которые используются для настоящих расчетов. Это две модели, основанные на гипотезе Буссинеска (SST  $k-\omega$  и RNG  $k-\varepsilon$ ), и две модели рейнольдсовых напряжений (DRSM Stress-Omega и DRSM Stress BSL).

В соответствии с гипотезой Буссинеска, связь между компонентами тензора турбулентных напряжений и турбулентного теплового потока с осредненными параметрами течения записывается в виде

$$\tau_{t,ij} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (12)$$

$$q_{t,j} = -\lambda_t \left( \partial T / \partial x_j \right), \quad (13)$$

где  $k = 1/2 \overline{u'_i u'_i}$  – кинетическая энергия турбулентности,  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости,  $\lambda_t$  – коэффициент турбулентной теплопроводности;

$$\lambda_t = c_p \mu_t / Pr_t. \quad (14)$$

В выражении (14) использована гипотеза о подобии процессов турбулентного переноса импульса и тепла, с введением понятия турбулентного числа Прандтля  $Pr_t$ , значение которого в расчетах полагается постоянным. Система замыкается полуэмпирической моделью турбулентности для определения коэффициента турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Представленные ниже результаты получены с использованием моделей SST  $k-\omega$  и RNG  $k-\varepsilon$ , описание которых дано в работах [11, 12].

При использовании дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений, для каждой из шести независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение:



$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \\ = (D_{ij}^m + D_{ij}^t) + P_{ij} + \varphi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $D_{ij}^m, D_{ij}^t$  – слагаемые, отражающие молекулярный и турбулентный диффузионный перенос соответственно;  $P_{ij}$  – генерационный член;  $\varphi_{ij}$  – слагаемое, отвечающее за перераспределение энергии между компонентами тензора,  $\varepsilon_{ij}$  – диссипативный член.

Формулы для слагаемых, связанных с молекулярной диффузией  $D_{ij}^m$  и генерацией  $P_{ij}$ , записываются следующим образом (здесь не требуется введение каких-либо замыкающих соотношений):

$$D_{ij}^m = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right), \quad (16)$$

$$P_{ij} = -\rho \left[ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]. \quad (17)$$

Поскольку остальные члены уравнения (15) –  $D_{ij}^t, \varphi_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – содержат моменты более высоких порядков, для их вычисления используются замыкающие соотношения, которые устанавливают связь этих слагаемых с осредненными параметрами потока.

Приведем конкретный вид соотношений для двух моделей, использованных в настоящей работе:

Stress-Omega (далее используется обозначение DRSM SO (Differential Reynolds Stress Model Stress-Omega)),

Stress BSL (обозначение DRSM BSL (Differential Reynolds Stress Model Stress-BSL)).

Данные модели отличаются друг от друга некоторыми замыкающими соотношениями и значениями констант.

Для слагаемого, отражающего турбулентный перенос, по аналогии с молекулярной диффузией, вводится коэффициент турбулентной диффузии, пропорциональный турбулентной вязкости:

$$D_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right). \quad (18)$$

Согласно модели DRSM SO, коэффициент  $\sigma_k = 2$ .

По модели DRSM BSL,  $\sigma_k$  определяется соотношением

$$\sigma_k = F_1 \sigma_{k,1} + (1 - F_1) \sigma_{k,2}, \quad (19)$$

где  $\sigma_{k,1} = 2,0, \sigma_{k,2} = 1,0$ , а функция  $F_1$  определяется формулами

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4), \quad (20)$$

$$\Phi_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_{\omega}^+ y^2} \right], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D_{\omega}^+ = \max \left( 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right), \\ \sigma_{\omega,2} = 1,168, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $y$  – расстояние до стенки.

Слагаемое, отвечающее за перераспределение энергии между компонентами тензора, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} = -C_1 \rho \beta_{RSM}^* \omega \left[ \overline{u'_i u'_j} - (2/3) \delta_{ij} k \right] - \\ - \hat{\alpha}_0 \left[ P_{ij} - (1/3) P_{kk} \delta_{ij} \right] - \hat{\beta}_0 \left[ D_{ij} - (1/3) P_{kk} \delta_{ij} \right] - \\ - k \hat{\gamma}_0 \left[ S_{ij} - (1/3) S_{kk} \delta_{ij} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$D_{ij} = -\rho \left[ \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right], \quad (24)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \quad (25)$$

Для модели DRSM SO коэффициент  $\beta_{RSM}^*$  определяется следующим образом:

$$\beta_{RSM}^* = \beta^* f_{\beta}^*, \quad \beta^* = 0,09; \quad (26)$$

$$f_{\beta}^* = \begin{cases} 1, & \chi_k \leq 0, \\ \frac{1 + 640\chi_k^2}{1 + 400\chi_k^2}, & \chi_k > 0; \end{cases} \quad (27)$$

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (28)$$

Для модели DRSM BSL полагается  $\beta_{RSM}^* = \beta^*$ .

Значения остальных констант задаются следующими формулами (одинаковые для обеих моделей):

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{8 + C_2}{11}, \quad \hat{\beta}_0 = \frac{8C_2 - 2}{11}, \quad \hat{\gamma}_0 = \frac{60C_2 - 4}{55}, \quad (29)$$

где  $C_1 = 1,80$ ,  $C_2 = 0,52$ . (30)

Диссипативное слагаемое моделируется с привлечением дополнительной переменной – скалярной удельной диссипации  $\omega$ :

$$\varepsilon_{ij} = (2/3) \delta_{ij} \rho \beta_{RSM}^* k \omega. \quad (31)$$

Значение константы  $\beta_{RSM}^*$  определяется так же, как и для слагаемого  $\phi_{ij}$  (см. формулы (26) – (28)).

Кинетическая энергия турбулентности вычисляется по определению:

$$k = (1/2) \overline{u'_i u'_i}. \quad (32)$$

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывается по формуле

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}, \quad \alpha^* = 1. \quad (33)$$

Для замыкания системы необходимо определить удельную диссипацию  $\omega$ . Для этого, совместно с уравнениями относительно компонент тензора рейнольсовых напряжений (15), решается дифференциальное уравнение переноса относительно  $\omega$ . Согласно модели DRSM SO, это уравнение имеет вид

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega, \quad (34)$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \mu_t / \sigma_\omega, \quad \sigma_\omega = 2. \quad (35)$$

Слагаемые  $G_\omega$ ,  $Y_\omega$ ,  $S_\omega$  вычисляются в соответствии с моделью турбулентности  $k$ - $\omega$  [13].

Согласно модели DRSM BSL, в уравнение (34) относительно  $\omega$  добавляется еще одно слагаемое (cross-diffusion term):

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \frac{1}{\omega \sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (36)$$

где значения функции  $F_1$  вычисляются по формулам (20) – (22).

Остальные слагаемые рассчитываются в соответствии с моделью турбулентности BSL  $k$ - $\omega$  [14].

Для вычисления компонент турбулентного теплового потока, необходимых для замыкания осредненного уравнения энергии, используется градиентная гипотеза (13), (14); значение турбулентного числа Прандтля полагается равным 0,85.

### Вычислительные аспекты

Расчетная область на плоскости  $xu$  представляет собой прямоугольник, при этом ее внешняя граница расположена на расстоянии 0,5 м от пластины. Расчетная сетка содержала 200 ячеек вдоль оси  $u$  и 5 ячеек вдоль однородной координаты  $x$ . Сгущение сеточных линий к поверхности пластины задавалось таким образом, чтобы обеспечить значение, меньшее единицы, для безразмерного расстояния от центра первой пристенной ячейки до стенки  $u^+$  по всему рассчитываемому интервалу времени. Шаг по времени  $dt$  задавался равным 0,005 с. С целью анализа влияния шага по времени на результаты расчета был также проведен расчет с вдвое меньшим шагом.

Расчеты проводились с использованием программного пакета ANSYS Fluent 18.2. Для продвижения по времени использовался метод дробных шагов (Fractional Step Non-Iterative Time Advancement).

На этапе предварительных расчетов анализировалось влияние численных факторов на качество получаемых решений. На рис. 2,а показана зависимость  $u^+$  от времени для всех моделей турбулентности. Видно, что

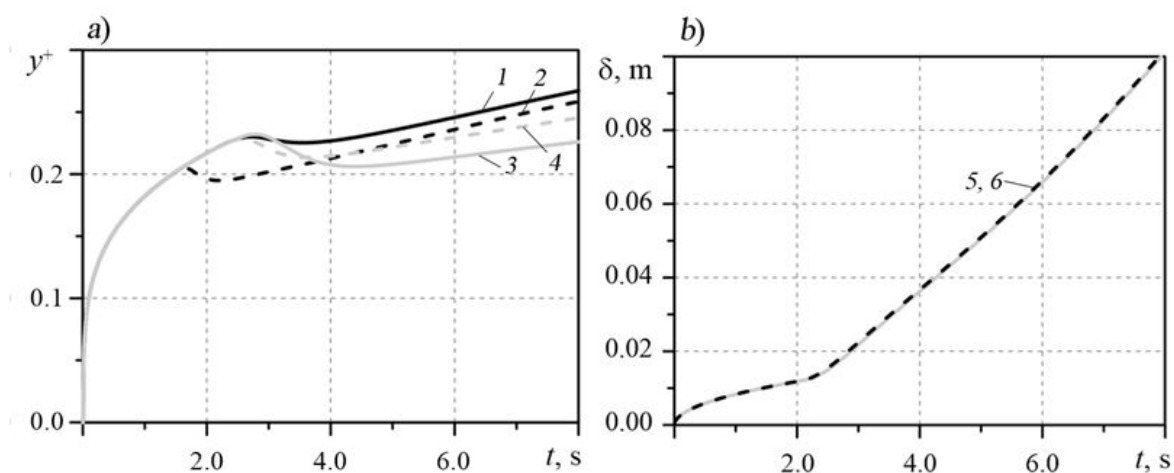


Рис. 2. Зависимости безразмерного расстояния  $y^+$  (a) и толщины пограничного слоя (b) от времени. Сравнение результатов расчетов по различным моделям (a) и влияние шага по времени (b).

Использованы модели SST  $k-\omega$  (кривая 1 и рис. 2, b), RNG  $k-\epsilon$  (кривая 2), DRSM SO (3) и DRSM BSL (4); были взяты шаги  $dt = 0,0050$  (5) и  $0,0025$  с (6)

значение  $y^+$  меньше единицы на протяжении всего времени расчета. На рис. 2, b для модели SST  $k-\omega$  представлены зависимости толщины пограничного слоя  $\delta$  (она рассчитывалась как интегральная толщина по формуле (4)) от времени, полученные в расчетах с разными шагами по времени. Видно, что различия незначительны.

### Результаты расчетов и обсуждение

**Влияние модели турбулентности на рост толщины пограничного слоя.** На рис. 3 приведены зависимости от времени интегральной толщины скоростного пограничного слоя, а также отношения толщин температурного и скоростного пограничных слоев; эти зависимости получены в расчетах с использованием рассматриваемых моделей турбулентности. На рис. 3, a наблюдаются три четко выраженные фазы развития пограничного слоя: вначале его толщина растет по закономерности нестационарного ламинарного слоя (до момента времени около 2 с), затем имеется короткий временной промежуток с псевдопроцессами ламинарно-турбулентного перехода, и далее пограничный слой развивается в соответствии с закономерностями турбулентного режима течения (зависимость толщины  $\delta$  от времени близка

к линейной).

Сравнение результатов, полученных с использованием разных моделей, показывает, что фаза ламинарного пограничного слоя предсказывается этими моделями одинаково (как и следовало ожидать), тогда как положение перехода и особенности роста пограничного слоя в области развитой турбулентности определяются применяемой моделью.

Самый быстрый рост толщины скоростного турбулентного пограничного слоя дает модель DRSM SO, а самый медленный – модель SST  $k-\omega$ . Можно также отметить, что для всех моделей переход к турбулентности (точка характерного изменения зависимостей на графиках рис. 3) происходит одновременно, за исключением такового для модели RNG  $k-\epsilon$ , у которой момент перехода происходит заметно раньше. Данная модель выделяется и поведением отношения толщины температурного слоя к интегральной толщине скоростного слоя: если в расчетах с использованием других моделей его значение выходит на практически постоянное значение при  $t > 3$  с, то с применением этой модели наблюдается его снижение во времени.

**Сопоставление с данными прямого численного моделирования.** Полученные результаты расчетов сопоставляются с дан-



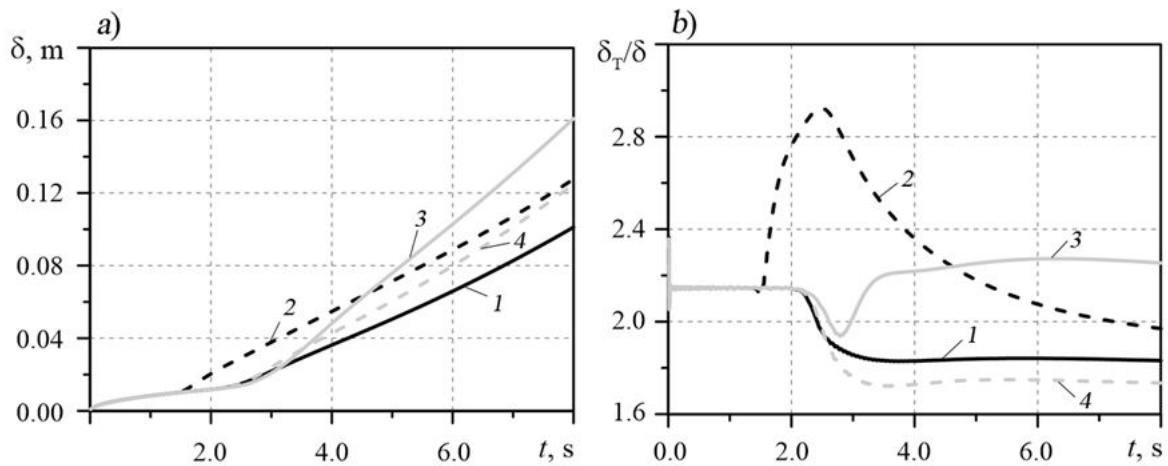


Рис. 3. Зависимости от времени интегральной толщины скоростного пограничного слоя (a) и отношения толщины температурного слоя к интегральной толщине скоростного слоя (b). Приведены результаты расчетов по различным моделям: SST  $k-\omega$  (1), RNG  $k-\epsilon$  (2), DRSM SO (3), DRSM BSL (4)

ными TDDNS, приведенными в работе [4].

Зависимости числа Нуссельта и безразмерного трения от числа Грасгофа, построенного по интегральной толщине пограничного слоя (см. формулы (6) – (8)), представлены на рис. 4, там же приведены данные TDDNS. Отметим, что для стадий ламинарного и полностью турбулентного течения полученные зависимости слабо различаются и хорошо согласуются с данными TDDNS. На стадии же перехода к турбулентности в поведении кривых наблюдаются заметные различия: по данным прямого численного моделирования, зависимость  $Nu_\delta$  от  $Gr_\delta$  имеет локальный максимум, тогда как согласно результатам RANS-моделирования, значение  $Nu_\delta$  меняется монотонно; кроме того, все кривые лежат ниже TDDNS-точек (отличие составляет до 50%). При этом зависимости, полученные по различным моделям, демонстрируют, в целом, одинаковое поведение во всех случаях, за исключением более раннего перехода к турбулентности, предсказанного моделью RNG  $k-\epsilon$  (это уже отмечалось выше).

Анализ распределений во времени безразмерного трения показывает, что лучшее совпадение с данными прямого численного моделирования дает модель DRSM SO, а несколько завышенные значения предска-

зывает модель SST  $k-\omega$  в области развитой турбулентности.

На рис. 5 сопоставляются данные TDDNS с профилями безразмерных скорости и температуры при значении числа Грасгофа  $Gr_\delta = 5,94 \cdot 10^6$  (соответствует стадии развитого турбулентного течения). Анализ представленных результатов позволяет утверждать, что профили скорости, полученные во всех расчетах, довольно хорошо согласуются с данными TDDNS. Расхождения с TDDNS есть лишь во внешней области пограничного слоя – там, где наблюдается уменьшение скорости: модель RNG  $k-\epsilon$  дает заниженные значения, а остальные модели – завышенные, однако эти отклонения не превышают 5%. Что касается распределения температуры, то наилучшую согласованность с данными TDDNS показали модели DRSM BSL и RNG  $k-\epsilon$ . Для двух других моделей наблюдаются существенные различия во внешней области пограничного слоя: модель SST  $k-\omega$  дает завышенные на 15 – 20% значения температуры, а модель DRSM SO – заниженные на 20 – 25%.

Для вариантов расчетов, выполненных с использованием моделей рейнольдсовых напряжений (DRSM SO и DRSM BSL), на рис. 6 сопоставляются предсказываемые распределения по координате  $y$  компонент

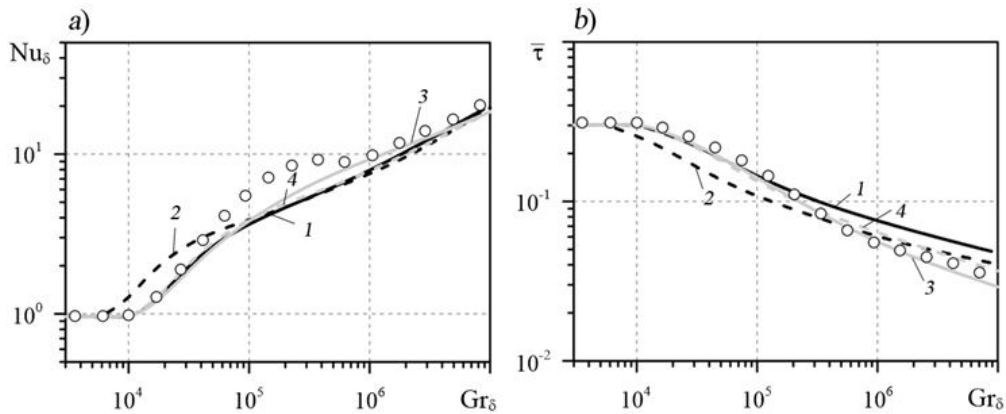


Рис. 4. Сопоставление рассчитанных зависимостей числа Нуссельта (а) и безразмерного трения (b) от числа Грасгофа (линии) с данными TDDNS (символы); числа  $Nu_\delta$  и  $Gr_\delta$  построены по толщине пограничного слоя. Нумерация кривых идентична приведенной на рис. 3

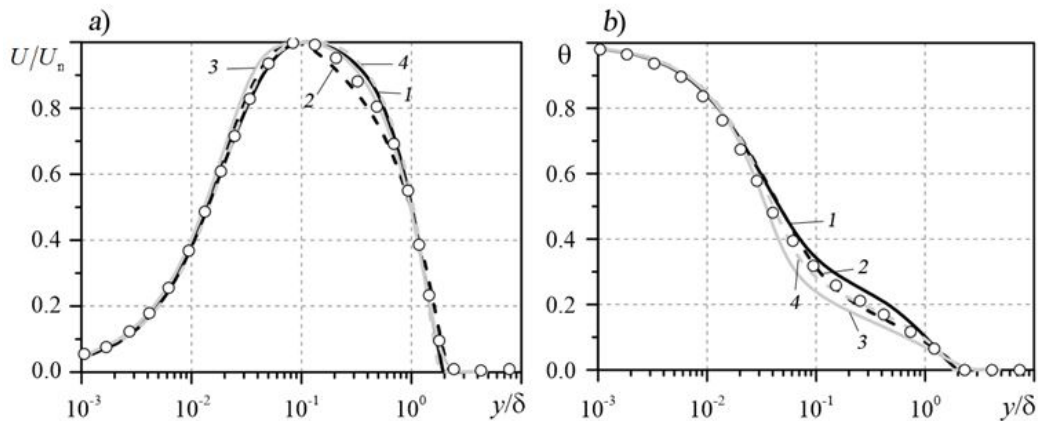


Рис. 5. Сопоставление рассчитанных профилей нормированной скорости (а) и температуры (b) (линии) с данными TDDNS (символы);  $Gr_\delta = 5,94 \cdot 10^6$ . Нумерация кривых идентична приведенной на рис. 3 и 4

тензора напряжений с данными прямого численного моделирования. Видно, что интенсивность пульсаций продольной компоненты скорости, рассчитанная по обеим DRSM-моделям, оказывается значительно заниженной во внутренней области пограничного слоя. Вычисленные распределения остальных компонент тензора хорошо согласуются с данными TDDNS, причем наилучшее соответствие наблюдается в случае модели DRSM SO.

### Заключение

На задаче о развитии свободной конвекции у внезапно нагретой вертикальной пластины проведено тестирование двух полуэм-

пирических RANS-моделей турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска, и двух моделей реynoльдсовых напряжений. В качестве образцовых данных использованы результаты прямого численного моделирования по методу Time-Developing DNS [4].

Анализ результатов расчетов, проведенных с использованием разных моделей, показал, что скорость нарастания толщины пограничного слоя на стадии ламинарно-турбулентного перехода и в фазе развитого турбулентного слоя существенно зависит от используемой модели. Самое быстрое нарастание скоростного турбулентного пограничного слоя дает модель DRSM SO, а самое медленное – модель SST  $k-\omega$ .

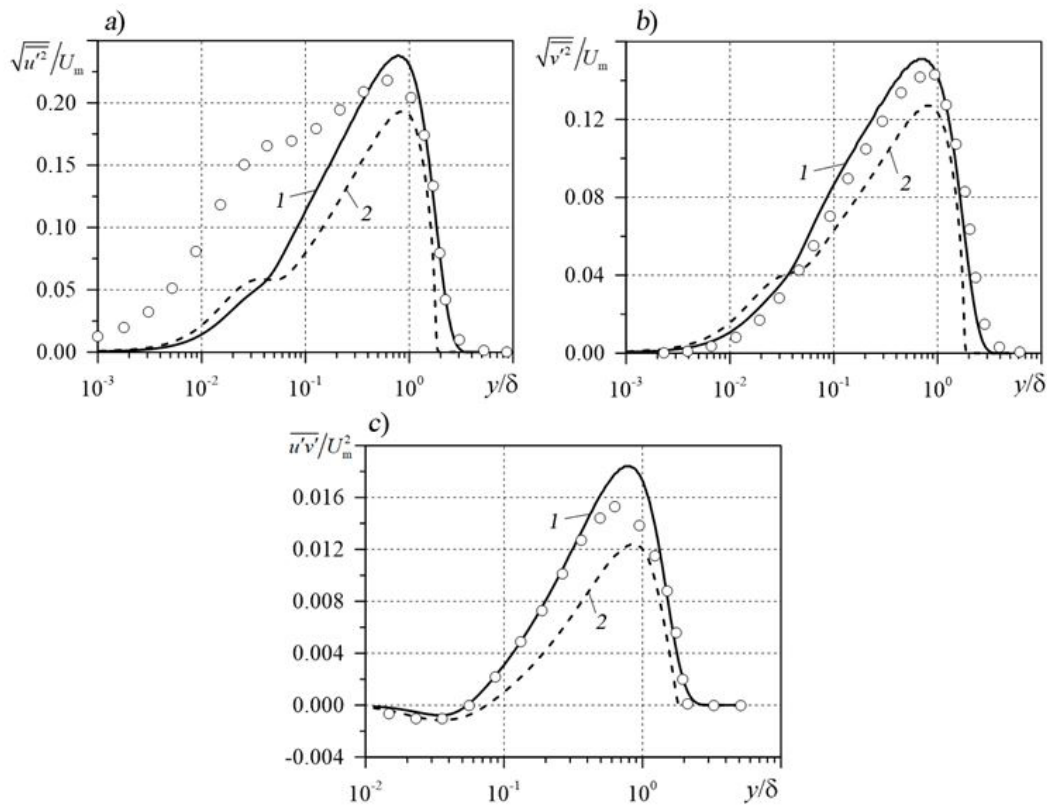


Рис. 6. Сопоставление рассчитанных профилей интенсивности пульсаций продольной (а) и поперечной (б) компонент скорости, а также профиля турбулентного касательного напряжения (с) (линии) с данными TDDNS (символы). Показаны результаты расчетов по различным моделям: DRSM SO (1), DRSM BSL (2)

Для стадий формирования ламинарного и полностью турбулентного пограничных слоев предсказываемые зависимости числа Нуссельта и нормированного трения от числа Грасгофа, построенного по характерной толщине нарастающего слоя, хорошо согласуются с образцовыми данными TDDNS; при этом результаты, полученные по разным моделям, мало отличаются друг от друга; для величины безразмерного трения несколько лучшее совпадение с данными TDDNS дает модель DRSM SO.

Рассчитанные для фазы турбулентного слоя профили нормированной скорости находятся в хорошем согласии с данными TDDNS для всех рассмотренных моделей. Анализ результатов по профилям температуры показал, что наилучшую согласованность с образцовыми данными демонстрируют модели DRSM BSL и RNG  $k-\epsilon$ . В случае моделей DRSM SO и SST  $k-\omega$  наблю-

даются существенные различия во внешней области пограничного слоя (около 20 %).

DRSM-модели довольно хорошо предсказывают поведение профилей турбулентного касательного напряжения и интенсивности пульсаций поперечной компоненты скорости, однако предсказываемая интенсивность пульсаций продольной компоненты скорости оказывается существенно заниженной во внутренней части пограничного слоя.

Итоги проведенных расчетов и анализа полученных результатов позволяют утверждать, что из числа рассмотренных RANS-моделей турбулентности наилучшую согласованность с образцовыми данными [4], которые получены методом TDDNS, продемонстрировала модель реинольдсовых напряжений DRSM SO.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда 18-19-00082.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Устинов М.В.** Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 6. С. 77–93.
2. **Huang Z.F., Zhou H., Luo J.S.** Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer on a flat plate and its analysis // Science China. Ser. G: Physics, Mechanics & Astronomy. 2005. Vol. 48. No. 5. Pp. 626–640.
3. **Tsuji T., Kajitani T.** Turbulence characteristics and heat transfer enhancement of a natural convection boundary layer in water along a vertical plate // Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference (IHTC-13). Sydney, Australia, August 13–18. 2006. USA: Bigell House Inc, 2006.
4. **Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y.** Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. No. 19–20. Pp. 1723–1734.
5. **Abdollahzadeh M., Esmailpour M., Vizinho R., Younesi A., Páscoa J.C.** Assessment of RANS turbulence models for numerical study of laminar-turbulent transition in convection heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 115. Part B. December. Pp. 1288–1308.
6. **Henkes R.A.W.M., Hoogendoorn C.J.** Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1989. Vol. 32. No. 1. Pp. 157–169.
7. **Peeters T.W.J., Henkes R.A.W.M.** The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1992. Vol. 35. No. 2. Pp. 403–420.
8. **Smirnov E.M., Levchenya A.M., Zhukovskaya V.D.** RANS-based numerical simulation of the turbulent free convection vertical-plate boundary layer disturbed by a normal-to-plate circular cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 144. December. P. 118573.
9. **Чумаков Ю.С., Левченя А.М., Храпунов Е.Ф.** Экспериментальное исследование течения в зоне влияния цилиндра, погруженного в свободноконвективный пограничный слой на вертикальной поверхности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 66–77.
10. **Tsuji T., Nagano Y.** Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1988. Vol. 31. No. 8. Pp. 1723–1734.
11. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. Vol. 4. Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. Antalya, Turkey. 12–17 October, 2003. Pp. 625–632.
12. **Orszag S. A., Yakhot V., Flannery W.S., Boysan F., Choudhury D., Maruzewski J., Patel B.** Renormalization group modeling and turbulence simulations // Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March 1993. P. 1031.
13. **Wilcox D.C.** Turbulence modeling for CFD. 2nd edition. La Canada, California: DCW Industries, 1998. 457 p.
14. **Menter F.R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32. No. 8. Pp. 1598–1605.

*Статья поступила в редакцию 31.03.2020, принята к публикации 29.04.2020.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ЛЕВЧЕНЯ Александр Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
levchenya\_am@spbstu.ru

**ТРУНОВА Серафима Николаевна** — студентка магистратуры Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 seraphimatr@yandex.ru

**КОЛЕСНИК Елизавета Владимировна** — ассистент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 kolesnik\_ev@mail.ru

## REFERENCES

1. **Ustinov M.V.**, Numerical modeling of laminar-turbulent transition in a boundary layer at a high freestream turbulence level, *Fluid Dynamics*. 41 (6) (2006) 923–937.
2. **Huang Z.F., Zhou H., Luo J.S.**, Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer on a flat plate and its analysis, *Science China. Ser. G: Physics, Mechanics & Astronomy*. 48 (5) (2005) 626–640.
3. **Tsuji T., Kajitani T.**, Turbulence characteristics and heat transfer enhancement of a natural convection boundary layer in water along a vertical plate, *Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference (IHTC-13)*. Sydney, Australia, August 13–18. 2006. USA: Bigell House Inc, 2006.
4. **Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y.**, Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 52 (19–20) (2009) 1723–1734.
5. **Abdollahzadeh M., Esmailpour M., Vizinho R., et al.**, Assessment of RANS turbulence models for numerical study of laminar-turbulent transition in convection heat transfer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 115, B (December) (2017) 1288–1308.
6. **Henkes R.A.W.M., Hoogendoorn C.J.**, Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 32 (1) (1989) 157–169.
7. **Peeters T.W.J., Henkes R.A.W.M.**, The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 35 (2) (1992) 403–420.
8. **Smirnov E.M., Levchenya A.M., Zhukovskaya V.D.**, RANS-based numerical simulation of the turbulent free convection vertical-plate boundary layer disturbed by a normal-to-plate circular cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 144 (December) (2019) 118573.
9. **Chumakov Yu.S., Levchenya A.M., Khrapunov E.F.**, An experimental study of the flow in the area of influence of a cylinder immersed in the free convective boundary layer on a vertical surface, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 13 (1) (2020) 66–77.
10. **Tsuji T., Nagano Y.**, Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 31 (8) (1988) 1723–1734.
11. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.**, Ten years of industrial experience with the SST turbulence model turbulence, *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Vol. 4. Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, 12–17 October, 2003, Pp. 625–632.
12. **Orszag S.A., Yakhot V., Flannery W.S., et al.**, Renormalization group modeling and turbulence simulations, In: *Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March (1993) 1031.
13. **Wilcox D.C.**, *Turbulence modeling for CFD*, 2nd edition, DCW Industries, Inc. La



Canada, California, 1998. turbulence models for engineering applications,  
14. **Menter F.R.**, Two-equation eddy-viscosity AIAA Journal. 32 (8) (1994) 1598–1605.

*Received 31.03.2020, accepted 29.04.2020.*

#### **THE AUTHORS**

**LEVCHENYA Alexander M.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

levchenya\_am@spbstu.ru

**TRUNOVA Seraphima N.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

seraphimatr@yandex.ru

**KOLESNIK Elizaveta V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

kolesnik\_ev@mail.ru