DOI: 10.18721/JPM.13416
УДК 519.63: 539.3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Я. Вальдман[1], **М.Е. Фролов**[2]

[1] Южночешский университет,
г. Ческе-Будеёвице, Чешская Республика;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлен исторический обзор и последние результаты, связанные с теоретическим обоснованием и численной реализацией функциональных оценок точности приближенных решений задач механики деформируемого твердого тела, а также построением адаптивных алгоритмов. Эффективное практическое применение данных методов представляет собой актуальную задачу, в том числе для современной инженерной практики.

Ключевые слова: оценки погрешности, метод конечных элементов, адаптивные алгоритмы, механика твердого тела

Ссылка при цитировании: Вальдман Я., Фролов М.Е. Функциональные апостериорные оценки точности решений задач механики деформируемого твердого тела // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 203–215. DOI: 10.18721/JPM.13416

FUNCTIONAL-TYPE A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF PROBLEMS IN DEFORMABLE SOLID MECHANICS

J. Valdman[1], **M.E. Frolov**[2]

[1] University of South Bohemia in České Budějovice,
Czech Republic;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

The paper provides a historical review and recent developments on theoretical justification and numerical implementations of functional a posteriori error estimates and adaptive algorithms for approximate solutions to problems in deformable solid mechanics. The efficient practical implementation of such methods is a relevant objective, including for modern engineering practice.

Keywords: error estimates, finite element method, adaptive algorithms, solid mechanics

Citation: Valdman J., Frolov M.E., Functional-type a posteriori error estimates for solutions of problems in deformable solid mechanics, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (4) (2020) 203–215. DOI: 10.18721/JPM.13416

Введение

Тематика, связанная с построением методов численного решения краевых задач и методов апостериорного контроля погрешности получаемых приближенных решений находится в фокусе внимания ученых и инженеров не одно десятилетие. Число публикаций на эту тему исчисляется тысячами. О важности развития данного направления также свидетельствует высокая значимость тематического кластера «Метод конечных элементов», «Методы Галёркина», «Погрешности» (*англ.* Finite Element Method; Galerkin Methods; Errors) в рейтингах. Вопросы, которые затрагивает теория апостериорного контроля ошибок, выходят за рамки исключительно вычислительной математики или инженерного анализа, поднимая проблемы математического моделирования в целом и даже философии.

В инженерную практику приходит использование огромных вычислительных ресурсов, неимоверно усложняются моделируемые физические процессы, проблемы рассматриваются комплексно, мультидисциплинарно, на разных масштабах физических явлений, практически без упрощений, генерируется большое количество данных и решений. Такие задачи успешно решаются, в том числе в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого (см., например, статьи [1 – 3]). При этом часто используются коммерческие программные продукты известных разработчиков с закрытым кодом, что не дает в полной мере «заглянуть внутрь» таких систем и оценить все математические и алгоритмические аспекты их реализации. Это мотивирует специалистов на стыке вычислительной математики, физики, механики, инженерных наук на поиск универсальных методов объективной оценки полученных результатов. Для этого разрабатываются как технические методики, так и строгие, математически обоснованные подходы, затрагивающие в той или иной мере два ключевых вопроса:

1. Какова точность полученного решения конкретной задачи и всегда ли мы можем ее надежно оценить?

2. В каких зонах решение требует уточнения (крайне желательно, чтобы такая процедура могла быть автоматизирована)?

К сожалению, единого подхода к оценке погрешности, который отличался бы одновременно универсальностью, простотой в получении новых теоретических результатов и в их алгоритмической реализации, а также низкой вычислительной трудоемкостью, просто не существует. Поэтому выбор тех или иных приоритетов – это вопрос на стыке с философскими проблемами, и он не может быть сделан однозначно.

Классические апостериорные оценки

Начало современного этапа интенсивного развития методов построения апостериорных оценок принято связывать с работами [4, 5], вышедшими в конце 70-х годов XX века. Эти работы вызвали значительный интерес, выразившийся в появлении к началу-середине 1980-х гг. сразу нескольких подходов, направленных на проверку точности результатов, получаемых в процессе математического и инженерного моделирования. С середины 1990-х гг., за следующее десятилетие разными авторами было выпущено несколько монографий (см, в частности, работы [6 – 9] и ссылки в них), обобщающих накопленный за это время опыт.

Таким образом, в теории метода конечных элементов появилось отдельное направление, связанное с верификацией численных решений и валидацией математических моделей. Поскольку апостериорные оценки позволяют оценить величину отклонения приближенного решения от неизвестного точного решения, то появляется возможность отделить ошибку, вносимую математической моделью, от ошибки численного решения. Только в этом случае можно делать корректный вывод о пригодности математической модели и ее адекватности при анализе того или иного объекта исследования.

Среди групп методов, получивших в то время наибольшее распространение и даже реализованных в коммерческих программных продуктах (ANSYS, MATLAB и т. п.) для ряда простых краевых задач, выделим явные и неявные методы невязок, и методы постобработки производных приближенного решения.

Первые из них существенно проще, чем вторые, но они требуют вычисления вспомогательных постоянных, чтобы оценки адекватно отражали не только локальное распределение погрешности по области расчета (были индикаторами), но и ее глобальную величину (были надежными гарантированными оценками погрешности сверху). На практике такой упрощенный подход сталкивается с существенными трудностями, поэтому методы этой группы применяются именно к адаптации сеток.

Неявные методы обходят проблему вычисления констант посредством введения в структуру методов решения последовательности локальных задач с граничными условиями различных типов, что увеличивает их трудоемкость, но далеко не всегда дает оценки нормы ошибки сверху.

И, наконец, еще одна группа классических методов основана на эффекте суперсходимости, который используется для построения и теоретического обоснования индикаторов погрешности в различных задачах. Данные методы основаны на усреднении значений производных или напряжений в точках суперсходимости. Они вычислительно нетрудоемкие и достаточно просты в реализации, показывают хорошую локальную индикацию зон с большой погрешностью даже в том случае, когда не имеют строгого математического обоснования, но не дают надежных оценок погрешности сверху.

Помимо указанных выше монографий, с более подробным обзором результатов на русском языке можно ознакомиться в статье [10].

Основная особенность классических методов апостериорного контроля точности заключается в том, что их строгое математическое обоснование изначально базируется на том предположении, что мы рассматриваем не какое-то произвольное приближенное решение, а точное решение соответствующей конечномерной задачи — галёркинскую аппроксимацию. Это далеко не всегда так, если речь идет о коммерческих пакетах, в которых решение может не обладать данным свойством из-за особенностей численных алгоритмов. Например, возникает необходимость борьбы с вычислительным локинг-эффектом (locking phenomenon) при решении задач теории пластин. Это делается, в частности, путем использования на части элементов более грубых по точности формул численного интегрирования и приводит к негалёркинским решениям.

Классические апостериорные оценки в механике деформируемого твердого тела

Поскольку более эффективное решение инженерных задач имеет не меньшее самостоятельное значение, чем развитие теории численных методов, интерес исследователей практически одновременно был направлен на разработку методов адаптивного решения механических задач, а не только на общую теорию апостериорного контроля точности как самостоятельный раздел вычислительной математики. Достижения фактически стали возникать одновременно; методы предлагались и обосновывались на примере классических эллиптических краевых задач (уравнения Пуассона или стационарной задачи диффузии), а успешные идеи распространялись на плоские или пространственные задачи линейной теории упругости, теории пластин и т. п. (см., например, статьи [11 — 13] и сборник работ [14]).

Еще в конце 1940-х гг. появился метод гиперокружностей [15], который потом был обобщен в других работах и назван методом ошибок в определяющих соотношениях (см., например, монографию [16]). Метод осреднения градиента [12, 17, 18] также был распространен в 1987 — 1992 гг. на задачи механики деформируемого твердого тела и в настоящее время присутствует в пакете ANSYS в виде встроенной процедуры для анализа точности решений ряда простых задач. При этом в работах можно найти подробное обсуждение различных аспектов численной реализации процедур усреднения. Ссылки на ранние публикации, распространяющие явные и неявные методы невязок на задачи механики, приводятся, в частности, в монографиях [6, 19] и обзоре [20]. Подробности также можно найти, в том числе, в более поздних монографиях [21, 22] и относительно недавней работе [23].

Апостериорные оценки функционального типа

Функциональный подход основан на привлечении строгих математических методов: математической физики, функционального анализа, вариационного исчисления (в частности, теории двойственности), теории уравнений в частных производных, и использует слабые (обобщенные) постановки исследуемых задач. Он изначально рассматривает в качестве элемента, погрешность которого необходимо оценить, произвольное решение задачи из соответствующего ей функционального пространства. Это обеспечивает подходу достаточную общность и надежность, поскольку позволяет анализировать ошибки в решениях вне зависимости от скрытых деталей реализации вычислительных процедур, связанных с расчетом этих решений в коммерческих пакетах.

Свойство галёркинской ортогональности, которое является ключевым для классических методов, здесь не играет существенной роли в теории, хотя может быть использовано при практической реализации. Оценки остаются оценками сверху (гарантированными) для всех конформных аппроксимаций, что справедливо не только в теории, но и при численной реализации – это важное свойство означает надежность метода апостериорного контроля ошибок. Подобная универсальность и общность подхода характерна для работ С.Г. Михлина [24]. Функциональный подход был предложен и развивается главным научным сотрудником Санкт-Петербургского отделения Математического института (ПОМИ) им. В.А. Стеклова РАН, профессором Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ) С.И. Репиным вместе с единомышленниками в России и ряде европейских стран: Финляндии, Чехии, Австрии, Швейцарии и Германии. Подробный обзор развития этих исследований можно найти в монографии [22].

Ключевой особенностью подхода является то, что он не только дает гарантированные (не нарушающиеся при практической реализации) верхние оценки погрешности, но и пригоден для широкого спектра приближенных решений. В то же время функциональный подход отличается от геометрических рассуждений метода гиперокружностей, не требует построения равновесных полей и успешно распространен в плане теории на нелинейные задачи.

Формальной точкой отсчета возникновения этого направления можно считать 1996 г., когда появилась первая работа [25], а развитием – выпуск вслед за этим цикла работ С.И. Репина [26 – 29]. Дальнейшую историю применения данного подхода можно проследить по источникам, указанным в монографиях [9, 22, 30].

В общем виде, если не вдаваться в специфику каждой конкретной задачи, оценка выглядит следующим образом:

$$\| u-\tilde{u} \| \le \mathrm{M}(\tilde{u}, D, \tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2, \dots, C_1, C_2, \dots), \quad (1)$$

где в левой части стоит норма разности между точным решением u и приближением $\tilde{u}$, а в правой возникает функционал M – мажоранта отклонения.

Аргументами функционала являются приближенное решение $\tilde{u}$, параметры задачи D, набор вещественных констант (C_1, C_2, ...), определяющихся данными задачи, но не свойствами решения или дискретизации. Наконец, набор $(\tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2, \dots)$ представляет собой совокупность свободных элементов, управляющих точностью верхней оценки. Функционал M должен обращаться в нуль тогда и только тогда, когда $\tilde{u}$ – точное решение; должен быть явно вычислимым на практике; обеспечивать точную оценку погрешности при разумном с физической точки зрения выборе совокупности $(\tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2, ...)$.

Отметим, что для сравнения различных методов существуют локальные и глобальные характеристики, введенные в литературе, но только одна из них – индекс эффективности апостериорной оценки – получила самое широкое распространение и признана бесспорной. Индекс эффективности в случае мажорант погрешности функционального типа вычисляется как отношение значения функционала M к норме оцениваемой им ошибки. Таким образом, для гарантированных верхних оценок его значение никогда не бывает ниже 1,0 – оптимального значения, при котором метод в точности воспроизводит неизвестную норму погрешности по всей области. Существуют и различные локальные характеристики (см., например, работу [22] и цитируемую там литературу), но они не столь общеупотребительны, как индекс эффективности.

С практической точки зрения, численная реализация методов данной группы не так проста, как для классических индикаторов погрешности, о которых шла речь выше. Повышенная вычислительная трудоемкость и необходимость приложения дополнительных усилий для создания эффективных алгоритмов вычисления апостериорных оценок функционального типа – это плата за универсальность и надежность подхода. Исследования в этом направлении продолжаются и далеки от завершения. Для плоских задач в рамках классической линейной упругости численные результаты были впервые получены в работе [31], при помощи альтернативной более эффективной реализации – в [32]. Для плоских задач теории упругости Коссера оценка получена в работе [33], модифицирована в [34], а обзор численных исследований можно найти в статье [23].

Для задач упругопластичности первый теоретический результат был получен в 1996 г. [25], далее был накоплен достаточный опыт как теоретического, так и практического развития оценок (см. публикации [35 – 38] и цитируемую там литературу, а также смежные исследования [39, 40]).

Наконец, исследование функционального подхода к решению задач теории пластин началось с работы [41], посвященной теории тонких пластин Кирхгоффа – Лява. Первый вариант такой оценки для пластин Рейсснера – Миндлина был получен в 2004 г. [42]. Обзор дальнейших результатов, в том числе относительно численной реализации, можно найти в недавней работе [43].

За последние годы получены новые интересные результаты для задачи с препятствием [44 – 46] и для задач во внешних областях [47], а также для параболических уравнений [48, 49] и для норм, отличающихся от энергетической нормы [50]. Особо отметим работу [46], которая посвящена классу нелинейных задач со свободными границами и также показывает, что мажоранты могут контролировать не только ошибку решения в энергетическом пространстве, но и некоторые меры расстояния до точного решения для нелинейных задач. При этом получаются достаточно эффективные и явно вычислимые двусторонние оценки, что подробнее изложено в следующем разделе.

Методология применения подхода

В случае задач, решение которых не обладает повышенной гладкостью и содержит сингулярности, их эффективное численное решение требует привлечения адаптивных методов, основанных на апостериорных оценках. При этом циклически реализуются следующие шаги, хорошо известные в западной литературе, начиная с пионерской и очень широко цитируемой работы [51] (см. также статью [52]):

$$\begin{gathered}\text{SOLVE} \rightarrow \text{ESTIMATE} \rightarrow \\ \rightarrow \text{MARK} \rightarrow \text{REFINE.}\end{gathered} \tag{2}$$

Такой подход направлен на получение приближенного решения задачи более высокой точности при меньших затрачиваемых вычислительных ресурсах. Алгоритм, тем не менее, для каждого класса задач требует обоснования своей эффективности, которая не следует автоматически из известных априорных оценок скорости сходимости, поскольку последние получены в предположении повышенной регулярности точного решения и гладкости границы расчетной области.

Хорошо известно, что метод конечных элементов (МКЭ, *англ.* Finite Element Method (FEM)) даже для типовых эллиптических задач может сходиться медленно. Таким образом, истинная скорость сходимости адаптивного численного метода существенно зависит от алгоритмических деталей реализации. Отметим, что начало исследованиям в области адаптивных МКЭ (AFEM) положила известная работа [53].

Применение алгоритма (2) дает достаточно широкие возможности при реализации. Методы могут различаться конечными элементами для шага SOLVE, инженерными или строгими подходами к оценке погрешности и индикации ее локального распределения по расчетной области для шага ESTIMATE – в данном случае может быть использована апостериорная оценка типа (1). Ключевое отличие для шага REFINE может быть связано с алгоритмом дробления сеток (*h*-версия) либо увеличением порядка точности аппроксимации (*p*-версия) или использованием более эффективного комбинированного способа (*hp*-версия). Для нелинейных задач с неизвестными свободными границами (например, неизвестными заранее упругопластическими зонами) существует еще один тип улучшения сеток (*rp*-версия), когда граница элемента подгоняется под свободную границу. При этом происходит перемещение узлов существующей конечно-элементной сетки, чтобы улучшить дискретизацию без введения дополнительных степеней свободы (см., например, работу [54]). Наконец, влияние оказывают и разные критерии отбора элементов разбиения для шага MARK.

Реализация функционального подхода в пакетах программ достаточно нетривиальна. Как это можно сделать эффективно в пакете MATLAB, описано, например, в недавних работах [55 – 57]. Созданные коды реализуют узловые и граничные элементы низкого порядка, они векторизованы и обеспечивают как в плоском, так и в пространственном случаях разумное время сборки даже для дискретизаций с большим количеством неизвестных (до нескольких миллионов).

В настоящее время интерес представляет применение накопленного опыта к различным задачам механики, в частности, при реализации вычисления апостериорных оценок для плоских задач теории упругости Коссера, которая также была выполнена в пакете MATLAB [23].

В завершение остановимся несколько подробнее на вопросе эффективности функционального подхода.

Для линейных задач вычисление мажоранты связано с решением дополнительной задачи минимизации квадратичного функционала M^2, что приводит к необходимости решать вторую систему линейных алгебраических уравнений. При этом интерес представляют не простые стандартные конечные элементы, а элементы, характерные для смешанных МКЭ (подробности см., например, в работах [23, 32, 43]). Сама задача оценки погрешности математически существенно сложнее, чем исходная краевая задача. Поэтому трудно ожидать, что ее можно всегда решить с малыми вычислительными затратами, по сравнению с исходной. В некоторых случаях это удается сделать, но, как правило, оценка погрешности требует усилий (и ресурсов, и нетривиальных алгоритмических решений). Трудоемкость вычисления апостериорной оценки редко получается меньше, чем трудоемкость решения исходной задачи.

В большинстве случаев оценки удается реализовать так, чтобы они мажорировали неизвестную погрешность с индексом эффективности, не превышающем 2,5 (см. работы [22, 23, 32, 43] и цитируемую там литературу). При определенных дополнительных вычислительных затратах, завышение получается не более, чем в 1,2 – 1,3 раза (см. работы [23, 36] и др.). В простых эллиптических краевых задачах даже удается получить индекс эффективности, близкий к оптимальному значению, а именно 1,0. Тогда функциональный подход дает результат, близкий к точному воспроизведению погрешности, достижимость которого доказана теоретически.

Приведем пример того, что это означает на практике. Пусть выбран критерий остановки процесса расчета по достижению гарантированной общей глобальной точности решения, равной 90%. Тогда при истинной погрешности приближенного решения 7% (которую на самом деле мы не знаем) и индексе эффективности 1,3 остановка произойдет на данной сетке, поскольку мажоранта M, которую мы вычисляем при этом, показывает погрешность меньше 10%. Дополнительных вычислительных затрат, необходимых для анализа сеточной сходимости, при этом не возникает, поскольку решать задачу на более мелкой сетке и производить сравнение не нужно. При индексе эффективности до 2,5 оценка покажет уровень погрешности до 20% и будет принято решение об одной избыточной итерации равномерного дробления сетки, чтобы уменьшить погрешность вдвое. Этот результат также считается приемлемым, поскольку, как уже было отмечено, сама задача оценки точности принципиально сложнее, чем исходная задача без такого контроля.

Что касается адаптивных алгоритмов, то следует отметить, что адаптация сеток позволяет получать решения того же уровня точности, что и для равномерных разбиений, на существенно меньшем числе узлов. Разница достигает нескольких десятков раз даже при сравнении с равномерными разбиениями до 100 тыс. узлов [23]. В дальнейшем эта разница только растет, что вполне окупает вычислительные затраты, необходимые для построения оценок и индикаторов погрешности.

Заключение

В работе описаны основные исторические и современные достижения в области построения надежных (гарантированных) оценок точности приближенных решений задач механики деформируемого твердого тела. В основном обсуждение затрагивает методы, разработанные в рамках функционального подхода. Эффективное практическое применение методов данной группы представляет собой нетривиальную и актуальную задачу, имеющую прямое приложение к современной инженерной практике. В данном направлении требуется еще немало усилий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов Российской Федерации (Проект 5-100-2020, реализуемый СПбПУ Петра Великого).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nemov A., Novokshenov A., Lagutkina A., Sycheva S., Mamchits D., Borovkov A., Vershkov V., Shelukhin D., Lukyanov V.** Multiphysics engineering analysis for high field side reflectometry // Fusion Engineering and Design. 2017. Vol. 124. November. Pp. 501–506.

2. **Antonova O., Borovkov A., Boldyrev Yu., Voynov I.** Variational problem for hydrogenerator thrust bearing // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 34. No. 1. Pp. 97–102.

3. **Alekseev S., Tarasov A., Borovkov A., Aleshin M., Klyavin O.** Validation of EURONCAP frontal impact of frame off-road vehicle: road traffic accident simulation // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 34. No. 1. Pp. 59–69.

4. **Babuška I., Rheinboldt W.C.** A-posteriori error estimates for the finite element method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1978. Vol. 12. No. 10. Pp. 1597–1615.

5. **Babuška I., Rheinboldt W.C.** Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1978. Vol. 15. No. 4. Pp. 736–754.

6. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester, Stuttgart: John Wiley & Sons, B.G. Teubner, 1996. 127 p.

7. **Ainsworth M., Oden J.T.** A posteriori error

estimation in finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 2000. 240 p.

8. **Babuška I., Strouboulis T.** The finite element method and its reliability. New York: The Clarendon Press Oxford University Press, 2001. 802 p.

9. **Neittaanmäki P., Repin S.** Reliable methods for computer simulation: Error control and a posteriori estimates. Amsterdam: Elsevier, 2004. 305 p.

10. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Применение методов математической физики к контролю точности решений задач механики // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2007. № 1 (49). С. 203–209.

11. **Ladevèze P., Leguillon D.** Error estimate procedure in the finite element method and applications // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1983. Vol. 20. No. 3. Pp. 485–509.

12. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1987. Vol. 24. No. 2. Pp.337–357.

13. **Johnson C., Hansbo P.** Adaptive finite element methods in computational mechanics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992. Vol. 101. No. 1–3. Pp. 143–181.

14. **Ladevèze P., Oden J.T.** (Eds.). Advances in adaptive computational methods in mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1998. 525 p.

15. **Prager W., Synge J.L.** Approximations in elasticity based on the concept of function space // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5. No. 3. Pp. 241–269.

16. **Ladevèze P., Pelle J.-P.** Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. New York: Springer, 2005. 413 p.

17. **Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C.** Adaptive techniques in the finite element method // Communications in Applied Numerical Methods. 1988. Vol. 4. No. 2. Pp. 197–204.

18. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.** The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992. Vol. 101. No. 1–3. Pp. 207–224.

19. **Bangerth W., Rannacher R.** Adaptive finite element methods for differential equations. Basel, Birkhäuser: Springer, 2003. 220 p.

20. **Verfürth R.** A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 176. No. 1–4. Pp. 419–440.

21. **Verfürth R.** A posteriori error estimation techniques for finite element methods. Oxford: Oxford University Press, 2013. 416 p.

22. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.** Accuracy verification methods: Theory and algorithms. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2014. 355 p.

23. **Churilova M.A., Frolov M.E.** Comparison of adaptive algorithms for solving plane problems of classical and Cosserat elasticity // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 32. No. 3. Pp. 370–382.

24. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

25. **Repin S.I., Xanthis L.S.** A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 138. No. 1–4. Pp. 317–339.

26. **Репин С.И.** A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growth functionals // Записки научных семинаров ПОМИ. 1997. Т. 249. С. 244–255.

27. **Репин С.И.** A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory // Записки научных семинаров ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 201–214.

28. **Repin S.I.** A unified approach to a posteriori error estimation based on duality error majorants // Mathematics and Computers in Simulation. 1999. Vol. 50. No. 1–4. Pp. 305–321.

29. **Repin S.I.** A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Mathematics of Computation. 2000. Vol. 69. No. 230. Pp. 481–500.

30. **Repin S.** A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: de Gruyter, 2008. 316 p.

31. **Muzalevsky A.V., Repin S.I.** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2003. Vol. 18. No. 1. Pp. 65–85.

32. **Фролов М.Е.** Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линей-

ной теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1178–1191.

33. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Оценки отклонения от точного решения для плоских задач в теории упругости Коссера // «Проблемы математического анализа». Межвузовский сборник. 2011. Вып. 62. С. 153–161.

34. **Фролов М.Е.** Функциональные апостериорные оценки погрешности решений плоских задач в теории упругости Коссера // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 4. С. 595–603.

35. **Repin S., Valdman J.** Functional a posteriori error estimates for incremental models in elasto-plasticity // Central European Journal on Mathematics. 2009. Vol. 7. No. 3. Pp. 506–519.

36. **Neittaanmäki P., Repin S., Valdman J.** Estimates of deviations from exact solutions of elasticity problems with nonlinear boundary conditions // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. Vol. 28. No. 6. Pp. 597–630.

37. **Repin S., Sysala S., Haslinger J.** Computable majorants of the limit load in Hencky's plasticity problems // Computers and Mathematics with Applications. 2018. Vol. 75. No. 1. Pp. 199–217.

38. **Sysala S., Haslinger J., Repin S.** Reliable computation and local mesh adaptivity in limit analysis // Programs and Algorithms of Numerical Mathematics, Proceedings of Seminar. Hejnice. June 24–29, 2018. Institute of Mathematics CAS, Prague. 2019. Pp. 149–158.

39. **Carstensen C., Orlando A., Valdman J.** A convergent adaptive finite element method for the primal problem of elastoplasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2006. Vol. 67. No. 13. Pp.1851–1887.

40. **Gruber P., Kienesberger J., Langer U., Schöberl J., Valdman J.** Fast solvers and a posteriori error estimates in elastoplasticity // Numerical and Symbolic Scientific Computing: Progress and Prospects. New York: Springer. 2012. Pp. 45–63.

41. **Neittaanmäki P., Repin S.I.** A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator // East-West Journal of Numerical Mathematics. 2001. Vol. 9. No. 2. Pp. 157–178.

42. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Об оценке отклонений от точного решения задачи о пластине Рейсснера – Миндлина // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 310. № 35. С. 145–157.

43. **Frolov M., Chistiakova O.** Adaptive algorithm based on functional-type a posteriori error estimate for Reissner – Mindlin plates // Advanced Finite Element Methods with Applications. Selected papers from the 30th Chemnitz Finite Element Symposium, Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE). 2019. Vol. 128. Ch. 7. Pp. 131–141.

44. **Apushkinskaya D., Repin S.** Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions // arXiv:2003.09261v2. 2020.

45. **Apushkinskaya D., Repin S.** Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution // Interfaces and Free Boundaries. 2018. Vol. 20. No. 4. Pp. 511–531.

46. **Repin S., Valdman J.** Error identities for variational problems with obstacles // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2018. Vol. 98. No. 4. Pp. 635–658.

47. **Pauly D., Repin S.** A posteriori estimates for the stationary Stokes problem in exterior domains // St. Petersburg Mathematical Journal. 2020. Vol. 31. No. 3. Pp. 533–555.

48. **Langer U., Matculevich S., Repin S.** Guaranteed error bounds and local indicators for adaptive solvers using stabilised space–time lgA approximations to parabolic problems // Computers & Mathematics with Applications. 2019. Vol. 78. No. 8. Pp. 2641–2671.

49. **Matculevich S.V., Repin S.I.** Estimates for the difference between exact and approximate solutions of parabolic equations on the basis of Poincaré inequalities for traces of functions on the boundary // Differential Equations. 2016. Vol. 52. No. 10. Pp. 1355–1365.

50. **Repin S.I.** Estimates of the deviation from exact solutions of boundary value problems in measures stronger than the energy norm // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. No. 5. Pp. 749–765.

51. **Dörfler W.** A convergent adaptive algorithm

for Poisson's equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1996. Vol. 33. No. 3. Pp. 1106–1124.

52. **Canuto C., Nochetto R.H., Stevenson R., Verani M.** On *p*-robust saturation for *hp*-AFEM // Computers & Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73. No. 9. Pp. 2004–2022.

53. **Babuška I., Vogelius M.** Feedback and adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems // Numerische Mathematik. 1984. Vol. 44. No. 1. Pp. 75–102.

54. **Franke D., Düster A., Nübel V., Rank E.** A comparison of the *h*-, *p*-, *hp*-, and *rp*-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem // Computational Mechanics. 2010. Vol. 45. No. 5. Pp. 513–522.

55. **Rahman T., Valdman J.** Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: nodal elements // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. No. 13. Pp. 7151–7158.

56. **Anjam I., Valdman J.** Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: edge elements // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 267. 15 September. Pp. 252–263.

57. **Čermák M., Sysala S., Valdman J.** Efficient and flexible MATLAB implementation of 2D and 3D elastoplastic problems // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 355. Pp. 595–614.

Статья поступила в редакцию 29.09.2020, принята к публикации 14.10.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ВАЛЬДМАН Ян – *PhD, доцент института математики Южночешского университета, г. Ческе-Будеёвице, Чешская Республика.*

370 05, Branišovská 1645/31A, České Budějovice 2, Česká Republika
jan.valdman@gmail.com

ФРОЛОВ Максим Евгеньевич – *доктор физико-математических наук, директор Института прикладной математики и механики, профессор Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерацияя.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
frolov_me@spbstu.ru

REFERENCES

1. **Nemov A., Novokshenov A., Lagutkina A., et al.,** Multiphysics engineering analysis for high field side reflectometry, Fusion Engineering and Design. 124 (November) (2017) 501–506.

2. **Antonova O., Borovkov A., Boldyrev Yu., Voynov I.,** Variational problem for hydrogenerator thrust bearing, Materials Physics and Mechanics. 34 (1) (2017) 97–102.

3. **Alekseev S., Tarasov A., Borovkov A., et al.,** Validation of EURONCAP frontal impact of frame off-road vehicle: road traffic accident simulation, Materials Physics and Mechanics. 34 (1) (2017) 59–69.

4. **Babuška I., Rheinboldt W.C.,** A-posteriori error estimates for the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 12 (10) (1978) 1597–1615.

5. **Babuška I., Rheinboldt W.C.,** Error estimates for adaptive finite element computations, SIAM Journal on Numerical Analysis. 15 (4) (1978) 736–754.

6. **Verfürth R.,** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, John Wiley & Sons, B.G. Teubner, Chichester, Stuttgart, 1996.

7. **Ainsworth M., Oden J.T.,** A posteriori error estimation in finite element analysis, John Wiley & Sons, New York, 2000.

8. **Babuška I., Strouboulis T.,** The finite element method and its reliability, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2001.

9. **Neittaanmäki P., Repin S.,** Reliable methods for computer simulation: Error control and a posteriori estimates, Elsevier, Amsterdam, 2004.

10. **Repin S.I., Frolov M.E.,** Implementation of methods of mathematical physics to error control in mechanical problems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. 1 (49) (2007) 203–209 (in Russian).

11. **Ladevèze P., Leguillon D.,** Error estimate procedure in the finite element method and applications, SIAM Journal on Numerical Analysis. 20 (3) (1983) 485–509.

12. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.,** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 24 (2) (1987) 337–357.

13. **Johnson C., Hansbo P.,** Adaptive finite element methods in computational mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 101 (1–3) (1992) 143–181.

14. **Ladevèze P., Oden J.T.** (Eds.), Advances in adaptive computational methods in mechanics, Elsevier, Amsterdam, 1998.

15. **Prager W., Synge J.L.,** Approximations in elasticity based on the concept of function space, Quarterly of Applied Mathematics. 5 (3) (1947) 241–269.

16. **Ladevèze P., Pelle J.-P.,** Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics, Springer, New York, 2005.

17. **Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C.,** Adaptive techniques in the finite element method, Communications in Applied Numerical Methods. 4 (2) (1988) 197–204.

18. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.,** The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 101 (1–3) (1992) 207–224.

19. **Bangerth W., Rannacher R.,** Adaptive finite element methods for differential equations, Birkhäuser, Basel, 2003.

20. **Verfürth R.,** A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 176 (1–4) (1999) 419–440.

21. **Verfürth R.,** A-posteriori error estimation techniques for finite element methods, Oxford University Press, Oxford, 2013.

22. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.,** Accuracy verification methods: Theory and algorithms, Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2014.

23. **Churilova M.A., Frolov M.E.,** Comparison of adaptive algorithms for solving plane problems of classical and Cosserat elasticity, Materials Physics and Mechanics. 32 (3) (2017) 370–382.

24. **Mikhlin S.G.,** Variational methods in mathematical physics, Translated by T. Boddington, Pergamon Press, Oxford, 1964.

25. **Repin S.I., Xanthis L.S.,** A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 138 (1–4) (1996) 317–339.

26. **Repin S.I.,** A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growth functionals, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. 249 (1997) 244–255.

27. **Repin S.I.,** A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. 243 (1997) 201–214.

28. **Repin S.I.,** A unified approach to a posteriori error estimation based on duality error majorants, Mathematics and Computers in Simulation. 50 (1–4) (1999) 305–321.

29. **Repin S.I.,** A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals, Mathematics of Computation. 69 (230) (2000) 481–500.

30. **Repin S.I.,** A posteriori estimates for partial differential equations, de Gruyter, Berlin, 2008.

31. **Muzalevsky A.V., Repin S.I.,** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 18 (1) (2003) 65–85.

32. **Frolov M.E.,** Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 53 (7) (2013) 1000–1012.

33. **Repin S., Frolov M.,** Estimates for deviations from exact solutions to plane problems in the Cosserat theory of elasticity, Journal of Mathematical Sciences. 181 (2) (2012) 281–291, Translated from "Problems in Mathematical Analysis". (62) (2011) 153–161.

34. **Frolov M.,** Functional a posteriori estimates of the error in the solutions of plane problems in Cosserat elasticity theory, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 78 (4) (2014) 425–431.

35. **Repin S., Valdman J.,** Functional a posteriori error estimates for incremental models in elasto-plasticity, Central European Journal on Mathematics. 7 (3) (2009) 506–519.

36. **Neittaanmäki P., Repin S., Valdman J.,** Estimates of deviations from exact solutions of elasticity problems with nonlinear boundary conditions, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 28 (6) (2013) 597–630.

37. **Repin S., Sysala S., Haslinger J.,** Computable majorants of the limit load in Hencky's plasticity problems, Computers and Mathematics with Applications. 75 (1) (2018) 199–217.

38. **Sysala S., Haslinger J., Repin S.,** Reliable computation and local mesh adaptivity in limit analysis, Programs and Algorithms of Numerical Mathematics, Proceedings of Seminar. Hejnice, June 24–29, 2018. Institute of Mathematics CAS, Prague. (2019) 149–158.

39. **Carstensen C., Orlando A., Valdman J.,** A convergent adaptive finite element method for the primal problem of elastoplasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 67 (13) (2006) 1851–1887.

40. **Gruber P., Kienesberger J., Langer U., et al.,** Fast solvers and a posteriori error estimates in elastoplasticity, Numerical and symbolic scientific computing. Progress and prospects, Springer, New York. (2012) 45–63.

41. **Neittaanmäki P., Repin S.I.,** A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator, East-West Journal of Numerical Mathematics. 9 (2) (2001) 157–178.

42. **Repin S., Frolov M.,** Estimation of deviations from the exact solution for the Reissner – Mindlin plate problem, Journal of Mathematical Sciences. 132 (3) (2006) 331–338. Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. 310 (35) (2004) 145–157.

43. **Frolov M., Chistiakova O.,** Adaptive algorithm based on functional-type a posteriori error estimate for Reissner – Mindlin plates, Advanced Finite Element Methods with Applications. Selected papers from the 30th Chemnitz Finite Element Symposium, Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE).128 (7) (2019) 131–141.

44. **Apushkinskaya D., Repin S.,** Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions. arXiv:2003.09261v2 (2020).

45. **Apushkinskaya D., Repin S.,** Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution, Interfaces and Free Boundaries. 20 (4) (2018) 511–531.

46. **Repin S., Valdman J.,** Error identities for variational problems with obstacles, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 98 (4) (2018) 635–658.

47. **Pauly D., Repin S.,** A posteriori estimates for the stationary Stokes problem in exterior domains, St. Petersburg Mathematical Journal. 31 (3) (2020) 533–555.

48. **Langer U., Matculevich S., Repin S.** Guaranteed error bounds and local indicators for adaptive solvers using stabilised space–time IgA approximations to parabolic problems, Computers & Mathematics with Applications. 78 (8) (2019) 2641–2671.

49. **Matculevich S.V., Repin S.I.,** Estimates for the difference between exact and approximate solutions of parabolic equations on the basis of Poincaré inequalities for traces of functions on the boundary, Differential Equations. 52 (10) (2016) 1355–1365.

50. **Repin S.I.,** Estimates of the deviation from exact solutions of boundary value problems in measures stronger than the energy norm, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 60 (5) (2020) 749–765.

51. **Dörfler W.,** A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation, SIAM Journal on Numerical Analysis. 33 (3) (1996) 1106–1124.

52. **Canuto C., Nochetto R.H., Stevenson R., Verani M.,** On *p*-robust saturation for *hp*-AFEM, Computers & Mathematics with Applications. 73 (9) (2017) 2004–2022.

53. **Babuška I., Vogelius M.,** Feedback and

adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems, Numerische Mathematik. 44 (1) (1984) 75–102.

54. **Franke D., Düster A., Nübel V., Rank E.,** A comparison of the *h*-, *p*-, *hp*-, and *rp*-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem, Computational Mechanics. 45 (5) (2010) 513–522.

55. **Rahman T., Valdman J.,** Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: nodal elements, Applied Mathematics and Computation. 219 (13) (2013) 7151–7158.

56. **Anjam I., Valdman J.,** Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: edge elements, Applied Mathematics and Computation. 267 (15 September) (2015) 252–263.

57. **Čermák M., Sysala S., Valdman J.,** Efficient and flexible MATLAB implementation of 2D and 3D elastoplastic problems, Applied Mathematics and Computation. 355 (2019) 595–614.

Received 29.09.2020, accepted 14.10.2020.

THE AUTHORS

VALDMAN Jan

University of South Bohemia in České Budejovice

370 05, Branišovská 1645/31A, České Budějovice 2, Česká Republika

jan.valdman@gmail.com

FROLOV Maxim E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

frolov_me@spbstu.ru