

Математическое моделирование физических процессов

DOI: 10.18721/JPM.13404
УДК 519.63:621.039

НЕЯВНЫЙ ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СОСТОЯНИЯ МНОГОФАЗНОГО ПОТОКА С ОБЩИМ ДАВЛЕНИЕМ

С.В. Булович

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для модели многофазной среды с общим давлением в жидкостях, в баротропном приближении, предложена экономичная схема численного интегрирования системы дифференциальных уравнений. Алгоритм позволяет рассматривать произвольное количество жидкостей и допускает возможность вырождения по этому параметру (до одной жидкости) в процессе расчета. Уравнения состояния для жидкостей не имеют ограничения, связанного с конечной величиной сжимаемости среды, т. е. жидкость может быть несжимаемой. Используется неявный метод формирования решения. Экономичность обеспечивается тем, что алгоритм построения обратной матрицы базируется на схеме расщепления по физическим процессам и разрешимости уравнений в рамках скалярных прогонок. В качестве примера рассмотрен вариант течения для трех жидкостей.

Ключевые слова: многожидкостная модель, баротропное приближение, численное моделирование, корректность задачи Коши, неявный алгоритм

Ссылка при цитировании: Булович С.В. Неявный экономичный алгоритм численного интегрирования системы уравнений для описания состояния многофазного потока с общим давлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 47–60. DOI: 10.18721/JPM.13404

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

AN IMPLICIT ECONOMICAL ALGORITHM FOR NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATION SYSTEM DESCRIBING A MULTIPHASE FLOW STATE WITH COMMON PRESSURE

S.V. Bulovich

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

An economical scheme for numerical integrating the system of differential equations has been proposed for the model of a multiphase medium with a common pressure (in the barotropic approximation) in liquids. The algorithm allows us to consider an arbitrary number of liquids and admits the possibility of degeneration of this parameter to one liquid in the calculation process. The equations of states for liquids have no restriction related to the finite compressibility of the medium, i.e. the liquid can be incompressible. An implicit method for generating a solution is used. The efficiency is ensured by the fact that the algorithm for constructing the inverse matrix is based on the splitting scheme for physical processes and the solvability of equations within scalar runs. As an example, the flow variant for three liquids is considered.

Keywords: multifluid model, barotropic approximation, implicit algorithm, numerical simulation, Cauchy problem

Citation: Bulovich S.V., An implicit economical algorithm for numerical integration of the equation system describing a multiphase flow state with common pressure, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (4) (2020) 47–60. DOI: 10.18721/JPM.13404

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Понятие взаимопроникающих континуумов, введенное в рассмотрение Х.А. Рахматулиным [1] и относящееся к случаю, когда одна и та же область пространства характеризуется количеством объемной доли вещества, находящегося в различных агрегатных состояниях, следует отнести к наиболее успешному и плодотворному направлению математического моделирования явлений, происходящих в гетерогенных средах. Для идентификации рассматриваемых объектов привлекают понятие жидкостей. В рамках этих представлений сформулирован ряд математических моделей, обладающих определенной иерархией по полноте и адекватности отражения происходящих процессов [2]. Это позволяет даже для одного и того же агрегатного состояния вещества различать состав, уровень и направление скорости, значения температуры и давления.

Для определения термо- и газодинамических функций состояния многофазного потока, используют необходимое количество балансовых соотношений. Формально их число может быть сокращено, если одноименные функции в разных жидкостях находятся в равновесном состоянии. С такой точки зрения, наибольшей полнотой обладает модель Байера и Нунциато [3], полностью неравновесная по температурам, скоростям и давлениям в жидкостях. С учетом того, что время релаксации поля давления в жидкостях существенно меньше, чем время релаксации температуры и скорости, процесс выравнивания давлений можно исключить и рассматривать конечное равновесное состояние. Тогда следующей по полноте описания процессов будет модель, в которой реализовано допущение о равном значении давления в жидкостях. По принятой классификации, это так называемые модели с одним или

общим давлением.

В классе течений, где тепловые процессы не выступают определяющими, возможно дальнейшее упрощение математической модели, связанное с рассмотрением баротропных процессов. В этом случае многожидкостная модель будет состоять из уравнений неразрывности, уравнений количества движения, уравнений связи плотности со значением давления для каждой из жидкостей и алгебраического соотношения баланса объемной доли жидкостей. В квазиодномерной постановке система уравнений, записанная для канала переменного сечения, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k^2 + A\alpha_k p)}{\partial x} - \\ - p \frac{\partial(A\alpha_k)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k=K} \alpha_k = 1, \quad \rho_k = \rho_k(p),$$

где α_k – объемная доля k -ой жидкости; ρ_k , кг/м³, u_k , м/с, – ее плотность и скорость; $k = 1, 2, \dots, K$ (K – общее количество жидкостей); p , Па, – общее для всех жидкостей давление в сечении канала; A , м², – площадь сечения канала; t , с, – время; x , м, – координата вдоль образующей канала.

Система дифференциальных уравнений (1) состоит из слагаемых в виде первых производных по пространству и времени. Источниковые слагаемые, описывающие массообменные процессы в жидкостях и процессы изменения импульса за счет взаимодействия

фаз на межфазной поверхности или взаимодействия жидкостей со стенкой канала, не представлены. Как правило, при конструировании этих слагаемых не используют дифференциальные соотношения и, следовательно, такие слагаемые не будут влиять на тип и свойства системы уравнений (1).

Для получения решения системы уравнений (1) нашли широкое применение численные методы интегрирования системы дифференциальных уравнений. При этом количество алгоритмов и различных разностных схем продолжает возрастать. Совершенствование идет как по полноте и точности описания рассматриваемых процессов, так и по эффективности проводимых вычислений. Это факторы, тесно связанные между собой.

Даже если руководствоваться только сутью решаемой задачи (стационарная или нестационарная постановка, наличие или отсутствие разрывов в виде ударных волн или контактных поверхностей, интенсивный массо- и теплообмен между фазами и т. п.), то невозможно сделать однозначный вывод в предпочтении способа аппроксимации дифференциальных уравнений: явные, полунявные или полностью неявные схемы; центрированные или со смещенным шаблоном начальных данных.

Рассмотрим несколько примеров.

Явные схемы, как правило, базируются на методах Лакса – Фредрикса, Лакса – Вендроффа или на их комбинации, например схема MASTA [4]. По-прежнему популярен метод коррекции потоков [5], обобщенный на многожидкостную модель.

Полунявные методы [6, 7], когда часть слагаемых уравнения аппроксимируется на верхнем временном слое, позволяют частично снять ограничение на значение шага интегрирования по времени.

Полностью неявные алгоритмы основаны на итерационном методе Ньютона – Рафсона, обеспечивающего полное согласование значений функций на верхнем временном слое [8, 9]. Заметим, что на базе именно полностью неявных схем реализованы промышленные коды OLGA и KATARE [10, 11].

Как правило, при выборе того или иного алгоритма и шаблона дискретизации руководствуются характеристическими свойствами решаемой системы дифференциальных уравнений. Существуют хорошо зарекомендовавшие себя методики решения нестационарных задач, которые применимы для систем, демонстрирующих, по общепринятой классификации, гиперболические или параболические свойства. Однако некоторые модели описания нестационарного состояния многофазной среды должны быть отнесены к эллиптическому типу. В первую очередь речь идет о многожидкостной модели с общим давлением. В рамках двухжидкостного подхода ($K = 2$) установлено, что система уравнений (1) всегда негиперболическа, если скорости в жидкостях не равны между собой по величине, а задача Коши для нее некорректна. Другими словами, такую систему уравнений формально нельзя использовать для описания состояния гетерогенной среды [12]. Однако известно несколько приемов, разрешающих эту проблему тем или иным способом.

Следует заметить, что при вырождении (сокращении количества) сжимаемых жидкостей до одной, т. е. при переходе к одножидкостному приближению, для оставшихся уравнений системы восстанавливаются гиперболические свойства. Однако если оставшаяся жидкость несжимаема, то система уравнений сохраняет эллиптические свойства. Поэтому выбор в пользу того или иного алгоритма для решения системы уравнений с общим давлением делает задачу совершенно неочевидной.

В настоящее время для решения такого класса задач закрепилось два подхода, связанных с формированием у системы уравнений либо гиперболических, либо параболических свойств. И в том и другом случае результат достигается при помощи добавления к уравнениям баланса количества движения слагаемых, которые изменяют тип рассматриваемой системы уравнений. Очевидно, что каждый из приемов в той или иной мере возмущает исходную систему уравнений.

В настоящей работе далее рассмотрен подход, когда система уравнений приобретает параболические свойства.

Выбор в пользу параболизации системы уравнений сделан на основании ряда причин. Во-первых, этот способ регуляризации решения в равной степени применим для любого количества рассматриваемых жидкостей. Во-вторых, не накладывается ограничение на уравнение связи плотности и давления. В-третьих, использование для регуляризации вычислительного процесса повторных производных по форме приближает исходную систему уравнений к системе уравнений Навье – Стокса, хотя и со значением коэффициента переноса, не вытекающим из физической постановки задачи. Следует отметить, что для варианта восстановления гиперболических свойств системы дифференциальных уравнений используют так называемое давление на границе интерфейса (зона контакта жидкостей). Выработаны рекомендации по величине этого давления для двухжидкостной модели. Доказательство эффективности этой методики в рамках модели с общим давлением для системы уравнений в трехжидкостной формулировке или с большим количеством жидкостей автору неизвестно.

Идея регуляризации задачи Коши путем использования повторных производных развивается на протяжении уже более 40 лет. В работе [13] продемонстрировано, что при помощи повторных производных выполняется подавление коротковолновых возмущений. В работе [14] для стратифицированных потоков демонстрируется возможность стабилизации и подавления длинноволновых возмущений. В работе [15] использование повторных производных в уравнениях баланса массы и импульса позволило добиться линейной стабильности для всех значений длины волны (волновых чисел). В работе [16] рассмотрены полностью несжимаемые течения. Различные модели схемной вязкости рассмотрены в работах [17, 18].

В работе [19] предложен алгоритм численного интегрирования системы уравнений (1) для описания многожидкостного течения в

рамках баротропного приближения, равновесного по давлению. Там же содержатся указания на недостатки метода. Если в расчетах опираться на явную аппроксимацию конечно-разностных величин, то метод условно устойчив и имеет ограничение на шаг интегрирования по времени. При этом основное ограничение связано с устойчивостью вычислений при аппроксимации слагаемых диффузионного типа. Обойти это ограничение позволяет использование явно-неявного или полностью неявного алгоритма. Использование явно-неявной аппроксимации и, в частности, диффузионных слагаемых по методу Алена – Чена [20] или Дюффорта – Франкела [21] позволяет сохранить эффективность вычисления явного алгоритма и устранить ограничения на шаг интегрирования по времени, связанного с моделированием процесса диффузии. Однако остаются ограничения из-за явной аппроксимации конвективных слагаемых. Эти ограничения могут быть сняты в рамках полностью неявного алгоритма. Попутно можно ожидать, что использование неявного алгоритма в большей мере отвечает эллиптическим свойствам исходной системы уравнений.

Для решения системы уравнений (1), в настоящей работе использовано два приема, аналогично подходу, использованному нами в работе [19].

Во-первых, за счет дополнения уравнений количества движения повторными производными, тип рассматриваемой системы уравнений заменен параболическим. Необходимый для этого коэффициент переноса (по аналогии с принятыми в вычислительной математике трактовками, его следует называть искусственной вязкостью) определяется параметрами решаемой задачи и шагом дискретизации по пространству.

Во-вторых, вместо алгебраического уравнения баланса объемной доли сформулировано эволюционное дифференциальное уравнение относительно давления.

В результате введенных модификаций система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k^2)}{\partial x} + \\ + A\alpha_k \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(vA \frac{\partial(\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{A}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\rho_k = \rho_k(p), \quad c_k^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_k}, \quad \rho = \sum_{k=1}^K \alpha_k \rho_k;$$

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \right), \quad v = \Delta x c,$$

где c_k , c , м/с, – соответственно скорость звука в k -ой жидкости и таковая в гетерогенной среде, определенной по формуле Вуда; ρ – плотность смеси.

Выбор коэффициента искусственной вязкости основан на исследовании, проведенном в работе [17].

Численный метод

Для численного интегрирования системы уравнений (2) воспользуемся конечно-объемным подходом. Для этого разобьем расчетную область на ячейки равной длины. Все функции определим относительно центра ячейки, значения потоков формируются на границах ячейки. Ведem в рассмотрение переменные

$$q_i = \alpha_i \rho_i \quad \text{и} \quad m_i = \alpha_i \rho_i u_i,$$

а также векторы

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \rho_K \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \rho_K u_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_K \\ m_1 \\ \vdots \\ m_K \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \rho_K u_K \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_K \rho_K u_K^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_K \\ q_1 u_1 \\ \vdots \\ q_K u_K \end{bmatrix},$$

$$G = v \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial m_1 / \partial x \\ \vdots \\ \partial m_K / \partial x \end{bmatrix}, \quad H = \frac{\partial p}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix}.$$

Здесь Q – вектор консервативных переменных; F – вектор потоков; G – вектор диффузионного переноса; H – результирующая сила в канале переменного сечения, связанная с давлением.

Двухслойная конечно-объемная неявная схема для системы уравнений (2), записанная для произвольной i -ой ячейки, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{(AQ)_i^{n+1} - (AQ)_i^n}{\Delta t} + \frac{(AF)_{i+1/2}^{n+1} - (AF)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} - \\ - \frac{(AG)_{i+1/2}^{n+1} - (AG)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + AH_i^{n+1} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \frac{(Am_k)_{i+1/2}^{n+1} - (Am_k)_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) = 0.$$

Сформулируем задачу относительно вектора приращений

$$\Delta Q_i = Q_i^{n+1} - Q_i^n$$

при переходе с известного временного слоя на следующий временной слой:

$$\begin{aligned} & \frac{A\Delta Q_i}{\Delta t} + \frac{(A\Delta F)_{i+1/2} - (A\Delta F)_{i-1/2}}{\Delta x} - \\ & - \frac{(A\Delta G)_{i+1/2} - (A\Delta G)_{i-1/2}}{\Delta x} + A\Delta H_i = \Delta Q_i^n; \\ & \left(\frac{A}{\rho c^2}\right)^n \frac{\Delta p_i}{\Delta t} + \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \frac{(A\Delta m_k)_{i+1/2} - (A\Delta m_k)_{i-1/2}}{\Delta x} \right) = \\ & = \Delta p_i^n, \end{aligned} \quad (4)$$

где правые части уравнений (4) ΔQ_i^n и Δp_i^n определяются формулами

$$\begin{aligned} \Delta Q_i^n = & - \left[\frac{(AF)_{i+1/2}^n - (AF)_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - \frac{(AG)_{i+1/2}^n - (AG)_{i-1/2}^n}{\Delta x} + AH_i^n \right]; \\ \Delta p_i^n = & - \left[\sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \frac{(Am_k)_{i+1/2}^n - (Am_k)_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (5) аппроксимация диффузионного переноса на грани ячейки производится стандартными двухточечными разностями. При формировании значения функций на грани ячейки в слагаемых конвективного переноса и слагаемых, связанных с давлением, используется представление о характеристических свойствах уравнений переноса. Для знакоопределенного направления скорости через грань, поток массы и значение давления на правой грани i -ой ячейки с индексом $(i + 1/2)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} (u_k)_{i+1/2} & = 0,5 \left((u_k)_i + (u_k)_{i+1} \right) \geq 0; \\ m_{i+1/2} & = m_i + 0,5 \Delta x l_i^m; \end{aligned}$$

$$M_k^2 \leq 1, \quad p_{i+1/2} = p_{i+1} - 0,5 \Delta x l_{i+1}^p;$$

$$M_k^2 > 1, \quad p_{i+1/2} = p_i + 0,5 \Delta x l_i^p;$$

$$(u_k)_{i+1/2} = 0,5 \left((u_k)_i + (u_k)_{i+1} \right) < 0;$$

$$m_{i+1/2} = m_{i+1} - 0,5 \Delta x l_{i+1}^m;$$

$$M_k^2 \leq 1, \quad p_{i+1/2} = p_i + 0,5 \Delta x k_i^p;$$

$$M_k^2 > 1, \quad p_{i+1/2} = p_{i+1} - 0,5 \Delta x k_{i+1}^p,$$

где $M_k^2 = u_k^2 / c_k^2$ – число Маха.

Используется кусочно-линейное представление о поведении функции в ячейке, буквой l обозначены наклоны функций в ячейках.

Для выбора наклона функции была использована процедура

$$\min \text{mod} \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}, \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)$$

– выбор минимального по модулю значения среди односторонних разностей «назад» и «вперед». На гладких решениях эти формулы обеспечивают второй порядок точности.

Процедура линеаризации вектора потока на грани производилась по упрощенным зависимостям, причем сохранялись только наиболее важные факторы влияния потока на изменение функции в ячейке:

$$\begin{aligned} (u_k)_{i+1/2} \geq 0 \quad & \Delta(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p)_{i+1/2} \approx \\ & \approx (u_k^n)_{i+1/2} (\Delta m_k)_i + (\alpha_k^n)_{i+1/2} \Delta p_{i+1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (u_k)_{i+1/2} < 0 \quad & \Delta(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p)_{i+1/2} \approx \\ & \approx (u_k^n)_{i+1/2} (\Delta m_k)_{i+1} + (\alpha_k^n)_{i+1/2} \Delta p_i. \end{aligned}$$

Использование такого способа линеаризации позволяет сформировать систему уравнений относительно приращений функций на верхнем временном слое, опирающуюся на простейшие двухточечные соотношения между одноименными функциями. С учетом

разнонаправленного движения жидкостей это приводит к трехдиагональным матричным зависимостям.

Используя обозначения

$$\Lambda f_i = (f_i - f_{i-1}) / \Delta x$$

для двухточечного направленного разностного оператора «назад» и

$$\bar{\Lambda} f_i = (f_{i+1} - f_i) / \Delta x$$

для направленного разностного оператора «вперед», сопряженного к Λ , получаем, что система уравнений (4) для случая $(u_k)_i^n \geq 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{(A\Delta q_k)_i}{\Delta t} + \Lambda(A\Delta m_k)_i &= (\Delta q_k)_i^n; \\ \frac{(A\Delta m_k)_i}{\Delta t} + \Lambda(Au_k^n \Delta m_k)_i - \\ - \Lambda(Av^n \bar{\Lambda} \Delta m_k)_i + \\ + A\alpha_k^n \bar{\Lambda} \Delta p_i &= (\Delta m_k)_i^n; \\ \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i \frac{\Delta p_i}{\Delta t} + \\ + \sum \left(\frac{1}{\rho_k^n} \Lambda(A\Delta m_k)_i \right) &= \Delta p_i^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что в каждом уравнении количества движения, для аппроксимации градиента давления использован оператор, сопряженный оператору конвективного переноса. Если в данной точке оказывается, что $(u_k)_i^n < 0$, то в формулах (7) применяется циклическая замена Λ на $\bar{\Lambda}$.

Решение системы уравнений (7) строится путем расщепления уравнений количества движения на два шага по физическим процессам:

$$\begin{aligned} \left[\frac{A}{\Delta t} + \Lambda(Au_k^n \dots) - \right. \\ \left. - \Lambda(Av^n \bar{\Lambda}(\dots)) \right] \Delta m_k^* &= (\Delta m_k)_i^n; \end{aligned}$$

$$\frac{A}{\Delta t} \Delta m_k + A\alpha_k \bar{\Lambda} \Delta p = \frac{A}{\Delta t} \Delta m_k^*,$$

где Δm_k^* – вспомогательное значение функции.

Первый шаг учитывает конвективный и диффузионный переносы в уравнениях количества движения, второй учитывает слагаемые, связанные с давлением.

Решение уравнений первого шага реализуется в рамках стандартных скалярных прогонок. Количество этих уравнений определяется количеством жидкостей K в многожидкостной модели.

Для решения системы уравнений второго шага привлекается эволюционное уравнение для давления. Если сделать подстановку значения Δm_k в эволюционное уравнение для давления, то для определения Δp получаем уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i \frac{\Delta p}{\Delta t} - \Delta t \sum \frac{1}{\rho_k^n} \Lambda(A\alpha_k \bar{\Lambda} \Delta p) = \\ = \Delta p_i^n - \sum \left(\frac{1}{\rho_k^n} \Lambda(A\Delta m_k^*) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что в зависимости от направления течения жидкости, после проведенных подстановок возникает сочетание последовательности операторов либо $\Lambda(A\alpha_k \bar{\Lambda} \Delta p)$, либо $\bar{\Lambda}(A\alpha_k \Lambda \Delta p)$, которые являются одним из возможных представлений повторной производной $\frac{\partial}{\partial x} \left(A\alpha_k \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right)$ со вторым порядком точности. На разностном уровне оба оператора эквивалентны между собой. Стандартное представление повторной производной приводит к формированию трехдиагональной матрицы коэффициентов перед неизвестными Δp . И тогда система линейных уравнений разрешается в рамках скалярной прогонки.

После определения приращения давления остальные приращения функций Δm_k и Δq_k для всех K жидкостей определяются по явным формулам

$$\Delta m_k = \Delta m_k^* - \Delta t \alpha_k \bar{\Lambda} \Delta p;$$

$$\Delta q_k = \frac{\Delta t}{A} (\Delta q_k^n - \Lambda (A \Delta m_k)).$$

Формулировка граничных условий зависит от решаемой задачи. Относительно просто граничные условия можно реализовать для непроницаемой границы. Если воспользоваться заграничной ячейкой, то условие нулевого расхода через контрольную поверхность обеспечивается через назначение функций в этой ячейке по следующему правилу: нужно потребовать условия четности для всех функций, кроме значения скорости, которая берется с противоположным знаком. Аналогичными условиями связаны и приращения функций. Проницаемые границы порождают большое разнообразие возможных вариантов; их рассмотрение выходит за рамки настоящего исследования.

Примеры расчета

Для иллюстрации работы предложенного алгоритма были рассмотрены две постановки задачи о распаде произвольного разрыва. Первый вариант рассматривает поведение функций в трехжидкостном приближении при асимптотическом вырождении второй и третьей жидкостей. Второй вариант охватывает более общий случай.

Можно ожидать, что при малых значениях объемных долей второй, третьей и так далее жидкостей, решение задачи в многожидкостной постановке будет близко к решению задачи в одножидкостной постановке.

Для одной сжимаемой жидкости существует аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва, которое представлено двухволновой конфигурацией в виде сочетания волн двух типов: волны разрежения и ударной волны. В баротропной постановке отличительная особенность решения этой задачи проявляется в двух моментах. Во-первых, интенсивность ударной волны описывается адиабатой Пуассона. Во-вторых, получаемое решение всегда имеет «сшитую» контактную поверхность,

т. е. для ее идентификации необходим маркер, так как все газодинамические функции на контактной поверхности совпадают. Заметим, что характеристики волны разрежения или волны сжатия передаются моделью баротропного приближения без искажения. Также удовлетворительно описывается ударная волна слабой интенсивности.

Постановка задачи о распаде разрыва в баротропном приближении. Если состояние таких газодинамических функций, как давление, плотность и скорость, слева от начального разрыва обозначить переменными p_L , ρ_L , u_L , а состояние справа от разрыва — p_R , ρ_R и u_R соответственно, то значение функций на контактной поверхности P , $R = R(P)$ и U будет определяться из решения системы уравнений

$$U - u_L + \frac{P - p_L}{a_L} = 0;$$

$$U - u_R - \frac{P - p_R}{a_R} = 0.$$

где a_L , a_R — значения потока массы через газодинамическую особенность в виде волны слева или справа от начального разрыва, соответственно.

Выбор между волной разрежения или ударной волной делается при сравнении текущего значения давления на контактной поверхности P со значениями давлений p_L и p_R . Если слева или справа идентифицируется ударная волна, то поток массы определяется формулой

$$a_{L,R} = \sqrt{\frac{P - p_{L,R}}{\frac{1}{\rho_{L,R}} - \frac{1}{R}}}.$$

Для левой или правой волны разрежения массовый поток определяется выражением

$$a_{L,R} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \rho_{L,R} c_{L,R} \frac{1 - \frac{P}{p_{L,R}}}{1 - \left(\frac{P}{p_{L,R}}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}},$$

где γ – показатель адиабаты для уравнения состояния в виде степенного закона зависимости давления от плотности:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

при этом p_0, ρ_0 – значения функций, определяющих уровень отсчета.

Как можно заметить, значения a_L и a_R зависят от решения задачи и для своего определения требуют итерационной процедуры.

Используемые количественные значения констант термодинамических функций и их уравнения состояния для жидкостей сведены в таблице.

Приведенный набор зависимости плотности от давления позволяет продемонстрировать возможность алгоритма выполнять вычисления в широком диапазоне значений сжимаемости рассматриваемых веществ.

Рассмотрим замкнутую с двух концов цилиндрическую трубу постоянного сечения длиной 1 м. В начальный момент времени объемное содержание жидкостей составляет

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,9999998 + 1,0 \cdot 10^{-6} + 1,0 \cdot 10^{-6},$$

значение давления сохраняется постоянным и равно 7,0 МПа, а значение скорости – 100 м/с.

Такая постановка задачи примечательна тем, что указанная двухволновая конфигурация будет реализована в сочетании с граничными условиями задачи – условием непротекания через торцевые поверхности. На левом конце трубы возникает одна волна разрежения, распространяющаяся вправо. На правом конце трубы – одна ударная волна, которая движется влево. Интенсивность волн (изменение давления) определяется уровнем скорости движущегося газа.

В данной работе расчеты были проведены на последовательности сеток, содержащих 1 тыс. (длинный штрих), 2 тыс. (короткий штрих), 4 тыс. (сплошная линия) интервалов дискретизации области. На рис. 1 представлены зависимости давления и скорости жидкости № 1 (см. таблицу) от продольной координаты в начальный момент ($t = 0$) и для двух последующих значений времени: $t = 0,2$ мс (линия 1) и $0,4$ мс (линия 2). Полученные численные значения функций соответствуют аналитическому решению задачи. Путем непосредственной проверки можно убедиться, что в обоих случаях до момента взаимодействия волн газ неподвижен в окрестности торцов трубы за каждой из волн.

Таблица
Уравнения состояния, содержащие термодинамические функции со значениями констант, для трех типов жидкостей

№	Жидкость	Уравнение состояния
1	Пар	$\rho = \left(\frac{p}{1,0e5} \right)^{0,714}$
2	Несжимаемая	$\rho = 1,0e3$
3	Слабосжимаемая	$\rho = 1,0e3 \left(\frac{p}{1,0e6} \right)^{0,13}$

Обозначения: ρ , кг/м³, – плотность; p , Па, – давление

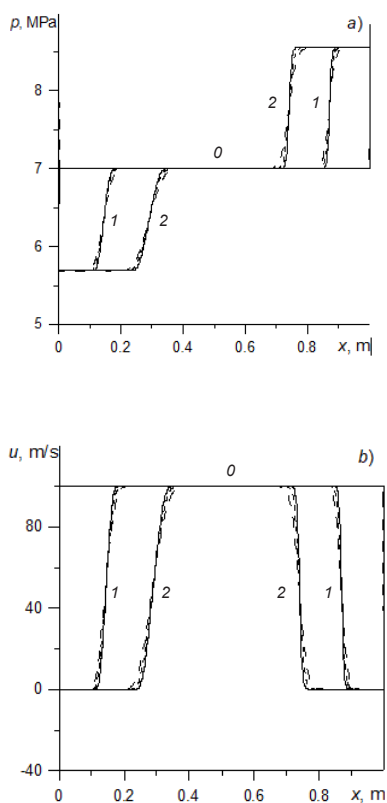


Рис. 1. Расчетные зависимости давления (а) и скорости (б) жидкости № 1 (пара) по продольной координате, для моментов времени $t = 0, 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 0, 1 и 2 соответственно). Данные получены на последовательности сеток, содержащих 1 тыс. (длинноштриховые линии), 2 тыс. (короткоштриховые) и 4 тыс. (сплошные линии) интервалов дискретизации области

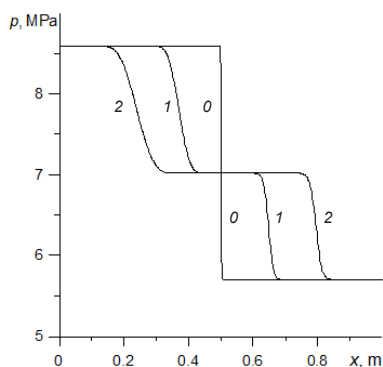


Рис. 2. Расчетные зависимости давления по продольной координате для моментов времени $t = 0, 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 0, 1 и 2 соответственно)

Далее, был проведен расчет течения в ударной трубе в трехжидкостном приближении, на сетке, содержащей 1 тыс. интервалов. Давление слева от диафрагмы было принято равным 8,6 МПа, справа – 5,7 МПа. Содержание объемных долей жидкостей равнялось

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,8000 + 0,1999 + 1,0 \cdot 10^{-4}.$$

Получены аналогичные зависимости поведения газодинамических функций от продольной координаты в начальный момент и в моменты времени $t = 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 1 и 2 соответственно).

На рис. 2 представлено распределение давления, а на рис. 3 – 5 – распределения скоростей, плотностей и содержания объемных долей. Без слагаемых, учитывающих обменные процессы по импульсу и массе между жидкостями или различные взаимодействия жидкостей со стенкой канала, рассмотренная система уравнений (1) является исключительно модельной и служит только для иллюстрации работоспособности алгоритма. Между тем, одно из явлений она позволяет наглядно проиллюстрировать. Речь идет о задаче распада разрыва на скачке площади сечения канала. В одножидкостном приближении отношение площадей есть параметр задачи, который делает задачу неавтономной, но допускающей параметрическое исследование. Как правило, на скачке площади сечения канала наблюдается формирование еще одного разрыва. Если вернуться к задаче о распаде разрыва в канале постоянного сечения, но для случая многожидкостного течения, то текущие значения объемных долей в сечении можно трактовать как элементы площади. В ситуациях, когда условие динамической совместности решаемых уравнений приводит к развитию скачкообразного изменения объемной доли, можно наблюдать формирование соответствующих разрывов в поведении давления и скоростей течения жидкостей (см. рис. 2 и 3).

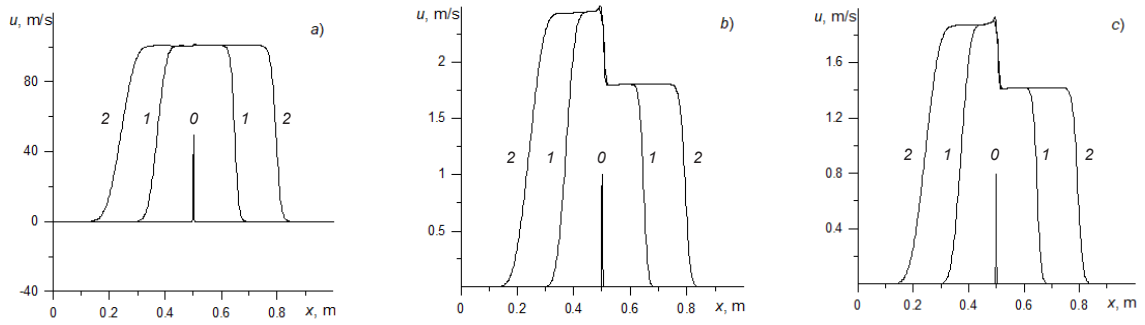


Рис. 3. Распределения скоростей жидкостей № 1 (a), № 2 (b), № 3 (c) (см. таблицу) по продольной координате, для моментов времени $t = 0, 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 0, 1 и 2 соответственно)

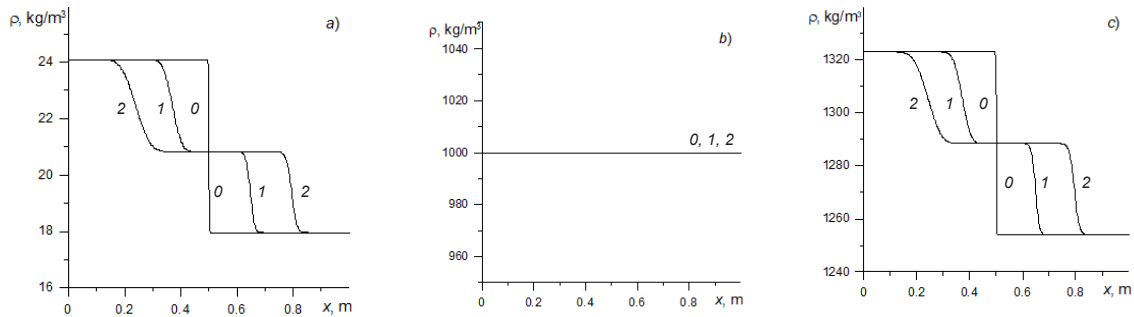


Рис. 4. Распределения плотностей жидкостей № 1 (a), № 2 (b), № 3 (c) (см. таблицу) по продольной координате для моментов времени $t = 0, 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 0, 1 и 2 соответственно)

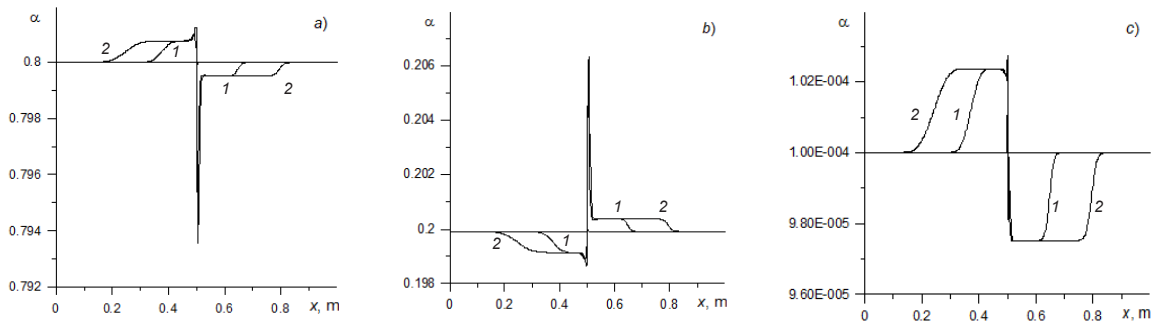


Рис. 5. Распределения объемных долей жидкостей № 1 (a), № 2 (b), № 3 (c) (см. таблицу) по продольной координате для моментов времени $t = 0, 2$ и $0, 4$ мс (кривые 1 и 2 соответственно)

Заключение

В данной работе для модели многофазной среды с общим давлением в жидкостях предложена экономичная схема численного интегрирования системы дифференциальных уравнений. Отметим узловые моменты предложенного алгоритма.

Во-первых, отсутствуют ограничения на количество рассматриваемых жидкостей.

Во-вторых, прием регуляризации задачи Коши при помощи повторных производных позволяет не исказить скорости распространения акустических возмущений.

В-третьих, предложенный алгоритм, по

сравнению с остальными неявными методами, обладает определенными преимуществами. Среди них важно отметить следующие:

алгоритм не требует итераций и не требует привлечения матричной прогонки с размерностью блока, равной $2K + 1$ по количеству неизвестных в задаче;

вычисления по предлагаемому алгоритму требуют выполнения $K + 1$ скалярных прогонок и $2K$ вычислений по явным формулам. Это позволяет, по сравнению с неявным алгоритмом в безытерационном режиме вычислений, уменьшить количество операций на точку дискретизации в $(2K + 1)^2$ раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рахматулин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
2. **Linga G., Flåtten T.** A hierarchy of non-equilibrium two-phase flow models // ESAIM: Proceedings and Surveys. 2019. Vol. 66. No. 9. Pp. 109–143.
3. **Baer M., Nunziato J.** A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // International Journal of Multiphase Flow. 1986. Vol. 12. No. 6. Pp. 861–889.
4. **Munkejord S.T.** A numerical study of two-fluid models with pressure and velocity relaxation // Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2010. Vol. 2. No. 2. Pp. 131–159.
5. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.** Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. 2017. Vol. 88. January. Pp. 30–49.
6. **Evje S., Flatten T.** On the wave structure of two-phase flow models // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2007. Vol. 67. No. 2. Pp. 487–511.
7. **Yoon H.Y., Park I.K., Kim Y.I., Hwang Y.D., Jeong J.J.** A fast-running semi-implicit numerical scheme for transient two-phase flows on unstructured grids // Numerical Heat Transfer. Part B. Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology. 2010. Vol. 56. No. 6. Pp. 432–454.
8. **Frepoli C., Mahaffy J.H., Ohkawa K.** Notes on the implementation of a fully-implicit numerical scheme for a two-phase three-field flow model // Nuclear Engineering and Design. 2003. Vol. 225. No. 12. Pp. 191–217.
9. **Nascimento J.C.S., Santos A., Pires A.P.** A fully-implicit solution for the single-pressure two-fluid model with sharp discontinuities // Computers and Fluids. 2018. Vol. 175. 15 October. Pp. 214–229.
10. **Barre F., Bernard M.** The CATHARE code strategy and assessment // Nuclear Engineering and Design. 1990. Vol. 124. No. 3. Pp. 257–284.
11. **Bendiksen K.H., Maines D., Moe R., Nuland S.** The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application // SPE Production Engineering. 1991. Vol. 6. No. 2. Pp. 171–180.
12. **Клебанов Л.А., Крошили А.Е., Нигматулин Б.И., Нигматулин Р.И.** О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 1. С. 83–95.
13. **Arai M.** Characteristics and stability analyses for two-phase flow equation systems with viscous terms // Nuclear Science and Engineering. 1980. Vol. 74. No. 2. Pp. 77–83.
14. **Holmas H., Sira T., Nordsveen M., Langtangen H.P., Schulkes R.** Analysis of a 1D incompressible two-fluid model including artificial diffusion // IMA Journal of Applied Mathematics. 2007. Vol. 73. No. 4. Pp. 651–667.
15. **Vreman A.W.** Stabilization of the Eulerian model for incompressible multiphase flow by artificial diffusion // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230. No. 4. Pp. 1639–1651.
16. **Fullmer W.D., Lee S.Y., Bertodano M.A.L.D.** An artificial viscosity for the ill-posed one-dimensional incompressible two-fluid model // Nuclear Technology. 2014. Vol. 185. No. 3. Pp. 296–308.
17. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Experience in using a numerical scheme with artificial viscosi-



ty at solving the Riemann problem for a multifluid model of multiphase flow // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, No. 1 P. 050007.

18. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Calculation of unsteady two-phase quasi-one-dimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1135. Proceedings of International Conference PhysicA.SPb/2018. Saint-Petersburg, October, 23–25, 2018. Report 012103 (6 p.).

19. **Булович С.В.** Схема численного интегрирования системы уравнений много-

фазных потоков в равновесном баротропном приближении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 17–25.

20. **Allen J.S., Sheng S.I.** Numerical solution of the compressible Navier – Stokes equation for the laminar near wake // Physics of Fluids. 1970. Vol. 13. No. 1. Pp. 37–52.

21. **DuFort E.C., Frankel S.P.** Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations // Mathematical Tables and Other Aids to Computation. 1953. Vol. 7. No. 43. Pp. 135–152.

Статья поступила в редакцию 15.07.2020, принята к публикации 03.09.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

БУЛОВИЧ Сергей Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
bulovic@yandex.ru

REFERENCES

1. **Rakhmatulin Kh.A.**, Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimayemykh sred [Gas-dynamics fundamentals of interpenetrating motions of compressible media], Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 20 (2) (1956) 184–195 (in Russian).

2. **Linga G., Flåtten T.**, A hierarchy of non-equilibrium two-phase flow models, ESAIM: Proceedings and Surveys. 66 (9) (2019) 109–143.

3. **Baer M., Nunziato J.**, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials, International Journal of Multiphase Flow. 12 (6) (1986) 861–889.

4. **Munkejord S.T.**, A numerical study of two-fluid models with pressure and velocity relaxation, Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2 (2) (2010) 131–159.

5. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.**, Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model, International Journal of Multiphase Flow. 88 (January) (2017) 30–49.

6. **Evje S., Flåtten T.**, On the wave structure of two-phase flow models, SIAM Journal on Applied Mathematics. 67 (2) (2007) 487–511.

7. **Yoon H.Y., Park I.K., Kim Y.I., et al.**, A fast-running semi-implicit numerical scheme for transient two-phase flows on unstructured grids, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology. 56 (6) (2010) 432–454.

8. **Frepoli C., Mahaffy J.H., Ohkawa K.**, Notes on the implementation of a fully-implicit numerical scheme for a two-phase three-field flow model, Nuclear Engineering and Design. 225 (12) (2003) 191–217.

9. **Nascimento J.C.S., Santos A., Pires A.P.**, A fully-implicit solution for the single-pressure two-fluid model with sharp discontinuities, Computers and Fluids. 175 (15 October) (2018) 214–229.

10. **Barre F., Bernard M.**, The CATHARE code strategy and assessment, Nuclear Engineering and Design. 124 (3) (1990) 257–284.

11. **Bendiksen K.H., Maines D., Moe R., Nuland S.**, The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application, *SPE Production Engineering*. 6 (2) (1991) 171–180.
12. **Klebanov L.A., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I., Nigmatulin R.I.**, O giperbolichnosti, us-toychivosti i korrektnosti zadachi Koshi dlya sistemy differentsialnykh uravneniy dvukhskorostnogo dvizheniya dvukhfaznykh sred [On hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for a differential equations system of the two-speed motion of two-phase media], *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 46 (1) (1982) 83–95 (in Russian).
13. **Arai M.**, Characteristics and stability analyses for two-phase flow equation systems with viscous terms, *Nuclear Science and Engineering*. 74 (2) (1980) 77–83.
14. **Holmas H., Sira T., Nordsveen M., et al.**, Analysis of a 1D incompressible two-fluid model including artificial diffusion, *IMA Journal of Applied Mathematics*. 73 (4) (2007) 651–667.
15. **Vreman A.W.**, Stabilization of the Eulerian model for incompressible multiphase flow by artificial diffusion, *Journal of Computational Physics*. 230 (4) (2011) 1639–1651.
16. **Fullmer W.D., Lee S.Y., Bertodano M.A.L.D.**, An artificial viscosity for the ill-posed one-dimensional incompressible two-fluid model, *Nuclear Technology*. 185 (3) (2014) 296–308.
17. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Experience in using a numerical scheme with artificial viscosity at solving the Riemann problem for a multifluid model of multiphase flow, *AIP Conference Proceedings*. 1959 (1) (2018) 050007.
18. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Calculation of unsteady two-phase quasi-one-dimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. Vol. 1135 (Proceedings of International Conference PhysicA.SPb/2018. Saint-Petersburg, October, 23–25) (2018) 012103.
19. **Bulovich S.V.**, The system of multiphase flow equations in the equilibrium barotropic approximation: a numerical scheme, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 12 (3) (2019) 17–25.
20. **Allen J.S., Sheng S.I.**, Numerical solution of the compressible Navier–Stokes equation for the laminar near wake, *Physics of Fluids*. 13 (1) (1970) 37–52.
21. **DuFort E.C., Frankel S.P.**, Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*. 7 (43) (1953) 135–152.

Received 15.07.2020, accepted 03.09.2020.

THE AUTHOR

BULOVICH Sergei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

bulovic@yandex.ru