DOI: 10.18721/JPM.14107
УДК 517.946

ИНТЕГРАЛ ТИПА ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

В работе рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения для случая трех пространственных переменных. Вводится определение обобщенного решения и доказывается теорема существования и единственности. Предложена новая формула, являющаяся аналогом известного интеграла Дюамеля. Большая часть статьи посвящена анализу дифференциальных свойств решения. В частности, указано на возможность разрыва второй частной производной по времени на некоторой гиперплоскости и приведена величина ее разрыва. Это свойство позволило поставить обратную задачу об определении коэффициента уравнения и предложить алгоритм ее решения при условии ненулевого внутреннего воздействия на некотором двумерном подмножестве. При этом известными данными считались значения положения фиксированной колеблющейся точки в каждый момент времени.

Ключевые слова: волновое уравнение, интеграл Дюамеля, обратная задача, метод спуска, задача Коши

Ссылка при цитировании: Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Интеграл типа Дюамеля для начально-краевой задачи // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 1. С. 100–110. DOI: 10.18721/JPM.14107

THE DUHAMEL-TYPE INTEGRAL FOR THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM

D.S. Anikonov, D.S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics,
Novosibirsk, Russian Federation

The paper considers the initial boundary value problem for the wave equation for the case of three spatial variables. The definition of a generalized solution has been introduced and the theorem of unique existence has been proved. A new formula was proposed, being an analog of the well-known Duhamel integral. The most part of the paper is devoted to the analysis of differential properties of the solution. In particular, the possibility of breaking the second partial time derivative on a certain hyperplane was indicated, and its break value was given. This property allowed us to set the inverse problem of determining the coefficient of the equation and propose an algorithm for solving it under the condition of non-zero internal action on a 2D subset. In this case, the known data were considered to be the values of a fixed oscillating point's position at every moment of time.

Keywords: wave equation, Duhamel integral, inverse problem, descent method, Cauchy problem

Citation: Anikonov D.S., Konovalova D.S., Duhamel-type integral for the initial boundary value problem, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 100–110. DOI: 10.18721/JPM.14107

Введение

В работе рассматривается гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x u(x,t) = f(x,t),\\ x=(x_1,x_2,x_3),\ x_3>0,\ t>0, \tag{1}$$

вместе с начальными и краевыми данными

$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0,\\ u(x_1,x_2,0,t) = 0. \tag{2}$$

Прямая (начально-краевая) задача состоит в отыскании функции $u(x,t)$ из уравнения (1) и условий (2), при известных $a>0$, $f(x,t)$.

В нашей работе доказывается теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи и предлагается ранее неизвестная формула для ее решения, которую можно рассматривать как обобщение интеграла Дюамеля.

Напомним, что классический интеграл Дюамеля есть решение задачи Коши, когда ограничение на переменную x_3 и, соответственно, краевое условие отсутствуют. Наиболее специфической особенностью нашей формулы является использование под интегралом разрывной функции. Полученная формула также позволяет поставить и решить обратную задачу о нахождении коэффициента уравнения (1).

Кроме того, выводы исследования применяются к частному случаю двух пространственных переменных, когда функции $u(x,t)$, $f(x,t)$ зависят только от переменных (x_2, x_3, t), что может рассматриваться как реализация метода спуска.

Классическая теория смешанных задач изложена, например, в работах [1 – 3] для случая ограниченной области пространственных переменных. В многомерном случае известные нам результаты для неограниченных областей содержатся в монографии [3], где дополнительно предполагается финитность известных данных, что для ограниченного отрезка времени позволяет свести вопрос к уже изученному случаю ограниченной области.

Наши выводы для прямой задачи могут рассматриваться как обобщение классических результатов. В этом направлении имеются многочисленные публикации различных авторов. Не претендуя на сколько-нибудь значительный обзор, укажем только некоторые из них, например, работы [4 – 16]. Что касается обратной задачи в нашей статье, то отметим лишь работы других авторов подобной направленности [17 – 23], наиболее близкие к нашей.

Обозначения, определения и постановка прямой задачи

Введем следующие обозначения:

$$G^+ = \{(x_1,x_2,x_3,t),\ -\infty < x_1, x_2 < \\ < \infty,\ x_3 > 0,\ t > 0\},$$

$$G^- = \{(x_1,x_2,x_3,t),\ -\infty < x_1, x_2 < \\ < \infty,\ x_3 < 0,\ t > 0\},$$

$$G_1^+ = \{(x,t) \in G^+,\ at > x_3\},$$

$$G_2^+ = \{(x,t) \in G^+,\ at < x_3\},$$

$$G_1^- = \{(x,t) \in G^-,\ at > -x_3\},$$

$$G_2^- = \{(x,t) \in G^-,\ at < -x_3\};$$

единичную сферу в трехмерном пространстве обозначим Ω, а ее элементы – $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, которые через сферические углы записываются в виде

$$\omega_1 = \sin\gamma \cos\varphi,$$

$$\omega_2 = \sin\gamma\sin\varphi,\ \omega_3 = \cos\varphi,$$

$$0 \le \gamma \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

Для первых производных по ξ произвольной функции $\psi(\xi_1, \xi_2,..., \xi_n)$, кроме традиционных обозначений, будет использоваться также запись $\partial_i \psi(\xi_1, \xi_2,..., \xi_n)$. Для левой части уравнения (1) будет использоваться обозначение $L_a u$.

Мы будем придерживаться имеющейся традиции, когда $C^p(G)$ означает множество функций, имеющих все частные производные до порядка p включительно, непрерывные в области G, а множество таких функций, имеющих непрерывные продолжения всех производных на границу области, обозначается как $C^p(\overline{G})$. Будем предполагать, что $f(x,t) \in C^2(\overline{G^+})$.

Рассмотрим функцию $F(x,t)$, равную $f(x,t)$ для $x_3 \geq 0$ и $-f(x,t)$ для $x_3 < 0$. Сужение функции $F(x,t)$ на замыкание множества G^+ обозначим через $F^+(x,t)$, а на множество G^- – через $F^-(x,t)$. Отметим, что функция $F(x,t)$ оказывается, вообще говоря, разрывной при $x_3 = 0$.

Будем искать обобщенное решение задачи (1), (2) в следующем классе функций:

$$u(x,t) \in C^1\left(\overline{G^+}\right), u(x,t) \in C^2\left(\overline{G_1^+}\right),$$
$$u(x,t) \in C^2\left(\overline{G_2^+}\right),$$

т. е. функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1) в классическом смысле в областях G_1^+, G_2^+, а на границе между ними оказывается непрерывной вместе со своими первыми производными. Отметим, что непрерывность вторых производных на гиперплоскости $x_3 = at$ не предполагается.

Дифференциальные свойства интеграла типа Дюамеля

Рассмотрим следующий интеграл:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_\Omega F(x + a\tau\omega, t - \tau)\, d\omega d\tau. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция, определенная равенством (3), принадлежит следующим классам:*

$$U(x,t) \in C^1\left(\overline{G^+}\right), U(x,t) \in C^2\left(\overline{G_1^+}\right),$$
$$U(x,t) \in C^2\left(\overline{G_2^+}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x,t) \in G_1^+$. Сначала вычислим производные функции $U(x,t)$ по переменной t. Представим $U(x,t)$ в виде суммы

$$U(x,t) = I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t),$$

$$I_1(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3/a} \tau \int_\Omega F^+(x + a\tau\omega, t - \tau)\, d\omega d\tau, \quad (4)$$

$$I_2(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t} \tau \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha(x_3,\tau)} F^+(x + a\tau\omega(\gamma,\varphi), t - \tau) \sin\varphi\, d\varphi d\gamma d\tau, \quad (5)$$

$$I_3(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t} \tau \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(x_3,\tau)}^{\pi} F^-(x + a\tau\omega(\gamma,\varphi), t - \tau) \sin\varphi\, d\varphi d\gamma d\tau, \quad (6)$$

где $\alpha(x_3,\tau) = \arccos(-x_3 / a\tau)$.

Продифференцируем по t каждое из выражений (4) – (6):

$$\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3/a} \tau \int_\Omega \partial_4 F^+(x + a\tau\omega, t - \tau)\, d\omega d\tau, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 I_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3/a} \tau \int_\Omega \partial_4 \partial_4 F^+(x + a\tau\omega, t - \tau)\, d\omega d\tau, \quad (8)$$

$$\frac{\partial I_2(x,t)}{\partial t}= =\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)} F^+\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma+ \tag{9}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)}\partial_4 F^+\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),\, t-\tau\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 I_2(x,t)}{\partial t^2}= =\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)} F^+\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} F^+\left(x+at\omega\left(\gamma,\alpha\left(x_3,t\right)\right),0\right)\times \times\sin\alpha\left(x_3,t\right)\frac{\partial}{\partial t}\alpha\left(x_3,t\right)d\gamma+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)}\mathrm{grad}_x F^+\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times a\omega(\gamma,\varphi)\sin\varphi d\varphi d\gamma+ \tag{10}$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)}\partial_4 F^+\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,t)}\partial_4\partial_4 F^+\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),t-\tau\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma d\tau,$$

$$\frac{\partial I_3(x,t)}{\partial t}= =\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi} F^-\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi\, d\varphi d\gamma+ \tag{11}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi}\partial_4 F^-\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),t-\tau\right)\times \times\sin\varphi\, d\varphi d\gamma d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 I_3(x,t)}{\partial t^2}= =\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi} F^-\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} F^-\left(x+at\omega\left(\gamma,\alpha\left(x_3,t\right),0\right)\sin\alpha\left(x_3,t\right)\right)\times \times\left(-\frac{\partial}{\partial t}\alpha\left(x_3,t\right)\right)d\gamma+ \tag{12}$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi}\mathrm{grad}_x F^-\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times a\omega(\gamma,\varphi)\sin\varphi d\varphi d\gamma+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi}\partial_4 F^-\left(x+at\omega(\gamma,\varphi),0\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,t)}^{\pi}\partial_4\partial_4 F^-\left(x+a\tau\omega(\gamma,\varphi),t-\tau\right)\times \times\sin\varphi d\varphi d\gamma d\tau.$$

Теперь рассмотрим случай $(x,t)\in G_2^+(x_3>at)$:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}= =\frac{t}{4\pi}\int_\Omega F^+\left(x+at\omega,0\right)d\omega+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_\Omega\partial_4 F^+\left(x+at\omega,\, t-\tau\right)d\omega d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}= =\frac{1}{4\pi}\int_\Omega F^+\left(x+at\omega,0\right)d\omega+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_\Omega\mathrm{grad}_x F^+\left(x+at\omega,0\right)a\omega d\omega+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_\Omega\partial_4 F^+\left(x+at\omega,0\right)d\omega+ \tag{14}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\int_\Omega\partial_4\partial_4 F^+\left(x+at\omega,t-\tau\right)d\omega d\tau.$$

Складывая правые части равенств (7), (9), (11) и устремляя $t \to x_3/a$, убеждаемся, что предельное значение указанной суммы совпадает с предельным значением правой части равенства (13). Тем самым показано, что частная производная $\partial U(x,t)/\partial t$ непрерывна при $at = x_3$.

Более того, используя указанные равенства, нетрудно убедиться в непрерывности $\partial_4 U(x,t)$ для $(x,t) \in \overline{G}^+$.

Для анализа второй частной производной от функции $U(x,t)$ по t используем равенства (8), (10), (12), из которых следует непрерывность $\partial_4\partial_4 U(x,t)$ для $(x,t) \in \overline{G}^+$.

Далее рассмотрим производные от $U(x,t)$ по x_3. Пусть $(x,t) \in G_1^+$. Тогда

$$\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial x_3} = \frac{x_3}{4\pi a^2}\int_\Omega F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3/a}\tau\int_\Omega \partial_3 F^+\left(x + x_3\omega, t-\tau\right)d\omega d\tau, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I_1(x,t)}{\partial x_3^2} = {}& \frac{1}{4\pi a^2}\int_\Omega F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega + \\ &+ \frac{x_3}{4\pi a^2}\int_\Omega \mathrm{grad}F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)\eta d\omega + \\ &+ \frac{x_3}{4\pi a^2}\int_\Omega \partial_3 F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{x_3/a}\tau\int_\Omega \partial_3\partial_3 F^+\left(x + a\tau\omega, t-\tau\right)d\omega d\tau,\end{aligned} \tag{16}$$

где $\eta = (\omega_1, \omega_2, 1 + \omega_3, -1/a)$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_2(x,t)}{\partial x_3} = {}& -\frac{x_3}{4\pi a^2}\int_\Omega F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega + \\ &+ \frac{1}{4\pi a}\int_{x_3/a}^{t}\int_0^{2\pi} F^+\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3,\tau\right)\right), t - \right. \\ &\left. - \tau\right) d\gamma d\tau + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,\tau)} \partial_3 F^+\left(x + a\tau\omega(\gamma,\varphi), t - \right. \\ &\left. - \tau\right) d\varphi d\gamma d\tau,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I_2(x,t)}{\partial x_3^2} = {}& -\frac{1}{4\pi a^2}\int_\Omega F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega - \\ &- \frac{x_3}{4\pi a^2}\int_\Omega \mathrm{grad}F^+\left(x + x_3\omega, t - \right. \\ &\left. - x_3/a\right)\eta d\omega - \frac{1}{4\pi a^2}\times \\ &\times\int_0^{2\pi} F^+\left(x + x_3\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3, x_3/a\right)\right), t - \right. \\ &\left. - x_3/a\right) d\gamma - \frac{1}{4\pi a}\times \\ &\times\int_{x_3/a}^{t}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}F^+\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3,\tau\right)\right), t - \right. \\ &\left. - \tau\right) d\gamma d\tau - \frac{x_3}{4\pi a^2}\times \\ &\times\int_\Omega \partial_3 F^+\left(x + x_3\omega, t - x_3/a\right)d\omega + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\partial_3 F^+\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3,\tau\right)\right), t - \right. \\ &\left. - \tau\right)\frac{\partial\alpha\left(x_3,\tau\right)}{\partial x_3} d\gamma d\tau + \frac{1}{4\pi}\times \\ &\times\int_{x_3/a}^{t}\tau\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha(x_3,\tau)} \partial_3\partial_3 F^+\left(x + a\tau\omega(\gamma,\varphi), t - \right. \\ &\left. - \tau\right) d\varphi d\gamma d\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial I_3(x,t)}{\partial x_3} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi a}\int_{x_3/a}^{t}\int_{0}^{2\pi} F^{-}\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3, \tau\right)\right), t - \right.$$

$$\left. - \tau\right) d\gamma d\tau + \frac{1}{4\pi}\times \tag{19}$$

$$\times \int_{x_3/a}^{t}\int_{0}^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,\tau)}^{\pi} \partial_3 F^{-}\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \varphi\right), t - \right.$$

$$\left. - \tau\right) d\varphi d\gamma d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 I_3\left(x,t\right)}{\partial x_3^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_{0}^{2\pi} F^{-}\left(x + x_3\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3, x_3/a\right)\right), t - \right.$$

$$\left. - \tau\right) d\gamma - \frac{1}{4\pi a}\times \tag{20}$$

$$\times \int_{x_3/a}^{t}\int_{0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_3} F^{-}\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3, \tau\right)\right), t - \right.$$

$$\left. - \tau\right) d\gamma d\tau + \frac{1}{4\pi}\times$$

$$\times \int_{x_3/a}^{t}\int_{0}^{2\pi}\int_{\alpha(x_3,\tau)}^{\pi} \partial_3\partial_3 F^{-}\left(x + a\tau\omega\left(\gamma, \varphi\right), t - \right.$$

$$\left. - \tau\right) d\varphi d\gamma d\tau.$$

При вычислении производных от $U(x,t)$ по x_3 мы неоднократно использовали равенство $\alpha(x_3,\ x_3\ /\ a) = \pi$, что позволило немного упростить полученные выражения.

Для $(x,t) \in G_2^+$ вычисления производных по x_3 выполняются просто:

$$\frac{\partial U\left(x,t\right)}{\partial x_3} = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{t}\tau\int_{\Omega} \partial_3 F^{+}\left(x + a\tau\omega, t - \tau\right) d\omega d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 U\left(x,t\right)}{\partial x_3^2} = \tag{22}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{t}\tau\int_{\Omega} \partial_3\partial_3 F^{+}\left(x + a\tau\omega, t - \tau\right) d\omega d\tau.$$

Сложим правые части равенств (15), (17), (19) и найдем предел указанной суммы при $t \to x_3/a$. Несмотря на громоздкие выражения, искомый предел оказывается равным правой части равенства (21), что доказывает непрерывность первой производной $U(x,t)$ по x_3 на множестве G^+. Это свойство, в сочетании с ранее доказанной непрерывностью производной $U(x,t)$ по t, позволяет сделать вывод: $U(x,t) \in C^1(G^+)$.

Формулы для других производных, содержащих дифференцирование по x_1, x_2, получаются аналогично, но имеют более простой вид. Из этих формул, а также из несложного анализа правых частей равенств (18), (20), (22) следует утверждение о принадлежности $U(x,t)$ классам $C^2(G_1^+)$, $C^2(G_2^+)$.

Тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Вторая частная производная функции $U(x,t)$ по t может иметь разрыв первого рода при $x_3 = at$. При этом ее скачок дается формулой*

$$\lim_{t\to x_3/a+0}\partial_4\partial_4 U\left(x,t\right) - \lim_{t\to x_3/a-0}\partial_4\partial_4 U\left(x,t\right) = \\ = -f\left(x_1, x_2, 0, 0\right). \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сумму правых частей формул (8), (10) и (12). Предел полученного выражения существенно сокращается благодаря равенствам

$$t = x_3/a,\ \alpha\left(x_3, x_3/a\right) = \pi,$$

$$\omega\left(\gamma, \alpha\left(x_3, x_3/a\right)\right) = \left(0, 0, -1\right).$$

При этом часть интегралов обращаются в нуль, а другие упрощаются. Вычитая из полученной таким образом суммы правую часть равенства (14) при $t = x_3/a$, приходим к формуле (23).

Лемма 2 доказана.

Основные результаты

Теорема. *Существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим функцию $F(x,t)$ нулем для $t < 0$. Тогда интеграл в правой части равенства (3), рассматриваемый для всех $x \in R^3$, является сверткой функции $F(x,t)$ с фундаментальным решением волнового уравнения (1). Поэтому он является решением этого уравнения в классе обобщенных функций (распределений по Шварцу) (см. работу [1, С. 224]). Также отметим, что этот интеграл является регулярной обобщенной функцией и, благодаря доказанным свойствам функции $U(x,t)$ (лемма 1), имеет классические непрерывные производные до второго порядка в областях G_1^+, G_2^+. Отсюда следует выполнение равенства

$$L_a\left(U\left(x,t\right)\right) = f\left(x,t\right)$$

при $(x,t) \in G_1^+, (x,t) \in G_2^+$.

Теперь обратимся к равенствам (2). Краевое условие $U(x_1,x_2,0,t)$ следует из нечетности функции $F(x,t)$ по x_3 и симметрии области интегрирования при $x_3 = 0$. Поскольку функция $U(x,t)$ в области G_2^+ совпадает с классическим интегралом Дюамеля, то и начальные условия в равенствах (2) выполняются. Эти выводы, в совокупности со свойствами, указанными в лемме 1, позволяют считать функцию $U(x,t)$ искомым решением задачи. Для согласования обозначений остается положить $U(x,t) = u(x,t)$.

Единственность решения следует из единственности решения задачи Коши для уравнения (1) в классе обобщенных функций.

Теорема доказана.

Далее продемонстрируем метод спуска, традиционно используемый в задаче Коши. Пусть теперь правая часть уравнения (1) не зависит, например, от переменной x_1. Тогда формула (3) приобретает вид

$$u\left(x_2,x_3,t\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau \int_\Omega F\left(x_2 + a\tau\omega_2, x_3 + a\tau\omega_3, t - \tau\right) d\omega d\tau. \qquad (24)$$

Поскольку равенство (24) является частным случаем формулы (3), то все выводы для задачи (1), (2) верны и в этом случае, детали которого нетрудно вывести из приведенного исследования. Этот метод спуска можно бы продолжить и далее и при этом получить уже известную формулу для полуограниченной струны.

Формула (23) позволяет поставить обратную задачу и предложить алгоритм ее решения. Пусть для некоторого фиксированного вектора

$$\left(x_1,x_2,x_3\right), x_3 > 0$$

задана функция

$$u\left(x_1,x_2,x_3,t\right) = h\left(t\right).$$

Требуется найти коэффициент a. Предполагая условие

$$f\left(x_1,x_2,0,0\right) \neq 0$$

выполненным, рассмотрим значение второй производной $h''\left(t\right)$.

Из леммы 2 следует, что $h''\left(t\right)$ имеет единственный разрыв в некоторой точке $t_0 = ax_3$, откуда получается значение искомой величины $a = t_0 / x_3$.

Заключение

Как уже было отмечено, настоящая работа направлена на обобщение классических результатов, которые, в силу ряда ограничений, не всегда адекватны прикладным задачам. Соответственно, основной целью наших исследований является расширение возможности практического внедрения теоретических выводов.

В статье рассмотрен случай трех пространственных переменных. Однако благодаря методу спуска, достигнутые результаты оказываются применимыми для описания процесса колебаний не только трехмерных объемов, но и двумерных областей типа мембраны.

Полученная нами формула — это новый результат, так как классический интеграл Дюамеля для классического решения волнового уравнения использовался ранее только для задачи Коши и применялся только для гладких функций класса C^2.

Кроме этого, наличие явной формулы позволило поставить и решить обратную задачу определения коэффициента волнового уравнения, характеризующего колеблющуюся среду.

Проведенное исследование также преследовало цель возможного применения достигнутых результатов для других обобщений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

2. **Ильин В.А.** О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук. 1960. Т. 15. № 2 (92). С. 97—154.

3. **Ладыженская О.А.** Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 279 с.

4. **Кириченко С.В., Пулькина Л.С.** Задача с нелокальными начальными данными для одномерного гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2014. № 9. С. 17—26.

5. **Моисеев Е.И., Холомеева А.А., Фролов А.А.** Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Материалы международной конференции “International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences “ICMMAS-17”. Санкт-Петербургский политехнический университет, 24—28 июля 2017 г. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 160. С. 74—84.

6. **Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П.** Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений // Лекционные курсы НОЦ. Вып. 16. М.: Изд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. 122 с.

7. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. 255 с.

8. **Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В.** Использование уравнения переноса в томографии. М.: «Логос», 2000. 223 с.

9. **Petrova G., Popov B.** Linear transport equations with μ-monotone coefficients // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 260. No. 2. Pp. 307—324.

10. **Bouchut F., Jame F.** One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 32. No. 7. Pp. 891—933.

11. **Driscoll T.A., Fornberg B.** Block pseudospectral methods for Maxwell’s equations. II: Two-dimensional, discontinuous-coefficient case // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21. No. 3. Pp. 1146—1167.

12. **Дурдиев Д.К.** Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 3 (39). С. 28—40.

13. **Tadmor E.** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1991. Vol. 28. No. 4. Pp. 891—906.

14. **Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E.** Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2015. Vol. 3. No. 4. Pp. 4—44.

15. **Коновалова Д.С.** Локализация линии разрывов правой части дифференциального уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19. № 1 (65). С. 62—72.

16. **Kazantsev S.G.** Singular value decomposition for the cone-beam transform in the ball // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. Vol. 23. No. 2. Pp. 173—185.

17. **Валитов И.Р., Кожанов А.И.** Обратные

задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6. № 1. С. 3–18.

18. **Сафиуллова Р.Р.** Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6. № 4. С. 73–86.

19. **Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.** Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–71.

20. **Воронин А.Ф.** Обратная и прямая задачи для уравнения первого рода в свертках на полупрямой // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 1456–1462.

21. **Деревцов Е.Ю.** Об одном обобщении экспоненциального лучевого преобразования в томографии // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18. № 4. С. 29–41.

22. **Деревцов Е.Ю., Мальцева С.В., Светов И.Е.** Определение разрывов функции, заданной в области с рефракцией, по ее экспоненциальному лучевому преобразованию // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21. № 4 (76). С. 51–74.

23. **Светов И.Е., Полякова А.П., Мальцева С.В.** Метод приближенного обращения для операторов лучевых преобразований, действующих на двумерные симметричные m-тензорные поля // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 1. С. 104–115.

Статья поступила в редакцию 21.08.2020, принята к публикации 27.10.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич – *доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.*

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4

anik@math.nsc.ru

КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.*

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4

dsk@math.nsc.ru

REFERENCES

1. **Vladimirov V.S.,** Equations of mathematical physics, Mir Publishing, Moscow, 1984.

2. **Il'in V.A.,** The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, Russian Mathematical Surveys. 15 (2) (1960) 85–142.

3. **Ladyzhenskaya O.A.,** Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya [The mixed problem for hyperbolic equation], Gostekhizdat, Moscow, 1953.

4. **Kirichenko S.V., Pul'kina L.S.,** A problem with nonlocal initial data for one-dimensional hyperbolic equation, Russian Mathematics. 58 (9) (2014) 13–21.

5. **Moiseev E.I., Kholomeyeva A.A., Frolov A.A.,** Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical, Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. Mat. Pril., Temat. Obz. 160 (2019) 74 – 84 (in Russian).

6. **Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I., Chu-**

gainova A.P., Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations, Lektsionnyye Kursy NOC, Vol. 16, Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, 2010 (in Russian).

7. **Filippov A.F.,** Differential equations with discontinuous right hand sides, Control systems, Edited by Arscott F.M., Springer Nature, Switzerland AG. (1988).

8. **Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V.,** Transport equation and tomography, VSP (Inverse and Ill-Posed Problems Series), Utrecht, Boston, Kölu, Tokyo, 2002.

9. **Petrova G., Popov B.,** Linear transport equations with μ-monotone coefficients, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. 260 (2) (2001) 307–324.

10. **Bouchut F., Jame F.,** One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 32 (7) (1998) 891–933.

11. **Driscoll T.A., Fornberg B.,** Block pseudospectral methods for Maxwell's equations. II: Two-dimensional, discontinuous-coefficient case, SIAM Journal on Scientific Computing. 21 (3) (1999) 1146–1167.

12. **Durdiev D.K.,** Obratnaya zadacha opredeleniya dvukh koeffitsientov v odnom integrodifferetsial'nom volnovom uravneniy [An inverse problem for determining two coefficients in the one integro-differential wave equation], Siberian Journal of Industrial Mathematics. 12 (3) (2009) 28–40 (in Russian).

13. **Tadmor E.,** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations, SIAM Journal on Numerical Analysis. 28 (4) (1991) 891–906.

14. **Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E.,** Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 3 (4) (2015) 4–44.

15. **Konovalova D.S.,** Localization of the discontinuity line of the right-hand side of a differential equation, Journal of Applied and Industrial Mathematics. 10 (1) (2016) 97–105.

16. **Kazantsev S.G.,** Singular value decomposition for the cone-beam transform in the ball, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 23 (2) (2015) 173–185.

17. **Valitov I.R., Kozhanov A.I.,** Obratnyye zadachi dlya giperbolicheskikh uravneniy: sluchay neizvestnykh koeffitsiyentov, zavisyashchikh ot vremeni [Inverse problems for hyperbolic equations: the case of unknown time coefficients], Bulletin of the Novosibirsk State University, Series "Mathematics, Mechanics, Computer Science". 6 (1) (2006) 3–18.

18. **Safiullova R.R.,** Inverse problem for the second order hyperbolic equation with unknown time dependent coefficient, Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modeling, Programming & Computer Software". 6 (4) (2013) 73–86 (in Russian).

19. **Anikonov D.S., Konovalova D.S.,** Direct and inverse problems for a wave equation with discontinuous coefficients, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (2) (2018) 61–71.

20. **Voronin A.F.,** Inverse and direct problems for the first-kind equation in convolutions on a semidirect, Siberian Electronic Mathematical Reports. 14 (2017) 1456–1462 (in Russian).

21. **Derevtsov E.Y.,** Ob odnom obobshchenii eksponentsialnogo luchevogo preobrazovaniya v tomografii [On a generalization of exponential ray transformation in tomography], Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics. 18 (4) (2018) 29–41 (in Russian).

22. **Derevtsov E.Y., Maltseva S.V., Svetov I.E.,** Determination of discontinuities of a function in a domain with refraction from its attenuated ray transform, Journal of Applied and Industrial Mathematics. 12 (4) (2018) 619–641.

23. **Svetov I.E., Polyakova A.P., Maltseva S.V.,** The method of approximate inverse for ray transform operators on two-dimensional symmetric *m*-tensor fields, Journal of Applied and Industrial Mathematics. 13 (1) (2019) 157–167.

Received 21.08.2020, accepted 27.10.2020.

THE AUTHORS

ANIKONOV Dmitry S.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
anik@math.nsc.ru

KONOVALOVA Dina S.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
dsk@math.nsc.ru