



DOI: 10.18721/JPM.13410

УДК 621.373.8

ЭФФЕКТИВНЫЙ МОДОВЫЙ ОБЪЕМ И ОЦЕНКА МОЩНОСТИ ВЫХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА

В.А. Кожевников, В.Е. Привалов, А.Э. Фотиади

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье на примере He-Ne лазера рассмотрена связь генерируемой мощности с модовым объемом основной моды резонатора типа плоскость – сфера. Предложен метод оценки мощности излучения газоразрядного лазера с произвольной формой поперечного сечения активного элемента, в основе которого лежит величина объема генерирующей моды. Показано, что результаты расчетов генерируемой мощности, проводимых на основе эффективного модового объема, учитывающего поперечное распределение инверсии населенностей активной среды, находятся в лучшем согласии с экспериментальными данными и результатами оценок, использующих другие методики.

Ключевые слова: эффективный модовый объем, инверсия населенностей, мощность гелий-неонового лазера, лазерное излучение

Ссылка при цитировании: Кожевников В.А., Привалов В.Е., Фотиади А.Э. Эффективный модовый объем и оценка мощности выходного излучения гелий-неонового лазера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 119–132. DOI: 10.18721/JPM.13410

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

THE EFFECTIVE MODE VOLUME AND ESTIMATION OF HELIUM-NEON LASER OUTPUT POWER

V.A. Kozhevnikov, V.E. Privalov, A.E. Fotiadi

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

The relationship between the generated power and the mode volume of the fundamental mode of a plane-sphere resonator is considered in the article exemplified a He-Ne laser. A novel technique based on the volume of the generating mode has been proposed to estimate the output radiation power of a gas-discharge laser with an arbitrary cross-sectional shape of an active element. It was shown that the results of calculations of the generated power, carried out on the basis of the effective mode volume, which took into account the transverse distribution of the population inversion of the active medium, were in better agreement with the experimental data and the results of estimates using other methods.

Keywords: mode volume, effective mode volume, population inversion, He-Ne laser power

Citation: Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Fotiadi A.E., The effective mode volume and estimation of helium-neon laser output power, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (4) (2020) 119–132. DOI: 10.18721/JPM.13410

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Широкое применение гелий-неонового лазера в настоящее время в метрологии (эталоны времени, частоты и длины), спектроскопии, промышленных и исследовательских задачах (лазерные интерферометры), обусловленное высочайшей когерентностью его излучения, делает крайне актуальной задачу поиска резервов повышения мощности излучения таких объектов. Исследования [1, 2] показывают, что изменение геометрии поперечного сечения разрядной трубки может привести к росту как коэффициента усиления, так и выходной мощности лазера.

В данном исследовании нами предложен и реализован метод оценки мощности газоразрядных лазеров, основанный на понятии эффективного модового объема генерирующей моды; предложенный метод учитывает поперечное распределение инверсии в активном элементе с произвольным поперечным сечением.

В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением модового объема основной моды резонатора типа плоскость – сфера и цилиндрической геометрией лазерного активного элемента с различным поперечным распределением инверсии населенности. С этой целью используется понятие конфокального резонатора. Однако предварительный анализ применимости нашего метода для оценки уровня генерируемой мощности показал хорошие результаты и для других сечений.

Основные теоретические предпосылки

Напомним основные результаты, полученные в классических работах [3 – 7]. Для оптического резонатора с радиусами кривизны зеркал R_1 и R_2 и расстоянием между зеркалами d радиус кривизны соответствующего эквивалентного конфокального резонатора R_e находится по формуле

$$R_e = \{4S(R_1 - S)\}^{1/2},$$

где $S = d(R_2 - d)/(R_1 + R_2 - 2d)$.

Для резонатора плоскость – сфера ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$) отсюда получим следующее выражение:

$$R_e = 2\{d(R - d)\}^{1/2},$$

где R – радиус кривизны сферического зеркала.

В конфокальном резонаторе модуль электрического поля $|E_{00}|$ основной гауссовой моды TEM_{00} в цилиндрических координатах (r , z , φ) имеет вид:

$$|E_{00}| = E_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \xi^2}} \times \exp\left[-\frac{kr^2}{R_e(1 + \xi^2)}\right], \quad (1)$$

где $\xi = 2z/R_e$, $k = 2\pi/\lambda$, а координата z отсчитывается от перемычки гауссового пучка (для резонатора плоскость – сфера она будет у плоского зеркала); E_0 – значение $|E_{00}|$ при $\xi = 1$ и $r = 0$.

Поперечный размер генерируемой моды (радиус пучка w_z в точке с координатой z) определяется значением координаты r до боковой поверхности модового объема, где напряженность электрического поля меньше таковой на оси, в данном поперечном сечении, в e раз:

$$w_z^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{2z}{R_e} \right)^2 \right],$$

где $w_0^2 = \frac{R_e \lambda}{2\pi} = \frac{R_e}{k}$.

Соответственно, радиус пучка на плоском зеркале w_1 выражается как

$$w_0 = \sqrt{R_e \lambda / 2\pi} = \{\lambda R_e / (2\pi)\}^{1/2},$$

а на сферическом w_2 он будет в $\{R/(R - d)\}^{1/2}$ раз больше.

Энергетической характеристикой основной моды принято считать модовый объем (MV) резонатора [6]:



$$MV = \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_0^{w_z} d\varphi dz r dr, \quad (2)$$

где w_z – радиус пучка;

$$w_z = \sqrt{\frac{1}{k} \left(R_e + \frac{4}{R_e} z^2 \right)}.$$

Из формул (1) и для w_z следует, что значения интенсивностей поля на оси у плоского и сферического зеркал не одинаковы, а различаются в $\{R/(R-d)\}^{1/2}$ раз, и соответственно так же отличаются интенсивности на боковых границах модового объема у зеркал.

Мощность выходного излучения лазера определяется уровнем взаимодействия активного вещества в модовом объеме с полем, т. е. зависит как от распределения поля в модовом объеме генерирующей моды, так и от распределения в нем инверсии населенностей активной среды ΔN . В первом приближении теории возмущений мощность индуцированного излучения можно считать пропорциональной произведению $E^2 \Delta N$.

Одной из первых работ, где было обращено внимание на связь мощности излучения с распределением поля в генерирующей моде, была статья [8]. В ней был введен эффективный модовый объем, обозначенный как EMV и ограниченный линиями равной интенсивности, соответствующей значению интенсивности поля на границе MV, находящейся на сферическом зеркале.

Из формулы (1) и условия $|E|^2 = E_0^2 / e^2$ можно получить уравнение границы модового объема EMV. Это фигура вращения с сечением в виде круга радиуса σ , зависящим от z :

$$\sigma^2 = \frac{w^2}{2} \left(2 + \ln 2 - \ln \frac{w^2 k}{R_e} \right).$$

Тогда выражение для EMV примет вид:

$$\begin{aligned} EMV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d dz \int_0^{\sigma} r dr = \\ &= \left(1 + \frac{\ln 2}{2} \right) MV - \\ &- \frac{\pi R_e^2}{k} \left\{ \frac{d}{2R_e} \left(1 + \frac{4d^2}{3R_e^2} \right) \ln \left(1 + \frac{4d^2}{R_e^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \arctg \frac{2d}{R_e} - \frac{2d}{3R_e} - \frac{4d^3}{9R_e^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Хотя в работе [8] и считалось возможным влияние распределения инверсии населенностей активной среды на величину модового объема, но в самом определении модового объема EMV это распределение не учитывалось.

В связи с вышеизложенным, в данной работе мы предлагаем новую величину для оценки выходной мощности излучения лазера, вводя новый эффективный модовый объем, учитывающий оба указанных факта.

Понятие нового эффективного модового объема

Определим новый эффективный модовый объем (NMV) как тело, ограниченное поверхностью, где величина $|E|^2 \Delta N$ спадает в e^2 раз, по сравнению с величиной $E_0^2 \Delta N_0$ (ΔN_0 – инверсия населенностей на оси).

Иными словами, значение $E_0^2 \Delta N_0$ – это значение величины $|E|^2 \Delta N$ на оси на расстоянии $R_e/2$ от перемычки гауссова пучка, т. е. для полуконфокального резонатора это значение величины $|E|^2 \Delta N$ на оси у сферического зеркала.

Таким образом, для цилиндрической разрядной трубки с осевой симметрией инверсии населенностей, эффективный модовый объем NMV является фигурой вращения, которая имеет сечение в виде круга радиуса ρ , зависящее от z :

$$NMV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d dz \int_0^{\rho} r dr; \quad (4)$$

при этом радиус ρ должен быть таким, что

$$\Delta N(\rho, z) |E(\rho, z)|^2 = \Delta N_0 E_0^2 / e^2.$$

Пример оценки выходной мощности лазера

Рассмотрим для примера алгоритм оценки выходной мощности излучения гелий-неонового лазера. При оптимальном соотношении компонентов смеси и оптимальных разрядных условиях [9], разряд такого лазера можно считать диффузионным. Концентрация электронов n_e в таком разряде удовлетворяет следующему диффузионному уравнению (однородное уравнение Гельмгольца):

$$\begin{aligned} \Delta n_e + \frac{1}{D_a \tau} n_e &= \Delta n_e + \frac{1}{\Lambda^2} n_e = \\ &= \Delta n_e + \lambda^2 n_e = 0, \end{aligned}$$

где D_a – коэффициент амбиполярной диффузии, τ – время диффузионного ухода.

Распределение инверсии населенностей ΔN в гелий-неоновом лазере можно считать (в первом приближении) подобным распределению электронов в активной среде. В указанных средах цилиндрической геометрии, радиальное распределение концентрации электронов, а следовательно, и инверсной заселенности ΔN гелий-неоновой смеси, получаемое как решение диффузионного уравнения, имеет следующий вид [10 – 14]:

$$\Delta N = \Delta N_0 J_0(\mu_1^{(0)} r/a),$$

где a – радиус трубки; r – расстояние до оси; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; $\mu_1^{(0)}$ – первый корень функции J_0 , $\mu_1^{(0)} = 2,4048$.

В первом приближении и для нецилиндрической геометрии активного элемента, распределение инверсии населенностей ΔN в рассматриваемом лазере можно полагать подобным распределению электронов в диф-

фузионном разряде. Следовательно, можно приближенно считать, что и в этом случае распределение инверсии населенностей активной среды ΔN для лазера удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta(\Delta N) + \lambda^2 \Delta N = 0 \quad (5)$$

с однородным граничным условием

$$\Delta N|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

где Γ – граница поперечного сечения активного элемента.

В статье [15] нами предложен метод нахождения приближенного решения уравнений (5), (6) для произвольной формы границы Γ , обладающий небольшой вычислительной сложностью.

Суть предлагаемого метода оценки выходной мощности излучения лазера заключается в том, что эта мощность для лазера с произвольной геометрией поперечного сечения активного элемента также следует оценивать с помощью фазового объема NMV по следующей формуле:

$$P = \iiint_{NMV} \varepsilon |E|^2 \Delta N dV, \quad (7)$$

где ε – соответствующий коэффициент пропорциональности.

При этом определение мощности состоит из следующих этапов:

расчет инверсии населенностей активной среды ΔN путем решения уравнений (5), (6) (например, методом, предложенным в статье [15]);

нахождение границы эффективного модового объема NMV;

непосредственное интегрирование по формуле (7).

Проверим возможности предложенного метода оценки мощности излучения на примере лазера с цилиндрической формой ак-

тивного элемента.

Для цилиндрической трубки несложно получить, с учетом явного вида ΔN , что модовый объем NMV основной моды конфокального резонатора есть фигура вращения, которая имеет сечение, зависящее от z , в виде круга радиуса ρ , такого, что

$$\left\{ 2 + \ln 2 - \ln(w^2 k / R_e) - 2r^2 / w^2 + \ln(J_0(\mu_1^0 r / a)) \right\} \Big|_{r=\rho} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно решить численно и найти соответствующую функцию $\rho(z)$.

Для дальнейших расчетов возьмем следующие параметры лазерной трубки, типичной для гелий-неонового лазера:

$$a = 2 \text{ мм}, d = 55 \text{ см}, \lambda = 0,6328 \text{ мкм},$$

R изменяется от 0,6 до 4,0 м.

Функцию Бесселя представим в виде

$$J_0(x) \approx 1 - x^2/4 + x^4/64.$$

Зависимости функций $\rho(z)$, $\sigma(z)$ и $w(z)$ при $R = 1,1$ и $2,0$ м приведены на рис. 1. Зависимости NMV, EMV и MV для разных значений R приведены на рис. 2, где по оси ординат отложен относительный модовый объем η , равный отношению фазовых объемов NMV, EMV и MV к полному объему трубки $V = \pi a^2 d$. Видно, что объемы NMV и EMV в целом (при $R > 0,8$ м) несколько превышают величину MV и составляют единицы процентов от полного объема V .

Как отмечалось в статье [8], для оценки мощности излучения лазера с помощью модового объема MV, и при этом с частичным учетом инверсии населенности, можно использовать формулу

$$P_{MV} = \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_0^w \epsilon E^2 \Delta N d\varphi dz dr.$$

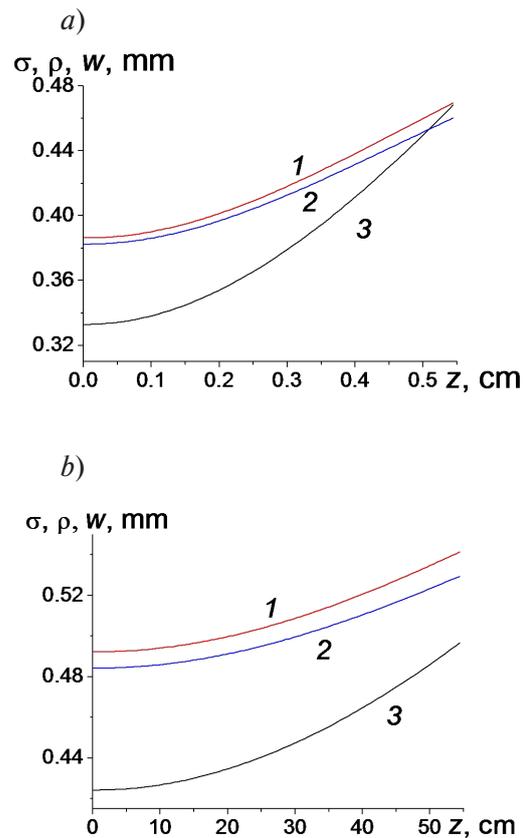


Рис. 1. Зависимости радиусов кругового сечения разрядной трубки σ (кривая 1), границы модового объема EMV ρ (2) и пучка излучения w (3) гелий-неонового лазера от координаты z для значений кривизны зеркала R , м: 1,1 (а) и 2,0 (б); значения параметров лазерной трубки: $a = 2$ мм, $d = 55$ см, $\lambda = 0,6328$ мкм

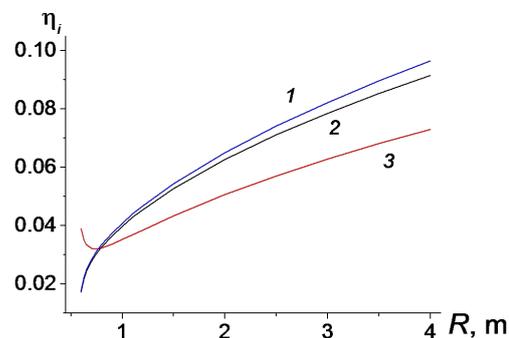


Рис. 2. Зависимости относительных модовых объемов $\eta_i = EMV/V$ (1), NMV/V (2), MV/V (3) от кривизны зеркала R .

Значения параметров лазерной трубки: $a = 2$ мм, $d = 55$ см, $\lambda = 0,6328$ мкм

Полагая, что

$$\Delta N = \Delta N_0 J_0(\mu_1^{(0)} r/a)$$

и используя разложение функции Бесселя в виде

$$J_0(x) \approx 1 - x^2/4 + x^4/64,$$

получаем:

$$P_{MV} = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0 \varepsilon}{k} \left\{ \frac{1 - e^{-2}}{2} d \sqrt{d(R-d)} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{24} (1 - 3e^{-2}) \times \frac{d^2}{a^2 k} (3R - 2d) + \frac{\mu_1^{(0)4} (1 - 5e^{-2})}{960} \times \frac{d^{5/2} (8d^2 - 20Rd + 15R^2)}{a^4 k^2 \sqrt{R-d}} \right\} \quad (9)$$

При использовании предлагаемого в данной работе расчетного метода и понятия фазового объема NMV, выражение для мощности излучения лазера запишется следующим образом:

$$P_{NMV} = \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_0^{\rho} \varepsilon E^2 \Delta N d\varphi dz r dr = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0 \varepsilon}{k} 2\sqrt{d(R-d)} \times \int_0^d dz \left\{ \frac{1 - \exp(-2\rho^2/w^2)}{4} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{32a^2} (w^2 - (w^2 + 2\rho^2)) \times \exp(-2\rho^2/w^2) \right\} +$$

$$+ \frac{\mu_1^{(0)4}}{512a^4} (w^4 - (w^4 + 2w^2\rho^2 + 2\rho^4)) \times \exp(-2\rho^2/w^2) \Big\}.$$

Сравнение предлагаемого метода с традиционными

Величину (10) целесообразно сравнить с оценкой выходной мощности лазера при использовании фазового объема EMV и всего объема трубки V :

$$P_{EMV} = \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_0^{\sigma} \varepsilon E^2 \Delta N d\varphi dz r dr = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0 \varepsilon}{k} 2\sqrt{d(R-d)} \times \int_0^d dz \left\{ \frac{1 - \exp(-2\sigma^2/w^2)}{4} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{32a^2} (w^2 - (w^2 + 2\sigma^2)) \times \exp(-2\sigma^2/w^2) \right\} + \frac{\mu_1^{(0)4}}{512a^4} (w^4 - (w^4 + 2w^2\sigma^2 + 2\sigma^4)) \times \exp(-2\sigma^2/w^2) \Big\}; \quad (11)$$

$$P_V = \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_0^a \varepsilon E^2 \Delta N d\varphi dz r dr = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0 \varepsilon}{k} 2\sqrt{d(R-d)} \times \int_0^d dz \left\{ \frac{1 - \exp(-2a^2/w^2)}{4} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{32a^2} (w^2 - (w^2 + 2a^2)) \times \exp(-2a^2/w^2) \right\} +$$

$$+\frac{\mu_1^{(0)4}}{512a^4}\left(w^4 - (w^4 + 2w^2a^2 + 2a^4) \times \exp(-2a^2/w^2)\right).$$

Результаты вычислений представленных величин приведены на рис. 3.

Видно, что оценки мощности лазера, полученные при помощи величин NMV и EMV, при распределении инверсии населенности, заданной функцией Бесселя, оказываются примерно одинаковыми. На рис. 3, b показан участок зависимостей P_{EMV}/α и P_{NMV}/α от R в

большем масштабе, в окрестности значений R , соответствующих полуконфокальному резонатору.

Одной из причин введения эффективного модового объема в работе [8] было расхождение экспериментальных данных с расчетной оценкой мощности, при использовании величины MV, по формуле (9); оказалось, что экспериментальные значения превышали расчетные примерно на 10 %.

Результаты, приведенные на рис. 3, показывают, что оценки мощности лазера с помощью NMV и EMV уже дают хорошее согласие с экспериментом.

Влияние различных факторов на мощность лазера

В экспериментах, описанных в статьях [16 – 19], наблюдалась связь между радиальным распределением инверсии населенностей ΔN и выходной мощностью лазера: изменение ΔN может менять мощность на величину порядка 10 %.

Радиальное распределение инверсии.

Оценим влияние радиального распределения инверсии с помощью предлагаемого метода, рассчитывая значения мощностей без учета указанного распределения. Для получения таких значений следует в формулах (9) – (12) формально положить $\mu_1^{(0)} = 0$. Результаты таких вычислений приведены на рис. 4. Видно, что как с учетом радиального распределения инверсии населенностей, так и без его учета, оценка мощности с помощью величин NMV и EMV дает несколько большие различия, чем с помощью MV, что лучше согласуется с экспериментами. Тот результат, при котором максимальное отличие экспериментальных данных от расчетных получалось несколько большим, объясняется выбранным способом оценки, а именно: если $\mu_1^{(0)} = 0$, то значение ΔN остается постоянным по сечению; тогда как в эксперименте на оси может получаться и локальный минимум ΔN [13], обусловленный определенным соотношением парциальных давлений гелия и неона. Очевидно, что наличие минимума даст большее различие в величине мощности, по сравнению с

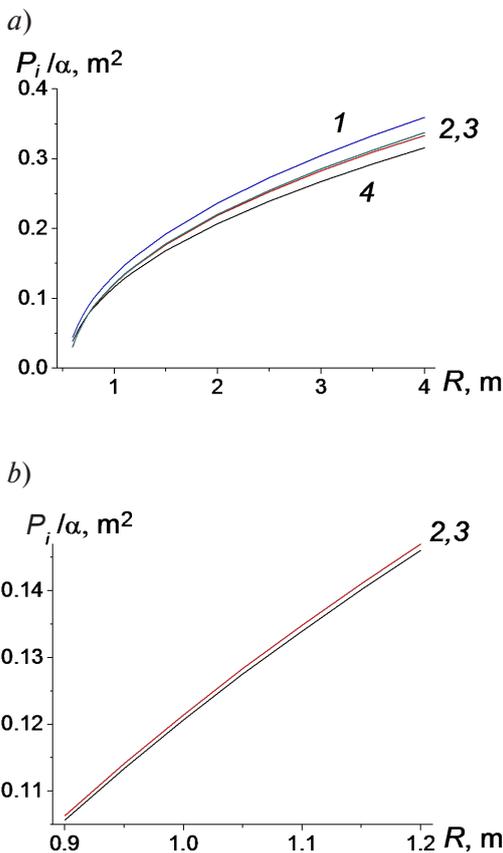


Рис. 3. Сравнение зависимостей нормализованных величин выходной мощности P_i/α (1), P_{EMV}/α (2), P_{NMV}/α (3) и P_{MV}/α (4) гелий-неонового лазера от кривизны зеркала R , рассчитанных по формулам (9) – (12) (a); отдельно приведены данные расчета по формулам (10), (11) (b) – этот график увеличен для различения кривых 2 и 3;

$$\alpha = 4\pi E_0^2 \Delta N_0 \varepsilon / k$$

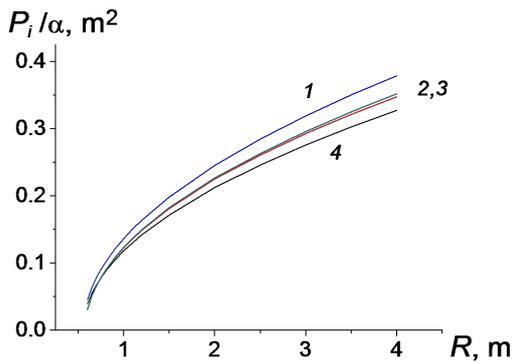


Рис. 4. Сравнение зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 3, но рассчитанных при условии $\mu_1^{(0)} = 0$

оптимальным соотношением, когда величина ΔN описывается функцией Бесселя.

С другой стороны, мощность выходного излучения гелий-неонового лазера с цилиндрической трубкой можно оценивать по известной методике [20, 21], дающей отличное согласие с экспериментом. В соответствии с этой методикой, мощность излучения описывается следующей формулой:

$$P = Aw_0 G_m \left[1 - (a_s / G_m)^{1/2} \right]^2 \times \pi w_1^2 \left[1 - \exp(-2r_0^2 / w_1^2) \right], \quad (13)$$

где Aw_0 – коэффициент насыщения, $Aw_0 = 30 \text{ Вт/см}^2$ [20, 21]; G_m – суммарный ненасыщенный коэффициент усиления в центре доплеровски уширенного контура усиления атомов неона, $G_m = 3 \cdot 10^{-4} l / (2r_0)$ [20 – 22]; r_0 , l – радиус капилляра и длина активной части капилляра; a_s – суммарный коэффициент потерь; w_1 – радиус пучка на выходном зеркале, $w_1 = \{\lambda R_e / (2\pi)\}^{1/2}$.

Опишем на примере лазера ЛГН-222 вклады в суммарный коэффициент a_s [23]:

a_1 – потери на поглощение в каждом окне Брюстера параллельно расположенных активных элементов;

a_2 – потери при отражении от зеркал резонатора,

a_3 – дифракционные потери,

a_4 – прочие неучтенные потери.

Перечисленные вклады в суммарный коэффициент a_s для лазера ЛГН-222 ($r_0 = 1,5 \text{ мм}$, $l = 2 \text{ м}$) можно оценить, используя значения, приведенные в работе [23]:

$$a_1 = 3 \cdot 10^{-3}, a_2 = 6 \cdot 10^{-3}, a_4 = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Для оценки дифракционных потерь a_3 целесообразно использовать асимптотическое представление обобщенных радиальных функций [24, 25] или эмпирическую коррекцию [26]:

$$\alpha_{pm} = \frac{2\pi(4c - 4,52)^{2p+m+1}}{p!(p+m)!} e^{-2c},$$

где p, m – параметры моды (для основной гауссовой моды $p = m = 0$), $c = 2\pi N$ (N – параметр Френеля).

Параметр Френеля для эквивалентного конфокального резонатора следует выражению

$$N_i = a_i^2 \left\{ g_i (1 - g_i g_k) / g_k \right\}^{1/2} / (\lambda d),$$

где a_i – апертура резонатора; i, k – индексы половин резонатора, $i, k = 1, 2$; g_i – параметр конфигурации резонатора, $g_i = 1 - d/R_i$.

Сравнение мощностей, рассчитанных по формулам (10) и (13), представлено на рис. 5. Для наглядности значения P_{NMV}/α и P нормированы, с тем чтобы они совпадали для полуконфокального резонатора ($d = 2 \text{ м}$, $R = 4 \text{ м}$) (введен соответствующий нормировочный множитель γ). Видно, что оценивание мощности лазера с помощью величины NMV дает очень хорошее согласие с расчетом по формуле (13).

Случай высокой мощности лазера. Со всем другой вид зависимости должен получиться в случае высокой мощности лазера, когда возможны нелинейные эффекты. В этом случае предлагается оценивать мощность лазера P^{nl} по следующей формуле [27]:

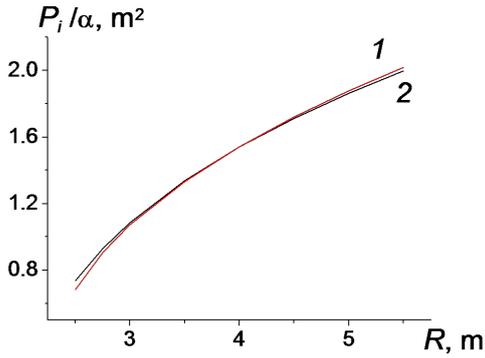


Рис. 5. Сравнение зависимостей мощности гелий-неонового лазера, рассчитанных по традиционной методике, $-P/\gamma$ (1), с полученной по предлагаемой методике $-P_{\text{NMV}}/\alpha$ (2), от кривизны зеркала R (см. формулы (10) и (13)); значения параметров лазерной трубки: $a = 1,5$ мм, $d = 2$ м, $\lambda = 0,6328$ мкм

$$P^{nl} = P_0 \frac{\int_v E^2 \Delta N dV}{\int_v E^4 \Delta N dV}, \quad (14)$$

где P_0 – константа.

Найдем выражения для случаев высокой мощности, используя величины MV, NMV, EMV и полный объем V .

Соответственно получим:

$$P_{\text{MV}}^{nl} = P_0 \frac{\int_{\text{MV}} E^2 \Delta N dV}{\int_{\text{MV}} E^4 \Delta N dV} = P_0 \frac{P_{\text{MV}}}{F_{\text{1MV}}}, \quad (15)$$

где P_{MV} описывается формулой (7), а знаменатель F_{1MV} рассчитывается по формуле

$$F_{\text{1MV}} = \left\{ \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0}{k} \frac{8E_0^2 d(R-d)}{k} \times \right. \\ \left. \times \left(k \frac{1-e^{-4}}{16} \arctg \frac{d}{\sqrt{d(R-d)}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\mu_1^{(0)2}}{128a^2} (1-5e^{-4}) d + \frac{\mu_1^{(0)4} (1-13e^{-4})}{6144a^4 k} \times \frac{d^2 (3R-2d)}{\sqrt{d(R-d)}} \right) \right\}.$$

Далее,

$$P_{\text{NMV}}^{nl} = P_0 \frac{\int_{\text{NMV}} E^2 \Delta N dV}{\int_{\text{NMV}} E^4 \Delta N dV} = P_0 \frac{P_{\text{NMV}}}{F_{\text{1NMV}}}, \quad (16)$$

где P_{NMV} описывается формулой (8), а знаменатель F_{1NMV} рассчитывается по формуле

$$F_{\text{1NMV}} = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0}{k} \frac{8E_0^2 d(R-d)}{k} \times \\ \times \int_0^d dz \left(\frac{1 - \exp(-4\rho^2/w^2)}{8w^2} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_1^{(0)2}}{128a^2 w^2} (w^2 - (w^2 + 4\rho^2)) \times \right. \\ \left. \times \exp(-4\rho^2/w^2) \right) + \\ + \frac{\mu_1^{(0)4}}{4096a^4 w^2} (w^4 - (w^4 + 4w^2\rho^2 + 8\rho^4)) \times \\ \times \exp(-4\rho^2/w^2).$$

Аналогично,

$$P_{\text{EMV}}^{nl} = P_0 \frac{\int_{\text{EMV}} E^2 \Delta N dV}{\int_{\text{EMV}} E^4 \Delta N dV} = P_0 \frac{P_{\text{EMV}}}{F_{\text{1EMV}}}, \quad (17)$$

где P_{EMV} описывается формулой (9), а знаменатель F_{1EMV} рассчитывается по формуле

$$F_{\text{IEMV}} = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0}{k} \frac{8E_0^2 d(R-d)}{k} \times \int_0^d dz \left(\frac{1 - \exp(-4\sigma^2/w^2)}{8w^2} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{128a^2 w^2} (w^2 - (w^2 + 4\sigma^2)) \times \exp(-4\sigma^2/w^2) + \frac{\mu_1^{(0)4}}{4096a^4 w^2} (w^4 - (w^4 + 4w^2\sigma^2 + 8\sigma^4)) \times \exp(-4\sigma^2/w^2) \right).$$

И наконец,

$$P_V^{nl} = \frac{P_0 \int_V E^2 \Delta N dV}{\int_V E^4 \Delta N dV} = \frac{P_0 P_V}{F_{1V}}, \quad (18)$$

где P_V описывается формулой (10), а знаменатель F_{1V} рассчитывается по формуле

$$F_{1V} = \frac{4\pi E_0^2 \Delta N_0}{k} \frac{8E_0^2 d(R-d)}{k} \times \int_0^d dz \left(\frac{1 - \exp(-4a^2/w^2)}{8w^2} - \frac{\mu_1^{(0)2}}{128a^2 w^2} (w^2 - (w^2 + 4a^2)) \times \exp(-4a^2/w^2) + \frac{\mu_1^{(0)4}}{4096a^4 w^2} (w^4 - (w^4 + 4w^2 a^2 + 8a^4)) \times \exp(-4a^2/w^2) \right).$$

Результаты расчетов по формулам (15) – (18) приведены на рис. 6 ($\beta = P_0 / E_0^2$).

Соотношения между P_{MV}^{nl}/β , $P_{\text{NMV}}^{nl}/\beta$, P_V^{nl}/β качественно примерно соответствуют таковым между P_{MV} , P_{NMV} и P_V , хотя зависи-

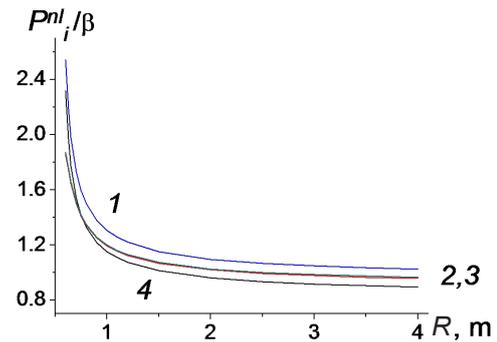


Рис. 6. Сравнение зависимостей нормализованной высокой мощности гелий-неонового лазера, рассчитанных по разным методикам, от кривизны зеркала R (см. формулы (15) – (18)): P_V^{nl}/β (1), $P_{\text{EMV}}^{nl}/\beta$ (2), $P_{\text{NMV}}^{nl}/\beta$ (3), P_{MV}^{nl}/β (4); $\beta = P_0 / E_0^2$. Параметры лазерной трубки: $a = 2$ мм, $d = 55$ см, $\lambda = 0,6328$ мкм

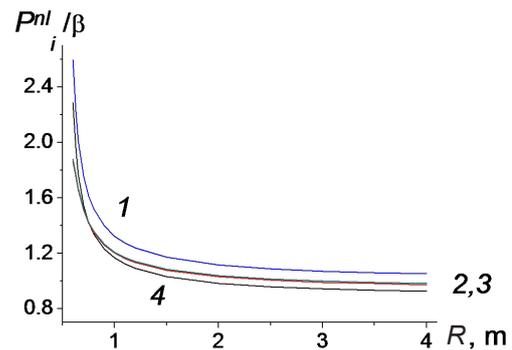


Рис. 7. Сравнение зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 6, но рассчитанных при условии $\mu_1^{(0)} = 0$

мости от величины R ведут себя иначе. Аналогично проведенным выше оценкам (см. рис. 4), интересно оценить влияние радиального распределения инверсии, анализируя значения мощностей без учета радиального распределения инверсии населенностей (положив $\mu_1^{(0)} = 0$). Результаты соответствующих расчетов приведены на рис. 7. Видно, что полученные соотношения качественно примерно такие же.

Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что применение величины модового объема NMV при расчетах мощности



излучения гелий-неонового лазера приводит к лучшему согласию с экспериментальными данными, по сравнению с расчетными результатами, где применяется обычный модовый объем MV . Значения, полученные на основе модовых объемов NMV и EMV с учетом распределения инверсии населенности, на основе заданной функцией Бесселя (т. е. для цилиндрической разрядной трубки гелий-неонового лазера) примерно одинаковы, однако могут заметно различаться для других геометрий разрядной трубки. Различие обусловлено тем, что EMV — это всегда фигура вращения (что следует из определения EMV и формулы (1)), тогда как инверсия населенности при произвольной геометрии разрядного канала не обладает аксиальной симметрией, и, соответственно, модовый объем NMV тоже лишен указанной симметрии.

Заключение

Таким образом, нами предложен метод оценки мощности излучения He-Ne лазера с произвольной формой поперечного сечения активного элемента, который проверен

для случая цилиндрической геометрии и дает хорошее согласие с экспериментальными данными.

В настоящее время исследуются различные поперечные сечения активного элемента He-Ne лазера в поисках оптимального по выходной мощности. Предварительные расчеты мощности гелий-неонового лазера с использованием NMV для разрядных трубок с прямоугольным и эллиптическим сечениями показали, что полученные результаты хорошо согласуются как с экспериментальными данными, так и с расчетными результатами по коэффициентам усиления лазеров, обладающих такой геометрией [15]. Модовый объем NMV для этих поперечных сечений (в виде прямоугольника и эллипса) должен иметь эллиптическое сечение. При этом получение формул, аналогичных (13), для указанных поперечных сечений вызывает большие затруднения; если же использовать предложенный нами модовый объем NMV , то появляется возможность оценить значения выходной мощности гелий-неонового лазера вычислительно несложным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов В.Е.** Геометрия газового разряда и усиление излучения лазера // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53. № 5. С. 80–90.
2. **Привалов В.Е.** Некоторые перспективы развития газоразрядных лазеров // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 2/2. С. 246–253.
3. **Boyd G.D., Gordon J.P.** Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers // The Bell Systems Technical Journal. 1960. Vol. 40. No. 2. Pp. 489–508.
4. **Boyd G.D., Kogelnik H.** Generalized confocal resonator theory // The Bell Systems Technical Journal. 1962. Vol. 41. No. 4. Pp. 1347–1369.
5. **Gordon J.P., Kogelnik H.** Equivalence relations among spherical mirror optical resonators // The Bell Systems Technical Journal. 1964. Vol. 43. No. 6. Pp. 2873–2886.
6. **Sinclair D.C.** Choice of mirror curvatures for gas laser cavities // Applied Optics. 1964. Vol. 3. No. 9. Pp. 1067–1072.
7. **Kogelnik H., Li T.** Laser beams and resonators // Applied Optics. 1966. Vol. 5. No. 10. Pp. 1550–1567.
8. **Привалов В.Е.** Модовый объем и мощность излучения лазера // Оптика и спектроскопия. 1970. Т. 28. № 3. С. 524–527.
9. **Field R.L., Jr.** Operating parameters of dc-excited He-Ne gas lasers // Review of Scientific Instruments. 1967. Vol. 38. No. 12. Pp. 1720–1722.
10. **Tako T.** Self-absorption of spectral line // Journal of the Physical Society of Japan. 1961. Vol. 15. No. 10. Pp. 2016–2032.
11. **Bennett W.R., Jr.** Excitation and inversion mechanisms in gas lasers // Annals New York Academy of Science. 1965. Vol. 122. No. 2. Pp. 579–595.
12. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Зависимость мощности излучения He-Ne лазера от геометрии сечения разрядного промежутка //

- Журнал технической физики. 1968. Т. 38. № 12. С. 2080–2084.
13. **Привалов В.Е., Фридрихов С.А.** Кольцевой газовый лазер // Успехи физических наук. 1969. Т. 97. № 3. С. 377–402.
14. **Herziger G., Holzapfel W., Seelig W.** Verstärkung einer He-Ne-Gasentladung für die Laserwellenlänge $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ // Zeitschrift für Physik. 1966. Bd. 189. Num. 4. S. 385–400.
15. **Кожевников В.А., Привалов В.Е.** Влияние геометрии сечения активного элемента лазера на усиление его излучения // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 84–95.
16. **Голубев Ю.М., Привалов В.Е.** Некоторые характеристики He-Ne лазера, генерирующего одновременно 3,39 и 0,6328 мкм // Оптика и спектроскопия. 1967. Т. 22. № 3. С. 499–501.
17. **Привалов В.Е., Ходовой В.А.** Исследование свойств He-Ne-лазера с малым разрядным промежутком // Оптика и спектроскопия. 1968. Т. 25. № 2. С. 318–319.
18. **Голубев Ю.М., Привалов В.Е., Фридрихов С.А., Ходовой В.А.** О связи оптимального соотношения компонентов смеси в He-Ne лазере с распределением поля в резонаторе // Журнал технической физики. 1968. Т. 38. № 6. С. 1097–1100.
19. **Голубев Ю.М., Привалов В.Е., Фридрихов С.А., Ходовой В.А.** Об оптимальном соотношении компонент смеси в кольцевом He-Ne лазере // Журнал технической физики. 1968. Т. 38. № 11. С. 1990–1993.
20. **Smith P.W.** The output power of a 6328- \AA He-Ne gas laser // IEEE Journal of Quantum Electronics. 1966. Vol. 2. No. 3. Pp. 62–68.
21. **Petrü F., Veselá Z.** The output power of a 633 nm He-Ne lasers // Optical and Quantum Electronics. 1972. Vol. 4. No. 1. Pp. 1–20.
22. **Li Y., Chen M., Li Z., Liu J., Guo J., Yang Y.** Study of performance of a He-Ne laser having an annular gain zone // Applied Optics. 2007. Vol. 46. No. 4. Pp. 591–601.
23. **Липский В.В., Привалов В.Е.** Расчет параметров генерации мощного He-Ne лазера на $\lambda = 0,63 \text{ \mu m}$ // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 14. С. 57–61.
24. **Slepian D., Pollak H.O.** Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty. I. // The Bell Systems Technical Journal. 1961. Vol. 40. No. 1. Pp. 65–84.
25. **Slepian D.** Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty. IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions // The Bell Systems Technical Journal. 1964. Vol. 43. No. 6. Pp. 3009–3057.
26. **Ищенко Е.Ф.** Открытые оптические резонаторы: некоторые вопросы теории и расчета. М.: Советское Радио, 1980, 208 с.
27. **Зейгер С.Г., Фрадкин Э.Е.** Взаимодействие поперечных мод в лазерах // Физика газовых лазеров. Сб. статей. Ленинград: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1969. С. 55–59.

Статья поступила в редакцию 05.10.2020, принята к публикации 20.10.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОЖЕВНИКОВ Вадим Андреевич – старший преподаватель кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vadim.kozhevnikov@gmail.com

ПРИВАЛОВ Вадим Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vaevpriv@yandex.ru



ФОТИАДИ Александр Эпаминондович — доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fotiadi@rphf.spbstu.ru

REFERENCES

1. **Privalov V.E.**, Gas-discharge geometry and studies in laser emission, Russian Physics Journal. 53 (5) (2010) 80–90.
2. **Privalov V.E.**, Some prospects for the development of gas-discharge lasers, Russian Physics Journal. 56 (2-2) (2013) 246–253.
3. **Boyd G.D., Gordon J.P.**, Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers, The Bell Systems Technical Journal. 40 (2) (1960) 489–508.
4. **Boyd G.D., Kogelnik H.**, Generalized confocal resonator theory, The Bell Systems Technical Journal. 41 (4) (1962) 1347–1369.
5. **Gordon J.P., Kogelnik H.**, Equivalence relations among spherical mirror optical resonators, The Bell Systems Technical Journal. 43 (6) (1964) 2873–2886.
6. **Sinclair D.C.**, Choice of mirror curvatures for gas laser cavities, Applied Optics. 3 (9) (1964) 1067–1072.
7. **Kogelnik H., Li T.**, Laser beams and resonators, Applied Optics. 5 (10) (1966) 1550–1567.
8. **Privalov V.E.**, Mode volume and radiation power of a laser, Optics and Spectroscopy. 28 (3) (1970) 524–527.
9. **Field R.L., Jr.**, Operating parameters of dc-excited He-Ne gas lasers, Review of Scientific Instruments. 3 (12) (1967) 1720–1722.
10. **Tako T.**, Self-absorption of spectral line, Journal of the Physical Society of Japan. 15 (10) (1961) 2016–2032.
11. **Bennett W.R., Jr.**, Excitation and inversion mechanisms in gas lasers, Annals New York Academy of Science. 122 (2) (1965) 579–595.
12. **Privalov V.E., Fridrikhov S.A.**, Zavisimost moshchnosti izlucheniya He-Ne lazera ot geometrii secheniya razryadnogo promezhnutka [The radiation power of He-Ne laser as a function of a cross-section geometry of a discharge gap], Technical Physics. 38 (12) (1968) 2080–2084 (in Russian).
13. **Privalov V.E., Fridrikhov S.A.**, The ring gas laser, Soviet Physics, Uspekhi. 12 (3) (1969) 153–167.
14. **Herziger G., Holzapfel W., Seelig W.**, Verstärkung einer He-Ne-Gasentladung für die Laserwellenlänge $\lambda = 6328$ Å, Zeitschrift für Physik. 189 (4) (1966) 385–400.
15. **Kozhevnikov V.A., Privalov V.E.**, The geometrical effect of an active element cross-section on the laser gain, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (2) (2018) 84–95.
16. **Golubev Yu.M., Privalov V.E.**, Nekotoryye kharakteristiki He-Ne lazera, generiruyushchego odnovremennno 3.39 i 0.6328 mkm [Some characteristics of a He-Ne laser generating 3.39 and 0.6328 μm simultaneously], Optics and Spectroscopy. 22 (3) (1967) 499–501 (in Russian).
17. **Privalov V.E., Khodovoy V.A.**, Issledovaniye svoystv He-Ne-lazera s malym razryadnym promezhnutkom [An investigation of properties of a He-Ne laser with a small discharge gap], Optics and Spectroscopy. 25 (2) (1968) 318–319 (in Russian).
18. **Golubev Yu.M., Privalov V.E., Fridrikhov S.A., Khodovoy V.A.**, O svyazi optimalnogo sootnosheniya komponentov smesi v He-Ne lazere s raspredeleniyem polya v rezonatore [On the relation between an optimal ratio of mixture and a resonator's field distribution in the He-Ne laser], Technical Physics. 38 (6) (1968) 1997–1100 (in Russian).
19. **Golubev Yu.M., Privalov V.E., Fridrikhov S.A., Khodovoy V.A.**, Ob optimalnom sootnoshenii komponent smesi v koltsevom He-Ne lazere [On the optimal ratio of mixture in the ring He-Ne laser], Technical Physics. 38 (11) (1968) 1990–1993 (in Russian).
20. **Smith P.W.**, The output power of a 6328-Å He-Ne gas laser, IEEE Journal of Quantum Electronics. 2 (3) (1966) 62–68.

21. **Petrü F., Veselá Z.**, The output power of a 633 nm He-Ne lasers, *Optical and Quantum Electronics*. 4 (1) (1972) 1–20.
22. **Li Y., Chen M., Li Z., et al.**, Study of performance of a He-Ne laser having an annular gain zone, *Applied Optics*. 46 (4) (2007) 591–601.
23. **Lipskii V.V., Privalov V.E.**, Calculating parameters of high-power He-Ne lasers operating at $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$, *Technical Physics Letters*. 31 (7) (2005) 608–610.
24. **Slepian D., Pollak H.O.**, Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty. I., *The Bell Systems Technical Journal*. 40 (1) (1961) 65–84.
25. **Slepian D.**, Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty. IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions, *The Bell Systems Technical Journal*. 43 (6) (1964) 3009–3057.
26. **Ishchenko E.F.**, Otkrytyye opticheskiye rezonatory: Nekotoryye voprosy teorii i rascheta [Open optical resonators: some issues of theory and calculations], *Sovetskoye Radio, Moscow*, 1980 (in Russian).
27. **Zeiger S.G., Fradkin E.E.**, Vzaimodeistviye poperechnykh mod [Transverse mode coupling], In “Fizuka gazovykh lazerov” [“The physics of gas lasers”, the collected book], *Leningrad State University Publishing, Leningrad*, (1969) 55–59 (in Russian).

Received 05.10.2020, accepted 20.10.2020.

THE AUTHORS

KOZHEVNIKOV Vadim A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vadim.kozhevnikov@gmail.com

PRIVALOV Vadim E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vaevpriv@yandex.ru

FOTIADI Alexandr E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

fotiadi@rphf.spbstu.ru