DOI: 10.18721/JPM.13205
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ЦЕПОЧКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМНО-ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ОБЩИМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ЧИСЛОМ

А.С. Бердников[1], К.В. Соловьев[2,1], Н.К. Краснова[2]

[1] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение свойств взаимно-однородных функций (ВОФ), которые являются обобщением функций, однородных по Эйлеру; ВОФ могут использоваться при синтезе электрических и магнитных полей электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами. Рассматривается цепочка функций, соответствующая кратным вещественным собственным значениям матрицы базовых функциональных уравнений для ВОФ. Выведены функциональные соотношения, характеризующие такие функции, а также общие формулы для функций, являющихся решениями полученных функциональных соотношений. Показано, что полученный класс функций представляет собой уточнение присоединенных однородных функций Гельфанда. Исследованы типичные дифференциальные и интегральные свойства полученного класса функций, а для дифференцируемых функций доказано обобщение теоремы Эйлера (критерий Эйлера).

Ключевые слова: функциональное уравнение, однородная функция, присоединенная однородная функция, взаимно-однородные функции

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Цепочки фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 53–71. DOI: 10.18721/JPM.13205

CHAINS OF FUNDAMENTAL MUTUALLY HOMOGENEOUS FUNCTIONS WITH A COMMON REAL EIGENVALUE

A.S. Berdnikov[1], K.V. Solovyev[2,1], N.K. Krasnova[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This work continues our studies in properties of the mutually homogeneous functions (MHF) being a generalization of Euler homogeneous functions. MHF can be used in the synthesis of electric and magnetic fields for electron systems and ion-optical ones with special properties. A chain of functions corresponding to multiple real eigenvalues of the matrix of basic functional relations for MHF has been considered. Functional relations answering such functions were derived. General formulas for the solutions of the obtained functional relations were derived. The obtained functions were shown to be a refinement of the associated homogeneous functions introduced by Gel’fand. Typical differential and integral properties of the obtained functions were investigated, and a generalization of the Euler theorem was proved (Euler criterion) for differentiable functions.

Keywords: functional equation, homogeneous function, associated homogeneous function, mutually homogeneous functions

Citation: Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K., Chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common real eigenvalue, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 53–71. DOI: 10.18721/JPM.13205

Введение

Данная статья продолжает серию работ [1 – 4], посвященных исследованию свойств однородных гармонических функций и их использованию при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами [5 – 8]. Она является прямым продолжением публикации [9] и в значительной степени опирается на приводимые в ней результаты.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной p, если при любых вещественных значениях λ выполняется тождество

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots , x_n). \quad (1)$$

Основные свойства и теоремы о функциях, однородных по Эйлеру, описываются в книге [10]. В частности, любая однородная функция степени p может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= x_1^p\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ – некоторая функция $(n – 1)$ переменных, а любая функция вида (2) будет однородной функцией степени p.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется положительно однородной по Эйлеру степени p, если тождество (1) выполняется при любых положительных вещественных значениях λ, а при отрицательных вещественных значениях λ его справедливость не гарантируется (например, функция $f(x)=\sqrt{x}$). Ограничение $\lambda > 0$, в частности, позволяет без опасений работать с произвольными вещественными степенями однородности в формуле (1): для произвольной вещественной степени p требуются определенные усилия, чтобы доопределить степенную функцию λ^p при отрицательных значениях λ так, чтобы сохранить условие

$$\lambda_1^p \lambda_2^p = (\lambda_1\lambda_2)^p.$$

Положительно однородную функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\text{при } x_1 > 0 \quad f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \\ &= x_1^p\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\text{при } x_1 < 0 \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= (-x_1)^p\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут функциями от $(n – 1)$ переменных, не зависящими друг от друга (в общем случае).

Формулы (3) и (4) получаются из соотношения (1) при подстановке в него значений $\lambda = +1/x_1$ при $x_1 > 0$, и $-1/x_1$ при $x_1 < 0$, если функции $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ определить как

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$g(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n).$$

При $x_1 = 0$ функция $f(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ будет положительно однородной по Эйлеру степени p от меньшего числа переменных, поэтому к ней, в свою очередь, можно применить параметризацию вида (3), (4). Рекурсивный процесс конструирования полной параметризации для положительно однородной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ завершается, когда исчерпывается набор переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Рассмотрим функции вида

$$\begin{aligned} &\text{при } x_1 > 0: \quad f_{p,k}(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \\ &= (1/k!)\, x_1^p\, (q \ln x_1)^k \times \\ &\times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \end{aligned} \quad (5)$$

при $x_1 < 0$: $f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= (1/k!)\,(-x_1)^p\,(q\ln(-x_1))^k \times \times g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{6}$$

где p, q — вещественные константы; k — целочисленный индекс ($k = 0, 1, 2, \ldots$); $h(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, $g(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ — некоторые функции от $(n - 1)$ переменных; значения переменной x_1 удовлетворяют условию $x_1 \neq 0$.

Если даны функциональные соотношения

$$f_i(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = = \Sigma a_{ij}(\lambda)\, f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, k$, а функции $a_{ij}(\lambda)$ заранее неизвестны, то в частном случае, когда все собственные числа матрицы $\|a_{ij}(\lambda)\|$ будут вещественными числами p, равными друг другу (см. статью [9]), функции вида (5), (6) могут претендовать на роль возможных решений для функциональных уравнений вида (7).

С помощью прямой подстановки можно убедиться, что для $\forall\lambda > 0$ функции (5), (6) подчиняются функциональным соотношениям

$$f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\right) = = \sum_{j=0,k} a_{k-j}\left(\lambda\right) f_{p,j}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \tag{8}$$

где $a_j(\lambda) = (1/j!)\,\lambda^p\,(q\ln\lambda)^j$.

Задачами данной работы являются, во-первых, вывод общих формул для функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям (8) при условии, что функции $a_j(\lambda)$ имеют вид

$$a_j(\lambda) = (1/j!)\,\lambda^p\,(q\ln\lambda)^j,$$

а во-вторых, — доказательство некоторых важных теорем о полученном классе вещественных функций многих переменных.

Связь функций вида (5) с присоединенными однородными функциями Гельфанда

Функции вида (5) и (6), удовлетворяющие функциональным соотношениям вида (8), представляют собой уточнение присоединенных однородных функций Гельфанда, как они определены в работах [11, 12]. Однако в указанных публикациях ошибочно предполагается, что система функциональных соотношений (8) представляет собой двухдиагональную матрицу с заранее неизвестными функциями $a(\lambda)$ для главной диагонали и $b(\lambda)$ для вспомогательной диагонали. К сожалению, эта незначительная ошибка в формальном определении, не влияющая на остальные фундаментальные результаты, полученные в работах [11, 12], в дальнейшем была некритично растиражирована в последующих публикациях других авторов [13 – 20]. Только в работах [21, 22] удается обнаружить указание на эту неточность, но и здесь имеется пробел в рассуждениях, заключающийся в пропуске множителя $1/k!$ в соответствующих формулах. Этот недостаток отсутствует в более ранних формулах, приведенных в монографии [23]. Кроме того, в публикациях [21 – 23] после проверки требуемых функциональных соотношений для рассматриваемых функций (т. е. после получения частного решения) анализ формы *общего* решения для полученных функциональных уравнений не выполнен.

Легко показать, что по крайней мере для дифференцируемых функций[1] у двухдиагональной системы функциональных уравнений вида (8) невырожденные решения, отличные от тождественного нуля, могут иметься только при $a(\lambda) = \lambda^p$ и $b(\lambda) = \lambda^p(q\ln\lambda)$, причем эти решения (если они существуют) обязаны иметь вид линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, составленных из функций вида (7) [21]. К сожалению, уже при $k = 3$ функции (7) перестают удовлетворять системе двухдиагональных соотношений (8) и можно показать, что у этих функциональных соотношений при $k \geq 3$ решения отсутствуют в принципе [21].

[1] На самом деле для такого вывода достаточно требования, чтобы каждая из функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ была непрерывной хотя бы в одной точке $\lambda > 0$. Строгое доказательство этого утверждения несложно, но выходит за рамки основной темы данной работы.

Одной из целей данной работы является возвращение математической строгости присоединенным однородным функциям Гельфанда, а также исследование некоторых интересных свойств полученных функций.

Следует подчеркнуть, что при этом рассматривается достаточно узкий подкласс функций, максимально приближенный к присоединенным однородным функциям Гельфанда. Общее решение функциональных уравнений (8) с заранее неизвестными функциями $a_j(\lambda)$ гораздо шире и планируется как тема отдельной публикации.

Общие формулы

Чтобы не смешивать рассматриваемые нами конструкции с присоединенными однородными функциями в смысле определений Гельфанда [11, 12], добавим следующее определение.

Определение. *Полубесконечная цепочка функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *где* $k = 0, 1, 2, ...$, *а функции* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *при всех* $\lambda > 0$ *удовлетворяют функциональным соотношениям*

$$f_{p,k}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{k-j} \times \\ \times f_{p,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9}$$

называется фундаментальными присоединенными однородными функциями степени p и порядка k.

Если изменить порядок суммирования, то соотношения (9) можно записать в эквивалентном виде как

$$f_{p,k}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/j!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{j} \times \\ \times f_{p,k-j}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Параметр q отвечает за нормировку фундаментальных присоединенных однородных функций и не влияет на их остальные свойства. После подстановки

$$f_{p,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = q^j\, F_{p,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

параметр q сокращается в функциональных соотношениях (9), а функции $F_{p,j}(x_1, x_2, ..., x_n)$ приобретают смысл нормированных фундаментальных присоединенных однородных функций, соответствующих выбору $q = 1$.

Требуется найти формулы общего вида для функций, удовлетворяющих функциональным соотношениям (9), аналогичные формулам (3) и (4). Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *степени p и порядка k, которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям* (9), *при* $x_1 \neq 0$ *может быть взаимно-однозначным образом представлена в следующем виде:*

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, x_1^{\,p}\, (q \ln x_1)^{k-j} \times \\ \times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \tag{10}$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\, (1/(k-j)!)\, (-x_1)^p\, (q \ln (-x_1))^{k-j} \times \\ \times g_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{11}$$

где $g_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ *– вещественные функции от* $(n - 1)$ *переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Справедливо также обратное утверждение: цепочка функций, заданная формулами (10) *и* (11), *подчиняется при* $x_1 \neq 0$ *функциональным соотношениям* (9) *при произвольном выборе функций* $g_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ *и* $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$.

При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ процесс конструирования параметризации для фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ степени p и порядка k, осуществляется по аналогии с формулами (10), (11). Процедура конструирования полной параметризации функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ повторяется рекурсивным образом, пока не будет исчерпан набор переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением случая $x_1 > 0$, так как случай $x_1 < 0$ получается из него после подстановки $x_1 = -x_1$, при которой соотношения (9) сохраняются в неизменном виде.

При $k = 0$ соотношения (9) превращаются в соотношение однородности (1), а функция $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ оказывается положительно однородной функцией степени p, которая определена при $x_1 > 0$. Следовательно, формула (10) при $k = 0$ будет верна, так как совпадает с формулой (3) для положительно однородных функций, а функция $h_0(t_2, t_3, ..., t_n)$ взаимно-однозначным образом определяется по имеющейся функции $f_{p,0}(x_1, x_2,..., x_n)$.

Привлечем метод математической индукции.

Пусть формулы (10) доказаны для всех значений k, удовлетворяющих неравенству $0 \le k < m$. Запишем функцию $f_{p,m}(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $x_1 > 0$ в виде

$$\begin{aligned} f_{p,m}(x_1, x_2,\ldots, x_n) &= x_1^{\,p}\, H(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \\ &+ \Sigma_{j=0,m-1}\, (1/(m-j)!)\, x_1^{\,p}\, (q \ln x_1)^{m-j} \times \\ &\times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \end{aligned} \qquad (12)$$

где функции $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ для $j = 0, 1, m - 1$ были уже определены на предыдущих шагах доказательства. Требуется определить, какой должна быть функция $H(x_1, x_2, ..., x_n)$, имеющая смысл при при $x_1 > 0$, чтобы при $\forall\lambda > 0$ было выполнено тождество

$$\begin{aligned} & f_{p,m}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) - \\ & - \lambda^p f_{p,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ & - \Sigma_{k=0,m-1}\, (1/(m-k)!)\, \lambda^p\, (q \ln \lambda)^{m-k} \times \\ & \times f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

После упрощения выражения (13) с учетом того, что функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ при $0 \le k < m$ можно заменить на соотношения (10), получим условие:

$$\text{при } \forall\lambda > 0,\ x_1 > 0$$
$$H(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, функция $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ должна быть положительно однородной функцией нулевой степени, определенной при $x_1 > 0$. Это условие является и необходимым, и достаточным для выполнения равенства (13), поскольку все алгебраические преобразования при упрощении выражения (13) обратимы.

В соответствии с формулой (3), при $x_1 > 0$ функцию $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ & = h_m(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \end{aligned}$$

где $h_m(t_2, t_3, ..., t_n)$ – некоторая новая функция от $(n - 1)$ переменных.

После этого при подстановке в равенство (12) значения $x_1 = 1$ получим условие

$$f_{p,m}(1, x_2, \ldots, x_n) = h_m(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

откуда следует взаимно-однозначная связь между функциями $f_{p,m}$ и h_m.

Таким образом, формула (10) при $x_1 > 0$ будет справедлива в том числе и при $k = m$.

Теорема 1 доказана.

Имеются и другие способы представить цепочку присоединенных однородных функций в параметризованной форме. Один из таких способов, обеспечивающий конструирование параметризаций наиболее общего вида, может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ – *положительно однородная функция степени* p, $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ – *положительно однородная функция степени* $q \ne 0$, *а* $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\psi_3(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, – *положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в каждой точке области Ω *эти функции определены. Дополнительно пусть в области* Ω *функция* ω_p *не обращается в нуль, функция* ψ_q *является строго положительной, функции* $\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n$ *являются функционально независимыми.*

Тогда фундаментальные присоединенные однородные функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *которые при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняются функциональным соотношениям* (9), *могут быть в области* Ω *взаимно-однозначным образом представлены в виде*

$$f_{p,k}(x) = \\ = \Sigma_{j=0,k}\,(1/(k-j)!)\,\omega_p(x)\,(\ln\psi_q(x))^{k-j} \times \\ \times h_j(\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots, \psi_n(x)), \quad (14)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут некоторыми вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных.

Доказательство. При $k = 0$ функция $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ будет положительно однородной функцией степени p, а функция

$$f_{p,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\omega_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

будет корректно определенной, положительно однородной функцией нулевой степени. Она может быть представлена в виде $h_0(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$, будучи функционально зависима от функционально независимых функций $\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n$. Действительно, если бы нашлась такая положительно однородная функция $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ нулевой степени, которая бы образовывала с функциями

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

функционально независимый набор, то свободные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ можно было бы выразить через функционально независимые положительно однородные функции $\psi, \psi_2, ..., \psi_n$ нулевой степени, и тогда любая функция от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ должна была бы быть положительно однородной функцией нулевой степени. Этого не может быть, поэтому соответствующая функция $h_0(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ обязана существовать, и тем самым при $k = 0$ формула (14) выполнена. Дальнейшее доказательство по индукции почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

При использовании формул (14) все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конического вида[2], для каждой из которых выбранные функции $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ не обращаются в нуль[3], а функции

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

образуют функционально независимый набор положительно однородных функций нулевой степени. Для каждой из областей Ω_s при конструировании параметризации (14) используется, вообще говоря, свой собственный набор функций $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, никак не связанный с функциями $h_j(t_2, t_3, ..., t_n)$, используемых для других областей. Границы между коническими областями представляют собой конические поверхности меньшей размерности, вдоль которых рассматриваемые функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ведут себя как фундаментальные присоединенные однородные функции меньшей размерности, и для них параметризация строится по аналогичной схеме.

Важно отметить, что в результате у параметризации фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ происходит разбиение на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций $\omega_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\psi_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ и, в меньшей степени, функций

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а не отражает внутреннюю структуру параметризуемой цепочки функций.

Можно обойтись без разбиения пространства R^n на несколько независимых ветвей, как это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, *которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям* (9), *может быть взаимно-однозначным образом представлена в виде*

[2] Область Ω называется гиперконусом, если из условия $x \in \Omega$ следует, что для любых точек λx при произвольных значениях $\lambda > 0$ также выполнено условие $\lambda x \in \Omega$.

[3] Если функция ψ_q в рассматриваемой области отрицательна, она заменяется на $-\psi_q$.

$$f_{p,k}(x) = \Sigma_{j=0,k} (1/(k-j)!)\, r^p\, (q \ln r)^{k-j} \times \\ \times h_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r), \qquad (15)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, а $h_j(t_1, t_2, ..., t_n)$ *будут произвольными вещественными функциями, заданными на поверхности единичной гиперсферы*

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1,$$

взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Доказательство. При $k = 0$ справедливость формулы (15) для положительно однородной функции $f_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n)$ получается после подстановки в соотношение однородности (1) значения $\lambda = 1/r$ и использования функции $h_0(t_1, t_2, ..., t_n) = f_{p,0}(t_1, t_2, ..., t_n)$ (напомним, что каждая из функций $h_j(t_1, t_2, ..., t_n)$ определена лишь для поверхности единичной гиперсферы $t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + ... + t_n^{\,2} = 1$). Дальнейшее доказательство по индукции почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 3 доказана.

Из соотношений (9) следует, что линейная комбинация с постоянными коэффициентами, составленная из нескольких цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, снова будет цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k. Кроме того, если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то новая цепочка функций

$$g_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{p,k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

со сдвигом индекса, дополненная начальным нулем $g_{p,0}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, также будет цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k.

Формулы (10), (11) (а также (14) или (15)) иллюстрируют справедливость гипотезы Гельфанда, согласно которой любые цепочки присоединенных однородных функций степени p и порядка k получаются из главных цепочек с ненулевым первым членом с помощью сдвига индекса k и последующего суммирования. При этом все члены главной цепочки функций восстанавливаются однозначным образом по ее первому члену сообразно с некоторым правилом, точная формулировка которого отражает предпочтения исследователя и, вообще говоря, может быть различной для одной и той же начальной функции. В случае доказанных выше теорем, соответствующие цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций имеют вид

а) для формул (10), (11):

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = (x_1^{\,p} / k!)\, (q \ln x_1)^k \times \\ \times h_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1);$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = ((-x_1)^{\,p} / k!)\, (q \ln (-x_1))^k \times \\ \times g_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1);$$

б) для формул (14):

$$f^{(j)}_{p,k}(x) = \omega_p(x) / k!\, (\ln \psi_q(x))^k \times \\ \times h_j(\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots, \psi_n(x));$$

в) для формул (15):

$$f^{(j)}_{p,k}(x) = \\ = (r^p / k!)\, (q \ln r)^k\, h_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r).$$

Замечание. Как следует из формул (14), по сути фундаментальные присоединенные однородные функции – это линейные комбинации цепочек функций вида

$$(1/k!)\, R_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times (\ln S_q(x_1, x_2, \ldots, x_n))^k,$$

где $R_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это произвольные положительно однородные функции степени p, а $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ – фиксированные положительно однородные функции степени q, для которых используется также сдвиг индекса k и дополнение сдвинутых цепочек начальными нулями.

Ситуация не изменится и никаких новых

функций не удастся получить, если потребовать, чтобы функции $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ были произвольными положительно однородными функциями степени q.

В частности, такой подход позволяет записывать фундаментальные присоединенные однородные функции в более изящном виде, не используя искусственным образом выделенные переменные x_1. Изменение выбора функции $S_q(x_1, x_2, ..., x_n)$ делает текущие главные цепочки вторичными, перемещая на место главных цепочек те, которые прежде были вторичными. В силу этого понятие главных цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций является весьма условным и зависит от выбора параметризации фундаментальных присоединенных однородных функций.

Дифференцирование и интегрирование присоединенных однородных функций

Если однородная по Эйлеру функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p дифференцируема, то ее частные производные по переменным $x_1, x_2,..., x_n$ будут однородными функциями степени $(p - 1)$ [10]. Аналогичное утверждение справедливо для присоединенных однородных функций. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 4 (о дифференцировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, а функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми, то их первые частные производные $\partial f_{p,k}/\partial x_i$ по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ будут образовывать цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p - 1)$ и порядка k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из почленного дифференцирования правой и левой части формул (9) по переменной x_i.

Теорема 4 доказана.

Аналогичное утверждение справедливо для операции интегрирования.

Теорема 5 (об интегрировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то интегралы вида*

$$F_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \int_0^{x_i} f_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) dt$$

(если они существуют) образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k.

Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно следует из почленного интегрирования по переменной t на интервале $t \in [0, x_i]$ соотношения (8) после подстановки в него $x_i \to t$ с учетом равенства

$$\int_0^{x_i} f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{i-1}, \lambda t, \lambda x_{i+1}, \ldots, \lambda x_n\right) dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda x_i} f_{p,k}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{i-1}, \tau, \lambda x_{i+1}, \ldots, \lambda x_n\right) d\tau.$$

Теорема 5 доказана.

Возможно также рассмотрение интегралов

$$F_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \int_{a_k}^{x_i} f_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) dt + g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\right),$$

где функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ выбираются так, чтобы получившиеся функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ образовывали цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k. Можно показать, что такие функции g_k действительно существуют и могут быть выражены через функции $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ однозначным образом с точностью до аддитивных членов в виде фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ и порядка k, которые зависят от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Доказательство этого утверждения приводится в следующем разделе.

Теорема 6 (о дробном дифференцировании). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то их дробные производные $F_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ порядка $\alpha \in (0, 1)$ (дифференцироинтегралы порядка α Римана – Лиувилля [24 – 26]), имеющие вид*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx_i^m}\int_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n\right)dt\,,$$

образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($p-\alpha$) *и порядка k* (*если такие интегралы существуют, в частности, если* $m-\alpha>0$).

Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно следует из почленного применения к соотношению (8) линейного оператора-свертки $L[f]$:

$$L\left[f\left(x_1,x_2\ldots,x_n\right)\right]=\int_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times f\left(x_1,x_2\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n\right)dt\,,$$

где необходимо также учитывать равенство

$$\int_0^{x_i}\left(x_i-t\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda x_1,\lambda x_2\ldots,\lambda x_{i-1},\lambda t,\lambda x_{i+1},\ldots,\lambda x_n\right)dt=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{m-\alpha}}\int_0^{\lambda x_i}\left(\lambda x_i-\tau\right)^{m-\alpha-1}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda x_1,\lambda x_2\ldots,\lambda x_{i-1},\tau,\lambda x_{i+1},\ldots,\lambda x_n\right)d\tau\,.$$

На выходе получается цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($m+p-\alpha$) порядка k, которая после m-кратного дифференцирования по переменной x_i становится цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций степени ($p-\alpha$) порядка k.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (о свертке с обобщенным ядром Абеля). *Если* $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *– это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то при условии существования соответствующих интегралов их свертка с обобщенным ядром Абеля, имеющая вид*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=$$
$$=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\left(x_1^{k_1}-t_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\left(x_n^{k_n}-t_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}\times$$
$$\times f_{p,k}\,(t_1, t_2\,..., t_n)\,dt_1\,...dt_n,$$

где $\forall\mu_i>0$, *образует цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени* $p+\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$ *и порядка k. Для частичной свертки по переменным* x_1, x_2, ..., x_m *результатом будет цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени* $p+\mu_1+\mu_2+...+\mu_m$ *и порядка k*. Существенно, что начальной точкой интегрирования является нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно следует из почленного применения к соотношению (8) свертки с обобщеным ядром Абеля с учетом равенства

$$\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\left(x_1^{k_1}-t_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\left(x_n^{k_n}-t_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}\times$$
$$\times\ f_{p,k}\left(\lambda t_1,\lambda t_2\ldots,\lambda t_n\right)dt_1\ldots dt_n=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{\mu_1}\cdots\lambda^{\mu_n}}\int_0^{\lambda x_1}\cdots\int_0^{\lambda x_n}\left(\left(\lambda x_1\right)^{k_1}-\tau_1^{k_1}\right)^{\frac{\mu_1-1}{k_1}}\cdots\ \times$$
$$\times\left(\left(\lambda x_n\right)^{k_n}-\tau_n^{k_n}\right)^{\frac{\mu_n-1}{k_n}}f_{p,k}\left(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\right)d\tau_1\ldots d\tau_n\,.$$

Теорема 7 доказана.

Критерий Эйлера

Напомним читателям теорему Эйлера об однородных функциях [10]:

Теорема Эйлера (критерий Эйлера для однородных функций). *Если функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *является непрерывно дифференцируемой в любой точке пространства* R^n, *то для того, чтобы она была однородной по Эйлеру степени p, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке пространства* R^n *выполнялось условие*

$$x_1\,\partial f/\partial x_1+x_2\,\partial f/\partial x_2+\ldots+ \\ +x_n\,\partial f/\partial x_n=pf. \tag{16}$$

Соотношение (13) получается при дифференцировании тождества

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для однородной функции степени p по параметру λ в точке λ = 1, поэтому его необходимость очевидна. Однако тот факт, что условие (16) будет не только необходимым, но еще и достаточным, чтобы всюду дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была однородной по Эйлеру и имела степень однородности p, является глубоко нетривиальным. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в монографии [10].

Критерий Эйлера (16) работает также и для непрерывно дифференцируемых положительно однородных функций степени p. Единственное отличие состоит в том, что в этом случае функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может не иметь производной в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и, соответственно, условие (16) может нарушаться в этой точке.

Теорема 8 (обобщение критерия Эйлера). *Для того, чтобы всюду непрерывно дифференцируемые функции $f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ образовывали цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках пространства R^n, за исключением, возможно, точки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, были выполнены равенства*

$$x_1\, \partial f_{p,k}/\partial x_1 + x_2\, \partial f_{p,k}/\partial x_2 + \ldots + \\ + x_n\, \partial f_{p,k}/\partial x_n = p\, f_{p,k} + q\, f_{p,k-1}. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость соотношения (17) следует из дифференцирования соотношения (9) как сложной функции по λ в точке λ = 1 (непрерывная дифференцируемость требуется здесь для того, чтобы соотношение (9) можно было безопасно дифференцировать как сложную функцию). Остается доказать достаточность соотношения (17).

При $k = 0$ достаточность критерия (17) следует из теоремы Эйлера для однородных функций. Далее применяем метод математической индукции.

Пусть утверждение доказано для всех значений индекса k из интервала $0 \le k \le m - 1$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_m(\lambda) = f_{p,m}(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)/\lambda^p - \\ - \Sigma_{k=0,m} f_{p,m-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, (q \ln \lambda)^k/k!$$

где суммирование выполняется по индексу $1 \le k \le m$.

С точностью до замены индекса суммирования это выражение совпадает с тождеством (9), правую и левую части которого разделили на λ^p. Производная функции $\Phi_m(\lambda)$ по параметру λ приводится к виду

$$d\Phi_m(\lambda)/d\lambda = (1/\lambda^{p+1})\, [\lambda x_1\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_1 + \\ + \lambda x_2\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_2 + \ldots + \\ + \lambda x_n\, \partial f_{p,m}(\lambda x)/\partial x_n - \\ - p f_{p,m}(\lambda x) - q f_{p,m-1}(\lambda x) + \\ + q\, f_{p,m-1}(\lambda x) - q\, \Sigma_{k=1,m} f_{p,m-k}(x)\, \lambda^p \times \\ \times (q \ln \lambda)^{k-1}/(k-1)!] = 0,$$

поскольку соотношение (17) для функции $f_{p,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется в том числе и в точке $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, а функция $f_{p,m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию (9) согласно индуктивному предположению. Поэтому $\Phi_m(\lambda) = \mathrm{const}$ и, в частности, $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1)$.

Однако, как легко убедиться, условие $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1)$ означает, что для функции $f_{p,m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется соотношение (9). Следовательно, если при $\forall k \ge 0$ во всех точках пространства R^n, кроме, может быть, начала координат, выполнено условие (17), то при $\forall k \ge 0$ выполнено соотношение (9).

Теорема 8 доказана.

Замечание. Чтобы обеспечить условие $\Phi_m(\lambda) = \Phi_m(1) = \mathrm{const}$, производная $\Phi'_m(\lambda)$ должна существовать и обращаться в нуль в каждой точке отрезка, соединяющего точки $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если равенство (14) нарушается хотя бы в одной промежуточной точке, или хотя бы производная $\Phi'_m(\lambda)$ терпит разрыв в одной промежуточной точке, то функция $\Phi_m(\lambda)$ может распадаться на кусочно-постоянные ступеньки. Именно поэтому нарушение непрерывной дифференцируемости функций в нуле обеспечивает лишь положительную однородность по Эйлеру для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а не однородность по Эйлеру общего вида.

Теорема 9 (об интегрировании фундаментальных присоединенных однородных функций). *Если $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, то существуют такие функции $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, для которых функции*

$$F_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\int_{a_k}^{x_1} f_{p,k}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)$$

образуют цепочку фундаментальных присоединенных однородных функций степени $p + 1$ и порядка k.

Естественно, что вместо координаты x_1 может использоваться любая координата x_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 6, необходимо и достаточно, чтобы для функций $F_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнялись соотношения (17). Это приводит к уравнению

$$0=x_1 f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+ \\ +\int_{a_k}^{x_1}\left(t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}+x_2\frac{\partial f_{p,k}}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial f_{p,k}}{\partial x_n}\right)dt- \\ -\int_{a_k}^{x_1} t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}dt-\left(p+1\right)\int_{a_k}^{x_1} f_{p,k}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt- \\ -q\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt+\right. \\ \left.+\int_{a_k}^{x_1} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots\right)dt\right)+x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial g_k}{\partial x_3}+ \\ +\cdots x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}-\left(p+1\right)g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)- \\ -qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)= \\ =x_1 f_{p,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)-\int_{a_k}^{x_1}\left(t\frac{\partial f_{p,k}}{\partial t}+f_{p,k}\right)dt- \\ -q\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}- \\ -\left(p+1\right)g_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)- \\ -qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)= \\ =x_2\frac{\partial g_k}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial g_k}{\partial x_3}+\cdots+x_n\frac{\partial g_k}{\partial x_n}- \\ -\left(p+1\right)g_k-qg_{k-1}- \\ -q\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt+ \\ +a_k f_{p,k}\left(a_k,x_2,x_3\ldots,x_n\right).$$

В полученном уравнении отсутствует переменная x_1. Кроме того, функция $g_{k-1}(x_2, x_3, ..., x_n)$ уже известна. Остается найти решение уравнения

$$x_2\,\partial g_k/\partial x_2+x_3\,\partial g_k/\partial x_3+\ldots+ \\ +x_n\,\partial g_k/\partial x_n-(p+1)g_k=G_k(x_2,x_3,\ldots,x_n), \tag{18}$$

где функция $G_k(x_2, x_3, ..., x_n)$ уже известна на k-м шаге интегрирования:

$$G_k\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)=qg_{k-1}\left(x_2,x_3,\ldots,x_n\right)+ \\ +q\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_{p,k-1}\left(t,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)dt- \\ -a_k f_{p,k}\left(a_k,x_2,x_3,\ldots,x_n\right).$$

Это решение удобно искать с помощью подстановки

$$g_k(x_2,x_3,\ldots,x_n)= \\ =x_2^{p+1}\,h_k(x_2,x_3/x_2,x_4/x_2,\ldots,x_n/x_2).$$

Тогда уравнение (18) приобретает вид

$$x_2^{p+2}\partial h_k(x_2,t_3,t_4,\ldots,t_n)/\partial x_2= \\ =G_k(x_2,t_3x_2,t_4x_2,\ldots,t_nx_2).$$

Частное решение этого уравнения находится после переноса множителя x_2^{p+2} в правую часть и интегрирования результата по переменной x_2 при «замороженных» переменных $t_3, t_4, ..., t_n$. Кроме того, к полученному частному решению неоднородного уравнения (18) необходимо прибавить общее решение однородного решения уравнения (18) с нулевой правой частью, т. е. однородную по Эйлеру функцию степени $(p + 1)$, зависящую от переменных $x_2, x_3, ..., x_n$.

Теорема 9 доказана.

В результате удалось не только доказать существование требуемой функции $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, но и определить ее явный вид в квадратурах. Окончательное решение будет представлять собой сумму частного случая цепочки функций $g_k(x_2, x_3, ..., x_n)$, рекуррентным образом выраженных в квадратурах через функции $f_{p,k}(a_k, x_2, x_3, ..., x_n)$, и произвольной цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций степени $(p + 1)$ порядка k по переменным $x_2, x_3, ..., x_n$, которую можно задать в явном виде с помощью формул (10), (11), (14) либо (15).

Задача. Пусть непрерывно дифференцируемые функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ во всех точках пространства R^n, за исключением, возможно, точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, удовлетворяют равенствам

$$x_1\, \partial g_k/\partial x_1 + x_2\, \partial g_k/\partial x_2 + \ldots + \\ + x_n\, \partial g_k/\partial x_n = p_k\, g_k + q_k\, g_{k-1}, \tag{19}$$

где p_k, q_k – заданные константы, а функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ с отрицательными индексами считаются равными нулю. Что можно сказать о виде функций $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$?

В случае, когда при $\forall k\ p_k = p = \text{const}$ и $q_k = q = \text{const}$, критерий Эйлера (17) сразу дает ответ: функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются фундаментальными присоединенными однородными функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p и порядка k. В общем случае потребуются дополнительные вычисления. После подстановки

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = h_k(\ln x_1, x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1).$$

цепочка условий (19) сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и двухдиагональной матрицей коэффициентов, где $t = \ln x_1$ будет свободной переменной, а переменные $t_2 = x_2/x_1$, $t_3 = x_3/x_1, ..., t_n = x_n/x_1$ «заморожены».

После решения полученной системы дифференциальных уравнений и обратного перехода к переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ будет получен общий вид функций $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$. При этом необходимо будет учесть, что свободные константы, полученные при интегрировании системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, на самом деле будут произвольными функциями, зависящими от временно «замороженных» переменных $t_2 = x_2/x_1$, $t_3 = x_3/x_1, ..., t_n = x_n/x_1$. В зависимости от того, чему равны константы p_k и сколько среди них окажутся равными друг другу, структура решения может быть достаточно сложной.

В частном случае пусть имеется цепочка соотношений (19), где все значения p_k равны одному и тому же числу p, а $\forall q_k \neq 0$. Тогда, согласно условию (17), функции $g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, масштабированные в c_k раз, окажутся фундаментальными присоединенными однородными функциями $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые описываются формулами общего вида (10) и (11) (либо (14), либо (15)), если выполняются соотношения $c_k q_k/c_k{-}1 = q$ (где значение параметра $q \neq 0$ выбирается произвольным образом). Другими словами, масштабирующие коэффициенты c_k следует выбирать в соответствии с рекуррентным правилом $c_k = qc_{k-1}/q_k$, где $c_0 = 1$, а результат с точностью до множителей будет совпадать с некоторой цепочкой фундаментальных присоединенных однородных функций $f_{p,k}(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени p и порядка k.

Дифференцирование по степени однородности

В работах [11, 12] рассматривается интересный прием, позволяющий генерировать новые фундаментальные присоединенные однородные функции. А именно, пусть $f_p(x_1,$

$x_2, ..., x_n)$ – это однопараметрическое семейство функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности, равной p, где p – это континуально меняющийся параметр.

При многократном дифференцировании по параметру p соотношения однородности

$$f_p(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

получаем, что функции

$$f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (1/k!)\ \partial^k f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial p_k$$

удовлетворяют функциональным соотношениям (9), т. е. являются частным случаем фундаментальных присоединенных однородных функций.

Однородную функцию $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить с помощью формул (3) и (4):

$$\text{при } x_1 > 0 \quad f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = x_1^{\,p}\, h_p(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \tag{20}$$

$$\text{при } x_1 < 0 \quad f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (-x_1)^p\, g_p(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \tag{21}$$

где $h_p(t_2, t_3, ..., t_n)$, $g_p(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут функциями от $(n - 1)$ переменных, не зависящими друг от друга.

Эти функции определяются однозначным образом по заданной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ в соответствии с формулами

$$h_p(t_2, t_3, \ldots, t_n = f_p(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$
$$g_p(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f_p(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n),$$

и тоже зависят от континуального параметра p.

При многократном дифференцировании выражений (20), (21) по параметру p получаются универсальные формулы (10), (11) для фундаментальных присоединенных однородных функций, если определить новые функции $h_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ как

$$h_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = (1/j!)\ \partial^j h_p(t_2, t_3, \ldots, t_n)/\partial p^j,$$
$$g_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = (1/j!)\ \partial^j g_p(t_2, t_3, \ldots, t_n)/\partial p^j.$$

Аналогичным образом формулы (15) получаются при дифференцировании по параметру p однородной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$, записанной в виде

$$f_p(x_1, x_2, ..., x_n) = r^p\, h_p(x_1/r, x_2/r, ..., x_n/r),$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, а $h_p(t_1, t_2, ..., t_n)$ будет вещественной функцией, заданной на поверхности единичной гиперсферы

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1$$

и связанной с функцией $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ соотношением

$$h_p(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_p(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

где $t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + ... + t_n^{\,2} = 1$.

Из получаемых в результате формул следует, что процесс дифференцирования функций, однородных по Эйлеру со степенью однородности, равной p, по континуально меняющемуся параметру p, вообще говоря, не приводит к потере возможных цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций.

Важно, что если функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются гармоническими (или удовлетворяют какому-либо другому линейному дифференциальному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами), то гармоническими будут и все фундаментальные присоединенные однородные функции, которые получаются при дифференцировании исходной функции $f_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ по параметру p.

Заключение

В процессе анализа взаимно-однородных функций, которые соответствуют матрице функциональных уравнений с одинаковыми вещественными собственными числами, был получен уточненный класс присоединенных однородных функций Гельфанда [11, 12]. Определения и теоремы, сформулированные в процессе проведения исследования, позволяют корректным образом определить этот важный класс функций и более подробно исследовать его свойства. В частности, теорема 2 о представлении фундаментальных присоединенных однородных функций позволяет без опаски рассматривать обобщения вида

$$f_{p,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = (1/k!)\, R_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times (\ln S_q(x_1, x_2, \ldots, x_n))^k$$

и утверждать, что такие функции тождественно совпадают с рассматриваемым классом функций, полностью сохраняя все их свойства и не порождая при этом принципиально новых математических объектов.

Построенные математические конструкции могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение. Свойство однородности по Эйлеру для скалярных потенциалов электрических и магнитных полей [5 – 8] позволяет синтезировать эффективно работающие электронно- и ионно-оптические системы, представленные, например, в серии работ А. Хёршида [27 – 43].

Имеется определенная надежда, что с помощью полученных функциональных конструкций, обобщающих соотношение однородности Эйлера, возможен перенос принципа подобия траекторий Ю.К. Голикова [5 – 8] на более широкие классы электрических и магнитных полей.

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [44].

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за активное участие в обсуждении проблемы.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-01073-20-00 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62.

4. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53.

10. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

11. **Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. Вып. 3. С. 3–70.

12. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Серия «Обобщенные функции». Вып. 1. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.

13. **Иванов В.К.** Об умножении обобщенных однородных функций нескольких переменных // Доклады АН СССР. 1981. Т. 237. № 1. С. 29–33.

14. **Иванов В.К**. Асимптотическая аппроксимация произведения обобщенных функций // Известия вузов. Сер. «Математика». 1981. №. 1. С. 19–26.

15. **Estrada R., Kanwal R.P.** Asymtotic analysis: A distributional approach. Boston: Birkhäuser, 1994. 253 p.

16. **Estrada R., Kanwal R.P.** A distributional approach to asymptotics: Theory and applications. New York: Springer Science, 2002. 454 p.

17. **Албеверио С., Хренников А.Ю., Шелкович В.М.** Присоединенные однородные p-адические распределения // Доклады РАН. 2003. Т. 393. № 3. С. 300–303.

18. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.** Assiciated homogeneous p-adic distributions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 313. No. 1. Pp. 64–83.

19. **Иванов В.К.** Избранные научные труды. Математика. М.: Физматлит, 2008. 553 с.

20. **Хренников А.Ю., Шелкович В.М.** Современный p-адический анализ и математическая физика: Теория и приложения. М.: Физматлит, 2012. 452 с.

21. **Shelkovich V.M.** Associated and quasi associated homogeneous distributions (generalized functions) // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 338. No. 1. Pp. 48–70.

22. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.** Theory of p-adic distributions: Linear and nonlinear models. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 351 p.

23. **von Grudzinski O.** Quasihomogeneous distributions. Amsterdam, North-Holland, 1991. 469 p.

24. **Miller K., Ross B.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York, Wiley, 1993. 384 p.

25. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.

26. **Kilbas A.A, Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204. 1st Ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier. 2006. 540 p.

27. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements // Microelectronic Engineering. 1991. Vol. 14. No. 3–4. Pp. 197–205.

28. **Khursheed A.** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast // Microelectronic Engineering. 1992. Vol. 16. No. 1–4. Pp. 43–50.

29. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets // Scanning. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 87–91.

30. **Khursheed A.** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2000. Vol. 71. No. 4. Pp. 1712–1715.

31. **Khursheed A.** A low voltage time of flight electron emission microscope // Optik (Jena). 2002. Vol. 113. No. 11. Pp. 505–509.

32. **Khursheed A.** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM // Ultramicroscopy. 2002. Vol. 93. No. 3–4. Pp. 331–338.

33. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M.,**

Thong J.T.L. Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2003. Vol. 74. No. 1. Pp. 134–140.

34. **Khursheed A., Osterberg M.** A spectroscopic scanning electron microscope design // Scanning. 2004. Vol. 26. No. 6. Pp. 296–306.

35. **Osterberg M., Khursheed A.** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 2005. Vol. 555. No. 1–2. Pp. 20–30.

36. **Khursheed A., Osterberg M.** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2006. Vol. 556. No. 2. Pp. 437–444.

37. **Luo T., Khursheed A.** Imaging with surface sensitive backscattered electrons // Journal of Vacuum Science and Technology B. 2007. Vol. 25. No. 6. Pp. 2017–2019.

38. **Khursheed A., Hoang H.Q.** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection // Ultramicroscopy. 2008. Vol. 109. No. 1. Pp. 104–110.

39. **Khursheed A.** Scanning electron microscope optics and spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010. 403 p.

40. **Hoang H.Q., Khursheed A.** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2011. Vol. 635. No. 1. Pp. 64–68.

41. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM // Ultramicroscopy. 2011. Vol. 111. No. 8. Pp. 1093–1100.

42. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 2012. Vol. 184. No. 11–12. Pp. 525–532.

43. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source // Nature Communications. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 1288.

44. Wolfram Mathematica // URL: http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 27.03.2020, принята к публикации 17.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико- математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62.

4. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2010.

6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011), 164–170.

7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (3) (2017) 156–158.

9. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53.

10. **Fikhtengol'ts G.M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

11. **Gel'fand I.M., Shapiro Z.Ya.,** Generalized functions and their applications, Uspekhi Mat. Nauk. 10 (3) (1955) 3–70 (in Russian).

12. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.,** Generalized functions, Vol. 1: Properties and Operations, AMS Chelsea Publishing, 1964.

13. **Ivanov V.K.,** On multiplication of generalized homogeneous functions of several variables, Soviet mathematics – Doklady. 237 (1) (1981) 29–33.

14. **Ivanov V.K.,** Asymptotic approximation to the product of generalized functions, Soviet Mathematics (Izvestia VUZ. Matematika). 25 (1) (1981) 20–29 (in Russian).

15. **Estrada R., Kanwal R.P.,** Asymptotic analysis. A distributional approach, Birkhäuser, Boston, 1994.

16. **Estrada R., Kanwal R.P.,** A distributional approach to asymptotic. Theory and applications, Springer Science, New York, 2002.

17. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Associated homogeneous p-adic distributions, Doklady Mathematics. 68 (3) (2003) 354–357.

18. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Associated homogeneous p-adic distributions, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 313 (1) (2006) 64–83.

19. **Ivanov V.K.,** Selected scientific works. Mathematics, Fizmatlit, Moscow, 2008 (in Russian).

20. **Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Modern p-adic analysis and mathematical physics: Theory and applications, Fizmatlit, Moscow, 2012 (in Russian).

21. **Shelkovich V.M.,** Associated and quasi-associated homogeneous distributions (generalized functions), Journal of Mathematical Analysis and Applications. 338 (1) (2008) 48–70.

22. **Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.,** Theory of p-adic Distributions. Linear and Nonlinear Models, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

23. **von Grudzinski O.,** Quasi-homogeneous

distributions, North-Holland, Amsterdam, 1991.

24. **Miller K., Ross B.,** An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

25. **Samko S., Kilbas A.A., Marichev O.,** Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Taylor & Francis Books, 1993.

26. **Kilbas A.A, Srivastava H. M., Trujillo J.J.,** Theory and applications of fractional differential equations, Vol. 204, 1st Ed., Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2006.

27. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.,** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements, Microelectronic Engineering. 14 (3–4) (1991) 197–205.

28. **Khursheed A.,** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast, Microelectronic Engineering. 16 (1–4) (1992) 43–50.

29. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.,** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets, Scanning. 20 (2) (1998) 87–91.

30. **Khursheed A.,** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 71 (4) (2000) 1712–1715.

31. **Khursheed A.,** A low voltage time of flight electron emission microscope, Optik (Jena). 113 (11) (2002) 505–509.

32. **Khursheed A.,** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM, Ultramicroscopy. 93 (3–4) (2002) 331–338.

33. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.,** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 74 (1) (2003) 134–140.

34. **Khursheed A., Osterberg M.,** A spectroscopic scanning electron microscope design, Scanning. 26 (6) (2004) 296–306.

35. **Osterberg M., Khursheed A.,** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 555 (1–2) (2005) 20–30.

36. **Khursheed A., Osterberg M.,** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 556 (2) (2006) 437–444.

37. **Luo T., Khursheed A.,** Imaging with surface sensitive backscattered electrons, Journal of Vacuum Science and Technology B. 25 (6) (2007) 2017–2019.

38. **Khursheed, A., Hoang, H.Q.,** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection, Ultramicroscopy. 109 (1) (2008) 104–110.

39. **Khursheed A.,** Scanning electron microscope optics and spectrometers, World Scientific, Singapore, 2010.

40. **Hoang H.Q., Khursheed A.,** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 635 (1) (2011) 64–68.

41. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.,** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM, Ultramicroscopy. 111 (8) (2011) 1093–1100.

42. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.,** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 184 (11–12) (2012) 525–532.

43. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.,** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source, Nature Communications. 9 (1) (2018) 1288.

44. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 27.03.2020, accepted 17.04.2020.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru