DOI: 10.18721/JPM.13206
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЦЕПОЧЕК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМНО-ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ОБЩЕЙ ПАРОЙ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

А.С. Бердников[1], К.В. Соловьев[2,1], Н.К. Краснова[2]

[1] Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение свойств взаимно-однородных функций (ВОФ), которые являются обобщением однородных по Эйлеру функций и могут использоваться при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами. В дополнение к цепочкам ВОФ, соответствующим кратным вещественным собственным значениям матрицы базовых функциональных уравнений, рассматриваются ВОФ, соответствующие кратным парам комплексно-сопряженных собственных значений матрицы базовых функциональных уравнений. Выведены функциональные соотношения, характеризующие такие функции, получены общие формулы для ВОФ с комплексно-сопряженными кратными собственными значениями.

Ключевые слова: функциональное уравнение, однородная функция, присоединенная однородная функция, взаимно-однородные функции

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К. Общие формулы для цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общей парой комплексно-сопряженных собственных чисел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 72–88. DOI: 10.18721/JPM.13206

GENERAL FORMULAS FOR CHAINS OF FUNDAMENTAL MUTUALLY HOMOGENEOUS FUNCTIONS WITH A COMMON PAIR OF COMPLEX CONJUGATE EIGENVALUES

A.S. Berdnikov[1], K.V. Solovyev[2,1], N.K. Krasnova[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This work continues our studies in properties of mutually homogeneous functions (MHFs), being a generalization of Euler homogeneous functions and can be used in the synthesis of electric and magnetic fields of electron and ion-optical systems with special properties. MHFs corresponding to multiple pairs of complex conjugate eigenvalues of the matrix of basic functional equations have been considered in addition to MHF chains corresponding to multiple real eigenvalues of the matrix of basic functional relations. Functional equations characterizing such functions were deduced, general formulas for the MHFs with complex conjugate multiple eigenvalues were derived.

Keywords: functional equation, homogeneous function, associated homogeneous function, mutually homogeneous functions

Citation: Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K., General formulas for chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common pair of complex conjugate eigenvalues, St.

Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 72–88.
DOI: 10.18721/JPM.13206

Введение

Данная статья продолжает серию работ [1 – 4], посвященных исследованию свойств однородных гармонических функций и их использованию при синтезе электрических и магнитных полей для электронно- и ионно-оптических систем со специальными свойствами [5 – 8]. Конструируемая в статье система фундаментальных взаимно-однородных функций может использоваться для переноса принципа подобия траекторий Ю.К. Голикова на новые классы электрических и магнитных полей и тем самым послужить основой для синтеза разнообразных электронно- и ионно-оптических систем, представленных, например, в серии работ А. Хёршида [9 – 25].

Данная публикация является прямым продолжением публикаций [26, 27] и в значительной степени опирается на полученные в них результаты.

Рассмотрим функции вида

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1), \tag{1}$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$; p, q, ω – вещественные константы; k – целочисленный индекс (k = 0, 1, 2, ...); $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ – некоторая функция от $(n - 1)$ переменных; значения переменной x_1 удовлетворяют условию $x_1 > 0$.

Фактически функции (1), (2) представляют собой вещественную и мнимую части для цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом из работы [27] в случае, когда степень однородности p (кратное вещественное собственное число матрицы взаимно-однородных функциональных уравнений) заменяется комплексным числом $p + i\omega$. Поскольку, вообще говоря, порождающая функция $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ в этом случае также должна рассматриваться как комплекснозначная функция

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) + ig(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

с формальной точки зрения, формулы (1), (2) следует записывать в виде

$$f^{(c)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) - \\ - x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1);$$

$$f^{(s)}_{p,k}(\mathbf{x}) = x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1) + \\ + x_1^{p}((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1),$$

где выражения (1), (2) являются частным случаем, соответствующие выбору $g(t_2, t_3, ..., t_n) = 0$.

В силу этого, свойства цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общей парой комплексно-сопряженных собственных чисел весьма близко напоминают свойства цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом, рассмотренных в статье [27].

Если даны функциональные соотношения

$$f_i(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma a_{ij}(\lambda) f_i(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где i, j = 1, 2, ..., k, а функции $a_{ij}(\lambda)$ заранее неизвестны, то в частном случае, когда все собственные числа матрицы $\|a_{ij}(\lambda)\|$ будут парами комплексно-сопряженных чисел $p \pm i\omega$, равными друг другу, функции вида (1), (2) можно рассматривать как решения функциональных соотношений (3) [26].

С помощью прямой подстановки можно убедиться, что функции (1), (2) подчиняются функциональным соотношениям

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, a_{k-j}(\lambda)\, f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, b_{k-j}(\lambda)\, f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}); \tag{4}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, b_{k-j}(\lambda)\, f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, a_{k-j}(\lambda)\, f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где функции $a_j(\lambda)$ и $b_j(\lambda)$ определены как

$$a_j(\lambda) = (1/j)!\, \lambda^p(q \ln \lambda)^j \cos(\omega \ln \lambda), \tag{6}$$

$$b_j(\lambda) = (1/j)!\, \lambda^p(q \ln \lambda)^j \sin(\omega \ln \lambda). \tag{7}$$

Если ввести в рассмотрение невырожденные линейные комбинации функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которые можно записать как

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \alpha_k f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) - \beta_k f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \gamma_k f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \delta_k f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0,\ \gamma_k^2 + \delta_k^2 \neq 0,$$

$$\alpha_k\, \delta_k + \beta_k\, \gamma_k \neq 0,$$

то новые функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ можно будет привести к виду

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = C_k\, x_1^p((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1 + \varphi_k);$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = S_k\, x_1^p((q \ln x_1)^k/k!) \times \\ \times h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1 + \psi_k);$$

$$C_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\ ,\ S_k = \sqrt{\gamma_k^2 + \delta_k^2}\ ;$$

$$\varphi_k = \mathrm{arctg}(\beta_k/\alpha_k),\ \psi_k = \mathrm{arctg}(\gamma_k/\ \delta_k),$$

$$C_k \neq 0,\ S_k \neq 0,\ \varphi_k \neq \psi_k \pm \pi/2.$$

Из условий (4), (5) следует, что функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ будут подчиняться функциональным соотношениям

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, c_{kj}(\lambda)\, g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, d_{kj}(\lambda)\, g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x});$$

$$g^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, e_{kj}(\lambda)\, g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, s_{kj}(\lambda)\, g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}),$$

где функции $c_{k,j}(\lambda)$, $d_{k,j}(\lambda)$, $e_{k,j}(\lambda)$ и $s_{k,j}(\lambda)$ определены как

$$c_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{C_k/C_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \cos\left(\omega \ln\lambda + (\varphi_k - \psi_j)\right),$$

$$d_{k,j}(\lambda) = -\frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{C_k/S_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \sin\left(\omega \ln\lambda + (\varphi_k - \varphi_j)\right),$$

$$e_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{S_k/C_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \sin\left(\omega \ln\lambda + (\psi_k - \psi_j)\right),$$

$$s_{k,j}(\lambda) = \frac{\lambda^p (\ln\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{S_k/S_j}{\cos(\varphi_j - \psi_j)} \times \\ \times \cos\left(\omega \ln\lambda + (\psi_k - \varphi_j)\right).$$

Когда линейное преобразование удовлетворяет условиям

$$\text{при } \forall k\ \varphi_k = \psi_k = \varphi,\ C_k = S_k = C,$$

новые функции $g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ будут подчиняться функциональным соотношениям (4), (5) с функциями (6), (7).

Целями данной работы являются, во-первых, вывод общих формул для функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих функциональным уравнениям (4), (5) с функциями (6), (7), а во-вторых, доказательство некоторых важных теорем о полученном классе взаимно-однородных функций.

Вспомогательные формулы для функций, которые являются положительно однородными по Эйлеру

Функция $f(\mathbf{x})$ называется положительно однородной по Эйлеру со степенью однородности, равной p [28], если при $\forall\lambda > 0$ выполняется условие

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x}). \qquad (8)$$

Для положительно однородных функций могут быть получены универсальные формулы, позволяющие представлять их в удобном для практических приложений унифицированном виде. Типичными примерами являются следующие выражения, которые будут полезны в дальнейшем.

1. При подстановке в условие (8) значений

$$\lambda = +1/x_1 \quad \text{и} \quad -1/x_1$$

после перестановки местами правой и левой частей полученного равенства получаем следующую формулу:
при $x_1 > 0$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}\, h(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1); \qquad (9)$$

при $x_1 < 0$

$$f(\mathbf{x}) = (-x_1)^p\, g(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1), \qquad (10)$$

где $h(t_2, t_3, ..., t_n)$ и $g(t_2, t_3, ..., t_n)$ будут произвольными функциями от $(n - 1)$ переменных, вообще говоря, не зависящими друг от друга и связанными с функцией $f(\mathbf{x})$ соотношениями

$$h(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(+1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$g(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n).$$

В формулы (9), (10) не вписывается случай $x_1 = 0$. Однако функция $f(0, x_2, x_3, ..., x_n)$ также является положительно однородной, но при этом зависит от меньшего числа независимых переменных. Поэтому по факту получается целая иерархия формул вида (9), (10), соответствующая последовательно сокращающемуся списку независимых переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$.

2. При подстановке в условие (8) значения $\lambda = 1/r$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, получаем формулу

$$f(\mathbf{x}) = r^p\, s(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r), \qquad (11)$$

где $s(t_1, t_2, ..., t_n)$ будет произвольной функцией от n переменных, заданной на единичной гиперсфере

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1,$$

которая связана с функцией $f(\mathbf{x})$ соотношением

$$s(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

3. В области Ω есть не имеющие сингулярных точек как фиксированная положительно однородная функция $\psi_p(\mathbf{x})$ степени p, не обращающаяся в этой области в нуль, так и фиксированные, положительно однородные функции нулевой степени $\psi_2(\mathbf{x})$, $\psi_3(\mathbf{x})$, ..., $\psi_n(\mathbf{x})$, которые функционально независимы. В этой области Ω получаем формулу

$$f(\mathbf{x}) = \psi_p(\mathbf{x})\, \chi(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})); \qquad (12)$$

где $\chi(t_2, t_3, ..., t_n)$ будет произвольной функцией от $(n - 1)$ переменных.

В результате формулы (9) – (11) оказываются частными случаями формулы (12).

Действительно, функция $\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/\psi_p(\mathbf{x})$ определена в области Ω корректно и, как легко убедиться, является положительно однородной функцией нулевой степени.

Функция $\psi(\mathbf{x})$ не может быть функционально не зависимой от функций

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}):$$

иначе переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ можно было бы выразить через функции

$$\psi(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}),$$

которые являются положительно однородными нулевой степени, и тогда любая функция от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ была бы положительно однородной функцией нулевой степени, что лишено смысла.

Следовательно, эту функцию можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \chi(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})).$$

После этого для функции $f(\mathbf{x})$ получается выражение (12).

С другой стороны, если функция $f(\mathbf{x})$ имеет вид (12), то она является положительно однородной по Эйлеру, со степенью однородности, равной p.

Замечание. При фиксированном выборе положительно однородных функций

$$\psi_p(\mathrm{x}) \text{ и } \psi_2(\mathrm{x}), \psi_3(\mathrm{x}), \ldots, \psi_n(\mathrm{x})$$

все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конической формы[1], в которых функция $\psi_p(\mathbf{x})$ не обращается в нуль, функции

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

образуют функционально независимый набор функций, при этом перечисленные функции не имеют сингулярных точек.

Для каждой из областей Ω_s, при конструировании параметризации (12) используется, вообще говоря, своя собственная функция $\chi_s(t_2, t_3, ..., t_n)$, никак не связанная с функциями $\chi_s(t_2, t_3, ..., t_n)$, используемыми для других областей. Кроме того, границы между областями Ω_s представляют собой конические поверхности меньшей размерности, вдоль которых функция $f(\mathbf{x})$ снова ведет себя как однородная функция степени p, зависящая от меньшего числа независимых переменных. Для них, в свою очередь, приходится конструировать отдельный способ параметризации, зависящий от меньшего числа независимых переменных и с участием нового набора фиксированных функций. В результате параметризация положительно однородных функций распадается на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций

$$\psi_p(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

и не отражает внутреннюю структуру положительно однородных функций, параметризуемых с их помощью.

Прямая проверка показывает, что функции, заданные с помощью формул (9) – (12), действительно удовлетворяют соотношению однородности (8) при любом выборе функций, участвующих в параметризации.

Общие формулы для фундаментальных взаимно-однородных функций

Определение. *Полубесконечная цепочка пар функций* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *где индекс* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *а сами эти функции при всех* $\lambda > 0$ *удовлетворяют функциональным соотношениям*

$$\begin{aligned} &f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - \\ &- \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + \\ &+ \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ &\times f^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda), \end{aligned} \tag{14}$$

называется фундаментальными взаимно-однородными функциями степени p и порядка k с фактором связи ω.

Условия (13), (14) можно записать в эквивалентном виде, изменив порядок суммирования:

$$\begin{aligned} &f^{(c)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = \\ &= \Sigma_{j=0,k}\, \lambda^p((q \ln \lambda)^{j}/j!) \times \end{aligned}$$

[1] Термин «конический» означает, что когда точка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежит некоторому геометрическому объекту, то ему принадлежат также и все точки вида $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, соответствующие произвольным значениям $\lambda > 0$.

$$\times f^{(c)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - - \Sigma_{j=0,k} \lambda^p((q \ln \lambda)^j/j!) \times \times f^{(s)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda); \quad (15)$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\lambda\mathbf{x}) = = \Sigma_{j=0,k} \lambda^p((q \ln \lambda)^j/j!) \times \times f^{(c)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + + \Sigma_{j=0,k} \lambda^p((q \ln \lambda)^j/j!) \times \times f^{(s)}{}_{p,k-j}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda). \quad (16)$$

При $\omega = 0$ соотношения (13), (14) для функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ расцепляются и становятся не зависимыми друг от друга. В этом случае цепочка функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и цепочка функций $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ оказываются не зависящими друг от друга цепочками фундаментальных присоединенных однородных функций степени p и порядка k, которые были подробно рассмотрены в статье [27].

Параметр q отвечает за нормировку фундаментальных взаимно-однородных функций и не влияет на их остальные свойства. После подстановки

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = q^j F^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x}),$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = q^j F^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$$

параметр q исчезает из функциональных соотношений (13), (14), а функции $F^{(c)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$ и $F^{(s)}{}_{p,j}(\mathbf{x})$ приобретают смысл нормированных фундаментальных взаимно-однородных функций, соответствующих выбору $q = 1$.

Для фундаментальных взаимно-однородных функций нулевого порядка получаем функциональные соотношения

$$f^{(c)}{}_{p,0}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - - \lambda^p f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda); \quad (17)$$

$$f^{(s)}{}_{p,0}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + + \lambda^p f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda). \quad (18)$$

Лемма 1. *Фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), при $x_1 > 0$ могут быть представлены в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = = x_1^p\, h^{(c)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \cos(\omega \ln x_1) - - x_1^p\, h^{(s)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \sin(\omega \ln x_1); \quad (19)$$

$$f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = = x_1^p\, h^{(c)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \sin(\omega \ln x_1) + + x_1^p\, h^{(s)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \cos(\omega \ln x_1), \quad (20)$$

где функции $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными от $(n - 1)$ переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$, а при $x_1 < 0$ могут быть представлены в виде

$$f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = (-x_1)^p \times \times g^{(c)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \cos(\omega \ln (-x_1)) - - (-x_1)^p\, g^{(s)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \sin(\omega \ln (-x_1)); \quad (21)$$

$$f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = (-x_1)^p \times \times g^{(c)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \sin(\omega \ln (-x_1)) + + (-x_1)^p\, g^{(s)}(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \times \times \cos(\omega \ln (-x_1)), \quad (22)$$

где $g^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных, которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x})$ и выбираются независимо от функций $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, использованных при $x_1 > 0$.

Доказательство. Подставим в соотношения (17) и (18) значение $\lambda = 1/x_1$, предполагая, что $x_1 > 0$. В результате получим следующие линейные уравнения для функций $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$:

$$x_1^p f^{(c)}_{p,0}(1, x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) = \\ = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln x_1) + \\ + f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda);$$

$$x_1^p f^{(s)}_{p,0}(1, x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) = \\ = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln x_1) + \\ + f(s)p{,}0(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda).$$

Добавим обозначения:

$$h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(1, t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

$$h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(1, t_2, t_3, \ldots, t_n).$$

После этого из полученной системы линейных уравнений получаются формулы (19), (20).

Соответственно, в случае $x_1 < 0$, после подстановки $\lambda = -1/x_1$ в формулы (17) и (18), на выходе получаются формулы (21), (22), где функции $g^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, вообще говоря, не зависящие от функций $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, используемых в формулах (19), (20), задаются соотношениями

$$g^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(-1, -t_2, t_3, \ldots, -t_n),$$

$$g^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(-1, -t_2, \ldots, -t_n).$$

Лемма 1 доказана.

При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ задача о параметризации функций $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$, которые будут подчиняться функциональным соотношениям (17) и (18), но зависят от меньшего числа независимых переменных, решается с помощью формул, аналогичным формулам (19), (20), (21), (22). Процесс повторяется, пока не будет исчерпан список переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Лемма 2. *Фундаментальные взаимнооднородные функции $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ нулевого порядка, удовлетворяющие при $\forall\lambda > 0$ функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть представлены в виде*

$$f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = r^p \times \\ \times h^{(c)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \cos(\omega \ln r) - \\ - r^p h^{(s)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \sin(\omega \ln r); \quad (23)$$

$$f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = r^p \times \\ \times h^{(c)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \sin(\omega \ln r) + \\ + r^p h^{(s)}(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r) \cos(\omega \ln r), \quad (24)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, а $h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и $h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от n переменных, заданными на единичной гиперсфере

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1,$$

которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 1, за исключением выбора множителя $\lambda > 0$ как $\lambda = 1/r$. Функции

$$h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ и } h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

заданные на единичной гиперсфере

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = 1,$$

определяются как

$$h^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f^{(c)}_{p,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

$$h^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f^{(s)}_{p,0}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $S_p(\mathbf{x})$ – это положительно однородная функция степени p, $S_\omega(\mathbf{x})$ – положительно однородная функция степени $\omega \neq 0$, а $\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$ – положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в области Ω эти функции не имеют сингулярных точек, функция S_p не обращается в нуль, функция S_ω строго больше нуля, функции $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ являются функционально независимыми.

Тогда фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *нулевого порядка, удовлетворяющие при* $\forall\lambda > 0$ *функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть в области* Ω *представлены в виде*

$$\begin{gathered} f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \cos(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})) - S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \sin(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})); \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \sin(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})) + S_p(\mathbf{x}) \times \\ \times h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \times \\ \times \cos(\omega \ln S_\omega(\mathbf{x})), \end{gathered} \tag{26}$$

где $h^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ *и* $h^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ *будут произвольными вещественными функциями от* $(n - 1)$ *переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями* $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *и* $f(s)_{p,0}(\mathbf{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции

$$g^{(c)}(\mathbf{x}) = f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})/S_p(\mathbf{x}),$$

$$g^{(s)}(\mathbf{x}) = f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})/S_p(\mathbf{x})$$

представляют собой фундаментальные взаимно-однородные функции нулевого порядка и нулевой степени, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} g^{(c)}(\lambda\mathbf{x}) = g^{(c)}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda) - \\ - g^{(s)}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} g^{(s)}(\lambda\mathbf{x}) = g^{(c)}(\mathbf{x}) \sin(\omega \ln \lambda) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \cos(\omega \ln \lambda). \end{gathered}$$

Подставим в это соотношение значение $\lambda = S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}$, которое в рассматриваемой области определено корректно и удовлетворяет условию $\lambda > 0$.

Функции

$$g^{(c)}(x_1/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, x_2/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, \ldots, x_n/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}),$$

$$g^{(s)}(x_1/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, x_2/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega}, \ldots, x_n/S_\omega(\mathbf{x})^{1/\omega})$$

будут однородными по Эйлеру нулевой степени, поэтому их можно записать как

$$h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))$$

и, соответственно,

$$h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))$$

(см. формулу (12)).

После этого из соотношений

$$\begin{gathered} h^{(c)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) = \\ = g^{(c)}(\mathbf{x}) \cos(\ln S_\omega(\mathbf{x})) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \sin(\ln S_\omega(\mathbf{x})); \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} h^{(s)}(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) = \\ = g^{(c)}(\mathbf{x}) \sin(\ln S_\omega(\mathbf{x})) + \\ + g^{(s)}(\mathbf{x}) \cos(\ln S_\omega(\mathbf{x})) \end{gathered}$$

можно выразить функции $g^{(c)}(\mathbf{x})$ и $g^{(s)}(\mathbf{x})$.

В результате для функций $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ получаются формулы (25), (26).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Фундаментальные взаимно-однородные функции* $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *нулевого порядка, удовлетворяющие при* $\forall\lambda > 0$ *функциональным соотношениям (17) и (18), могут быть представлены в виде*

$$f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x}) = R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln |\Phi_\omega(\mathbf{x})|); \tag{27}$$

$$f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x}) = R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln |\Phi_\omega(\mathbf{x})|), \tag{28}$$

где $R_p(\mathbf{x})$ *будет произвольной положительно однородной функцией степени* p, *а* $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ *будет произвольной положительно однородной функцией степени* ω, *которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями* $f^{(c)}_{p,0}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}_{p,0}(\mathbf{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 3, где $\Omega = R^n$ и выбраны положительно однородные функции

$$S_p(\mathbf{x}) = r^p,\ S_\omega(\mathbf{x}) = r^\omega,$$

$$\psi_2(\mathbf{x}) = x_2/r,\ \psi_3(\mathbf{x}) = x_3/r,\ \ldots,$$

$$\psi n(\mathbf{x}) = x_n/r,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

которые удовлетворяют условиям леммы во всем пространстве R^n, за исключением начала координат.

Функции $h^{(c)}(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ и $h^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$, входящие в формулы (25), (26), можно представить в виде

$$h^{(c)}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) =$$
$$= H(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) \cos(G(\psi_2, \psi_3, \ldots,\psi_n));$$

$$h^{(s)}(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) =$$
$$= H(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n) \sin(G(\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n)),$$

где $H(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ и $G(\psi_2, \psi_3, ..., \psi_n)$ – произвольные функции от $(n - 1)$ переменных.

В соответствии с формулой (12), произвольную положительно однородную функцию $R_p(\mathbf{x})$ степени p можно представить в виде

$$R_p(\mathbf{x}) = S_p(\mathbf{x}) \times$$
$$\times H(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})),$$

а произвольную положительно однородную функцию $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ степени ω можно представить в виде

$$\Phi_\omega(\mathbf{x}) = \pm S_\omega(\mathbf{x}) \times$$
$$\times \exp(G(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))),$$

где $G(\mathbf{x}) = \ln(|\Phi_\omega(\mathbf{x})|/S_\omega(\mathbf{x}))$ будет положительно однородной функцией нулевой степени, а знак выбирается в соответствии со знаком функции $\Phi_\omega(\mathbf{x})$. Здесь следует учесть, что положительно однородная функция $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ сохраняет один и тот же знак во всех точках вида $\lambda\mathbf{x}$.

После указанных подстановок формулы (25), (26) приобретают вид (27), (28).

Лемма 4 доказана.

Теорема. *Цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, *которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), во всех точках, в которых функция* $S_q(\mathbf{x})$ *не равна нулю, может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\ ((\ln |S_q(\mathbf{x})|)^{k-j}/(k-j)!) \times$$
$$\times R_p{}^{(j)}(\mathbf{x}) \cos(\ln Q^{(j)}{}_\omega(\mathbf{x})); \tag{29}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\ ((\ln |S_q(\mathbf{x})|)^{k-j}/(k-j)!) \times$$
$$\times R_p{}^{(j)}(\mathbf{x}) \sin(\ln Q^{(j)}{}_\omega(\mathbf{x})), \tag{30}$$

где $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$ – *произвольные однородные функции степени* p; $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ – *это произвольные однородные функции степени* $\omega \neq 0$, *принимающие положительные значения*; $S_q(\mathbf{x})$ – *фиксированная не равная нулю ни в одной точке однородная функция степени* $q \neq 0$.

Между функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и функциями* $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$, $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ *при фиксированной функции* $S_q(\mathbf{x})$ *устанавливается взаимно-однозначная связь.*

Доказательство. При $k = 0$ справедливость формул (29), (30) устанавливается леммой 4 и формулами (27), (28). С помощью метода индукции принимаем следующее: пусть условия (29), (30) выполнено при $k = 0, 1, ..., m - 1$. Сделаем подстановку

$$f^{(c)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x}) + \Sigma_{k=1,m}((\ln |S_q(\mathbf{x})|)^k/k!) \times$$
$$\times R_p{}^{(m-k)}(\mathbf{x}) \cos(\ln Q^{(m-k)}{}_\omega(\mathbf{x}));$$

$$f^{(s)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) = g_s(\mathbf{x}) + \Sigma_{k=1,m}((\ln |S_q(\mathbf{x})|)^k/k!) \times$$
$$\times R_p{}^{(m-k)}(\mathbf{x}) \sin(\ln Q^{(m-k)}{}_\omega(\mathbf{x})),$$

где $g_c(\mathbf{x})$ и $g_s(\mathbf{x})$ будут пока что произвольными функциями, а функции $R_p{}^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega{}^{(j)}(\mathbf{x})$ получены на предыдущих шагах доказательства.

Подставим эти выражения вместе с формулами (29), (30) для $k = 0, 1, ..., m - 1$ в уравнения (13), (14) для $k = m$, которые можно теперь записать в виде

$$0 = f^{(c)}{}_{p,m}(\lambda\mathbf{x}) - \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda)\ (f^{(c)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) +$$
$$+ \Sigma_{k=1,m}((q \ln \lambda)^k/k!)\ f^{(c)}{}_{p,m-k}(\mathbf{x})) +$$

$$+ \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda)\, (f^{(s)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(s)}{}_{p,m-k}(\mathbf{x}));$$

$$0 = f^{(s)}{}_{p,m}(\lambda\mathbf{x}) - \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda)\, (f^{(c)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}\, ((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(c)}{}_{p,m-k}(\mathbf{x})) - \\ - \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda)\, (f^{(s)}{}_{p,m}(\mathbf{x}) + \\ + \Sigma_{k=1,m}\, ((q \ln \lambda)^k/k!)\, f^{(s)}{}_{p,m-k}(x)).$$

Требуется найти такие функции $g_c(\mathbf{x})$ и $g_s(\mathbf{x})$, для которых эти уравнения были бы выполнены. После довольно трудоемкого упрощения уравнения приобретают следующий вид:

$$g_c(\lambda\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x})\, \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda) - \\ - g_s(\mathbf{x})\, \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda);$$

$$g_s(\lambda\mathbf{x}) = g_c(\mathbf{x})\, \lambda^p \sin(\omega \ln \lambda) + \\ + g_s(\mathbf{x})\, \lambda^p \cos(\omega \ln \lambda).$$

В соответствии с леммой 4, существуют такие функции $R_p^{(m)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям теоремы, что справедливы равенства

$$g_c(\mathbf{x}) = R_p^{(m)}(\mathbf{x}) \cos(\ln Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x}));$$

$$g_s(\mathbf{x}) = R_p^{(m)}(\mathbf{x}) \sin(\ln Q_\omega^{(m)}(\mathbf{x})).$$

Следовательно, формула (21) справедлива также при $k = m$, а значит, и при любых $k = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема доказана.

Примечание. Множество точек, для которых $S_q(\mathbf{x}) = 0$, образует коническую поверхность меньшей размерности, вдоль которой функции $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ снова оказываются фундаментальными взаимно-однородными функциями, но уже от меньшего числа независимых переменных. Поэтому для границ, разделяющих конические области $S_q(\mathbf{x}) \neq 0$, снова применима параметризация вида (29), (30), но уже с другими функциями S_q и с участием меньшего числа переменных, и т. д.

Следствие 1. *Цепочка фундаментальных присоединенных однородных функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которая при $\forall\lambda > 0$ подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), при $x_1 > 0$ может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, x_1{}^p((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, x_1{}^p((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1); \quad (31)$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, x_1{}^p((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln x_1) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, x_1{}^p((q \ln x_1)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln x_1), \quad (32)$$

где $h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Из формул (31), (32) *путем замены $x_1 \to -x_1$ получаются формулы для случая $x_1 < 0$:*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(c)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln(-x_1)) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(s)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln(-x_1)); \quad (33)$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(c)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \sin(\omega \ln(-x_1)) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, (-x_1)^p((q \ln(-x_1))^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times g^{(s)}{}_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1) \cos(\omega \ln(-x_1)), \quad (34)$$

где $g_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ будут произвольными вещественными функциями от $(n - 1)$ переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, причем функции $g_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $g_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ выбираются не зависимо от функций $h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ и $h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, используемых в случае $x_1 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся доказательством следствия 1 для условия $x_1 > 0$, так как случай $x_1 < 0$ получается из выкладок для случая $x_1 > 0$ после замены $x_1 = -x_1$, при которой соотношения (29), (30) сохраняются в неизменном виде. Применим доказанную теорему с функцией $S_q(\mathbf{x}) = x_1{}^q$, где функции $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ будут представлены в области $x_1 > 0$ в соответствии с формулами (9) в виде

$$R_p^{(j)}(\mathbf{x}) = x_1^{\,p}\, H_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1),$$

$$Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x}) = x_1^{\,\omega}\, G_j(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1).$$

После подстановки и преобразования формул (29), (30) для новых функций

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = \\ = H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) \cos(\ln G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n));$$

$$h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) = \\ = H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) \sin(\ln G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n))$$

получаются формулы (31), (32).

Поскольку функции

$$H_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } G_j(t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

являются произвольными, то функции

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),\ h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

– тоже произвольные.

Следствие 1 доказано.

Примечание к следствию 1. При $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$ задача о параметризации функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, которые будут подчиняться функциональным соотношениям (13) и (14), но зависят от меньшего числа независимых переменных, решается с помощью формул, аналогичных формулам (31), (32), (33), (34). Процесс рекурсивно повторяется, пока не будет исчерпан список не равных нулю переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следствие 2. *Цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, *которая при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняется функциональным соотношениям (13) и (14), может быть представлена в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\cos(\omega \ln r) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\sin(\omega \ln r); \tag{35}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(c)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\sin(\omega \ln r) + \\ + \Sigma_{j=0,k}\, r^p((q \ln r)^{k-j}/(k-j)!) \times \\ \times h^{(s)}{}_j(x_1/r, x_2/r, \ldots, x_n/r)\cos(\omega \ln r), \tag{36}$$

где $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, *а*

$$h_j^{(c)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

будут произвольными вещественными функциями, которые задаются на поверхности гиперсферы единичного радиуса

$$t_1^{\,2} + t_2^{\,2} + \ldots + t_n^{\,2} = 1$$

и которые взаимно-однозначным образом связаны с функциями $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется схема доказательства следствия 2, где $S_q(\mathbf{x}) = r^q$, а для функций $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ применяются формулы (11).

Следствие 2 из теоремы доказано.

Следствие 3. *Пусть* $\psi_p(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* p, $\psi_q(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* $q \neq 0$, $\psi_\omega(\mathbf{x})$ *– положительно однородная функция степени* $\omega \neq 0$, а $\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$ *– это положительно однородные функции нулевой степени.*

Пусть в области Ω *эти функции не имеют сингулярных точек или точек разрыва, функция* ψ_p *не обращается в нуль, функции* ψ_q *и* ψ_ω *являются строго положительными*[2]*, функции* $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ *– функционально независимы.*

Тогда фундаментальные взаимно-однородные функции $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$, *которые при* $\forall\lambda > 0$ *подчиняются функциональным соотношениям (13) и (14), в области* Ω *могут быть представлены взаимно-однозначным образом в виде*

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(c)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\cos(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})) - \\ - \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(s)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\sin(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})); \tag{37}$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \\ \times h^{(c)}{}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\sin(\ln \psi_\omega(\mathbf{x})) +$$

[2] Для функций с отрицательными значениями можно использовать их модули.

$$+ \Sigma_{j=0,k}\, \psi_p(\mathbf{x})\, (\ln \psi_q(\mathbf{x}))^{k-j}/(k-j)! \times \quad (38)$$
$$\times\, h^{(s)}_j(\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}))\cos(\ln \psi_\omega(\mathbf{x}))\ ,$$

где $h_j^{(c)}(t_2, t_3,..., t_n)$ *и* $h_j^{(s)}(t_2, t_3, ..., t_n)$ *будут произвольными вещественными функциями от* $(n-1)$ *переменных, взаимно-однозначным образом связанными с функциями* $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ *и* $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Используется схема доказательства следствия 1, где $S_q(\mathbf{x}) = \psi_q(\mathbf{x})$, а для функций $R_p^{(j)}(\mathbf{x})$ и $Q_\omega^{(j)}(\mathbf{x})$ применяются формулы (12).

Следствие 3 из теоремы доказано.

Примечание к следствию 3. При использовании формул (37), (38) все пространство R^n разбивается на непересекающиеся области Ω_s конического вида, в которых функции $\psi_p(\mathbf{x})$, $\psi_q(\mathbf{x})$ и $\psi_\omega(\mathbf{x})$, выбранные фиксированным образом, не обращаются в нуль, функции

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})$$

образуют функционально независимый набор функций, а также в которых перечисленные функции не имеют сингулярных точек и точек разрыва. Для каждой из областей Ω_s при конструировании параметризации (37), (38) используется, вообще говоря, свой собственный набор функций

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

никак не связанный с функциями

$$h_j^{(c)}(t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{ и } h_j^{(s)}(t_2, t_3, \ldots, t_n),$$

которые используются для других областей.

В результате параметризация фундаментальных взаимно-однородных функций $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ разбивается на несколько независимых ветвей, причем такое разбиение зависит от выбранных вспомогательных функций $\psi_p(\mathbf{x})$, $\psi_q(\mathbf{x})$ и $\psi_\omega(\mathbf{x})$ и, в меньшей степени, функций

$$\psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x}),$$

и в силу этого не отражает внутреннюю структуру параметризуемой цепочки функций.

Линейная комбинация функций с постоянными коэффициентами, составленная из нескольких цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций степени p, снова будет цепочкой фундаментальных взаимно-однородных функций степени p. Кроме того, если $f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ и $f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x})$ – это цепочка фундаментальных взаимно-однородных функций степени p, то новая цепочка функций

$$g^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = f^{(c)}{}_{p,k-1}(\mathbf{x}) \text{ и } g^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = f^{(s)}{}_{p,k-1}(\mathbf{x}),$$

полученная с помощью сдвига индекса $k \to k-1$ и дополненная начальными нулями $g^{(c)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = 0$ и $g^{(s)}{}_{p,0}(\mathbf{x}) = 0$, также будет цепочкой фундаментальных взаимно-однородных функций степени p.

Полученные формулы (29) – (38) иллюстрируют справедливость гипотезы Гельфанда, согласно которой цепочки общего вида получаются из главных цепочек с ненулевым первым членом с помощью линейной комбинации с постоянными коэффициентами, составленной из главных и дочерних цепочек, которые получаются из главных цепочек с помощью сдвига индекса k и дополнения цепочки начальными нулевыми элементами. При этом все члены главной цепочки функций, в отличие от составных цепочек, восстанавливаются однозначным образом по ее первому члену в соответствии с некоторым правилом.

Точная формулировка этого правила отражает субъективные предпочтения исследователя и может варьироваться в широких пределах. Вообще говоря, понятие главной цепочки является в достаточной степени нечетким, поскольку при изменении способа параметризации функций прежние главные цепочки будут становиться составными, и наоборот, некоторые составные цепочки будут приобретать статус главных.

Как следует из формул (21), фундаментальные присоединенные однородные функции есть по сути линейные комбинации с постоянными коэффициентами, порождаемые главными цепочками функций, имеющих вид

$$(1/k!)\ (\ln|S_q(\mathbf{x})|)^k R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln|S_\omega(\mathbf{x})|),$$
$$(1/k!)\ (\ln|S_q(\mathbf{x})|)^k R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln|S_\omega(\mathbf{x})|),$$

где $R_p(\mathbf{x})$ – произвольные, положительно однородные функции степени p, $S_\omega(\mathbf{x})$ – произвольные, положительно однородные функции степени ω, а $S_q(\mathbf{x})$ – это фиксированные, положительно однородные функции степени q. Ситуация не изменится и никаких новых функций не удастся получить, если разрешить, чтобы функции $S_q(\mathbf{x})$ были произвольными, положительно однородными функциями степени q (хотя при таком подходе различать главные и составные цепочки становится совсем уж проблематичным).

Предварительные выводы

В процессе анализа взаимно-однородных функций, которые соответствуют матрице функциональных уравнений с одинаковыми вещественными собственными числами, был получен класс функций, представляющий собой обобщение присоединенных однородных функций Гельфанда [29, 30]. Определения и теоремы, сформулированные в процессе проведения исследования, позволяют корректным образом определить этот важный класс функций и более подробно исследовать его свойства. В частности, теорема о представлении фундаментальных взаимно-однородных функций позволяет без опаски ввести функции вида

$$f^{(c)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = (1/k!) \times$$
$$\times (\ln S_q(\mathbf{x}))^k R_p(\mathbf{x}) \cos(\ln \Phi_\omega(\mathbf{x}));$$

$$f^{(s)}{}_{p,k}(\mathbf{x}) = (1/k!) \times$$
$$\times (\ln S_q(\mathbf{x}))^k R_p(\mathbf{x}) \sin(\ln \Phi_\omega(\mathbf{x})),$$

а также их линейные комбинации с постоянными коэффициентами (возможно, с предварительным сдвигом индекса k и дополнением цепочки функций начальными нулями),
где $R_p(\mathbf{x})$ – это положительно однородная по Эйлеру функция степени p; $S_q(\mathbf{x})$ – положительно однородная по Эйлеру функция степени q, принимающая положительные значения; $\Phi_\omega(\mathbf{x})$ – положительно однородная по Эйлеру функция степени ω, принимающая положительные значения.

Такие функции тождественно совпадают с рассматриваемым классом фундаментальных взаимно-однородных функций, полностью сохраняя все их свойства и не порождая при этом принципиально новых математических объектов.

Дальнейшее исследование дифференциальных и интегральных свойств цепочек фундаментальных взаимно-однородных функций как нового функционального класса функций вещественного переменного будет продолжено в последующих публикациях.

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [31].

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за активное участие в обсуждении проблемы.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав гос. задания № 075-01073-20-00 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.

2. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсо-

на для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

3. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62.

4. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.** Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К**. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements // Microelectronic Engineering. 1991. Vol. 14. No. 3–4. Pp. 197–205.

10. **Khursheed A.** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast // Microelectronic Engineering. 1992. Vol. 16. No. 1–4. Pp. 43–50.

11. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets // Scanning. 1998. Vol. 20. No. 2. Pp. 87–91.

12. **Khursheed A.** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2000. Vol. 71. No. 4. Pp. 1712–1715.

13. **Khursheed A.** A low voltage time of flight electron emission microscope // Optik (Jena). 2002. Vol. 113. No. 11. Pp. 505–509.

14. **Khursheed A.** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM // Ultramicroscopy. 2002. Vol. 93. No. 3–4. Pp. 331–338.

15. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope // Review of Scientific Instruments. 2003. Vol. 74. No. 1. Pp. 134–140.

16. **Khursheed A., Osterberg M.** A spectroscopic scanning electron microscope design // Scanning. 2004. Vol. 26. No. 6. Pp. 296–306.

17. **Osterberg M., Khursheed A.** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 2005. Vol. 555. No. 1–2. Pp. 20–30.

18. **Khursheed A., Osterberg M.** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2006. Vol. 556. No. 2. Pp. 437–444.

19. **Luo T., Khursheed A.** Imaging with surface sensitive backscattered electrons // Journal of Vacuum Science and Technology B. 2007. Vol. 25. No. 6. Pp. 2017–2019.

20. **Khursheed, A., Hoang, H.Q.** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection // Ultramicroscopy. 2008. Vol. 109. No. 1. Pp. 104–110.

21. **Khursheed A.** Scanning electron microscope optics and spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010. 403 p.

22. **Hoang H.Q., Khursheed A.** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A. 2011. Vol. 635. No. 1. Pp. 64–68.

23. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM // Ultramicroscopy. 2011. Vol. 111. No. 8. Pp. 1093–1100.

24. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes // Journal of

Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 2012. Vol. 184. No. 11–12. Pp. 525–532.

25. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source // Nature Communications. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 1288.

26. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53.

27. **Бердников А.С., Соловьев К.В., Краснова Н.К.** Цепочки фундаментальных взаимно-однородных функций с общим вещественным собственным числом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 53–71.

28. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

29. **Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. Вып. 3. С. 3–70.

30. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Серия «Обобщенные функции». Вып. 1. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.

31. Wolfram Mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 27.03.2020, принята к публикации 17.04.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62.

4. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.,** Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St.

Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2010.

6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

9. **Khursheed A., Dinnis A.R., Smart P.D.,** Micro-extraction fields to improve electron beam test measurements, Microelectronic Engineering. 14 (3–4) (1991) 197–205.

10. **Khursheed A.,** Multi-channel vs. conventional retarding field spectrometers for voltage contrast, Microelectronic Engineering. 16 (1–4) (1992) 43–50.

11. **Khursheed A., Phang J.C., Thong J.T.L.,** A portable scanning electron microscope column design based on the use of permanent magnets, Scanning. 20 (2) (1998) 87–91.

12. **Khursheed A.,** Magnetic axial field measurements on a high resolution miniature scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 71 (4) (2000) 1712–1715.

13. **Khursheed A.,** A low voltage time of flight electron emission microscope, Optik (Jena). 113 (11) (2002) 505–509.

14. **Khursheed A.,** Aberration characteristics of immersion lenses for LVSEM, Ultramicroscopy. 93 (3–4) (2002) 331–338.

15. **Khursheed A., Karuppiah N., Osterberg M., Thong J.T.L.,** Add-on transmission attachments for the scanning electron microscope, Review of Scientific Instruments. 74 (1) (2003) 134–140.

16. **Khursheed A., Osterberg M.,** A spectroscopic scanning electron microscope design, Scanning. 26 (6) (2004) 296–306.

17. **Osterberg M., Khursheed A.,** Simulation of magnetic sector deflector aberration properties for low-energy electron microscopy, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 555 (1–2) (2005) 20–30.

18. **Khursheed A., Osterberg M.,** Developments in the design of a spectroscopic scanning electron microscope, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 556 (2) (2006) 437–444.

19. **Luo T., Khursheed A.,** Imaging with surface sensitive backscattered electrons, Journal of Vacuum Science and Technology B. 25 (6) (2007) 2017–2019.

20. **Khursheed A., Hoang H.Q.,** A second-order focusing electrostatic toroidal electron spectrometer with 2π radian collection, Ultramicroscopy. 109 (1) (2008) 104–110.

21. **Khursheed A.,** Scanning electron microscope optics and spectrometers. World Scientific, Singapore, 2010.

22. **Hoang H.Q., Khursheed A.,** A radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A. 635 (1) (2011) 64–68.

23. **Hoang H.Q., Osterberg M., Khursheed A.,** A high signal-to-noise ratio toroidal electron spectrometer for the SEM, Ultramicroscopy. 111 (8) (2011) 1093–1100.

24. **Khursheed A., Hoang H.Q., Srinivasan A.,** A wide-range parallel radial mirror analyzer for scanning electron/ion microscopes, Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. 184 (11–12) (2012) 525–532.

25. **Shao X., Srinivasan A., Ang W.K., Khursheed A.,** A high-brightness large-diameter graphene coated point cathode field emission electron source, Nature Communications. 9 (1) (2018) 1288.

26. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53.

27. **Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Krasnova N.K.,** Chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common real eigenvalue, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 53–71.

28. **Fikhtengol'ts G.M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

29. **Gel'fand I.M., Shapiro Z.Ya.,** Generalized functions and their applications, Uspekhi Mat. Nauk. 10 (3) (1955) 3–70.

30. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.,** Generalized functions, Vol. 1: Properties and operations, AMS Chelsea Publishing, 1964.

31. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 27.03.2020, accepted 17.04.2020.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.k.krasnova@mail.ru