

DOI: 10.18721/JPM.14113  
УДК 517.938:070

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

**С.В. Тимофеев, А.В. Баенхаева**

Байкальский государственный университет,  
г. Иркутск, Российская Федерация

В статье излагается продолжение исследований построенной ранее базовой математической модели распространения в обществе новой информации. Данная модель представляет собой автономную систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью в правых частях. В пространстве параметров системы выделены две важные области, представляющие интерес для приложений. В определенном смысле в этих областях реализуются два диаметрально противоположных и принципиально разных сценария распространения новой информации в обществе. С помощью качественных методов теории дифференциальных уравнений в каждом случае изучены глобальные свойства фазового портрета построенной динамической системы. Даны содержательная и графическая интерпретации полученных результатов.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, стационарное решение системы, инвариантное множество, асимптотическая устойчивость

**Ссылка при цитировании:** Тимофеев С.В., Баенхаева А.В. Математическое моделирование информационного противоборства // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 1. С. 164–176. DOI: 10.18721/JPM.14113

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## MATHEMATICAL MODELING OF INFORMATION CONFRONTATION

**S.V. Timofeev, A.V. Baenkhayeva**

Baikal State University,  
Irkutsk, Russian Federation

The article continues our studies in the previously constructed mathematical model of dissemination of new information in the society. The model is a system of four ordinary differential equations with quadratic nonlinearity in the right parts. Two fundamental domains have been taken in the parameter space of the model and they may be of interest in application. In some sense, these domains provide two diametrically opposite and essentially different scenarios of new information dissemination. In every case, the global properties of the phase pattern of the constructed dynamic system were investigated using qualitative methods of the theory of differential equations. Both conceptual and geometric interpretations of the obtained results were given.

**Keywords:** differential equation, stationary solution of system, invariant set, asymptotic stability

**Citation:** Timofeev S.V., Baenkhayeva A.V., Mathematical modeling of information confrontation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 164–176. DOI: 10.18721/JPM.14113

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

В работе [1] была представлена построенная нами математическая модель распространения новой информации в обществе:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \beta N - \gamma AN, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha AN - \mu(C - C_*), \\ \frac{dA}{dt} &= \rho C - \eta \gamma AN - \lambda A, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma N - \omega i. \end{aligned} \quad (1)$$

При моделировании мы исходили из гипотезы, что ключевыми факторами продвижения информационных потоков выступают следующие величины, зависящие от времени  $t$ :

$N(t)$  (от *англ.* News) – количественная характеристика новостной информации, соответствующая продвижению новых взглядов в информационном пространстве;

$C(t)$  (от *англ.* Sensorship) – число органов цензуры с определенной ресурсной базой, целью которых является сохранение ранее принятых концепций;

$A(t)$  (от *англ.* Alternative view) – количественная характеристика информационного потока (возможно, генерируемая по инициативе органов цензуры), противопоставленная распространению новой концепции в информационном пространстве;

$i(t)$  (от *англ.* index) – показатель доли населения, лояльно относящейся к новым идеям, появляющимся в СМИ на момент времени;

$$i = 1 - \frac{I^*}{I},$$

где  $I, \%$ , соответствует полному приятию в обществе устоявшихся положений до начала наблюдений;  $I^*, \%$ , – соответствующая характеристика приятия устоявшихся положений при распространении в СМИ новых взглядов.

Параметры  $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$  соответственно показывают мощность распространения новой информации через СМИ и вероятностную характеристику нейтрализации эффекта от полученных сообщений через изложение противоположной точки зрения. В свою очередь, коэффициент  $\alpha \geq 0$  отражает интенсивность реакции на силу противоборства противоположных точек зрения, параметр  $\mu > 0$ , обратно пропорциональный времени работы дополнительно образованных органов (будем предполагать, что в обществе всегда есть специальный ресурс в количестве  $C_*$  для защиты прежней концепции).

Средняя скорость появления новостей из одного органа информации  $C$  будет характеризовать параметр  $\rho \geq 0$ , а  $\eta \geq 0$  – количество информации  $A$ , направленное на нейтрализацию влияния сообщений  $N$ . Коэффициент  $\lambda > 0$  обратно пропорционален времени забывания информации  $A$ .

Параметры  $\sigma > 0, \omega \geq 0$  характеризуют соответственно темп приятия новой идеи и возврат в силу инерции мышления к прежней концепции.

Безусловно, предложенная математическая модель не учитывает всех тонкостей и деталей при описании процесса распространения новой информации в обществе посредством СМИ. Однако этот обобщенный вид модели позволяет связать в систему основные факторы, выделенные для этого действия, и помогает глубже понять процесс информационного противоборства.

Ранее, с помощью методов, изложенных в работах [2 – 5], было показано, что система (1) обладает характеристиками, позволяющими исследовать глобальные свойства ее решений: единственности, непрерывной зависимости решений от параметров, неограниченной их продолжимости. Также для этой системы доказана инвариантность множества

$$R_+^4 = \{(N, C, A, i) \in R^4 : N \geq 0, C \geq 0, A \geq 0, i \geq 0\}.$$

При этом были найдены два стационарных решения, имеющие достаточно четкую интерпретацию [1]:

$$X_{1st} = (N_{1st}, C_{1st}, A_{1st}, i_{1st}) = (0, C_*, \rho C_*/\lambda, 0),$$

$$X_{2st} = (N_{2st}, C_{2st}, A_{2st}, i_{2st}),$$

где

$$N_{2st} = \frac{\mu(\lambda\beta - \gamma\rho C_*)}{\beta(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)},$$

$$C_{2st} = \frac{\alpha\lambda\beta - \eta\mu\gamma^2 C_*}{\gamma(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)},$$

$$A_{2st} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$i_{2st} = \frac{\sigma\mu(\lambda\beta - \gamma\rho C_*)}{\omega\beta(\alpha\rho - \mu\eta\gamma)}.$$

В пространстве параметров системы были выделены две области, в которых  $X_{ist} \in R_+^4$ ,  $i = 1, 2$ , но при этом обладающие существенно разными свойствами:

$$\Omega_1 : \begin{cases} \gamma\rho C_* > \lambda\beta \\ \mu\eta\gamma > \alpha\rho \end{cases}, \quad \Omega_2 : \begin{cases} \gamma\rho C_* < \lambda\beta \\ \mu\eta\gamma < \alpha\rho \end{cases}.$$

Путем использования качественных методов исследования дифференциальных уравнений, были изучены глобальные свойства фазового портрета построенной динамической системы. Это позволило выделить несколько возможных сценариев распространения новой информации в обществе.

В данной работе исследуются свойства решений системы (1) в областях параметров

$$\Lambda_1 : \begin{cases} \gamma\rho C_* < \lambda\beta \\ \mu\eta\gamma > \alpha\rho \end{cases},$$

$$\Lambda_2 : \begin{cases} \gamma\rho C_* > \lambda\beta \\ \mu\eta\gamma < \alpha\rho \end{cases},$$

которые представляют отдельный интерес для приложений.

В этих областях на множестве  $R_+^4$  содержится только одно стационарное решение:

$$X_{1st} = (N_{1st}, C_{1st}, A_{1st}, i_{1st}) = (0, C_*, \rho C_*/\lambda, 0).$$

Перед исследованием следует сделать замечание. Поскольку в системе (1) переменная  $i(t)$  содержится только в последнем уравнении, дальнейшее исследование можно проводить для системы меньшей размерности, которую целесообразно представить в более удобном для изучения виде:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \alpha AN - \mu(C - C_*), \\ \frac{dA}{dt} &= \rho C - (\lambda + \eta\gamma N)A, \\ \frac{dN}{dt} &= (\beta - \gamma A)N. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученные результаты затем можно легко распространить на переменную  $i(t)$ .

Легко показать, что множество

$$R_+^3 = \{(C, A, N) \in R^3 : C \geq 0, A \geq 0, N \geq 0\}$$

для данной системы инвариантно и содержит один стационар

$$X_{st} = (C_{st}, A_{st}, N_{st}) = (C_*, \rho C_*/\lambda, 0).$$

Отметим, что в  $\Lambda_1$  этот стационар является неустойчивым, а в  $\Lambda_2$  – устойчивым.

Содержательный смысл стационара  $X_{st}$  сформулирован в работе [1] как преобладающая в обществе система взглядов, для поддержки которой административный ресурс в количестве  $C_*$  задействует в СМИ достаточное (с точки зрения этого ресурса) количество информации  $\rho C_*/\lambda$ .

Ввиду автономности системы (2), начальные условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} C(0) &= C_0 \geq 0, \\ A(0) &= A_0 \geq 0, N(0) = N_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**Анализ модели (2), (3)  
в области параметров  $\Lambda_1$**

Лучше понять поведение решений трехмерной системы (2), (3) в области  $\Lambda_1$  поможет редуцированная двумерная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \rho C - (\lambda + \eta\gamma N) A, \\ \frac{dN}{dt} &= (\beta - \gamma A) N, \end{aligned} \quad (4)$$

полученная из системы (2) при  $\alpha = 0$  и  $C(t) = C_*$  при  $t \geq 0$ .

Необходимо пояснить, что система (4) описывает ситуацию, при которой органы информационной защиты, в силу различных причин, не реагируют на «вброс» в средства массовой информации сообщений, идущих вразрез с принятыми в обществе взглядами.

Система (4) в области параметров  $\Lambda_1$  имеет в инвариантном множестве

$$R_+^2 = \{(A, N) \in R^2 : A \geq 0, N \geq 0\}$$

только одно стационарное решение:

$$X_{st} = (A_{st}, N_{st}) = (\rho C_*/\lambda, 0),$$

которое является седлом.

Известные приемы качественного анализа двумерных систем дифференциальных уравнений [6] позволяют построить фазовый портрет и изучить поведение траекторий системы (4) (рис. 1). Как видно из рисунка, все траектории системы (4) с начальными условиями

$$A(0) = A_0 \geq 0, N(0) = N_0 > 0$$

при  $t \rightarrow +\infty$  имеют одинаковое поведение:

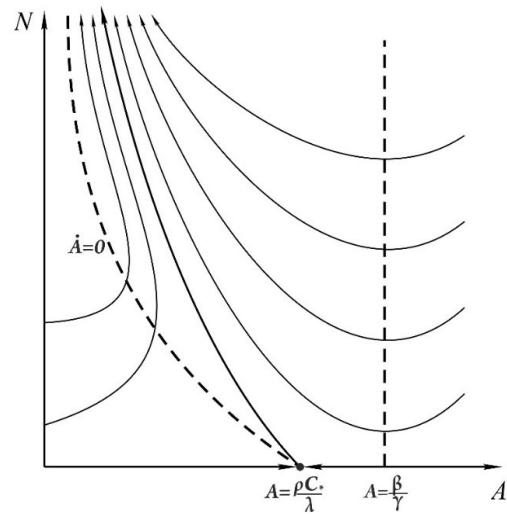


Рис. 1. Фазовый портрет системы (4) на множестве  $R_+^2$

$$A(t) \rightarrow 0, N(t) \rightarrow +\infty.$$

Покажем, что в  $R_+^3$  система (2), (3) имеет качественно сходный фазовый портрет.

Пусть

$$R^+ = \{(C, A, N) \in R_+^3 : N > 0\},$$

$$\partial R^+ = \{(C, A, N) \in R_+^3 : N = 0\}.$$

Обозначим для произвольного решения системы (2), (3), а именно для

$$X(t) = (C(t), A(t), N(t)),$$

как  $\Lambda^+(X)$  –  $\omega$ -предельное множество данного решения [7].

**Лемма.** Для всех траекторий системы (2), начинающихся на множестве  $R^+$ , множество  $\Lambda^+ \cap \partial R^+$  является пустым.

**Доказательство.** Множество  $\partial R^+$  инвариантно в силу системы (2), (3). Действительно, если

$$X_0 = (C_0, A_0, N_0) \in \partial R^+,$$

то система (2) определяется линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\mu(C - C_*), \\ \frac{dA}{dt} &= \rho C - \lambda A, \\ N(t, X_0) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (5)$$

для которых особая точка  $X_{st}$  глобально, равномерно, асимптотически устойчива в  $\partial R^+$ .

Предположим, что множество  $\Lambda^+ \cap \partial R^+$  не является пустым. Тогда существует траектория  $X(t, X_0)$  системы (2), (3) такая, что при  $X(t, X_0) \in R^+$  следует, что  $X(t, X_0) \rightarrow \partial R^+$ . На основании теоремы о непрерывной зависимости решений системы (2), (3) от начальных данных [8],  $X(t, X_0) \rightarrow X_{st}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Но этого не может быть, так как  $X_{st}$  неустойчивый стационар системы (2), (3).

Таким образом, лемма доказана.

**Теорема 1.** Все траектории системы (2), начинающиеся на множестве  $R^+$ , не ограничены.

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть существует такая траектория  $X(t, X_0)$ , которая при

$$X_0 = (N(0), C(0), A(0), i(0)) \in R^+$$

ограничена.

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова:

$$V(X, t) = \gamma AN - \beta N - \gamma \int_0^t \dot{A} N d\tau,$$

и найдем ее производную в силу системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{V}(X, t) &= \gamma \dot{N} A + \gamma \dot{A} N - \\ &- \beta \dot{N} - \gamma \dot{A} N = \dot{N}(\gamma A - \beta) = \\ &= -(\beta - \gamma A)^2 N \leq 0. \end{aligned}$$

Данная производная является локально липшицевой по  $X$  и непрерывной. Сама функция  $V(X, t)$  ограничена снизу. Покажем это.

Ограниченность снизу разности  $\gamma AN - \beta N$  очевидна в силу ограниченности траектории  $X(t, X_0)$ . Третье слагаемое представленной функции также ограничено снизу. Действи-

тельно, оно является положительным на множестве, где  $\dot{A} < 0$ . На множестве, где  $\dot{A} > 0$ , его можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} -\gamma \int_0^t \dot{A} N d\tau &\geq -\gamma \int_0^t \dot{A} N_{\max} d\tau = \\ &= -\gamma N_{\max} [A(t) - A(0)] \geq \\ &\geq -\gamma N_{\max} A_{\max} + \gamma N_{\max} A(0). \end{aligned}$$

Вторая производная  $\ddot{V}(X, t)$ , в силу системы (1), очевидно, также ограничена снизу. Следовательно (см. [7], утверждение VIII.4.7),

$$\dot{V}(X, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Этот факт гарантирует, что траектория стремится к своему  $\omega$ -предельному множеству

$$\begin{aligned} \Lambda^+ \subset M = \\ = \left\{ (N, C, A, i) \in R_+^4 : A = \frac{\beta}{\gamma} \vee N = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку система (1) является автономной, данное множество инвариантно в силу этой системы.

Рассмотрим множество  $\Lambda^+$ .

На множестве  $R^+$  плоскость  $A = \beta/\gamma$  не содержит множеств, инвариантных в силу системы (2). Поэтому траектория системы (1) не может стремиться к этой плоскости при  $t \rightarrow +\infty$ . На плоскости  $N = 0$ , согласно лемме, также не может быть точек из  $\omega$ -предельного множества. Следовательно, траектория системы не может при  $t \rightarrow +\infty$  стремиться к плоскости  $N = 0$ . Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Выделим на множестве  $R^+$  два подмножества (рис. 2):

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ (C, A, N) \in R^+ : A \leq \frac{\beta}{\gamma} \right\}, \\ H_2 &= \left\{ (C, A, N) \in R^+ : A > \frac{\beta}{\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

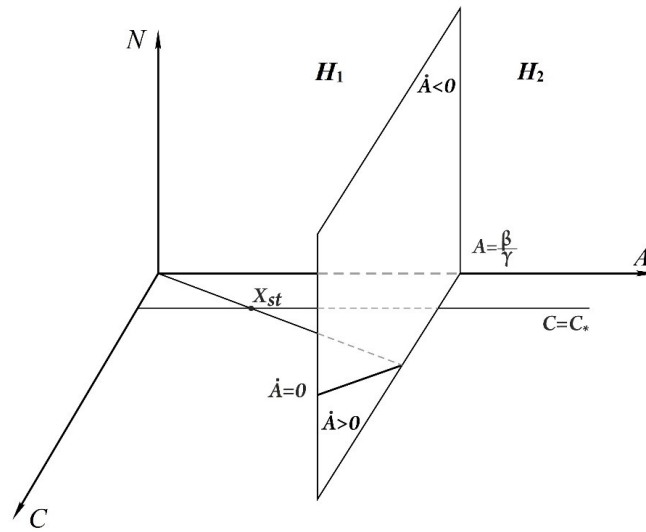


Рис. 2. Два выделенных подмножества (6) на множестве  $R^+$

Рассмотрим в подмножестве  $H_1$  такие поверхности, на которых величины  $\dot{C}(t)$ ,  $\dot{A}(t)$ ,  $\dot{N}(t)$  соответственно равны нулю:

$$N = \frac{\mu(C - C_*)}{\alpha A}, \tag{7}$$

$$N = \frac{\rho C}{\eta \gamma A} - \frac{\lambda}{\eta \gamma}, \tag{8}$$

$$A = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{9}$$

Оценим взаимное расположение поверхностей (7) и (8), предварительно определив их пересечение с плоскостью  $N = 0$  (см. рис. 2):  $C = C_*$  и  $C = \lambda A / \rho$  для выражений (7) и (8) соответственно.

На пересечении этих прямых находится стационарное решение

$$X_{st} = (C_{st}, A_{st}, N_{st}) = (C_*, \rho C_* / \lambda, 0).$$

На любом сечении плоскостью  $A = \tilde{A}$  поверхности (7) и (8) соответственно имеют вид:

$$N = \frac{\mu C}{\alpha \tilde{A}} - \frac{\mu C_*}{\alpha \tilde{A}}, \tag{10}$$

$$N = \frac{\rho C}{\eta \gamma \tilde{A}} - \frac{\lambda}{\eta \gamma}. \tag{11}$$

Для параметров из области  $\Lambda_1$  коэффициент при  $C$  в выражении для прямой (10) оказывается больше соответствующего коэффициента для прямой (11), так как из неравенства  $\mu \eta \gamma > \alpha \rho$  после деления на  $\alpha \eta \gamma \tilde{A}$  следует, что

$$\frac{\mu}{\alpha \tilde{A}} > \frac{\rho}{\eta \gamma \tilde{A}}.$$

Здесь отметим, что графическое представление рассматриваемого вопроса (рис. 3) позволяет наглядно оценить взаимное расположение поверхностей (7), (8) в подмножестве  $H_1$ . Такое представление будет использовано при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть на множестве  $R^+$  в области параметров  $\Lambda_1$

$$X(t, X_0) = (C(t, X_0), A(t, X_0), N(t, X_0))$$

— решение системы (2), (3). Тогда при  $t \rightarrow +\infty$  компонента этого решения  $A(t) \rightarrow 0$ , а  $N(t) \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** Проведем доказательство в три этапа.

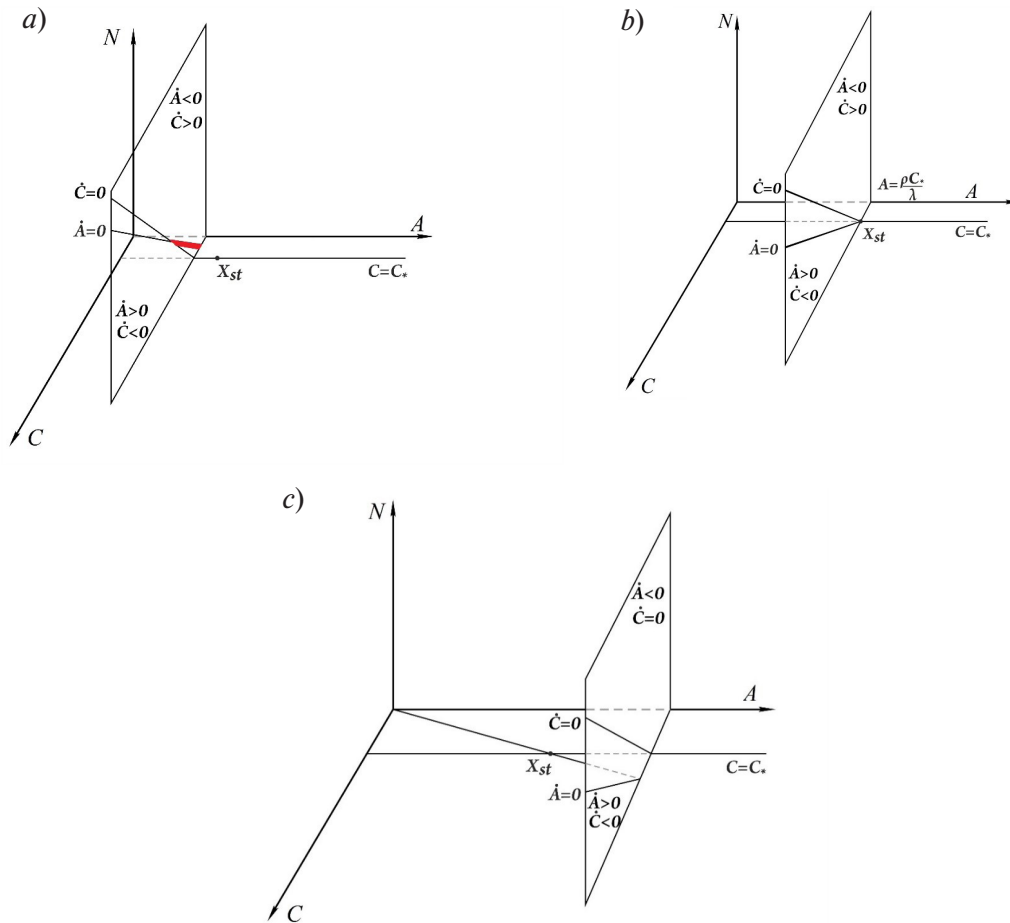


Рис. 3. Поверхность (7), (8) для разных значений величины  $A$ :  
 $0 < A < A_{st}$  (a),  $A = A_{st}$  (b),  $A_{st} < A < \beta/\gamma$  (c)

Первый этап. Покажем, что любое решение  $X(t) = (C(t), A(t), N(t))$  из подмножества  $H_2$  множества  $R^+$  за конечный промежуток времени попадает в подмножество  $H_1$ . Действительно, при  $A > \beta/\gamma$ , из третьего уравнения системы (2) следует, что  $\dot{N}(t) < 0$ . Тогда, оставаясь в  $H_2$ , решение  $X(t)$  за конечное время попадает в достаточно малую окрестность плоскости  $N = 0$ . Но на этой плоскости все решения системы (2) стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному решению  $X_{st}$ , для которого

$$A_{st} = \rho C_{*} / \lambda < \beta / \gamma$$

в  $\Lambda_1$ . Поэтому теорема непрерывной зависимости от начальных данных [8] гарантирует попадание любого решения системы (2) из подмножества  $H_2$  в подмножество  $H_1$  за конечный промежуток времени.

Второй этап. Очевидно, что решения  $X(t)$  попадают из  $H_2$  в  $H_1$ , где  $\dot{N}(t) > 0$ , через часть плоскости (9)  $A = \beta/\gamma$ , на которой  $\dot{A} < 0$  (см. рис. 2). Теперь покажем, что из той части множества  $H_1$ , где  $\dot{A} < 0$ , при  $t \rightarrow +\infty$  компонента  $A(t) \rightarrow 0$ , а  $N(t) \rightarrow +\infty$ .

Введем в рассмотрение две функции:  $V_1(X) = \dot{A}$  и  $V_2(X) = \dot{C}$ . Легко проверить, используя соотношения (7), (8), что в подмножестве  $H_1$  на поверхности  $V_1(X) = 0$  при

$$A_{st} < A \leq \beta / \gamma$$

выполняется неравенство  $V_2(X) < 0$  (см. рис. 3, b, c). Поэтому, в силу системы (2),

$$\dot{V}_1(X) \Big|_{X: V_1(X)=0} =$$





$$= \dot{A} = \rho\dot{C} - \eta\gamma\dot{N}A < 0.$$

Следовательно, решение системы с поверхности  $\dot{A} = 0$  попадает в область, где  $\dot{A} < 0$ . Лишь при некоторых значениях  $0 < A < A_{st}$ , выделенных на рис. 3,а (прямой отрезок красного цвета), решение может с поверхности  $\dot{A} = 0$  попасть в область, где  $\dot{A} > 0$ . Начав возрастать, компонента  $A(t)$  сможет увеличиваться до значения  $A = A_{st}$  лишь при условии, что  $\dot{C} < 0$  при  $A = A_{st}$  (рис. 3,б). Для этого нужно пересечь поверхность  $V_2(X) = \dot{C} = 0$ . Но на этой поверхности, в силу системы (2),

$$\dot{V}_2(X) = \ddot{C} = \alpha\dot{A}N + \alpha A\dot{N} > 0.$$

Поэтому, поскольку  $\dot{N} > 0$  в подмножестве  $H_1$ , то  $A(t)$  через поверхность (8) вновь попадет в область, где  $\dot{A} < 0$ , а, следовательно, начинает убывать. Таким образом, при  $t \rightarrow +\infty$  компонента  $A(t) \rightarrow 0$ , а  $N(t) \rightarrow +\infty$ .

Третий этап. Решение  $X(t, X_0)$ , начинаясь в части  $H_1$ , где  $\dot{A} > 0$  и  $\dot{C} < 0$ , попадает либо через плоскость  $A = \beta/\gamma$  в подмножество  $H_2$ , либо на поверхность  $\dot{A} = 0$ , где  $V_1(X) = 0$ . Но в первом случае, как показано на предыдущих этапах,  $A(t) \rightarrow 0$ , а  $N(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Во втором случае, в силу системы (2), имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(X) \Big|_{X:V_1(X)=0} &= \\ &= \ddot{A} = \rho\dot{C} - \eta\gamma\dot{N}A < 0. \end{aligned}$$

Поэтому попадаем в ту часть области  $H_1$ , в которой  $\dot{A} < 0$ , где в силу того, что  $\dot{N} > 0$ , вновь  $A(t) \rightarrow 0$ , а  $N(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

*Интерпретация.* При данном соотношении параметров системы (2) результаты математического исследования позволяют сделать вывод о потенциальной готовности общества принимать новые идеи и взгляды. Любое появление в СМИ взглядов и мнений, не совпадающих с традиционными, найдет поддержку членов общества. В этом случае

осуществляется полная смена адресатами ранее доминирующей концепции.

### Анализ модели (2), (3) в области параметров $\Lambda_2$

Легко показать (см. работу [1], утверждение 2), что в области параметров  $\Lambda_2$  стационар

$$\begin{aligned} X_{st} &= (C_{st}, A_{st}, N_{st}) = \\ &= (C_*, \rho C_*/\lambda, 0) \end{aligned}$$

системы (2), (3) асимптотически устойчив. Исследуем область его притяжения.

Заметим, что правая часть уравнения для  $C(t)$  системы (2) гарантирует попадание траектории с начальными условиями из множества  $R_+^3$  в подмножество, где  $C(t) \geq C_*$ , которое является инвариантным. Поэтому проведем исследование лишь в этой части  $R_+^3$ . При этом из уравнения для  $A(t)$  системы (2) видно, что плоскость  $A = \beta/\lambda$  разбивает это подпространство на два множества (рис. 4):

$$R_+^N = \{(C, A, N) \in R_+^3 : C \geq C_*, \dot{N} \geq 0\},$$

$$R_-^N = \{(C, A, N) \in R_+^3 : C \geq C_*, \dot{N} \leq 0\},$$

в котором находится  $X_{st}$ .

**Теорема 3.** Пусть для системы (2), (3) в пространстве параметров  $\Lambda_2$  выполняется условие

$$\beta\eta\gamma + \mu\eta\gamma < \rho\alpha. \quad (12)$$

Тогда все пространство

$$\begin{aligned} R_+^3 &= \\ &= \{(C, A, N) \in R^3 : C \geq 0, A \geq 0, N \geq 0\} \end{aligned}$$

является частью области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения  $X_{st}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Возьмем произвольную траекторию  $X(t, X_0)$  системы (2), (3), которая начинается на множестве  $R_+^3$ . Как было отмечено в начале раздела, за конечный промежуток времени она окажется либо в  $R_+^N$ , либо в  $R_-^N$ . Дальнейшие рассуждения



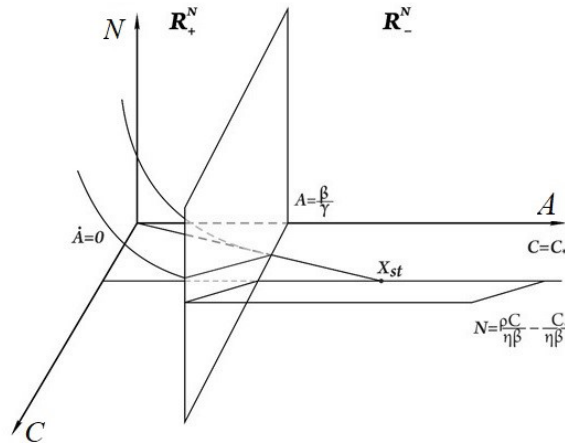


Рис. 4. Ключевые поверхности (8) и (13) на множествах  $R_+^N$  и  $R_-^N$  соответственно

также проведем в три этапа.

Первый этап. Покажем, что любое решение

$$X(t) = (C(t), A(t), N(t))$$

из множества  $R_+^N$  за конечный промежуток времени попадает в множество  $R_-^N$ .

Рассмотрим поверхность (8) (рис. 4), где  $\dot{A} = 0$ , и функцию  $V_1(X) = \dot{A}$ . В области параметров  $\Lambda_2$ , с учетом выражения (8), при выполнении условия (12), для некоторого положительного  $\delta$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(X) \Big|_{X:V_1(X)=0} &= \\ &= \ddot{A} = \rho\dot{C} - \eta\gamma\dot{N}A = \\ &= \left( \frac{\rho C - \lambda A}{\eta\gamma} \right) (\rho\alpha - \mu\eta\gamma - \beta\eta\gamma + \\ &\quad + \eta\gamma^2 A) + \rho\mu C_* - \lambda\mu A \geq \\ &\geq \left( \frac{\rho C_* - \lambda \frac{\beta}{\gamma}}{\eta\gamma} \right) (\rho\alpha - \mu\eta\gamma - \\ &\quad - \beta\eta\gamma + \eta\gamma^2 A) + \rho\mu C_* - \lambda\mu \frac{\beta}{\gamma} = \\ &= \left( \frac{\rho\gamma C_* - \lambda\beta}{\eta\gamma^2} \right) (\rho\alpha - \mu\eta\gamma - \end{aligned}$$

$$- \beta\eta\gamma + \eta\gamma^2 A) + \frac{\rho\mu\gamma C_* - \lambda\mu\beta}{\gamma} > \delta > 0.$$

Таким образом, траектория  $X(t)$  с поверхности (8) попадает в область, где  $\dot{A} > 0$  и, соответственно,

$$N < \frac{\rho C}{\eta\gamma A} - \frac{\lambda}{\eta\gamma}.$$

Если  $V_1(X) < 0$  в некоторой части пространства  $R_+^N$ , то исследование знака производной  $V_1(X)$ , в силу системы (2), сводится к вычислению знака производной на поверхности  $V_1(X) = 0$ , так как

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(X) \Big|_{X:V_1(X)<0} &= \\ &= \ddot{A} = \rho\dot{C} - \lambda\dot{A} - \eta\gamma\dot{N}A - \eta\gamma\dot{A}N \geq \\ &\geq \rho\dot{C} - \eta\gamma\dot{N}A = \dot{V}_1(X) \Big|_{X:V_1(X)=0} > 0. \end{aligned}$$

Это значит, что все траектории из множества  $R_+^N$  попадают в ту ее часть, где  $\dot{A} > 0$ .

В силу гладкости функции  $V_1(X)$ , найдется положительное число  $\varepsilon$  такое, что, компонента  $N(t)$  с некоторого конечного момента времени будет удовлетворять соотношению

$$N < \frac{\rho C}{\eta\gamma A} - \frac{\lambda}{\eta\gamma} - \varepsilon,$$

если только траектория  $X(t)$  находится на множестве  $R_+^N$ .

Далее, для компоненты  $A(t) > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \rho C - \eta\gamma AN - \lambda A > \rho C - \\ &- \eta\gamma A \left( \frac{\rho C}{\eta\gamma A} - \frac{\lambda}{\eta\gamma} - \varepsilon \right) - \lambda A = \\ &= \eta\gamma A \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство гарантирует, что любая траектория  $X(t)$  системы (2) через конечное время попадет в  $R_-^N$ , где  $A > \beta/\gamma$  и, следовательно,  $\dot{N} < 0$ .

Второй этап. Докажем, что попав из множества  $R_+^N$  в множество  $R_-^N$ , траектория  $X(t)$  стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к стационарному решению  $X_{st}$ .

Установим направление векторного поля на поверхности

$$N = \frac{\rho}{\eta\beta}(C - C_*) + q, \quad q - \text{const.} \quad (13)$$

Скалярное произведение векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( \frac{\partial N}{\partial C}; \frac{\partial N}{\partial A}; -1 \right) = \\ &= \left( \frac{\rho}{\eta\beta}; 0; -1 \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dX}{dt} = \left( \frac{dC}{dt}; \frac{dA}{dt}; \frac{dN}{dt} \right)$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{\eta\beta}(C - C_*) \times \\ &\times \left[ \left( \alpha \frac{\rho}{\eta\beta} + \gamma \right) A - (\mu + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Это выражение положительно при

$$A > \frac{\mu + \beta}{\alpha \frac{\rho}{\eta\beta} + \gamma} = \frac{(\mu + \beta)\eta\beta}{\alpha\rho + \gamma\eta\beta} = \bar{A}.$$

В силу того, что в области параметров  $\Lambda_2$   $\bar{A} < \beta/\gamma$ , траектория  $X(t)$ , попав из множества  $R_+^N$  в  $R_-^N$  (см. рис. 4), уже не сможет вернуться обратно из  $R_-^N$  в  $R_+^N$ . И так как в  $R_-^N$   $\dot{N} < 0$ , за конечное время траектория  $X(t)$  системы (2) попадет в сколь угодно малую окрестность плоскости  $N = 0$ . Для системы (2) эта плоскость является инвариантной, и, согласно системе уравнений (5), все траектории на ней стремятся к стационару  $X_{st}$ . Следовательно, на основании теоремы о непрерывной зависимости решений системы (2), (3) от начальных данных [8], траектория  $X(t)$  этой системы из малой окрестности плоскости  $N = 0$  также стремится к стационару  $X_{st}$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Третий этап. Возьмем траекторию  $X(t, X_0)$  системы (2), (3), которая начинается на множестве  $R_-^N$ . В любой момент времени  $t$  точка этой траектории находится на поверхности (13) для некоторого  $q = q_0$ . Но в  $R_-^N$ , как показано на втором этапе доказательства, с увеличением времени  $t$ ,  $X(t, X_0)$  «спускается» на поверхность, где  $q < q_0$ . Следовательно, решение  $X(t, X_0)$ , начинаясь на множестве  $R_-^N$ , либо попадает через плоскость  $A = \beta/\gamma$  на множество  $R_+^N$ , либо на поверхность (13), где  $q \leq 0$ . В обоих случаях это гарантирует, согласно рассуждениям предыдущих этапов доказательства, что  $X(t, X_0) \rightarrow X_{st}$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Фазовый портрет системы (2), (3) изображен на рис. 5.

Представляет интерес интерпретация полученных результатов. Они показывают, что при обозначенных соотношениях параметров системы (2) в обществе (или его сегменте) полностью доминирует определенная концепция (например, идеологическая или технологическая). Причиной этому могут быть либо полное одобрение происходящих в обществе процессов, либо неготовность к смене устоявшихся взглядов. Также это может происходить из-за высокой эффективности органов цензуры, которые не дают возможности новой информации заполнить информационное пространство.

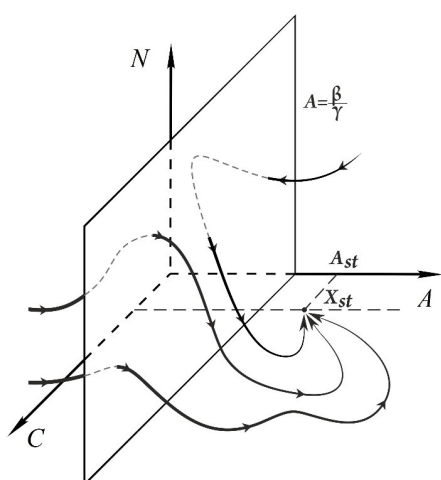


Рис. 5. Фазовый портрет системы (2), (3) в области параметров  $\Lambda_2$

### Заключение

Проведенное в данной работе исследование существенно расширяет область изученных характеристик системы, которые позволяют прогнозировать поведение решений в зависимости от начальных данных.

1. В пространстве параметров выделены две важные области  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , в которых проведено математическое обоснование определенных глобальных свойств фазового портрета исследуемой динамической системы.

2. Для каждого случая дана интерпретация результатов исследования. В одном случае – это готовность общества к полной смене доминирующей концепции (например, идеологической или технологической). В другом – напротив, неготовность по разным причинам принять новые положения.

Результаты, полученные в данной работе, авторы считают продолжением системного исследования, изложенного в работах [1, 9 – 11]. Данный проект направлен на изучение СМИ как динамической системы, в которой изменения происходят с высокой скоростью. А обращение к методам нелинейной динамики позволяет наиболее полно изучать структуру и свойства процессов в такой системе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеев С.В., Суходолов А.П. Модель распространения новой информации в обществе // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 4. С. 119–134.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1972. 664 с.
4. Чезаре Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.
5. Lakshmikantham V., Ladas G.E. Differential equations in abstract spaces. New-York: Academic Press, 1972. 231 p.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
7. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
8. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.
9. Баенхаева А.В., Тимофеев С.В. Эволюционный подход к развитию средств массовой информации: построение математической модели // Известия Байкальского государственного университета. 2016. Т. 26. № 5. С. 825–833.
10. Суходолов А.П., Кузнецова И.А., Тимофеев С.В. Анализ подходов в моделировании средств массовой информации // Вопросы теории и практики журналистики. 2017. Т. 6. № 3. С. 287–305.
11. Суходолов А.П., Тимофеев С.В. СМИ и виртуальная реальность: новые возможности и перспективы // Вопросы теории и практики журналистики. 2018. Т. 7. № 4. С. 567–580.

Статья поступила в редакцию 09.12.2020, принята к публикации 24.12.2020.

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**ТИМОФЕЕВ Сергей Викторович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов и цифровых технологий Байкальского государственного университета, г. Иркутск, Российская Федерация.

664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11  
timofeevsv12@gmail.com

**БАЕНХАЕВА Аюна Валерьевна** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры математических методов и цифровых технологий Байкальского государственного университета, г. Иркутск, Российская Федерация.

664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11  
ayunab2000@mail.ru

**REFERENCES**

1. **Timofeev S.V., Sukhodolov A.P.**, A model of new information dissemination in the society, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (4) (2019) 119–134.
2. **Pontryagin L.S.**, Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya [Ordinary differential equations], Nauka, Moscow, 1974.
3. **Erugin N.P.**, Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsialnykh uravneniy [The book for reading on the general course of differential equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1972.
4. **Cesari L.**, Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Inbunden Engelska, 1971.
5. **Ladas G.E., Lakshmikantham V.**, Differential equations in abstract spaces, Academic Press, New York, 1972.
6. **Bautin N.N., Leontovich E.A.**, Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and technique of qualitative study of dynamical systems on the plane], Nauka, Moscow, 1990.
7. **Rouche N., Habets P., Laloy N.**, Stability theory by Liapunov's direct method, Springer-Verlag, 1977.
8. **Fedoryuk M.V.**, Obyknovennyye differentsialnyye uravneniya [Ordinary differential equations], Nauka, Moscow, 1985.
9. **Bayenkhayeva A.V., Timofeev S.V.**, The evolutionary approach to development of mass media: construction of a mathematical model, Izvestiya Baykalskogo Gosudarstvennogo Universiteta [News of Baikal State University]. 26 (5) (2016) 825–833.
10. **Sukhodolov A.P., Kuznetsova I.A., Timofeev S.V.**, The analysis of approaches in modelling of mass media, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 6 (3) (2017) 287–305.
11. **Sukhodolov A.P., Timofeev S.V.**, Mass media and virtual reality: new opportunities and prospects, Theoretical and Practical Issues of Journalism. 7 (4) (2018) 567–580.

*Received 09.12.2020, accepted 24.12.2020.*

**THE AUTHORS**

**TIMOFEEV Sergey V.**

*Baikal State University*

11, Lenin St., Irkutsk, 664003, Russian Federation  
timofeevsv12@gmail.com

**BAENKHAEVA Ayuna V.**

*Baikal State University*

11, Lenin St., Irkutsk, 664003, Russian Federation

ayunab2000@mail.ru