

DOI: 10.18721/JPM.13304
УДК 519.632

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИФФУЗИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЕМКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ИСТОЧНИКОМ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**А.Д. Чернышов¹, Д.С. Сайко¹, В.В. Горяйнов²,
С.Ф. Кузнецов¹, О.Ю. Никифорова¹**

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий,
г. Воронеж, Российская Федерация;

² Воронежский государственный технический университет,
г. Воронеж, Российская Федерация

Методом быстрых разложений решается в общем виде задача диффузии в теле прямоугольной формы с граничными условиями 1-го рода и внутренним источником вещества, зависящим от координат точек прямоугольника. Получено точное решение, содержащее свободные параметры, изменяя которые можно получить множество новых точных решений. В качестве примера показаны точные решения задачи с постоянным внутренним источником. Из анализа точных решений следует, что распределения концентрации и диффузионных потоков будут симметричны относительно плоскости $y = b/2$ при условии равенства нулю концентрации вещества в углах прямоугольной области. Изучение перепада диффузионных потоков вдоль координатных осей показало, что на перепад несимметричных потоков влияет постоянный внутренний источник и не влияет концентрация вещества в углах области.

Ключевые слова: точное решение, диффузия, внутренний источник, прямоугольная форма, быстрое разложение

Ссылка при цитировании: Чернышов А.Д., Сайко Д.С., Горяйнов В.В. Кузнецов С.Ф., Никифорова О.Ю. Точные решения задачи о диффузии в прямоугольной емкости с внутренним источником, полученные методом быстрых разложений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 42–55. DOI: 10.18721/JPM.13304

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

THE DIFFUSION PROBLEM IN A RECTANGULAR CONTAINER WITH AN INTERNAL SOURCE: EXACT SOLUTIONS OBTAINED BY THE FAST EXPANSION METHOD

**A.D. Chernyshov¹, D.S. Sajko¹, V.V. Goryainov²,
S.F. Kuznetsov¹, O.Yu. Nikiforova¹**

¹ Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation;

² Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

The diffusion problem in a rectangular-shaped body with the Dirichlet's boundary conditions and an internal substance source depending on the rectangle points' coordinates has been solved generally by the fast expansion method (FEM). The exact solution containing free parameters was obtained, and by changing them one could get many new exact solutions. Exact solutions to the problem with a constant internal source were shown as an example. From our analysis of the exact solutions it follows that the concentration and diffusion fluxes distributions should be symmetrical relative to the plane $y = b/2$, provided that the substance concentration in the corners of the rectangular area is equal to zero. An investigation into the difference in the diffusion fluxes along the coordinate axes showed that the

constant internal source affected the difference in the nonsymmetrical fluxes, and the concentration of the substance in the area corners had no effect.

Keywords: exact solution, diffusion, internal source, rectangular shape, fast expansion method

Citation: Chernyshov A.D., Sajko D.S., Goryainov V.V., Kuznetsov S.F., Nikiforova O.Yu., The diffusion problem in a rectangular container with an internal source: exact solutions obtained by the fast expansion method, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (3) (2020) 42–55. DOI: 10.18721/JPM.13304

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Для решения плоских задач диффузии применяются различные методы, например метод коллокации и наименьших квадратов повышенной точности. В статье [1] для приближенного и однозначного задания границы области по ее дискретным данным, в прямоугольной системе координат строится параметрический двойной сплайн, в качестве компонент которого взяты два кубических сплайна. Численно-аналитическое представление решения двумерных и трехмерных краевых задач получено в работе [2] с помощью интегральных преобразований Фурье – Лапласа. В статье [3] изложен метод построения точных решений уравнений нелинейной диффузии в одномерном координатном пространстве на основе использования специального принципа суперпозиции. Для решения задач диффузии в сплошных средах в статье [4] предложен приближенный самосогласованный метод решения системы функциональных уравнений, полученных на основе спектрального разложения корреляции Эйлера несущей среды. Методы конечных разностей используются в работах [5 – 8]. В статьях [9 – 11] применяются квадратурные методы, а в [12, 13] используется метод, основанный на использовании вейвлетов Хаара.

В данной работе методом быстрых разложений [14] получены некоторые точные решения задачи о диффузии в теле прямоугольной формы с граничными условиями первого рода и внутренним источником вещества, зависящим от координат точек прямоугольника.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу диффузии, когда тело имеет прямоугольную форму Ω . Для неизвестной концентрации $C(x, y)$ явление диффузии можно описать с помощью дифференциального уравнения второго порядка в частных производных по переменным x, y с заданным внутренним источником вещества $F(x, y)$ (уравнение Пуассона):

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + F(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Граничные условия зададим в виде

$$\begin{aligned} C|_{x=0} &= f_1(y), \quad C|_{y=0} = f_2(x), \\ C|_{x=a} &= f_3(y), \quad C|_{y=b} = f_4(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи о распределении концентрации вещества $C(x, y)$ будем представлять простейшей зависимостью из теории быстрых разложений [14 – 16] при помощи полиномов, имеющих вид

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 - \frac{x}{a}, \quad P_2(x) = \frac{x}{a}, \\ P_3(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}, \quad P_4(x) = \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}, \\ P_1(y) &= 1 - \frac{y}{b}, \quad P_2(y) = \frac{y}{b}, \\ P_3(y) &= \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}, \quad P_4(y) = \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}, \\ (x, y) &\in \Omega \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b). \end{aligned}$$

Вывод предполагаемого точного решения $C(x, y)$ запишем конечным выражением, которое используется для быстрого разложения [14 – 16], т. е. состоящим из полиномиальной и конечной тригонометрической частей:

$$C(x, y) = \sum_{i=1}^4 A_i(y) P_i(x) + A_5(y) \sin \pi \frac{x}{a} + A_6(y) \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad (3)$$

где

$$A_i(y) = \sum_{j=1}^4 A_{i,j} P_j(y) + A_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \\ i = 1 \div 6, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Вид выражения (3) привлекателен тем, что подобной формой можно с высокой точностью аппроксимировать широкий класс гладких функций из пространства Соболева – Лиувилля, заданных в граничных условиях и в качестве внутреннего источника, имеющих практическое значение.

Функции, входящие в граничные условия (2), и внутренний источник $F(x, y)$ концентрации вещества, запишем конечными суммами по аналогии с зависимостью (3):

$$f_1(y) = \sum_{j=1}^4 f_{1,j} P_j(y) + f_{1,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{1,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \\ f_2(x) = \sum_{j=1}^4 f_{2,j} P_j(x) + f_{2,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{2,6} \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad (4) \\ f_3(y) = \sum_{j=1}^4 f_{3,j} P_j(y) + f_{3,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{3,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \\ f_4(x) = \sum_{j=1}^4 f_{4,j} P_j(x) +$$

$$+ f_{4,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{4,6} \sin 2\pi \frac{x}{a}. \\ F(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 F_{i,j} P_j(y) + F_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i(x) + \\ + \left(\sum_{j=1}^4 F_{5,j} P_j(y) + F_{5,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{5,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} + \\ + \left(\sum_{j=1}^4 F_{6,j} P_j(y) + F_{6,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{6,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a}. \quad (5)$$

В равенствах (4) и (5) коэффициенты f_{ij} и F_{ij} считаем известными величинами. Коэффициенты A_{ij} из выражения (3) считаем пока неизвестными. Их надо найти при помощи точного выполнения граничных условий (2) и дифференциального уравнения (1).

Решение (3) краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований граничных условий (2) и дифференциального уравнения (1) в угловых точках:

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_2(a) = f_3(0), \\ f_3(b) = f_4(a), \quad f_1(b) = f_4(0), \\ C_{xx}(0,0) + C_{yy}(0,0) + F(0,0) = 0, \\ C_{xx}(a,0) + C_{yy}(a,0) + F(a,0) = 0, \quad (6) \\ C_{xx}(0,b) + C_{yy}(0,b) + F(0,b) = 0, \\ C_{xx}(a,b) + C_{yy}(a,b) + F(a,b) = 0.$$

Условия (6) следуют из независимости величины концентрации $C(x, y)$ от направления подхода к углам прямоугольной области.

Таким образом, приходим к следующей задаче:

Требуется найти такое решение уравнения (1) с заданным внутренним источником в виде (5), которое должно точно удовлетворять

граничным условиям (2) и условиям согласованной (6).

Решение задачи

Вначале подставим предполагаемое точное решение задачи в форме (3) в граничные условия (2):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^4 f_{1,j} P_j(y) + f_{1,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \\
 & + f_{1,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} = \sum_{j=1}^4 A_{1,j} P_j(y) + \\
 & + A_{1,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{1,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \\
 & \sum_{j=1}^4 f_{2,j} P_j(x) + f_{2,5} \sin \pi \frac{x}{a} + \\
 & + f_{2,6} \sin 2\pi \frac{x}{a} = \sum_{i=1}^4 A_{i,1} P_i(x) + \\
 & + A_{5,1} \sin \pi \frac{x}{a} + A_{6,1} \sin 2\pi \frac{x}{a}, \quad (7) \\
 & \sum_{j=1}^4 f_{3,j} P_j(y) + f_{3,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \\
 & + f_{3,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} = \sum_{j=1}^4 A_{2,j} P_j(y) + \\
 & + A_{2,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{2,6} \sin 2\pi \frac{y}{b}, \\
 & \sum_{j=1}^4 f_{4,j} P_j(x) + f_{4,5} \sin \pi \frac{x}{a} + \\
 & + f_{4,6} \sin 2\pi \frac{x}{a} = \sum_{i=1}^4 A_{i,2} P_i(x) + \\
 & + A_{5,2} \sin \pi \frac{x}{a} + A_{6,2} \sin 2\pi \frac{x}{a}.
 \end{aligned}$$

Полученные равенства (7) относительно неизвестных A_{ij} должны выполняться для $\forall (x, y) \in \Omega_{\square}$.

Далее подставим $C(x, y)$ из выражения (3) в дифференциальное уравнение (1):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 A_{i,j} P_j(y) + A_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + A_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i''(x) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\pi^2}{a^2} \left(\sum_{j=1}^4 A_{5,j} P_j(y) + A_{5,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + A_{5,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} - \\
 & - \frac{4\pi^2}{a^2} \left(\sum_{j=1}^4 A_{6,j} P_j(y) + A_{6,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + A_{6,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a} + \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 A_{i,j} P_j''(y) - A_{i,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - \right. \\
 & \left. - A_{i,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i(x) + \quad (8) \\
 & + \left(\sum_{j=1}^4 A_{5,j} P_j''(y) - A_{5,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - \right. \\
 & \left. - A_{5,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} + \\
 & + \left(\sum_{j=1}^4 A_{6,j} P_j''(y) - A_{6,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - \right. \\
 & \left. - A_{6,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a} + \\
 & + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 F_{i,j} P_j(y) + F_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + F_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i(x) + \\
 & + \left(\sum_{j=1}^4 F_{5,j} P_j(y) + F_{5,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + F_{5,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} + \\
 & + \left(\sum_{j=1}^4 F_{6,j} P_j(y) + F_{6,5} \sin \pi \frac{y}{b} + \right. \\
 & \left. + F_{6,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение (8) должно выполняться при любых

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b.$$

В равенствах (7) и (8) линейно независимыми являются следующие функции:

$$\begin{aligned} &P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), \\ &P_1(y), P_2(y), P_3(y), P_4(y), \\ &\sin \pi \frac{x}{a}, \sin \pi \frac{y}{b}, \\ &\sin 2\pi \frac{x}{a}, \sin 2\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Функциональную систему (7), (8) сведем к системе линейных алгебраических уравнений путем приравнивания коэффициентов в равенствах (7) и (8) слева и справа перед линейно независимыми функциями (9), учитывая следующие равенства [14, 15]:

$$P_1'' = P_2'' = 0, \quad P_3'' = P_1, \quad P_4'' = P_2.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений будет переопределенной, но благодаря выполнению условий согласований (6) данная система имеет решение. Из анализа алгебраической системы следует, что условия согласований (6) выполняются автоматически, так как все алгебраические соотношения, получаемые из (6), входят в систему линейных алгебраических уравнений. Для нахождения неизвестных $A_{i,j}$ необходимо решить 36 алгебраических уравнений, а остальные уравнения мы используем для составления соотношений между коэффициентами

$$f_{i,j} (i = 1 \div 4, j = 1 \div 6)$$

и

$$F_{i,j} (i = 1 \div 6, j = 1 \div 6).$$

Таким образом, значения коэффициентов $A_{i,j}$ найдем из следующих равенств:

$$\begin{aligned} &A_{1,k} = f_{1,k}, \quad A_{2,k} = f_{3,k}, \quad k = 1 \div 6, \\ &A_{3,1} = f_{2,3}, \quad A_{3,2} = f_{4,3}, \\ &A_{3,3} = -F_{1,3}, \quad A_{3,4} = -F_{1,4}, \\ &A_{3,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{1,5} - F_{1,5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_{3,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{1,6} - F_{1,6}, \\ &A_{4,1} = f_{2,4}, \quad A_{4,2} = f_{4,4}, \\ &A_{4,3} = -F_{4,1}, \quad A_{4,4} = -F_{2,4}, \\ &A_{4,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{3,5} - F_{2,5}, \\ &A_{4,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{3,6} - F_{2,6}, \\ &A_{5,1} = f_{2,5}, \quad A_{5,2} = f_{4,5}, \\ &A_{5,3} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{2,5} - F_{5,1}, \\ &A_{5,4} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{4,5} - F_{5,2}, \\ &A_{5,5} = F_{5,5} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \\ &A_{5,6} = F_{5,6} / \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right), \\ &A_{6,1} = f_{2,6}, \quad A_{6,2} = f_{4,6}, \\ &A_{6,3} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{2,6} - F_{6,1}, \\ &A_{6,4} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{4,6} - F_{6,2}, \\ &A_{6,5} = F_{6,5} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right), \\ &A_{6,6} = F_{6,6} / \left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив коэффициенты из равенств (10) в выражение (3), мы будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий (2) и внутреннего источника (5) должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} &f_{1,1} = f_{2,1}, \quad f_{2,2} = f_{3,1}, \\ &f_{3,2} = f_{4,2}, \quad f_{1,2} = f_{4,1}, \\ &F_{3,3} = F_{3,4} = F_{4,3} = F_{4,4} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &f_{1,3} = -f_{2,3} - F_{1,1}, \quad f_{1,4} = -f_{4,3} - F_{1,2}, \\ &f_{3,3} = -f_{2,4} - F_{2,1}, \quad f_{3,4} = -f_{4,4} - F_{2,2}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 F_{1,3} &= F_{3,1}, & F_{1,4} &= F_{3,2}, \\
 F_{4,1} &= F_{2,3}, & F_{2,4} &= F_{4,2}, \\
 f_{1,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{3,5} + F_{1,5} \right), \\
 f_{1,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{3,6} + F_{1,6} \right), \\
 f_{2,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,3} + F_{5,1} \right), \\
 f_{2,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,3} + F_{6,1} \right), \\
 f_{3,5} &= \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{\pi^2} F_{4,5} + F_{2,5} \right), \\
 f_{3,6} &= \frac{b^2}{4\pi^2} \left(\frac{b^2}{4\pi^2} F_{4,6} + F_{2,6} \right), \\
 f_{4,5} &= \frac{a^2}{\pi^2} \left(\frac{a^2}{\pi^2} F_{5,4} + F_{5,2} \right), \\
 f_{4,6} &= \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\frac{a^2}{4\pi^2} F_{6,4} + F_{6,2} \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, решение (10) имеет место, когда выполнены условия (11) – (13).

Пример построения точных решений и их анализ

Пусть в прямоугольной емкости действует постоянный внутренний источник. Этот вариант внутреннего источника можно получить из выражений (5) и условия (12) при выполнении равенств

$$\begin{aligned}
 F_1(y) &= F_2(y), \\
 F_3(y) &= F_4(y) = \\
 &= F_5(y) = F_6(y) = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Условие $F_1(y) = F_2(y)$ в равенствах (14) означает равенство коэффициентов

$$F_{1,1} = F_{1,2} = F_{2,1} = F_{2,2} = Q \tag{15}$$

с одновременным равенством нулю остальных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 F_{1,3} &= F_{1,4} = F_{1,5} = F_{1,6} = \\
 &= F_{2,3} = F_{2,4} = F_{2,5} = F_{2,6} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, при выполнении равенств (14) – (16) имеем постоянный внутренний источник

$$F(x, y) = Q. \tag{17}$$

Запишем граничные условия, которые будут выполняться для источника (17). Для этого, с учетом равенств (15) перепишем равенства (12) в виде

$$\begin{aligned}
 f_{1,3} + f_{2,3} + Q &= 0, \\
 f_{1,4} + f_{4,3} + Q &= 0, \\
 f_{2,4} + f_{3,3} + Q &= 0, \\
 f_{4,4} + f_{3,4} + Q &= 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть в формулах (4) только коэффициенты, входящие в равенства (18), могут быть отличны от нуля. Для этого случая возможны несколько вариантов граничных условий, соответствующих разным комбинациям значений коэффициентов в равенствах (18). Пусть

$$\begin{aligned}
 f_{1,3} = f_{1,4} = f_{2,4} = f_{4,4} &= 0, \\
 f_{2,3} = f_{4,3} = f_{3,3} = f_{3,4} &= -Q.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда, если учесть значения коэффициентов из равенств (19), то граничные условия (2) примут вид

$$\begin{aligned}
 C|_{x=0} &= 0, & C|_{x=a} &= -\frac{Q}{2}(y^2 - by), \\
 C|_{y=0} &= C|_{y=b} = -Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя в выражения (10) коэффициенты из равенств (16) и (19), получим:

$$A_{2,3} = A_{2,4} = A_{3,1} = A_{3,2} = -Q.$$

После упрощений точное решение уравнения (1), соответствующее условиям (20), с постоянным внутренним источником (17)

принимает вид

$$C(x, y) = -\frac{Q}{2}(y^2 - by)\frac{x}{a} - Q\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right). \quad (21)$$

По формуле (21) можно вычислить концентрацию вещества $C(x, y)$ в любой точке прямоугольной области. Из этой формулы следует, что в углах прямоугольной области $C(x, y) = 0$. Распределение $C(x, y)$ для случая

$$Q = 4, a = 1 \text{ м}, b = 2 \text{ м} \quad (22)$$

представлено на рис. 1, а. Видно, что указанное распределение, рассчитанное по формуле (21), имеет плоскость симметрии, проходящую в сечении $y = b/2$. Наибольшее значение концентрации $C(x, y) = 2$ находится в точке $(a; b/2)$; наименьшее – $C(x, y) = 0$ расположено в углах области и на границе $x = 0$ (это также следует из граничных условий (20)). Максимальная разность концентраций находится между точками кривой, полученной сечением поверхности $C(x, y)$ плоскостью $y = b/2$, и составляет

$$\Delta C(x, y) = C(a; b/2) - C(0; b/2) = 2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда наряду с постоянным внутренним источником (17) будут задаваться концентрации вещества в углах области.

Граничные условия запишем так, чтобы выполнялись равенства (19) и чтобы коэффициенты $f_{i,j}$, входящие в условия (11), были не равны нулю. Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_{1,1} = f_{2,1} = C_1, f_{2,2} = f_{3,1} = C_3, \\ f_{3,2} = f_{4,2} = C_4, f_{1,2} = f_{4,1} = C_2. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом формул (19) и (23) граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} C|_{x=0} &= C_1\left(1 - \frac{y}{b}\right) + C_2\frac{y}{b}, \\ C|_{x=a} &= C_3\left(1 - \frac{y}{b}\right) + C_4\frac{y}{b} - \frac{Q}{2}(y^2 - by), \\ C|_{y=0} &= C_1\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C_3\frac{x}{a} - Q\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right), \\ C|_{y=b} &= C_2\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C_4\frac{x}{a} - Q\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

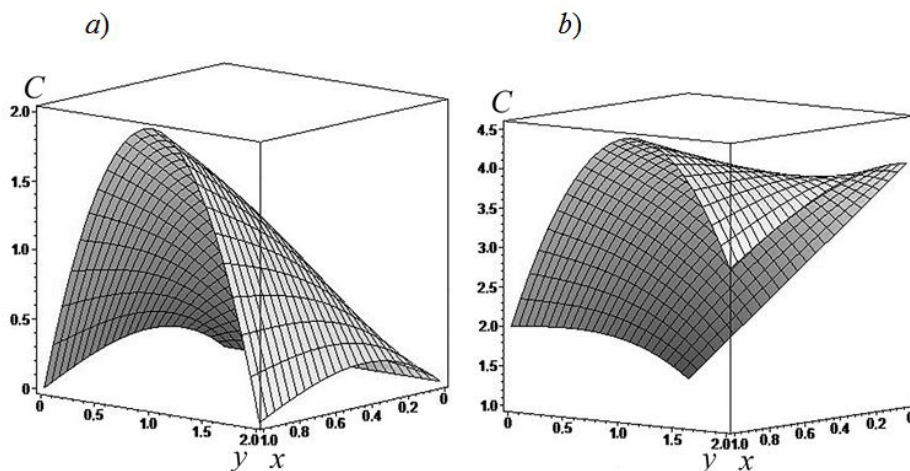


Рис. 1. Распределение концентрации вещества $C(x, y)$, построенное с применением формул (21) (а) и (25) (б)

Используя равенства (19) и (23), по формулам (10) найдем

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= C_1, A_{1,2} = C_2, \\ A_{2,1} &= C_3, A_{2,2} = C_4, \\ A_{2,3} &= A_{2,4} = A_{3,1} = A_{3,2} = -Q. \end{aligned}$$

Следовательно, точное решение уравнения диффузии (1) с постоянным внутренним источником (17), соответствующее граничным условиям (24), принимает форму

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \left(C_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_2 \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \\ &+ \left(C_3 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_4 \frac{y}{b} \right) \frac{x}{a} - \\ &- \frac{Q}{2} (y^2 - by) \frac{x}{a} - Q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Распределение концентрации $C(x, y)$ для частных значений параметров

$$\begin{aligned} Q &= 4, C_1 = 1, C_2 = 4, C_3 = 2, C_4 = 3, \\ a &= 1 \text{ м}, b = 2 \text{ м} \end{aligned} \quad (26)$$

показано на рис. 1, б. Видно, что распределение $C(x, y)$, вычисленное по формуле (25), не имеет плоскостей симметрии. Наибольшее значение концентрации $C(x, y) = 4,5$ находится в точке $(a; b/2)$, а наименьшее, $C(x, y) = 1$, – в точке $(0; 0)$.

Подставляя в решение (25) значения $x = a/2$ и $y = b/2$, вычислим значение концентрации в центре области:

$$\begin{aligned} C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= \\ &= \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{4} + \frac{Q}{16} (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Вычислим диффузионные потоки вещества по следующим формулам [17]:

$$q_x(x, y) = -D \frac{\partial C(x, y)}{\partial x}, \quad (27)$$

$$q_y(x, y) = -D \frac{\partial C(x, y)}{\partial y}. \quad (27)$$

где D – коэффициент диффузии.

Подставляя в эти формулы точное решение (21), будем иметь:

$$\begin{aligned} q_x(x, y) &= \\ &= DQ \left(\frac{1}{2a} (y^2 - by) + \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$q_y(x, y) = DQ \frac{x}{2a} (2y - b). \quad (29)$$

При подстановке решения (25) в формулы (27) получим:

$$\begin{aligned} q_x(x, y) &= \frac{D}{a} \left(C_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_2 \frac{y}{b} \right) - \\ &- \frac{D}{a} \left(C_3 \left(1 - \frac{y}{b} \right) + C_4 \frac{y}{b} \right) + \\ &+ DQ \left(\frac{1}{2a} (y^2 - by) + \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} q_y(x, y) &= D \left(\frac{C_1}{b} - \frac{C_2}{b} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \\ &+ D \left(\frac{C_3}{b} - \frac{C_4}{b} \right) \frac{x}{a} + DQ \frac{x}{2a} (2y - b). \end{aligned} \quad (31)$$

Диффузионные потоки вещества, показанные на рис. 2, построены по формулам (28) и (29) при использовании данных (22). Коэффициент диффузии в расчетах был равен $D = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Приведенные данные на рис. 2 позволяют заключить, что при диффузии под действием только внутреннего источника Q диффузионный поток вещества $q_x(x, y)$ имеет такую же плоскость симметрии, как и соответствующее ему распределение концентрации $C(x, y)$; т. е. плоскость симметрии проходит в сечении $y = b/2$.

При отношении $b/a = 1 - 4$ виды распределения концентрации вещества $C(x, y)$ и

диффузионного потока $q_x(x, y)$ в прямоугольной области качественно будут похожи на распределения, приведенные на рис. 1 и 2. Если длина какой-либо из сторон (a или b) прямоугольника будет больше другой в десять и более раз, то такая разница приведет к качественному изменению распределений концентрации вещества $C(x, y)$ и диффузионного потока $q_x(x, y)$, по сравнению с распределениями, приведенными на рис. 1 и 2, *a*.

Например, если в данных (26) изменить только значение переменной y с двух до десяти метров, то графики $C(x, y)$ и $q_x(x, y)$, построенные по формулам (25) и (28), будут иметь вид, показанный на рис. 3.

Если же в данных (26) изменить только значение переменной x (например, взять десять метров вместо одного), то распределения $C(x, y)$ и $q_x(x, y)$, построенные по формулам (25) и (28), примут вид, показанный на рис. 4.

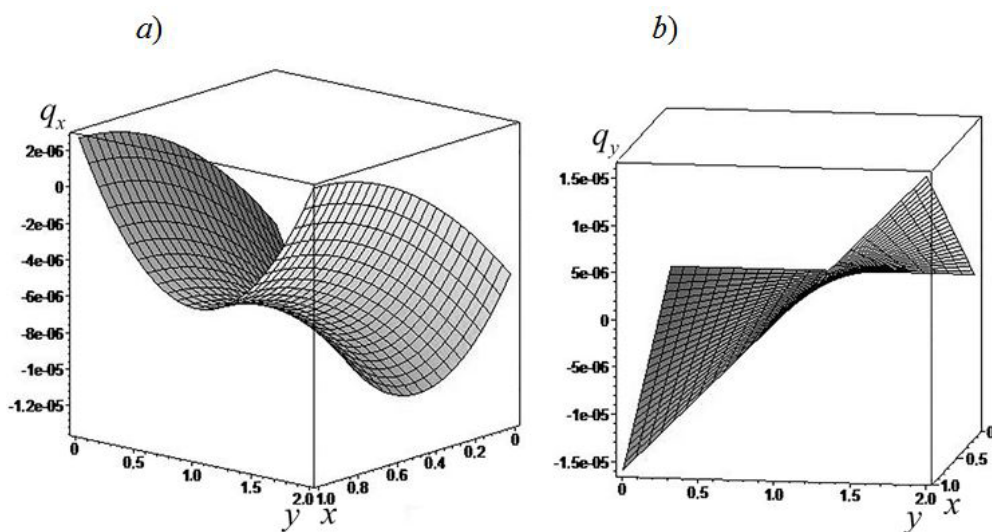


Рис. 2. Графическое представление диффузионных потоков вещества $q(x, y)$, построенное по формулам (28) (*a*) и (29) (*b*); $D = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

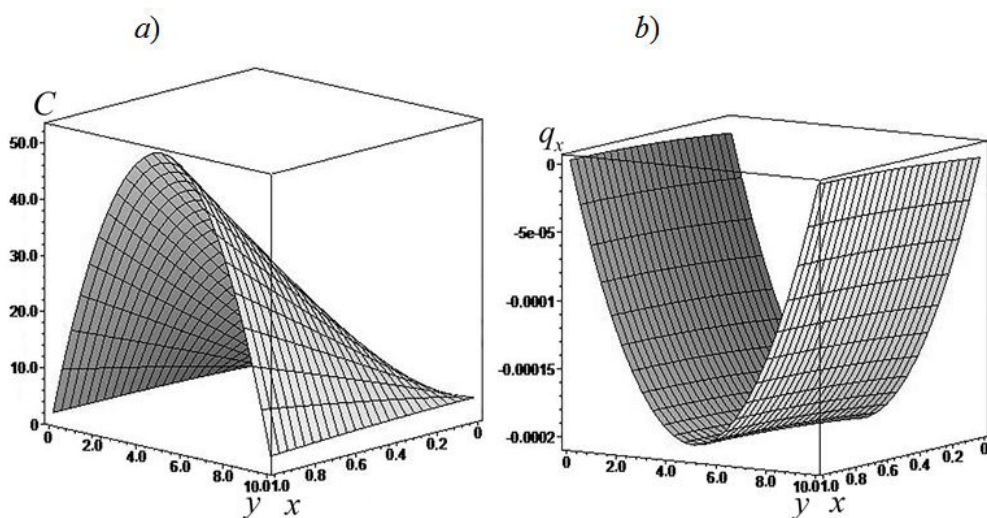


Рис. 3. Распределения концентрации вещества $C(x, y)$ (*a*) и диффузионных потоков вещества $q(x, y)$ (*b*) при значении $b/a = 10$

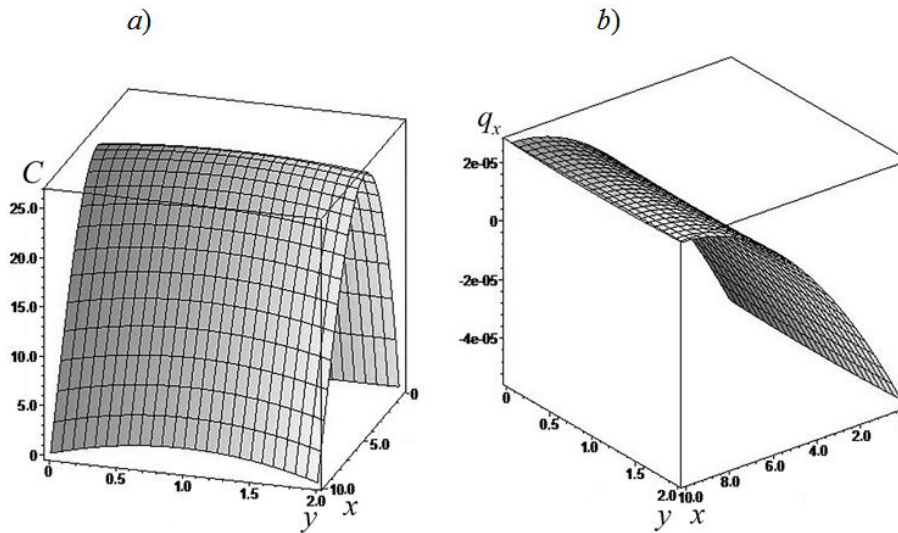


Рис. 4. Распределения концентрации вещества $C(x, y)$ (a) и диффузионных потоков вещества $q(x, y)$ (b) при значении $b/a = 1/5$

На рис. 3,a и 4,a видно, что концентрации вещества в углах области малы, по сравнению с максимальной концентрацией, и теперь вид распределения $C(x, y)$, построенного по формуле (24) (см. рис. 3,a), качественно сходен с видом распределения $C(x, y)$, построенного по формуле (21) (см. рис. 1,a).

Анализ данных, представленных на рис. 2, 3,b и 4,b, позволяет сделать вывод, что представляет интерес исследование перепада диффузионных потоков вдоль координатных осей. На рис. 2,a видно, что перепад потока между границами $x = 0$ и $x = a$ в любых сечениях

$$y = \text{const} \quad (0 \leq y \leq b),$$

то есть постоянная величина; она определяется по формуле

$$\Delta q_x = q_x(0, y) \Big|_{y=\text{const}} - q_x(a, y) \Big|_{y=\text{const}} = -\frac{DQa}{2}. \quad (32)$$

На рис. 2,b видно, что наибольшее значение диффузионный поток $q_y(x, y)$ принимает в сечении $x = a$. Перепад потока $q_y(x, y)$ при $x = a$ между границами $y = 0$ и $y = b$ определим по формуле

$$\Delta q_y = q_y(a, 0) - q_y(a, b) = -DQb. \quad (33)$$

Равенства (32) и (33) справедливы как для симметричных диффузионных потоков $q_x(x, y)$, $q_y(x, y)$, рассчитанных по формулам (28) и (29), так и для несимметричных, рассчитанных по формулам (30), (31). Таким образом, из равенств (32) и (33) следует, что на перепады Δq_x и Δq_y несимметричных потоков $q_x(x, y)$ и $q_y(x, y)$ влияет постоянный внутренний источник, но не влияют концентрации вещества в углах области.

Заключение

Приведенные примеры показывают, что метод быстрых разложений позволяет получать не только приближенные решения [18 – 20], но и точные. С помощью аналитического решения уравнения диффузии, найденного в данной статье, можно получать его точные решения для различных граничных условий, причем не только для постоянного внутреннего источника, но и для переменного. Подбор коэффициентов граничных условий (2) и внутреннего источника (5) следует вести с учетом формул (11) – (13).

Из анализа полученных точных решений следует, что при равенстве нулю концентра-

ций вещества в углах прямоугольной области распределения концентрации $C(x, y)$ и диффузионных потоков вещества $q_x(x, y)$, $q_y(x, y)$ будут симметричны относительно

плоскости $y = b/2$. Если же концентрации в углах не равны нулю, то распределения $C(x, y)$, $q_x(x, y)$, $q_y(x, y)$ не обладают подобной симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.А., Шапеев В.П.** Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом коллокации и наименьших квадратов в области с дискретно заданной границей // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 3. С. 15–30.
2. **Сыромятников П.В.** Матричный метод решения нестационарных задач конвекции-диффузии в полуограниченных многослойных и градиентных средах // Наука Юга России. 2018. Т. 14. № 4. С. 3–13.
3. **Журавлев В.М.** Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии // Теоретическая и математическая физика. 2015. Т. 183. № 1. С. 36–50.
4. **Деревич И.В.** Спектральная модель диффузии тяжелой инерционной примеси в случайном поле скорости сплошной среды // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 2. С. 151–170.
5. **Гадиева С.С., Гарахманов П.Ф.** Применение методов конечных разностей для решение модельных уравнений тепломассопереноса // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2017. Т. 32. № 4. С. 38–46.
6. **Поляков С.В.** Экспоненциальные разностные схемы с двойным интегральным преобразованием для решения уравнений конвекции-диффузии // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 29–32.
7. **Аввакумов А.В., Вабищевич П.Н., Васильев А.О., Стрижов В.Ф.** Численное моделирование нестационарных задач диффузии нейтронов // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 7. С. 44–62.
8. **Арутюнян Р.В.** Моделирование стохастических процессов фильтрации в решетчатых системах // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 4 (16). С. 17–30.
9. **Zhong H., He Y.** Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35. No. 21. Pp. 2805–2819.
10. **El-Sherbeny A.M., El-Hassani R.M.I., El-Badry H., Abdallah M.I.** Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method // Ain Shams Engineering Journal. 2018. Vol. 9. No. 4. Pp. 2879–2885.
11. **Ghasemi M.** Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers & Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73. No. 7. Pp. 1576–1592.
12. **Shi Z., Cao Y.-y., Chen Q.-j.** Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method // Applied Mathematical Modelling. 2012. Vol. 36. No. 11. Pp. 5143–5161.
13. **Zhi S., Cao Y.-y.** A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations // Mathematical and Computer Modelling. 2011. Vol. 54. No. 11–12. Pp. 2858–2868.
14. **Чернышов А.Д.** Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
15. **Чернышов А.Д., Горяйнов В.В.** О выборе оптимального порядка граничной функции в быстром разложении // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2011. № 1. С. 60–65.
16. **Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю.** Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестник Воронежского государственного



ного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 1. С. 27–34.

17. **Франк-Каменецкий Д.А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике: М.: Наука, 1987. 502 с.

18. **Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Марченко А.Н.** Исследование температурных полей в прямоугольной пластине с внутренним источником, зависящим от температуры, при помощи быстрых разложений // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 2. С. 247–256.

19. **Чернышов А.Д., Попов В.М., Горяйнов В.В., Лешонков О.В.** Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1288–1297.

20. **Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A.** Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 973. P. 012002.

Статья поступила в редакцию 30.12.2019, принята к публикации 02.07.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЧЕРНЫШОВ Александр Данилович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация.

394000, Российская Федерация, г. Воронеж, пр. Революции, 19
chernyshovad@mail.ru

САЙКО Дмитрий Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация.

394000, Российская Федерация, г. Воронеж, пр. Революции, 19
dmsajko@mail.ru

ГОРЯЙНОВ Виталий Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета, г. Воронеж, Российская Федерация.

394006, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
gorvit77@mail.ru

КУЗНЕЦОВ Сергей Федорович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация.

394000, Российская Федерация, г. Воронеж, пр. Революции, 19
sfs134@mail.ru

НИКИФОРОВА Ольга Юрьевна — старший преподаватель кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация.

394000, Российская Федерация, г. Воронеж, пр. Революции, 19
niki22@mail.ru

REFERENCES

1. **Belyaev V.A., Shapeev V.P.**, Solving the Dirichlet problem for the Poisson equation by the least squares collocation method with given discrete boundary domain, *Computational Technologies*. 23 (3) (2018) 15–30. (in Russian)
2. **Syromyatnikov P.V.**, A matrix method for solving non-stationary convection-diffusion problems in semibounded multilayer and gradient mediascience in the South of Russia, *Science in the South of Russia*. 14 (4) (2018) 3–13 (in Russian).
3. **Zhuravlev V.M.**, Superposition principle and exact solutions of a nonlinear diffusion equation, *Theoretical and Mathematical Physics*. 183 (1) (2015) 478–490.
4. **Derevich I.V.**, Spectral diffusion model of heavy inertial particles in a random velocity field of the continuous medium, *Thermophysics and Aeromechanics*. 22 (2) (2015) 143–162.
5. **Gadieva S.S., Gahramanov P.F.**, Application of methods of finite differences for solving model equations of thermal association, *Herald of Dagestan State University, Ser. Natural Sciences*. 32 (4) (2017) 38–46 (in Russian).
6. **Polyakov S.V.**, Exponential difference schemes with double integral transformation for solving convection-diffusion equations, *Mathematical Models and Computer Simulations*. 5 (4) (2013) 338–3402.
7. **Avvakumov A.V., Vabishchevich P.N., Vasilev A.O., Strizhev V.F.**, Numerical modeling of neutron diffusion non-stationary problems, *Matem. Mod.* 29 (7) (2017) 44–62 (in Russian).
8. **Arutyunyan R.V.**, Modeling of stochastic filtration processes in lattice systems, *Matematicheskoe Modelirovanie i Chislennyye Metody*. 4 (16) (2017) 17–30 (in Russian).
9. **Zhong H., He Y.**, Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element, *International Journal of Solids and Structures*. 35 (21) (1998) 2805–2819.
10. **El-Sherbeny A.M., El-Hassani R.M.I., El-Badry H., Abdallah M.I.**, Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method, *Ain Shams Engineering Journal*. 9(4) (2018) 2879–2885.
11. **Ghasemi M.**, Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D, *Computers & Mathematics with Applications*. 73 (7) (2017) 1576–1592.
12. **Shi Z., Cao Y.-y., Chen Q.-j.**, Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method, *Applied Mathematical Modelling*. 36 (11) (2012) 5143–5161.
13. **Zhi S., Cao Y.-y.**, A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations, *Mathematical and Computer Modelling*. 54 (11–12) (2011) 2858–2868.
14. **Chernyshov A.D.**, Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 54 (1) (2014) 11–21.
15. **Chernyshov A.D., Gorjajnov V.V.**, About a choice of an optimum order of boundary function in rapid expansion, *Proceedings of Voronezh State University, Series: Systems Analysis and Information Technologies*. (1) (2011) 60–65. (in Russian)
16. **Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Leshonkov O.V., et al.**, Comparison of the rate of convergence of fast expansions with expansions in the classical Fourier series, *Proceedings of Voronezh State University, Series: Systems Analysis and Information Technologies*. (1) (2019) 27–34. (in Russian)
17. **Frank-Kamenetskii D.A.**, Diffusion and heat exchange in chemical kinetics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2015.
18. **Chernyshov A.D., Goryaynov V.V., Marchenko A.N.**, Study of temperature fields in a rectangular plate with a temperature-dependent internal source with the aid of fast expansions, *Thermophysics and Aeromechanics*. 23 (2) (2016) 237–245.
19. **Chernyshov A.D., Popov V.M., Goryainov V.V., Leshonkov O.V.**, Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary, *Engineering Physics and Thermophysics*. 90 (5) (2017) 1288–1297.

20. **Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Dan-shin A.A.**, Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 973 (2018) 012002.

Received 30.12.2019, accepted 02.07.2020.

THE AUTHORS

CHERNYSHOV Alexander D.

Voronezh State University of Engineering Technology
19 Revolutsii Pr., Voronezh, 394000, Russian Federation
chernyshovad@mail.ru

SAJKO Dmitrij S.

Voronezh State University of Engineering Technology
19 Revolutsii Pr., Voronezh, 394000, Russian Federation
dmsajko@mail.ru

GORYAINOV Vitalij V.

Voronezh State Technical University
84, 20 let Oktyabrya St., Voronezh, 394006, Russian Federation
gorvit77@mail.ru

KUZNETSOV Sergei F.

Voronezh State University of Engineering Technology
19 Revolutsii Pr., Voronezh, 394000, Russian Federation
sfs134@mail.ru

NIKIFOROVA Olga Yu.

Voronezh State University of Engineering Technology
19 Revolutsii Pr., Voronezh, 394000, Russian Federation
niki22@mail.ru