DOI: 10.18721/JPM.13204
УДК 530.1

ОПЕРАЦИЯ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ФУРЬЕ

М.Р. Петриченко, Т.А. Мусорина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Применяется алгебра неограниченных операторов дифференцирования t, действующая над кольцом дифференцируемых функций. Аналитическое представление дробной степени оператора t используется для построения резольвент трех предельных задач для уравнения Фурье. Периодические решения предельных задач Фурье в алгебре операторов дифференцирования совпадают с классическими решениями. Расширение $t+2$ – непрерывный спектр преобразования Фурье, позволяет получить точные решения трех предельных задач для области любой размерности $d > 1$.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, формула Лиувилля, кольцо операторов, обратный оператор, носитель, распределение

Ссылка при цитировании: Петриченко М.Р., Мусорина Т.А. Операция дробного дифференцирования в предельных задачах Фурье // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 41–52. DOI: 10.18721/JPM.13204

FRACTIONAL DIFFERENTIATION OPERATION IN THE FOURIER BOUNDARY PROBLEMS

M.R. Petrichenko, T.A. Musorina

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

We use the algebra of unbounded differentiation t operators acting on the ring of differentiable functions. The analytical representation of the fractional degree of the t operator is used to construct the resolvents of three boundary problems for the Fourier equation. Periodic solutions of limiting Fourier problems in the algebra of differentiation operators coincide with classical solutions. The $t+2$ extension is a continuous spectrum of the Fourier transform and allows us to obtain exact solutions of three limit problems for a domain of any dimension $d > 1$.

Keywords: differential equation, Abel–Liouville formula, ring of operators, inverse operator, carrier, distribution

Citation: Petrichenko M.R., Musorina T.A., Fractional differentiation operation in the Fourier boundary problems, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 41–52. DOI: 10.18721/JPM.13204

Введение

Классическая теория теплоустойчивости стеновых конструкций [1] использует аппарат теории рядов Фурье и, в известном смысле, порождается этим аппаратом. Это обстоятельство не случайно, поскольку автор указанной работы Г.А. Селиверстов являлся специалистам по теории рядов Фурье. Аппарат тригонометрических рядов достаточен, если предельные распределения температур внешних источников принадлежат L_p ($p > 1$) на множестве значений времени t. На таком множестве разложения Фурье сходятся почти везде. Но в приложениях приведенное условие избыточно. Как правило, распределение температуры источников в лучшем случае непрерывно, однако, согласно утверждению Е. Титчмарша [2], «ничего подобного для сходимости разложений Фурье почти всюду, доказать не удалось» [2, с. 420–421]. Аппарат Фурье-разложений становится неудобным в смешанной предельной задаче, особенно если внешний источник тепла зависит от параметра t (времени).

Настоящее исследование посвящено способам решения предельных задач для уравнения Фурье в виде равенств, содержащих функции от дифференциальных операторов и сравнению полученных распределений с известными точными решениями.

Актуальность данной работы связана с необходимостью решения задач теплоустойчивости строительных ограждений.

Ключевые подходы к решению задач

В данной работе сформулированы и обоснованы следующие утверждения.

1. Решение второй и третьей предельных задач для уравнения Фурье достигается из решения первой предельной задачи обращением оператора дифференцирования.

2. Меры носителей распределения первообразной $x(t,s)$, δ_x и производной первообразной $y{:=}-\partial x/\partial s$, δ_y в предельной задаче первого рода удовлетворяют неравенству $\delta_y/\delta_x \ge 1$.

3. Увеличение размерности области не увеличивает меры носителей распределения.

Вследствие утверждения 3 термическое сопротивление полупространства не превышает термического сопротивления полуплоскости; в свою очередь термическое сопротивление полуплоскости не превышает термического сопротивления полупрямой.

В качестве вспомогательного приема будет использоваться следующее представление ряда Тейлора (сдвига) для функций $f(t)$, аналитических на полупрямой $t > 0$, $f \in C^\infty(0,\infty)$:

$$f(t+s) = \exp(s\partial_t) f(t),$$

и его обращение

$$f(t) = \exp(-s\partial_t) f(t+s),$$

содержащие целые степени оператора дифференцирования ∂_t.

Простые выражения для мер носителей $\delta_{x,y}$

Использование операторных норм дробных степеней операторов ∂_t позволяет получить простые выражения для мер носителей $\delta_{x,y}$.

Предварительные сведения. Операция дробного дифференцирования связана с решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения произвольного целого положительного (натурального) порядка $s > 0$.

Пусть

$$t \in \mathfrak{D}(x) \subset \mathcal{C}^{(s)}\left(R^1\right), y \in \mathfrak{J}(x) \subseteq \mathfrak{L}_1^{(loc)}\left(R^1\right).$$

Тогда задача Коши

$$\begin{gathered}\partial_t^s x = y, \partial_t^r x(0) = 0, \\ r = 0(1)s-1, \partial_t := d/dt\end{gathered} \tag{1}$$

имеет следующее решение [3]:

$$x(t) = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{s-1} y(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

или в символическом виде

$$x(t) = \partial_t^{-s} y(t). \tag{2а}$$

При s нецелом формула (2) допускает расширение:

$$\begin{gathered}\partial_t^{-s} y(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t (t-\tau)^{s-1} y(\tau)\,d\tau, \\ \Gamma(s) := (s-1)!, s > 0.\end{gathered} \tag{2б}$$

Если $s = \sigma + i\rho$, $\sigma > 0$, то формула (2б) принимает вид

$$\partial_t^{-(\sigma+i\rho)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma+i\rho)}\int_0^t (t-\tau)^{\sigma-1}\Big(\cos\big(\rho\ln(t-\tau)\big) + i\sin\big(\rho\ln(t-\tau)\big)\Big) y(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $s = 1/2$. Тогда, в силу выражения (2б), получаем формулу Абеля:

$$\partial_t^{-1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \tag{2в}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} y\left(t - z^2\right) dz.$$

С помощью полученной формулы (2в) можно рассчитать производные от степеней t, например,

$$\partial_t^{-1/2} 1 = 2\sqrt{t/\pi},\ \partial_t^{1/2} 1 = 1/\sqrt{t\pi},$$

$$\partial_t^{-1/2} t = \frac{4\sqrt{t^3}}{3\sqrt{\pi}},\ \partial_t^{1/2} t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

и для всякого $n > 0$:

$$\partial_t^{-1/2} t^n = t^{n+1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)},$$

$$\partial_t^{1/2} t^n = t^{n-1/2} \frac{(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}.$$

Ясно, что при любом $0 < s < 1$ ядро оператора ∂_t^{-s}, $N(\partial_t^{-s})$ содержит только один элемент: $y = 0$.

Коммутация. По определению, справедливо следующее выражение:

$$\partial_t^{1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau =$$

$$= \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial_t y(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau =$$

$$= \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}} + \partial_t^{-1/2}\left(\partial_t y(t)\right),$$

или

$$\left(\partial_t \partial_t^{-1/2} - \partial_t^{-1/2} \partial_t\right) y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{t\pi}}. \tag{3}$$

Если $y(0) = 0$, то оператор ∂_t коммутирует со своей отрицательной дробной степенью, например – 1/2:

$$\left(\partial_t \partial_t^{-1/2} - \partial_t^{-1/2} \partial_t\right) y(t) = 0, \tag{3а}$$

или в симметрическом виде:

$$\partial_t^{-1/2} = \partial_t^{-1} \partial_t^{-1/2} \partial_t, \partial_t = \partial_t^{-1/2} \partial_t \partial_t^{1/2}.$$

Отсюда следует, что в коммутационном случае оператор ∂_t и его дробные степени самоподобны (автомодельны).

Если в задаче Коши (1)

$$y(t \pm t_0) - y(t) = 0, \forall |t| > 0,\ t > 0$$

– примитивный период и ищется периодическое решение такое, что

$$x(t \pm t_0) - x(t) = 0, \forall |t| > 0,$$

то условие периодичности можно заменить однородным условием [3]:

$$\partial_t^r x(-\infty) = 0,\quad r = 0(1)s-1,$$

и тогда решение периодической задачи Коши принимает вид

$$\partial_t^{-s} x(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{s-1}\ y(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \omega^{s-1} y(t-\omega) d\omega.$$

Пусть $s = 1/2$, и тогда предыдущая формула принимает вид

$$\partial_t^{-1/2} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y\left(t - z^2\right) dz. \tag{2г}$$

Таким образом, в периодической предельной задаче коммутант равен нулю и дробная степень оператора ∂_t перестановочна со свой обратной степенью.

Соотношения (2) – (2г) известны как равенства Абеля – Лиувилля [13]. Приложения к различным задачам механики имеются в работе Капуто (к сожалению, авторам данной статьи она недоступна; эта книга цитируется во многих более поздних работах, например в [5 – 17], где имеются дальнейшие ссылки).

Расширение 1. При любом $s > 0$ обращение оператора дробного дифференцирования имеет вид

$$\partial_t^{-s} x = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{t^s} y\left(t - z^{1/s}\right) dz$$

для апериодической задачи и вид

$$\partial_t^{-s} x = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} y\left(t - z^{1/s}\right) dz$$

– для периодической задачи.

Действительно, если

$$y(t \pm 1) - y(t) = 0, \forall |t| > 0,$$

то условие Коши на все производные имеет вид (по Ляпунову):

$$\partial_t^s x(-\infty) = 0.$$

Расширение 2. Рассмотрим уравнение, зависящее от параметра λ:

$$(\partial_t - \lambda) x(t) = y(t).$$

Очевидно, что ядро $\mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)$ оператора $\partial_t - \lambda$ состоит из экспонент $x(t) = \exp(\lambda t)$. Поэтому решение уравнения есть

$$x = (\partial_t - \lambda)^{-1} y + z, z \in \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda).$$

Уравнение

$$(\partial_t - \lambda)^n x(t) = y(t)$$

имеет решение

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-n} y(t) + (z),$$

$$(z) \in \mathfrak{N}\left((\partial_t - \lambda)^n\right).$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{N}(\partial_t - \lambda) \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^2 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^n.$$

Интегральное представление решения однородной задачи Коши имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \exp\left(\lambda(t-\tau)\right) y(\tau) d\tau.$$

Здесь ядро состоит из функций

$$P_{n-1}(t) \exp(\lambda t) = z(t) \subset \mathfrak{N}(\partial_t - \lambda)^n,$$

где $P_s(t)$ – полином степени s.

Продолжим решение однородной задачи Коши на дробные значения n:

$$x(t) = (\partial_{\hat{a}} - \lambda)^{-n} y(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \exp\left(\lambda(t-\tau)\right) y(\tau) d\tau.$$

Пусть $n = 1/2$; тогда

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-1/2} y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\exp\left(\lambda(t-\tau)\right)}{\sqrt{t-\tau}} y(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(\lambda z^2\right) y\left(t - z^2\right) dz.$$

Для сходимости интегралов достаточно выполнения следующего условия для вещественной части числа λ: Reλ < 0.

Аналогично, периодическое решение имеет вид

$$x(t) = (\partial_t - \lambda)^{-1/2} y(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(\lambda z^2\right) y\left(t - z^2\right) dz.$$

Расширение 3. Для произвольного $n > 0$ формулы обращения дробных степеней оператора имеют вид

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{t^n} \exp\left(\lambda z^{1/n}\right) y\left(t - z^{1/n}\right) dz$$

для апериодической задачи и вид

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \exp\left(\lambda z^{1/n}\right) y\left(t - z^{1/n}\right) dz$$

– для периодической задачи, причем Reλ < 0.

Систематическое изложение этого расширения имеется в монографии [13], но тривиальная замена $\sqrt{t}=z$, по-видимому, авторами не использовалась. Эта замена удобна тем, что позволяет представить оператор дробного дифференцирования в виде интеграла вероятностей. Действительно, в формуле (2г) подынтегральную функцию можно разложить в ряд Тэйлора:

$$x\left(t-z^2\right)=\exp\left(-z^2\partial_t\right)x\left(t\right),$$

и тогда сразу же получается левая часть формулы (2г).

В работах Дж. Нэша и Н.О. Кейпера, используемых в монографии М.М. Громова [18], сформулирован так называемый h-принцип: дифференциальные операторы R, связывающие частные производные, рассматриваются как алгебраические соотношения для частных производных.

Обоснование h-принципа содержит книга [18], где имеется библиография публикаций, доведенная до 1990 г. Пространства Соболева функций, имеющих (обобщенные) производные дробного порядка, изучены Л.Н. Слободецким в цикле работ [19, 20], развивающих ранние идеи И.Я. Бакельмана [21] по геометрической теории уравнений.

Анализ предельных задач Фурье для полупрямой $s>0$

Первая предельная задача. Рассмотрим первую предельную задачу в неограниченной области $t>0$, $s>0$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial s^2},\, x\left(t,0\right)=x_0\left(t\right). \qquad (4)$$

Найдем формальное решение этой предельной задачи методом разделения переменных.

Пусть

$$x\left(t,s\right)=\exp\left(-s\alpha\right)x_0\left(t\right), \qquad (5)$$

причем параметр $\alpha>0$, что гарантирует убывание $x(t,s)$, равномерное по t. В этом случае подстановка равенства (5) в уравнение задачи (4) приводит к условию

$$\exp\left(-s\alpha\right)\left(\partial_t-\alpha^2\right)x_0\left(t\right)=0,$$

откуда получается, что $\alpha=\partial_t^{1/2}$, и, в силу равенства (5), решение предельной задачи (4) имеет вид

$$x\left(t,s\right)=\exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right)x_0\left(t\right). \qquad (6)$$

***Верификация решения* (6).** *Шаг* 1. Классическое решение предельной задачи (4) имеет следующий вид:

$$x\left(t,s\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{s}{2\sqrt{t}}}^{\infty}x_0\left(t-\frac{s^2}{4z^2}\right)\exp\left(-z^2\right)dz. \qquad (7)$$

Функцию $x_0\left(t-\frac{s^2}{4z^2}\right)$ разложим в ряд Тейлора по степеням $\frac{s^2}{4z^2}$:

$$x_0\left(t-\frac{s^2}{4z^2}\right)=\exp\left(-\frac{s^2\partial_t}{4z^2}\right)x_0\left(t\right).$$

Тогда решение (7) принимает вид [4]:

$$x\left(t,s\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{s}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\exp\left(-z^2-\frac{s^2\partial_t}{4z^2}\right)dz\left(x_0\left(t\right)\right). \qquad (7а)$$

Но, как известно из учебного курса анализа бесконечно малых, разработанного Ш.-Ж. Валле-Пуссеном[3],

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-u^2-\alpha/u^2\right)du=\exp\left(-2\sqrt{\alpha}\right).$$

Поэтому, если нижний предел в интеграле (7а) равен нулю, то формула (7а) совпадает с формулой (6). Таким образом, формула (7а) принимает следующий вид:

$$x\left(t,s\right)=\exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right)x_0\left(t\right)-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{s}{2\sqrt{t}}}\exp\left(-z^2-\frac{s^2\partial_t}{4z^2}\right)dz\cdot x_0\left(t\right). \qquad (7б)$$

Следовательно, при значениях $\frac{s}{2\sqrt{t}}\ll 1$ формулы (7б) и (6) дают близкие результаты.

Шаг 2. Если $x_0(t)$ – периодическая функция времени, т.е.

$$x_0(t \pm t_0) = x_0(t),$$

где $t_0 < 0$ – примитивный период, то вместо решений (7), (7а) и (7б) получим решение вида

$$x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x_0\left(t - \frac{s^2}{4z^2}\right) \exp\left(-z^2\right) dz, \quad (7в)$$

и тогда решения (7в) и (6) тождественны. Чтобы это показать, достаточно разложить подынтегральную функцию в решении (7в) в ряд Тейлора, и тогда получим:

$$x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-z^2 - \frac{s^2 \partial_t}{4z^2}\right) dz \cdot x_0(t) =$$
$$= \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0(t),$$

что и доказывает такую тождественность.

Итак, формула (6) и следствия из нее справедливы для периодического по параметру t предельного значения $x(t,0) = x_0(t)$, т.е. для решения квазистационарной предельной задачи теплопроводности.

Вторая предельная задача. Из формулы (6) вытекает, что взятая с обратным знаком производная $y(t,s) = -\frac{\partial x}{\partial s}$ вычисляется следующим образом:

$$y(t,s) = \partial_t^{1/2} \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) x_0(t). \quad (8)$$

Пусть $s = 0$. В силу выражения (8),

$$y(t,0) := y_0(t) = \partial_t^{1/2} x_0(t),$$
$$x_0(t) = \partial_t^{-1/2} y_0(t),$$

и решение второй предельной задачи, в силу решения (6), имеет вид

$$x(t,s) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right) \partial_t^{-1/2} y_0(t). \quad (9)$$

Третья предельная задача. Указанная задача для уравнения Фурье формулируется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s=0} + \beta\left(x_e - x_0\right) = 0, \quad (10)$$

где x_e – потенциал внешнего источника, β – коэффициент переноса.

Тогда равенство (10) принимает вид

$$\left(\partial_t + \beta\right) x_0(t) = \beta\, x_e,$$

откуда следует, что

$$x_0(t) = \left(\partial_t + \beta\right)^{-1} \left(\beta x_e\right),$$
$$x(t,s) = \exp\left(-s\partial_t^{1/2}\right)\left(\left(\partial_t + \beta\right)^{-1}\left(\beta\, x_e\right)\right). \quad (11)$$

Итак, если предельные параметры y_0, x_e, β – периодические функции времени, то решения (9) и (11) совпадают с классическими решениями.

Мера носителей распределений для полупрямой $s > 0$

Носитель распределения $x(t,s)$, $\mathrm{supp}(x(t,s))$ определяем как множество значений координаты s, на котором сосредоточено распределение $x(t,s)$. Для непрерывной плотности распределения $x(t,s)$, носитель определим как толщину x-слоя, отнесенную к предельному значению плотности, $x_0(t)$:

$$\delta_x(t) := \frac{1}{x_0} \int_0^\infty x(t,s)\, ds.$$

В силу решения (6), толщина x-слоя выразится как

$$\delta_x(t) = \frac{\partial_t^{-1/2} x_0(t)}{x_0(t)}.$$

В случае периодического распределения $x_0(t)$ указанная толщина следует выражению

$$\delta_x(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, x_0(t)} \int_0^\infty x_0\left(t - z^2\right) dz.$$

Аналогично, толщина y-слоя выразится как

$$\delta_y(t) := \frac{1}{y_0(t)} \int_0^\infty y(t,s)\, ds = \frac{x_0(t)}{\partial_t^{1/2} x_0(t)} =$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{x_0(t)}{\int\limits_0^\infty \dot{x}\left(t-z^2\right)dz},$$

причем точкой обозначена производная по всему аргументу $t-z^2$.

Лемма 1. *Отношение толщин слоев («формпараметр»), которое выражается формулой*

$$\delta_y/\delta_x=\frac{x_0^2}{\partial_t^{1/2}x_0\cdot\partial_t^{-1/2}x_0}=$$

$$=\frac{\pi x_0^2(t)}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^\infty x_0\left(t-z^2\right)dz\right)^2\right)^{-1},$$

имеет значение не менее единицы для всякого ограниченного распределения $x_0(t)$.

Доказательство. Действительно, приведенное выражение можно записать в виде

$$\delta_y/\delta_x=\frac{\pi}{2}\frac{\partial_t^{-1}x_0^2}{\left(\partial_t^{-1}x_0\right)^2}\ge\frac{\pi}{2}>1.$$

Здесь для оценки интегралов использовано неравенство Коши.

В качестве иллюстрации справедливости доказанной леммы приведем пример, позволяющий непосредственно подсчитать длины носителей. Для прямой (луча) $s>0$ распределение $x(t,s)$ имеет вид

$$x(t,s)=\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right),$$

причем

$$x(t,0):x_0(t)-1=x(0,s)=0.$$

Тогда получим следующие формулы:

$$y(t,s):=-\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{t\pi}}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right),$$

$$y(t,0):=y_0(t)=\frac{1}{\sqrt{t\pi}},$$

$$\delta_x=2\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$

$$\delta_y=\sqrt{t\pi},$$

$$\delta_y/\delta_x=\pi/2.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x):=\int\limits_x^\infty\exp\left(-at^m\right)dt, f(0)=\int\limits_0^\infty\exp\left(-at^m\right)dt,$$

где a, m — положительные постоянные, и

$$-f'(x):=\varphi(x)=\exp\left(-ax^m\right), -f(0)=1.$$

Тогда отношение длин носителей функции $f(x)$ *и ее дериватива* $-f'(x)=\varphi(x)$ *(соответственно* δ_φ,δ_f*) составит значение не менее единицы:*

$$\mathcal{K}:=\delta_\varphi/\delta_f=\frac{1}{m}\frac{\left(\Gamma(1/m)\right)^2}{\Gamma(2/m)}\ge 1.$$

Доказательство. Действительно, справедливы следующие формулы:

$$\delta_f=\frac{\int\limits_0^\infty t\exp\left(-at^m\right)dt}{\int\limits_0^\infty\exp\left(-at^m\right)dt,},$$

$$\delta_\varphi=\int\limits_0^\infty\exp\left(-at^m\right)dt,$$

$$\mathcal{K}=\frac{\left(\int\limits_0^\infty\exp\left(-at^m\right)dt\right)^2}{\int\limits_0^\infty t\exp\left(-at^m\right)dt},$$

и остается привести интегралы к эйлеровскому виду.

Лемма 2 доказана.

Результат леммы 2 можно переписать иначе, если использовать формулу удвоения для функции $\Gamma(z)$ [2, 3]:

$$\mathcal{K}=\frac{\pi}{2^{2/m-1}m}\frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(1/m+1/2)}.$$

Пусть $m = 1$, тогда $\mathcal{K} = 1$; если $m = 2$, то $\mathcal{K} = \pi/2$. Легко доказать, используя асимптотику Г-функции, что $\mathcal{K} \underset{m\to\infty}{\to} \infty$.

Итак, для целых убывающих распределений порядка $m > 1$ мера (длина) носителя распределения не превосходит меры носителя дериватива распределения.

В задачах теплопроводности стеновых ограждений величина представляет собой отношение полного сопротивления к активному для одномерной теплопроводной среды (полупрямой $s > 0$) [22].

Предельные задачи Фурье для полуплоскости $s > 0$, $|u| < \infty$

Пусть

$$D(x) = (t,s,u\colon t > 0,\ s > 0,\ |u| < \infty),$$

где u – вторая координата.

Выполняется уравнение Фурье

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \nabla^2_{s,u} x$$

и предельное условие первого рода

$$x(t,0,u) = x_0(t,u).$$

Интегральное по аргументу u преобразование

$$x(t,s,u),\quad \hat{x} = \hat{x}(t,s)$$

определяем как

$$\hat{x}(t,s) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t,s,v)\exp(i\omega v)dv,$$

где верхним значком ^ обозначено преобразование Фурье функции $x(t,s,u)$ по аргументу u.

Преобразование Фурье функции $x(t,s,u)$ удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right)\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial s^2}. \qquad (12)$$

Уравнение (11) можно получить из уравнения (4) путем замены оператора ∂_t оператором

$$\partial_{t,\omega} = \partial_t + \omega^2,$$

где ω – спектральное число.

Предельное условие первого рода ставится как

$$\hat{x}(t,0) = \hat{x}_0(t). \qquad (13)$$

Тогда, по аналогии с решением (6), получаем:

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\hat{x}_0(t). \qquad (6а)$$

Далее, решение второй предельной задачи имеет вид

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\partial^{-1/2}_{t,\omega}\hat{y}_0(t), \qquad (9а)$$

$$\hat{y}_0(t) := -\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial s}\right)_{s=0}.$$

Наконец, решение третьей предельной задачи следует выражению

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial^{1/2}_{t,\omega}\right)\times \times\left(\left(\partial_{t,\omega} + \hat{\beta}\right)^{-1}\left(\beta\hat{x}_e\right)\right). \qquad (11а)$$

В итоге формулы (6а), (9а) и (11а) совпадают с точными решениями периодических предельных задач и получаются из решений одномерных задач заменой оператора ∂_t оператором $\partial_{t,\omega}$.

Обобщение анализа. Уравнение Фурье относительно координат $s, u_1, \ldots, u_{d-1}$ для случая $d > 1$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \sum_{i=1}^{d-1}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i^2},$$

В результате $(d - 1)$-кратного применения преобразования Фурье уравнение записывается как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2\right)\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial s^2},\quad \Omega^2 := \sum_{i=1}^{d-1}\omega_i^2.$$

В привычных обозначениях решение первой предельной задачи имеет вид

$$\hat{x}(t,s) = \exp\left(-s\partial_{t,\Omega}^{1/2}\right)\hat{x}_0, \qquad (6б)$$

где для $(d-1)$-кратного преобразования Фурье введено обозначение

$$\hat{x}_0(t,\omega_1,...,\omega_{d-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\times$$

$$\times\int_0^\infty dv_1...\int_0^\infty dv_{d-1}x_0(t,0,v_1,...,v_{d-1})\times$$

$$\times\exp\left(i\sum_{i=1}^{d-1}\omega_i v_i\right).$$

Обратное преобразование Фурье следует представить как

$$x_0(t,0,u_1,...,u_{d-1}) = \int_0^\infty d\omega_1...\int_0^\infty d\omega_{d-1}\times$$

$$\times\hat{x}_0(t,\omega_1,...,\omega_{d-1})\exp\left(-i\sum_{i=1}^{d-1}\omega_i u_i\right).$$

Если $x_0(t, 0, u_1, \ldots, u_{d-1})$ – периодическая функция аргумента t, то формула (6б) совпадает с точным решением первой предельной задачи Фурье. Формулы (9а) и (11а) также сохраняют силу при замене нижнего индекса ω на индекс Ω.

Возвратимся к задаче теплопроводности, упомянутой в конце раздела «Мера носителей распределений для полупрямой $s > 0$». Можно доказать, что с увеличением размерности бесконечной области, занятой скалярной теплопроводной средой, ее термическое сопротивление не возрастает с увеличением размерности области $d > 1$.

Действительно, для любого значения $d > 1$

$$\left\|\partial_t + \sum_{1\le i\le d-1}\omega_i^2\right\|^{-s} \le \left\|\partial_t^{-s}\right\| \le \left\|\partial_t\right\|^{-s}.$$

Выводы

Применение алгебры неограниченных операторов дифференцирования и проведенный анализ результатов позволили сформулировать следующие заключения.

1. Неограниченный оператор дробного дифференцирования над кольцом непрерывных функций допускает обращение (оно известно как формула Абеля – Лиувилля). Обратный оператор ограничен на функциях из множества $L_1(0,t)$, где $t \le \infty$. Решение второй и третьей предельных задач Фурье получается как результат обращения дифференциального оператора первой предельной задачи.

2. В квазистационарной (периодической) предельной задаче оператор ∂_t коммутирует с любой дробной обратной степенью. В апериодических задачах коммутации степеней оператора нет.

3. Для целых убывающих распределений порядка $m > 1$, мера (длина) носителя распределения $x(t,s)$ не превосходит меры носителя деривативa распределения $y(t,s) = \partial x/\partial s$. Другими словами, толщина пограничного слоя потока тепла (убывающего распределения порядка $m - 1$) должна быть не менее толщины температурного пограничного слоя.

4. Увеличение размерности области $D(x)$ определения искомой функции $x(t,s)$ не увеличивает меры носителей supp(x) и supp(y), при этом $y = \|\nabla x\|$, ($\|\nabla x\|$ – евклидова норма скалярной функции $x(t,s)$). Мера носителя распределения не превосходит меры носителя его производной для любых целых убывающих распределений порядка $m > 1$. Поэтому термическое сопротивление области $D(x)$ с увеличением ее размерности не возрастает: вектор **y** теплового потока получает дополнительную компоненту (дополнительную степень свободы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Селивестров Г.А.** Математическая теория теплоустойчивости // Математический сборник. 1931. Т. 38. № 3–4. С. 70–73.

2. **Титчмарш Е.** Теория функций. Пер. с англ. В.А. Рохлина. М.: Наука, 1980. 464 с.

3. **Валле-Пуссен Ш-Ж.** Курс анализа бесконечно малых. Пер. с франц. Г.М. Фихтенгольца. В 2 тт. Т. 2. Москва – Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1933. 464 с.

4. **Жукова-Малицкая Г.К., Кузьмин Ю.Н.** Математическая физика. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1974. С. 81, задача № 185.

5. **Metzler R., Klafter J.** The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach // Physics Reports. 2000. Vol. 339. No. 1. Pp. 1–77.

6. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

7. **Нахушев А.М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

8. **Псху А.В.** Решение краевых задач для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.

9. **Псху А.В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

10. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 272 p.

11. **Le Mehauté A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.** (Eds.) Fractional differentiation and its applications. In 3 Vols. Vol. 1. Bordeaux: Bordeaux University, 2005. 251 p.

12. **Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.** Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 4. С. 54–68.

13. **Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н.** О применении дробного исчисления Римана – Лиувилля для описания распределений вероятностей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 18. 21 с. Режим доступа: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014.

14. **Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.** Симметрийные свойства дифференциальных уравнений переноса дробного порядка // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9. № 1. С. 59–64.

15. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.** Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. No. T136. P. 014016.

16. **Ibragimov N.H.** (Ed.). CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1. CRCPress, Boca Raton, 1994. 430 p.

17. **Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.** Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 34. С. 3–83.

18. **Громов М.** Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990. 534 с.

19. **Слободецкий Л.Н.** Обобщенные пространства Соболева и их приложения к краевым задачам в частных производных // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.

20. **Слободецкий Л.Н.** Оценка в L_p решений эллиптических систем // Доклады Академии наук СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 616–619.

21. **Бакельман И.Я.** Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Физматлит, 1962. 340 с.

22. **Мусорина Т.А., Заборова Д.Д., Петриченко М.Р.** Математический аппарат для определения термического сопротивления скалярной среды // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 8. С. 1037–1045.

Статья поступила в редакцию 31.10.2019, принята к публикации 05.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, профессор Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

МУСОРИНА Татьяна Александровна – *ассистент Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
flamingo-93@mail.ru

REFERENCES

1. **Selivestrov G.A.,** Mathematical theory of thermostable, Matematicheskii Sbornik. 38 (3–4) (1931) 70–73.

2. **Titchmarsh E.C.,** The theory of functions, 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, 1939.

3. **De laVallée-Poussin Ch.-J.,** Cours d'analyse infinitésimale, Paris, 1914.

4. **Zhukova-Malitskaya G.K., Kuzmin Yu.N.,** Matematicheskaya fizika [Mathematical physics], Leningrad Polytechnic Institute Publishing, Leningrad, 1974, P. 81, Example 185 (in Russian).

5. **Metzler R., Klafter J.,** The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, Physics Reports. 339 (1) (2000) 1–77.

6. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.,** Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and their applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).

7. **Nakhushev A.M.,** Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).

8. **Pskhu A.V.,** Solution of a boundary value problem for a fractional partial differential equation, Differential Equations. 39 (8) (2003)1150–1158.

9. **Pskhu A.V.,** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional partial differential equations], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).

10. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.,** Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

11. **Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.** (Eds.), Fractional differentiation and its applications, Bordeaux University, Bordeaux, 2005.

12. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, Ufa Mathematical Journal. 4 (4) (2012) 54–67.

13. **Zenyuk D.A., Orlov Yu.N.,** On the application of Riemann–Liouville fractional calculus to the analysis of probability distributions, Keldysh Institute preprints, 2014, 018. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014.

14. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Simmetriynyye svoystva differentsialnykh uravneniy perenosa drobnogo poryadka [Symmetrical properties of fractional differential transfer equations], Transactions of Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences. 9 (1) (2012) 59–64 (in Russian).

15. **Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.,** Symmetry properties of fractional diffusion equations, Physica Scripta. (T136) (2009) 014016.

16. **Ibragimov N.H.** (Ed.), CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1. Symmetries, exact solutions, and conservation laws, CRC Press Inc., Boca Raton (1994).

17. **Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh.,** Nelokalnyye simmetrii. Evristicheskiy podkhod [Nonlocal symmetries, Heuristic approach], In: Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya "Sovremennye Problemy Matematiki. Noveyshie Dostizheniya", VINITI, Moscow. 34 (1989) 3–83.

18. **Gromov M.,** Partial differential relations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

19. **Slobodetskiĭ L.N.,** Obobshchennyye

prostranstva Soboleva i ikh prilozheniya k krayevym zadacham v chastnykh proizvodnykh [Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems in partial derivatives], Uchenyye Zapiski of LSPI named after Herzen. 197 (1958) 54–112.

20. **Slobodetskiĭ L.N.,** Estimates in L_p of solutions of elliptic systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 123 (4) (1958) 616–619(in Russian).

21. **Bakelman I.Ya.,** Geometricheskiye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy [Geometric methods for solving elliptic equations], Fizmatlit, Moscow, 1962 (in Russian).

22. **Musorina T.A., Zaborova D.D., Petrichenko M.R.,** Mathematical apparatus for determination of homogenous scalar medium thermal resistance, Vestnik MGSU. 14 (8) (2019) 1037–1045 (in Russian).

Received 31.10.2019, accepted 05.04.2020.

THE AUTHORS

PETRICHENKO Mikhail R.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fonpetrich@mail.ru

MUSORINA Tatiana A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
flamingo-93@mail.ru