

DOI: 10.18721/JPM.14104  
УДК 519.6:533.6.011

## ТЕСТИРОВАНИЕ ГИБРИДНОГО МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ НА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ РИМАНА

**Д.В. Садин, И.О. Голиков, Е.Н. Широкова**

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Изучены возможности гибридного метода крупных частиц с использованием известных и новых задач Римана в двумерных областях. Метод обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Монотонность решений обеспечивается нелинейной коррекцией искусственной вязкости и гибридизацией конвективных потоков. Детально исследованы центрально-симметричные задачи со сложной ударно-волновой структурой и развитием неустойчивости на контактной границе. Тестовые расчеты продемонстрировали высокую разрешающую способность, малую диссипативность и устойчивость метода.

**Ключевые слова:** гибридный метод крупных частиц, двумерные задачи Римана, разрешающая способность

**Ссылка при цитировании:** Садин Д.В., Голиков И.О., Широкова Е.Н. Тестирование гибридного метода крупных частиц на двумерных задачах Римана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 1. С. 58–71. DOI: 10.18721/JPM.14104

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## TESTING OF THE HYBRID LARGE-PARTICLE METHOD USING TWO-DIMENSIONAL RIEMANN PROBLEMS

**D.V. Sadin, I.O. Golikov, E.N. Shirokova**

Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky,  
St. Petersburg, Russian Federation

The full potential of the hybrid large-particle method using the known and new Riemann problems in two-dimensional domains has been studied. The method includes a space-time second-order approximation for smooth solutions. Using the artificial viscosity nonlinear correction and the convective fluxes hybridization maintained monotonicity of solutions. Centrally symmetrical problems with a complex shock-wave structure and with the development of instability on the contact boundary were studied in details. The test calculations demonstrated high resolution, low dissipation, and stability of the method.

**Keywords:** hybrid large-particle method, two-dimensional Riemann problems, high resolution

**Citation:** Sadin D.V., Golikov I.O., Shirokova E.N., Testing of the hybrid large-particle method using two-dimensional Riemann problems, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 58–71. DOI: 10.18721/JPM.14104

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

Вычислительная гидродинамика интенсивно развивается в последние десятилетия, что стимулируется разработкой исследовательских и коммерческих пакетов прикладных программ для расчета и обоснования параметров технических устройств, применяемых в различных технологических процессах, на разных стадиях производства, например в авиастроении, ракетно-космической технике и энергетике.

К настоящему времени сформировался ряд подходов построения дискретных моделей, сохраняющих монотонность и имеющих повышенный порядок аппроксимации для расчетов газодинамических течений. Такие расчеты основаны на точном или приближенном решении распада разрыва (схемы типа Годунова [1 – 3]); схемах с уменьшением полной вариации (TVD-реконструкции, *англ.* Total Variation Diminishing [4 – 6]); взвешенных, существенно неосциллирующих схемах (WENO-схемы, *англ.* Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes) на переменных шаблонах [7 – 9]; гибридных алгоритмах [10 – 12], компактных схемах [13 – 15] и др.

Наряду с тенденцией построения схем четвертого, пятого и более высоких порядков аппроксимаций [8, 9, 15], для широкого круга задач сохраняют актуальность дискретные модели второго порядка точности [16 – 20]. Например, достаточно подробное обсуждение таких схем можно найти в работе [19], в которой развивается MUSCL-подход (Monotonic Upstream-Centered Scheme) с применением различных квазиодномерных схем реконструкции.

Гибридный метод крупных частиц был предложен для решения задач динамики многофазных сред на основе схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами (*англ.* CDP2 – Customizable Dissipative Properties), которая меняет порядок аппроксимации в зависимости от гладкости решения [21, 22]. Вместе с тем прикладные задачи зачастую содержат области как «чистого» газа, так и зоны течений смеси газа

с дисперсной фазой. Поэтому развиваемый метод должен обладать универсальностью и демонстрировать высокую разрешающую способность и монотонность в этих двух случаях. Обязательным требованием к новому численному методу является его проверка на серии тестовых задач в широком диапазоне параметров течения. Ранее метод верифицировался на стандартных одномерных и двумерных тестах [23 – 25].

Достоинства метода перед известными схемами, учитывающими характеристические свойства законов сохранения, заключаются в расширении класса задач с уравнениями как гиперболического, так и смешанного типа с мнимыми компонентами характеристик. Алгоритм гибридного метода крупных частиц дает успешные результаты при решении традиционно сложных вычислительных проблем, таких как образование искусственного пограничного слоя и фиктивной ножки Маха, возникновение ударных волн разрежения, «карбункул»-неустойчивости на гиперзвуковых режимах обтекания, что характерно для схем типа Годунова [26]. Метод обладает алгоритмической простотой, а также хорошим соотношением диссипативных и дисперсионных свойств. Например, в тесте с двойным маховским отражением (*англ.* Double Mach reflection) гибридный метод крупных частиц превосходит по вихреразрешающей способности популярные схемы HLLC (Harten – Lax – van Leer Contact [27]) и WENO5 [11] (см. сопоставление схем в статье [25]).

В настоящей работе проверяются вычислительные свойства (монотонность, диссипативность, вихреразрешающая способность) гибридного метода крупных частиц второго порядка точности по пространству и времени [28] при решении задач Римана в двумерных областях. Результаты сопоставляются с базовым методом [29] и решениями по современным схемам повышенного порядка аппроксимации [15, 30]. Детально рассмотрены вопросы численного воспроизведения сложных ударно-волновых и вихревых структур.

В цитируемых работах тестовые зада-

чи решаются в формулировке Эйлера. Для корректности сравнения наши расчеты также проводятся в невязкой постановке. Это объясняется необходимостью обоснования разрешения сетки для корректного решения уравнений Навье – Стокса при заданном числе Рейнольдса, когда схемная вязкость становится существенно меньше физической [8].

### Гибридный метод крупных частиц

**Основные уравнения.** Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа в форме уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \nabla_d \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E]^T, \quad \mathbf{G} = [\rho v, \rho v v, \rho E v]^T,$$

$$\mathbf{F} = [0, p, p \mathbf{v}]^T, \quad \nabla_d = \text{diag}(\nabla, \nabla, \nabla \cdot),$$

где  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $E$  – плотность, вектор скорости с компонентами  $u$  и  $v$ , давление, полная энергия газа единицы массы;  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}$  – консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины соответственно;  $t$  – время.

Уравнения (1) записаны в безразмерном виде для искомым функций

$$\rho' = \rho / \Theta_0, \quad p' = p / P_0,$$

$$u' = u / \sqrt{P_0 / \Theta_0}, \quad v' = v / \sqrt{P_0 / \Theta_0},$$

относительно произвольных размерных констант  $\Theta_0, P_0$ .

Координаты отнесены к характерному линейному размеру области определения задачи

$$x' = x/L, \quad y' = y/L,$$

а безразмерное время определяется как

$$t' = t / \left( L \sqrt{\Theta_0 / P_0} \right).$$

В уравнениях (1) и далее в постановках задач штрихи опущены.

Замыкающее уравнение состояния имеет вид

$$p = (\gamma - 1) \rho (E - \mathbf{v}^2 / 2),$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

**Реализация метода.** Запишем алгоритм гибридного метода крупных частиц с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP2 – Customizable Dissipative Properties) в конечно-объемной формулировке на ортогональной равномерной сетке [28].

Схемы формулируются с расщеплением на Лагранжев (0), Эйлеров и заключительный (1) этапы, без ограничения общности в одномерном случае:

$$\mathbf{q}_n^{(0)} = \mathbf{q}_n^k - (\mathbf{F}_{n+1/2}^k - \mathbf{F}_{n-1/2}^k) \tau / h, \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_n^{(1)} = \mathbf{q}_n^{(0)} - (\mathbf{G}_{n+1/2}^{(0)} - \mathbf{G}_{n-1/2}^{(0)}) \tau / h. \quad (3)$$

Для повышения до второго порядка аппроксимации по времени используем корректирующий шаг:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^{(2)} = & 0,5(\mathbf{q}_n^k + \mathbf{q}_n^{(1)}) - \\ & - 0,5(\mathbf{F}_{n+1/2}^{(1)} - \mathbf{F}_{n-1/2}^{(1)}) \tau / h, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^{k+1} = & \mathbf{q}_n^{(2)} - \\ & - 0,5(\mathbf{G}_{n+1/2}^{(2)} - \mathbf{G}_{n-1/2}^{(2)}) \tau / h, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tau = t^{k+1} - t^k$  – шаг по времени ( $t^k$  – временной слой);  $h$  – размер ячейки с ее центром  $x_n$  и гранями

$$x_{n\pm 1/2} = x_n \pm h/2.$$

Если величины на гранях ячеек определить как среднее арифметическое в центрах примыкающих ячеек, то получим бездиссипативную, но абсолютно неустойчивую схему второго порядка аппроксимации. В базовом методе крупных частиц потоки рассчитываются с учетом их направлений схемами первого порядка [29].

**Нелинейная коррекция метода.** Для обеспечения устойчивости и монотонности

метода с сохранением второго порядка точности на гладких решениях используется нелинейная коррекция градиентных и деформационных величин  $\mathbf{F}_{n\pm 1/2}$  и потоков  $\mathbf{G}_{n\pm 1/2}$ .

На Лагранжевом этапе (2) в схему

$$\tilde{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2} = [0, \tilde{p}_{n\pm 1/2}, \tilde{p}_{n\pm 1/2} u_{n\pm 1/2}^k]^T$$

вносится нелинейная скалярная искусственная вязкость

$$\tilde{p}_{n\pm 1/2} = p_{n\pm 1/2}^k + [1 - \psi_v(r_{n\pm 1/2})] Q_{n\pm 1/2},$$

где  $Q_{n\pm 1/2}$  – обычная линейная диссипация, например типа Ландшоффа;  $\psi_v(r_{n\pm 1/2})$  – ограничитель вязкости с параметром отношения наклонов  $r_{n\pm 1/2}$ .

Параметр  $r_{n\pm 1/2}$  вычисляется по условию

$$r_{n+1/2} = \begin{cases} (u_n^k - u_{n-1}^k) / (u_{n+1}^k - u_n^k), \\ \text{если } (u_{n+1}^k - u_n^k)(p_{n+1}^k - p_n^k) \geq 0; \\ (u_{n+2}^k - u_{n+1}^k) / (u_{n+1}^k - u_n^k), \\ \text{иначе.} \end{cases}$$

На гладких решениях сохраняется второй порядок аппроксимации:

$$r_{n\pm 1/2} \rightarrow 1 \Rightarrow \psi_v(r_{n\pm 1/2}) \rightarrow 1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{F}}_{n\pm 1/2} \rightarrow \mathbf{F} + O(h^2).$$

На Эйлеровом и заключительном этапе (3) рассчитываются примитивные переменные  $\phi = \{\rho, u, E\}$  с использованием гибридной нелинейной коррекции (взвешена ограничителем потоков  $\psi_f$  аддитивной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций) с точностью  $O(h^2)$  на гладких решениях:

$$\hat{\phi}_{n+1/2} = \begin{cases} \phi_{n+1/2}^+ & \text{при } u_{n+1/2}^{(0)} \geq 0, \\ \phi_{n+1/2}^- & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\phi_{n+1/2}^+ = \left[ \left( 1 - \psi_f(r_{n+1/2}^+) \right) \phi_n^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \psi_f(r_{n+1/2}^+) \phi_{n+1/2}^{(0)} \right];$$

$$\phi_{n+1/2}^- = \left[ \left( 1 - \psi_f(r_{n+1/2}^-) \right) \phi_{n+1}^{(0)} + \right. \\ \left. + \psi_f(r_{n+1/2}^-) \phi_{n+1/2}^{(0)} \right];$$

$$r_{n+1/2}^+ = \frac{\phi_n^{(0)} - \phi_{n-1}^{(0)}}{\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}},$$

$$r_{n+1/2}^- = \frac{\phi_{n+2}^{(0)} - \phi_{n+1}^{(0)}}{\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(0)}}.$$

Затем формируются численные потоки массы

$$\hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)} = \hat{\rho}_{n\pm 1/2}^{(0)} u_{n\pm 1/2}^{(0)} \tau,$$

импульса  $\hat{u}_{n\pm 1/2}^{(0)} \hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)}$  и энергии  $\hat{E}_{n\pm 1/2}^{(0)} \hat{M}_{n\pm 1/2}^{(0)}$  и определяются искомые функции:

$$\rho^{(1)} = \rho^{(0)} + (\hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h,$$

$$u_n^{(1)} = \left[ \rho_n^{(0)} u_n^{(0)} + (\hat{u}_{n-1/2}^{(0)} \hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \right. \\ \left. - \hat{u}_{n+1/2}^{(0)} \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h \right] / \rho_n^{(1)},$$

$$E_n^{(1)} = \left[ \rho_n^{(0)} E_n^{(0)} + (\hat{E}_{n-1/2}^{(0)} \hat{M}_{n-1/2}^{(0)} - \right. \\ \left. - \hat{E}_{n+1/2}^{(0)} \hat{M}_{n+1/2}^{(0)}) / h \right] / \rho_n^{(1)}.$$

Для нелинейной коррекции вязкости и потоков пригодны функции лимитирования TVD-типа. Далее используются следующие ограничители:

$$\psi(r) = \begin{cases} \max[\min(r, 1), 0] \\ \text{(MM - Minmod),} \\ (r + |r|) / (1 + r) \\ \text{(VL - Van Leer),} \\ \max[\min(2r, 1), \min(r, 2), 0] \\ \text{(SB - Superbee),} \end{cases}$$

которые будем указывать подстрочными индексами, например  $\psi_{v,MM}$  – ограничитель вязкости Minmod.

Опыт расчетов показал, что ограничители наделяют гибридный метод крупных частиц численной диссипацией в порядке возрастания ее уровня: SB, VL, MM.

На корректирующем шаге (4), (5) расчетные формулы численных градиентов, мощности деформаций и конвективных потоков аналогичны приведенным, с заменой верхних индексов  $k$  обозначением (1), (0) – обозначением (2), (1) – обозначением  $(k + 1)$ . В целом гибридный метод крупных частиц обладает суммарной аппроксимацией второго порядка по пространству и времени  $O(h^2 + \tau^2)$  на гладких решениях.

**Устойчивость метода.** Шаг по времени определяется из условия Куранта – Фридрихса – Леви (CFL):

$$\tau^k = \text{CFL} \frac{h}{\max_n (|u_n^k| + a_n^k)},$$

где CFL – фиксированное число Куранта,  $a_n^k$  – скорость звука.

Численные эксперименты позволили обновить границу устойчивости гибридного метода крупных частиц как  $\text{CFL} < 0,7$ . Число Куранта задано в расчетах настоящей работы с учетом надежности и точности алгоритма –  $\text{CFL} = 0,4$ .

### Результаты расчетов и их обсуждение

Рассматриваемые тестовые задачи служат для проверки свойств численных методов по воспроизведению скачков уплотнения, волн разрежения, контактных разрывов и вихревых структур в двумерных областях.

**Тесты 3, 4 и 12.** Из большой коллекции двумерных задач Римана рассмотрим тесты 3, 4 и 12 [30]. Далее полагаем, что газ – идеальный с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ . Задачи решаются до момента времени  $T$  в квадрате

$$(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1),$$

который разделен линиями  $x = 1/2$  и  $y = 1/2$  на четыре квадранта.

В каждом квадранте заданы постоянные начальные условия в безразмерном виде (см. таблицу).

Таблица

**Постоянные начальные условия при расчетах для трех тестов**

Позиция в квадрантах	Параметр	Значение параметра в тесте и квадрантах					
		Тест 3, $T = 0,30$		Тест 4, $T = 0,25$		Тест 12, $T = 0,25$	
		Сверху	Снизу	Сверху	Снизу	Сверху	Снизу
Слева	$p$	0,3000	0,0290	0,3500	1,1000	1,0000	1,0000
	$\rho$	0,5323	0,1380	0,5065	1,1000	1,0000	0,8000
	$u$	1,2060	1,2060	0,8939	0,8939	0,7276	0,0000
	$v$	0,0000	1,2060	0,0000	0,8939	0,0000	0,0000
Справа	$p$	1,5000	0,3000	1,1000	0,3500	0,4000	1,0000
	$\rho$	1,5000	0,5323	1,1000	0,5065	0,5313	1,0000
	$u$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$v$	0,0000	1,2060	0,0000	0,8939	0,0000	0,7276

Обозначения:  $p, \rho$  – безразмерные давление и плотность;  $u, v$  – безразмерные компоненты вектора скорости  $v$ ;  $T$  – безразмерный момент времени, до которого решались задачи.

Примечания. 1. Квадрат  $0,1 \times 0,1$  разделен на 4 квадранта. 2. Номера тестов соответствуют принятым в работе [30].

Расчеты выполнены гибридным методом крупных частиц на равномерной сетке  $400 \times 400$  с ограничителями потоков  $\psi_{f,VL}$  и вязкости  $\psi_{v,VL}$  (VL – Ван Леер, тесты 3 и 12), а тест 4 –  $\psi_{f,VL}, \psi_{v,MM}$  (MM – Minmod). На внешних границах заданы «мягкие» краевые условия экстраполяции.

Точные решения для этих задач неизвестны. Численные решения показаны на рис. 1 в виде изолиний плотности и векторов скоростей (стрелки). Для корректности сравне-

ния линии уровня плотности соответствуют приведенным в работе [30].

В рассматриваемых задачах реализуются течения с маховским (рис. 1, e, f) и двойным маховским (рис. 1, d) отражениями, а также конфигурации с близко расположенными контактными разрывами вдоль большей стороны «линзы» (см. рис. 1, e, f). Для тестов 3 и 12 дополнительно образуются диагонально направленные вихревые струи. В работе [30] обращено внимание на артефакт в тестовой

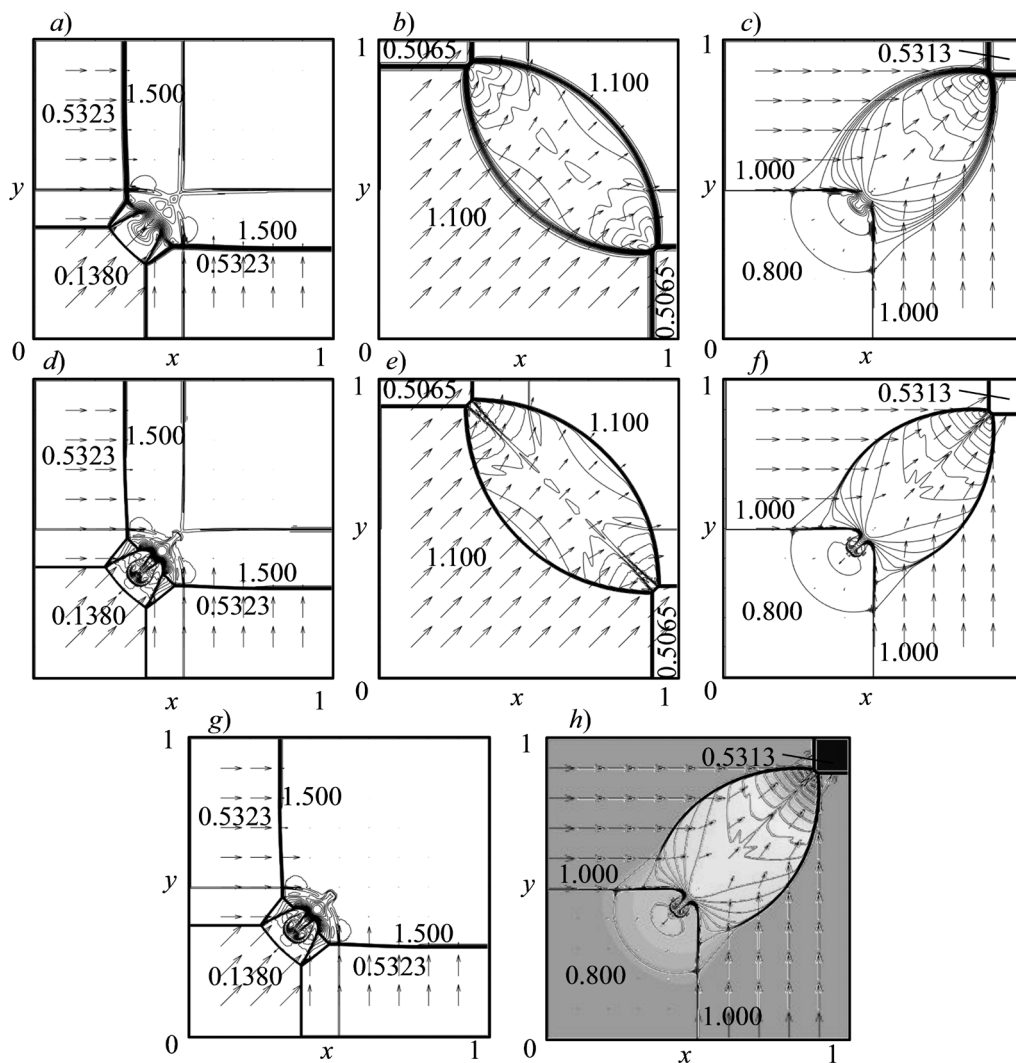


Рис. 1. Результаты численного решения задач Римана в двумерных областях базовым методом крупных частиц (a – c) и гибридным методом (d – h) с использованием тестов [30]: 3 (a, d, g), 4 (b, e) и 12 (c, f, h).

Для теста 3 получены 32 изолинии плотности от 0,16 до 1,71; для тестов 4 и 12 соответственно 29 изолиний от 0,52 до 1,92 и 30 изолиний от 0,54 до 1,70; g – решение с коррекцией стартовой ошибки; h – решение сопоставлено с WENO5 из работы [30]; векторы скоростей показаны стрелками



задаче 12, присущий в большей или меньшей степени всем рассматриваемым разностным схемам: в месте начального разрыва, в процессе его распада и дальнейшего расчета остается энтропийный след.

Указанная вычислительная проблема проявляется в ряде других проверочных задач и объясняется тем, что стартовая ошибка возникает в течение короткого промежутка времени установления («размазывания») счетного профиля ударной волны и сохраняется в виде энтропийного следа [31]. Этот численный дефект может быть устранен переустановкой газодинамических параметров в спутном потоке за ударной волной через несколько шагов по времени до начальных значений (см. пример расчета на рис. 1, g). Обратим внимание также, что в тесте 12, в малой области порядка численного размера неподвижного тангенциального контактного разрыва, наблюдаются колебания плотности.

Гибридный метод крупных частиц (рис. 1, d – f) демонстрирует значительные улучшения по точности воспроизведения структур течений по отношению к базовому методу [29] (рис. 1, a – c) и схеме Годунова первого порядка аппроксимации [32]. Алгоритм CDP2 в данных тестах превосходит по разрешающей способности цитируемые метод адаптивной искусственной вязкости второго порядка аппроксимации [16] и схему с кусочно-параболической реконструкцией третьего порядка [18]. Результаты расчетов хорошо согласуются с лучшими схемами, представленными в статье [30].

Например, на рис. 1, h проведено прямое сопоставление со схемой WENO5 пятого порядка точности – нижний слой, поверх которого наложен верхний слой с результатами расчета гибридным методом CDP2. Заметим, что изолинии плотности практически совпадают во всем диапазоне их нанесения. Расчеты по схеме CDP2 находятся в хорошем соответствии с бикompактной схемой с консервативной монотонизацией [15] (результаты данных тестов не опубликованы, но любезно предоставлены нам для сопоставления).

**Тесты A, B, C и D.** Для проверки работоспособности гибридного метода крупных частиц, в частности уровня его диссипативных свойств и возможности выявления неустойчивости на контактной границе, представляют интерес двумерные задачи Римана с центральной симметрией, например известный тест с цилиндрическим разлетом газа в бесконечную невозмущенную среду (Explosion problem) [30] – тест A. В дополнение к этому рассмотрим еще три модифицированные задачи: тесты B, C и D. Тестовая задача B формулирует разлет в неограниченный неподвижный газ из области повышенного давления квадратного сечения, а тесты C и D – это описанные выше проблемы в пространстве, ограниченном твердыми стенками.

В силу центральной симметрии, расчеты выполняются в правом верхнем квадранте на равномерной сетке  $400 \times 400$  с ограничителем потоков  $\psi_{f,VL}$  и вязкости  $\psi_{v,SB}$ . Для исключения (минимизации) влияния внешних границ в случаях A и B, расчетная сетка увеличена до размера  $500 \times 500$ . Бесконечность моделировалась расширением сетки на 100 ячеек с возрастанием шага ячейки вправо и вверх по закону

$$h'_{n+1} = h'_n + 0,1h,$$

при котором возмущения за время расчета не достигали внешних границ.

Краевые условия для тестов C и D являются стандартными условиями отражения на стенках.

В начальный момент времени в круге (случай A и C) и квадрате (случай B и D) заданы плотность  $\rho_i = 1$  и давление  $p_i = 1$ , а вне этих областей их значения равны  $\rho_0 = 0,125$  и  $p_0 = 0,1$ . Принято допущение, что газ во всей области определения неподвижен. Размер расчетной области по координатным осям принят единичным

$$(x, y) \in (0;1,5) \times (0;1,5),$$

радиус круга и половина длины квадрата равны  $4/15$ .

Для графического представления результатов расчетов в виде численных шлирен-изображений используем нелинейную функцию градиента плотности:

$$s_{i,j} = \exp\left(-k \frac{|\nabla\rho_{i,j}|}{\max_{i,j} |\nabla\rho_{i,j}|}\right),$$

где  $i, j$  – нумерация ячеек по  $x$  и  $y$  соответственно;  $\nabla\rho_{i,j}$  – градиент плотности;  $k$  – настроенный коэффициент для качественного (контрастного) отображения особенностей течения.

На рис. 2 для последовательных моментов безразмерного времени 0,2, 1,1, 1,3 и 3,2 представлены численные шлирен-изображения функции градиента плотности для задач разлета газа в безграничное пространство (верхний ряд – начальная область повышенного давления в виде круга, нижний ряд – в виде квадрата). После распада начального разрыва образуются ударная волна  $s_1$ , кон-

тактный разрыв  $c$ , движущиеся от центра, волна разрежения  $w$  (случай  $A$ ) или две волны  $w_1$  и  $w_2$  (случай  $B$ ) – к центру. С течением времени формируется вторичный сходящийся к началу координат скачок уплотнения  $s_2$  в форме окружности (рис. 2,  $b, c$ ) или почти квадратной формы (рис. 2,  $f, g$ ). На границе раздела газов, обозначенной буквой  $c$ , начинает развиваться неустойчивость. После фокусировки скачка уплотнения  $s_2$  возникает отраженная от центра симметрии ударная волна  $s_3$ , взаимодействующая с контактной границей  $c$  (рис. 2,  $d, h$ ). Сопоставление численного решения (рис. 2,  $d$ ) с результатами работы [30] подтверждает малую диссипативность схемы CDP2 в задачах с развитием неустойчивости на контактной границе.

Влияние возмущенной (ступенчатой) начальной границы круга на развитие неустойчивости обсуждается в работах [3, 30]. Как показывают расчеты, даже сглаженный контактный разрыв не является стабильным. В этом смысле интересен тест  $B$ , в котором

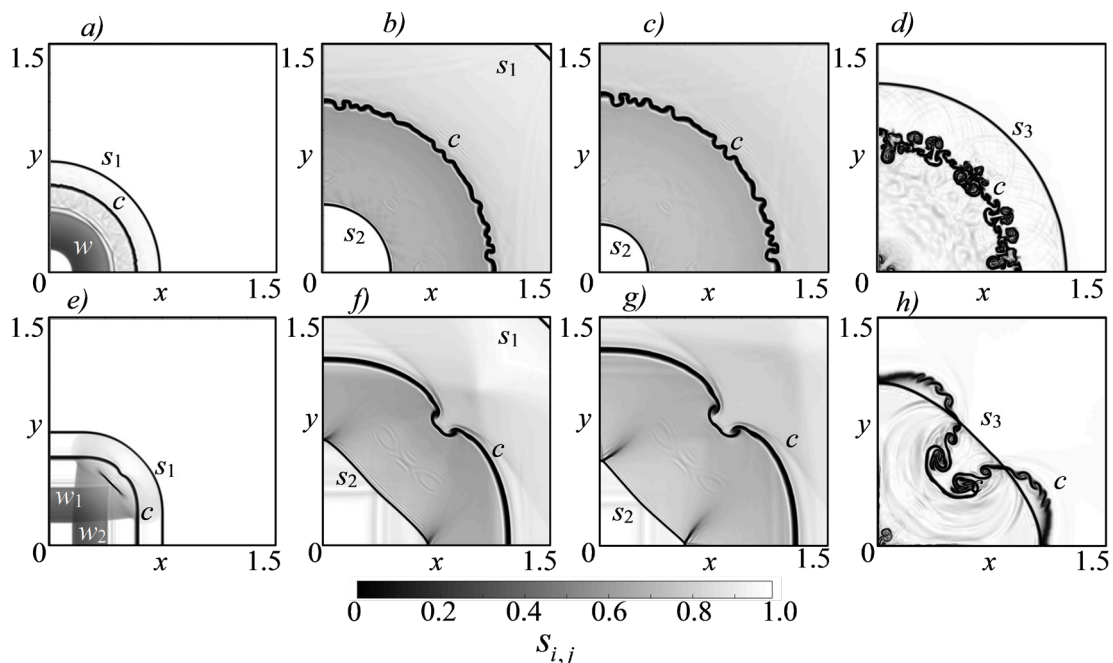


Рис. 2. Численные шлирен-изображения функции градиента плотности в последовательные моменты времени: 0,2 ( $a, e$ ), 1,1 ( $b, f$ ), 1,3 ( $c, g$ ) и 3,2 ( $d, h$ ).

Использованы тесты  $A$  ( $a - d$ ) и  $B$  ( $e - h$ ).

Размер сетки –  $400 \times 400$ ;  $c$  – контактная граница;  $s_1, s_3$  – ударные волны;  $s_2$  – скачок уплотнения,  $w, w_1, w_2$  – волны разрежения



контактная граница (квадрат) в начальный момент времени совпадает с гранями ячеек. В этом случае возмущения начинают развиваться с вершин квадратной области, а затем распространяются по всей границе раздела газов (рис. 2, *h*).

Варианты решения задач в ограниченном пространстве (*C* и *D*) для указанных выше последовательных моментов времени обладают более «богатой» конфигурацией течений газа и приведены на рис. 3. Начало разлета при  $t_1 = 0,2$  не отличается от рассмотренных случаев (рис. 2, *a, e*), поскольку фронт ударной волны  $s_1$  не дошел до стенок. В последующие моменты времени  $t_2 = 1,1$  и  $t_3 = 1,3$  формируются структуры, включающие ударные волны: отраженная от стенки  $s_4$ , прошедшая  $s_5$  и отраженная от контактной границы  $s_6$ , вторично отраженная от стенки  $s_7$ , сфокусированная  $s_8$  и образованная после столкновения скачков уплотнения  $s_9$ . В дальнейшем, при  $t_4 = 3,2$  течение

газа сопровождается многократными взаимодействиями ударных волн со стенками, между собой и контактной границей и развивается турбулентность.

Для пояснения физического механизма развития неустойчивости и образования вихрей на контактной границе рассмотрим транспортное уравнение для завихренности  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} - \omega (\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

где  $d/dt$  – производная вдоль траектории завихренности.

В начальный момент времени  $\omega = 0$ . Из приведенного уравнения следует, что причиной генерации вихрей является несовпадение градиентов давления и плотности

$$(\nabla \rho \times \nabla p) / \rho^2 \neq 0$$

(бароклиный эффект).

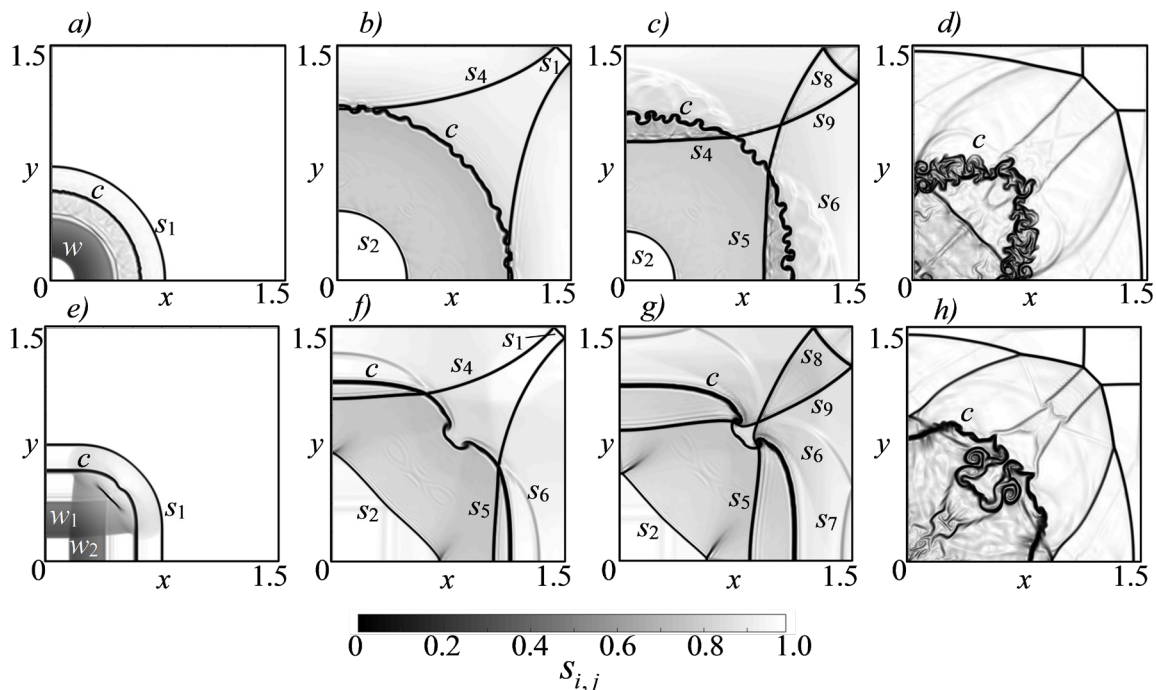


Рис. 3. Численные шlieren-изображения функции градиента плотности в последовательные моменты времени: 0,2 (*a, e*), 1,1 (*b, f*), 1,3 (*c, g*) и 3,2 (*d, h*).

Использованы тесты *C* (*a – d*) и *D* (*e – h*).

Размер сетки –  $400 \times 400$ ; *c* – контактная граница;  $s_1 – s_9$  – ударные волны;  $w, w_1, w_2$  – волны разрежения

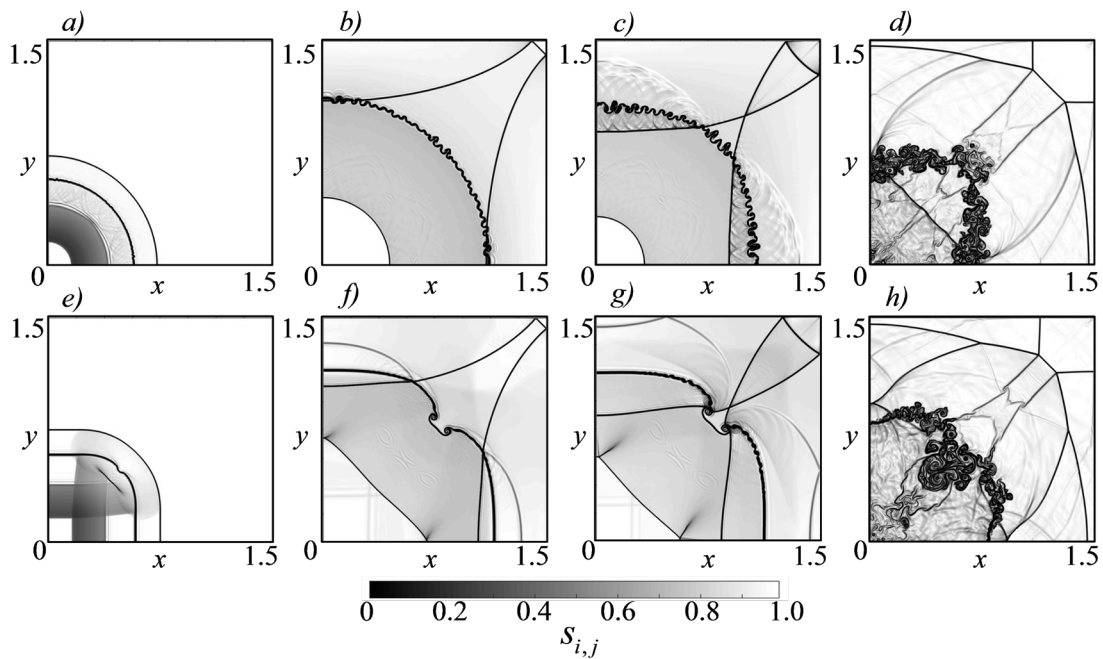


Рис. 4. Численные шпирен-изображения функции градиента плотности в последовательные моменты времени, аналогичные представленным на рис. 3, но полученные при размере сетки  $800 \times 800$

Этот эффект ярко выражен при многократном взаимодействии отраженных от стенок ударных волн с контактной границей, с формированием вторичных вихрей и развитием турбулентности (см. рис. 3, 4, *d* и *h*).

Для проверки сходимости, а также влияния разрешения сетки на формирование вихревых структур выполнен расчет с уменьшением вдвое размеров ячейки. Результаты для случаев *C* и *D* представлены на рис. 4. Наложение численных полей течений (рисунки не приведены), полученных на разных сетках, подтверждает практическое совпадение линий ударных волн и их сопряжения в тройных точках. Вихревые элементы имеют большую детализацию на подробной сетке, а расчеты согласуются между собой вследствие стохастической природы в осредненном смысле.

### Заключение

Рассмотрен класс разностных схем с настраиваемыми диссипативными свойствами, с расщеплением по физическим процессам – гибридный метод крупных частиц второ-

го порядка аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Метод верифицирован на известных задачах Римана в двумерных областях, имеющих надежные численные решения.

Показано значительное улучшение точности воспроизведения структур течения, по сравнению с базовым методом крупных частиц. Продемонстрирована высокая конкурентоспособность предложенного алгоритма при сопоставлении с современными схемами повышенного порядка аппроксимации.

Проведено детальное исследование работоспособности метода на новых тестовых задачах с многократными взаимодействиями ударных волн с контактной границей, стенками канала и развитием неустойчивости.

Гибридный метод крупных частиц подтвердил высокую разрешающую способность как в областях ударно-волновых конфигураций, так и в зонах вихревых структур.

Предложенные тестовые задачи могут быть востребованы для проверки других разностных схем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // Математический сборник. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
2. **Колган В.П.** Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
3. **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 724 p.
4. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Vol. 49. No. 3. Pp. 357–393.
5. **Sweby P.K.** High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1984. Vol. 21. No. 5. Pp. 995–1011.
6. **Hirsch C.** Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2. Computational methods for inviscid and viscous flows. New York: John Wiley & Sons, 1990. 691 p.
7. **Jiang G.-S., Shu C.-W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of Computational Physics. 1996. Vol. 126. No. 1. Pp. 202–228.
8. **Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.** Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 186. No. 2. Pp. 690–696.
9. **Евстигнеев Н.М.** О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 2. Численные примеры // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 6. 885–910.
10. **Федоренко Р.П.** Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 6. С. 1122–1128.
11. **Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.** A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 284. 1 March. Pp. 133–154.
12. **Лобанов А.И., Мирон Ф.Х.** Гибридная разностная схема с обобщенным условием аппроксимации. Анализ в пространстве неопределенных коэффициентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 8. С. 73–82.
13. **Толстых А.И.** О семействах компактных аппроксимаций 4-го и 5-го порядков с обращением двухточечных операторов для уравнений с конвективными членами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 5. С. 894–907.
14. **Shen Y.-Q., Zha G.-C.** Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flow field interaction // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230. No. 12. Pp. 4419–4436.
15. **Bragin M.D., Rogov B.V.** Conservative limiting method for high-order bcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 151. May. Pp. 229–245.
16. **Попов И.В., Фрязинов И.В.** Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 5. С. 57–66.
17. **Карабасов С.А.** О возможностях методов второго порядка аппроксимации на примере модельных задач газо- и гидродинамики // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 93–120.
18. **Булат П.В., Волков К.Н.** Решение двумерных задач Римана при помощи метода кусочно-параболической реконструкции // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 3. С. 558–568.
19. **Колесник Е.В., Смирнов Е.М.** Тестирование различных схем с квазиодномерной реконструкцией газодинамических переменных при расчетах на неструктурированных сетках // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 3. С. 123–139.
20. **Чижонков Е.В.** О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычислительные методы и про-



граммирование. 2020. Т. 21. № 1. С. 115–128.

21. **Садин Д.В.** TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109.

22. **Садин Д.В.** Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 12. С. 89–104.

23. **Садин Д.В., Давидчук В.А.** Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Одномерные тесты // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. № 2. С. 138–146.

24. **Садин Д.В., Беляев Б.В., Давидчук В.А.** Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Двумерные тесты // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. № 3. С. 337–345.

25. **Садин Д.В.** Анализ диссипативных свойств гибридного метода крупных частиц для структурно сложных течений газа // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 4. С. 757–772.

26. **Тагирова И.Ю., Родионов А.В.** Применение искусственной вязкости для борьбы с карбункул-неустойчивостью в схемах типа

Годунова // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 10. С. 47–64.

27. **Balsara D.S.** A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231. No. 22. Pp. 7476–7503.

28. **Садин Д.В.** Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газовзвесей // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 112–122.

29. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11. № 1. С. 182–207.

30. **Liska R., Wendroff B.** Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. Vol. 25. No. 3. Pp. 995–1017.

31. **Woodward P., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 54. No. 1. Pp. 115–173.

32. **Brio M., Zakharian A.R., Webb G.M.** Two-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics // Journal of Computational Physics. 2001. Vol. 167. No. 1. Pp. 177–195.

*Статья поступила в редакцию 28.10.2020, принята к публикации 26.11.2020.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**САДИН Дмитрий Викторович** — доктор технических наук, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13  
sadin@yandex.ru

**ГОЛИКОВ Игорь Олегович** — кандидат технических наук, доцент Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13  
igira55@yandex.ru



**ШИРОКОВА Елена Николаевна** – кандидат химических наук, преподаватель Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13  
shirokelen-78@mail.ru

## REFERENCES

1. **Godunov S.K.**, A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, *Matematicheskii Sbornik*. 47 (89) (3) (1959) 271–306 (in Russian).
2. **Kolgan V.P.**, *Primeneniye printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnykh k postroyeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki* [An application of the minimal derivative values concept to construction of the finite-difference schemes for calculating the discontinuous solutions of gas dynamics], *Uchenyye Zapiski TsAGI*. 3 (6) (1972) 68–77 (in Russian).
3. **Toro E.F.**, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
4. **Harten A.**, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49 (3) (1983) 357–393.
5. **Sweby P.K.**, High-resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (5) (1984) 995–1011.
6. **Hirsch C.**, *Numerical computation of internal and external flows*, Vol. 2, *Computational methods for inviscid and viscous flows*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
7. **Jiang G.-S., Shu C.-W.**, Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comp. Phys.* 126 (1) (1996) 202–228.
8. **Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.**, Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures, *J. Comp. Phys.* 186 (2) (2003) 690–696.
9. **Evstigneev N.M.**, On the construction and properties of WENO schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen. Part 2. Numerical examples, *Computer Research and Modeling*. 8 (6) (2016) 885–910 (in Russian).
10. **Fedorenko R.P.**, The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* 2 (6) (1963) 1355–1365.
11. **Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.**, A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes, *J. Comp. Phys.* 284 (1 March) 133–154.
12. **Lobanov A.I., Mirov F.Kh.**, Hybrid difference scheme under generalized approximation condition in the space of undetermined coefficients, *Comput. Math. and Math. Phys.* 58 (8) (2018) 1270–1279.
13. **Tolstykh A.I.**, On families of compact fourth- and fifth-order approximations involving the inversion of two-point operators for equations with convective terms, *Comput. Math. and Math. Phys.* 50 (5) (2010) 848–861.
14. **Shen Y.-Q., Zha G.-C.**, Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flow field interaction, *J. Comp. Phys.* 230 (12) (2011) 4419–4436.
15. **Bragin M.D., Rogov B.V.**, Conservative limiting method for high-order bcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations, *Appl. Num. Math.* 151 (May) (2020) 229–245.
16. **Popov I.V., Fryazinov I.V.**, Calculations of two-dimensional test problems by the method of adaptive viscosity, *Math. Models Comput. Simul.* 2 (6) (2010) 724–732.
17. **Karabasov S.A.**, On the power of second-order accurate numerical methods for model problems of gas- and hydrodynamics, *Math. Models Comput. Simul.* 3 (1) (2011) 92–112.
18. **Bulat P.V., Volkov K.N.**, Solution of two-dimensional Riemann problems using the method of piecewise parabolic reconstruction, *J. Eng. Phys. Thermophys.* 90 (3) (2017) 525–534.
19. **Kolesnik E.V., Smirnov E.M.**, Testing of various schemes with quasi-one-dimensional reconstruction of gasdynamic variables in the case of unstructured-grid calculations, *St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 10 (3) (2017) 123–139.
20. **Chizhonkov E.V.**, On second-order accu-





- racy schemes for modeling of plasma oscillations, *Numerical Methods and Programming*. 21 (1) (2020) 115–128 (in Russian).
21. **Sadin D.V.**, TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of non-hyperbolic nonconservative type, *Comput. Math. and Math. Phys.* 56 (12) (2016) 2068–2078.
22. **Sadin D.V.**, Schemes with customizable dissipative properties as applied to gas-suspensions flow simulation, *Matem. Mod.* 29 (12) (2017) 89–104 (in Russian).
23. **Sadin D.V., Davidchuk V.A.**, Comparison of a modified large-particle method with some high resolution schemes. One-dimensional test problems, *Numerical Methods and Programming*. 20 (2) (2019) 138–146 (in Russian).
24. **Sadin D.V., Belyayev B.V., Davidchuk V.A.**, Comparison of a modified large-particle method with some high resolution schemes. Two-dimensional test problems, *Numerical Methods and Programming*. 20 (3) (2019) 337–345 (in Russian).
25. **Sadin D.V.**, Analysis of dissipative properties of a hybrid large-particle method for structurally complicated gas flows, *Computer Research and Modeling*. 12 (4) (2020) 757–772 (in Russian).
26. **Tagirova I.Yu., Rodionov A.V.**, Application of the artificial viscosity for suppressing the carbuncle phenomenon in Godunov-type schemes, *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8 (3) (2016) 249–262.
27. **Balsara D.S.**, A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws: Application to Euler and magneto hydrodynamic flows, *J. Comput. Phys.* 231 (22) (2012) 7476–7503.
28. **Sadin D.V.**, A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*. 12 (2) (2019) 112–122 (in Russian).
29. **Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M.**, A non-stationary “Coarse particle” method for gas-dynamical computations, *URSS Comp. Math. and Math. Phys.* 11 (1) (1971) 241–271.
30. **Liska R., Wendroff B.**, Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations, *SIAM J. Sci. Comp.* 25 (3) (2003) 995–1017.
31. **Woodward P., Colella P.**, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comp. Phys.* 54 (1) (1984) 115–173.
32. **Brio M., Zakharian A.R., Webb G.M.**, Two-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics, *J. Comp. Phys.* 167 (1) (2001) 177–195.

*Received 28.10.2020, accepted 26.11.2020.*

## THE AUTHORS

### **SADIN Dmitriy V.**

*Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky*

13, Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation  
sadin@yandex.ru

### **GOLIKOV Igor O.**

*Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky*

13, Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation  
igira55@yandex.ru

### **SHIROKOVA Elena N.**

*Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky*

13, Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation  
shirokelen-78@mail.ru