

DOI: 10.18721/JEST.27102
УДК 621.3.013.22

А.Г. Калимов, С.А. Важнов, В.М. Говор

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

РАЗРАБОТКА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО МАГНИТА С ВЫСОКОЙ ОДНОРОДНОСТЬЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В АПЕРТУРЕ

В статье рассматривается эффективная процедура оптимизации формы обмотки и ферромагнитного экрана соленоидального магнита, входящего в состав фокусирующей системы для пучка заряженных частиц. Основной целью исследования является формирование однородного магнитного поля в апертуре соленоида. Особенностью рассматриваемой оптимизационной процедуры является ее разбиение на несколько этапов. На первом из них определяется наилучшее распределение плотности тока в обмотке, обеспечивающее максимально возможную протяженность области однородности магнитного поля. На втором этапе формируется практически реализуемая структура обмотки магнита, моделирующая в первом приближении оптимальное распределение плотности тока. На последнем этапе конструкция магнита корректируется с целью минимизации влияния вихревых токов, индуцируемых быстро меняющимся током в обмотке соленоида. Внешний ферромагнитный экран выбран таким образом, что сохранено высокое качество магнитного поля и одновременно существенно снижены потери на вихревые токи.

Ключевые слова: магнитное поле, соленоид, оптимизация, электронная линза, ферромагнитный экран.

Ссылка при цитировании:

Калимов А.Г., Важнов С.А., Говор В.М. Разработка соленоидального магнита с высокой однородностью магнитного поля в апертуре // Материаловедение. Энергетика. 2021. Т. 27, № 1. С. 21–30. DOI: 10.18721/JEST.27102

Это статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

A.G. Kalimov, S.A. Vazhnov, V.M. Govor

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

DEVELOPMENT OF A SOLENOIDAL MAGNET WITH HIGH UNIFORMITY OF THE MAGNETIC FIELD IN THE APERTURE

The article discusses an effective procedure for optimizing the shape of the winding and ferromagnetic shield of a solenoid magnet, which is part of the focusing system for a charged particle beam. The main purpose of the study is the formation of a uniform magnetic field in the aperture of a solenoid. The peculiarity of this optimization procedure is its division into several stages. On the first of them, the best distribution of the current density in the winding is determined, which provides the maximum possible extent of the area of uniformity of the magnetic field. At the second stage, a practically realizable structure of the magnet winding is formed, which simulates the optimal current density distribution in the first approximation. At the last stage, amendments are made, allowing the use of the magnet in the mode of both stationary and rapidly changing current in the winding. The external ferromagnetic shield of the magnet selected ensures good quality of the magnetic field in the aperture and negligible power losses at the same time.

Keywords: magnetic field, solenoid, optimization, electron lens, ferromagnetic shield.

Citation:

A.G. Kalimov, S.A. Vazhnov, V.M. Govor, Development of a solenoidal magnet with high uniformity of the magnetic field in the aperture, *Materials Science. Power Engineering*, 27 (01) (2021) 21–30, DOI: 10.18721/JEST.27102

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение. Соленоидальные магниты часто используются в устройствах оптики заряженных частиц благодаря фокусирующим свойствам индуцированного ими магнитного поля по отношению к пучкам заряженных частиц [1, 2]. В магнитных линзах этого типа основную фокусирующую роль играют неоднородные поля в торцевых частях магнита. В этой ситуации характеристики магнитного поля на краях линзы формируются, как правило, за счет выбора оптимальной формы ферромагнитного экрана [2]. В некоторых специальных приложениях оптики заряженных частиц требуется создание максимально однородного магнитного поля во всей апертуре магнита, включая его торцевые части. Одним из таких приложений является применение магнитов с цилиндрической симметрией в электронных линзах. Этот новый инструмент в физике ускорителей применяется для фокусировки пучков ионов за счет пространственного заряда пучка электронов, распространяющегося в противоположном направлении. Такие установки в настоящее время разрабатываются в ряде ведущих научных центрах [3–5], в частности, в институте физики тяжелых ионов в г. Дармштадт, Германия. Это устройство будет использоваться в одном из ускорителей создаваемого комплекса FAIR для повышения интенсивности ионного пучка [6, 7].

Основным элементом разрабатываемой линзы является соленоид с индукцией максимального продольного магнитного поля $B_z = 600$ мТ, диаметром и длиной области хорошего поля $d = 80$ мм и $l = 3000$ мм. Общая длина магнита, включая ферромагнитный экран, ограничена величиной $L = 3360$ мм из-за отсутствия свободного пространства в области размещения соленоида. Для обеспечения требуемых фокусирующих свойств электронной линзы линии индукции внутри соленоида в области хорошего поля должны быть параллельны оси. Предварительный анализ ионно-оптических свойств разрабатываемой системы показал, что радиальная составляющая напряженности магнитного поля в рабочей области должна быть меньше $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ относительных единиц. В процессе эксплуатации магнитное поле в соленоиде будет нарастать со скоростью до 20 Т/с. Как следствие, распределение магнитного поля в апертуре будет искажаться вихревыми токами, индуцированными в проводящих конструктивных элементах магнита.

Для достижения требуемого качества поля в апертуре необходимо решить несколько внутренних связанных задач. Первая из них – выбор правильной структуры обмотки, особенно в торцевых частях магнита; вторая – определение правильной конфигурации ферромагнитного экрана, позволяющей обеспечить требуемое качество поля и ограничить влияние вихревых токов. Эти задачи решались путем многофакторной оптимизации параметров геометрии магнита.

Метод и основные принципы процедуры оптимизации магнита.

Предварительное исследование конфигурации магнитного поля в рабочей области соленоида было проведено на основе анализа его двухмерной модели. Моделирование магнитного поля в таких системах рассматривается в целом ряде исследований [8–10]. В нашей работе был использован подход, основанный на расчете векторного магнитного потенциала в рассматриваемой магнитной системе методом конечных элементов второго порядка [11, 12]. Все расчеты, включая оптимизацию формы катушки, были выполнены с использованием разработанного нами программного комплекса MULTIMAG [13], изначально разработанного для моделирования электрических и магнитных полей в устройствах оптики заряженных частиц.

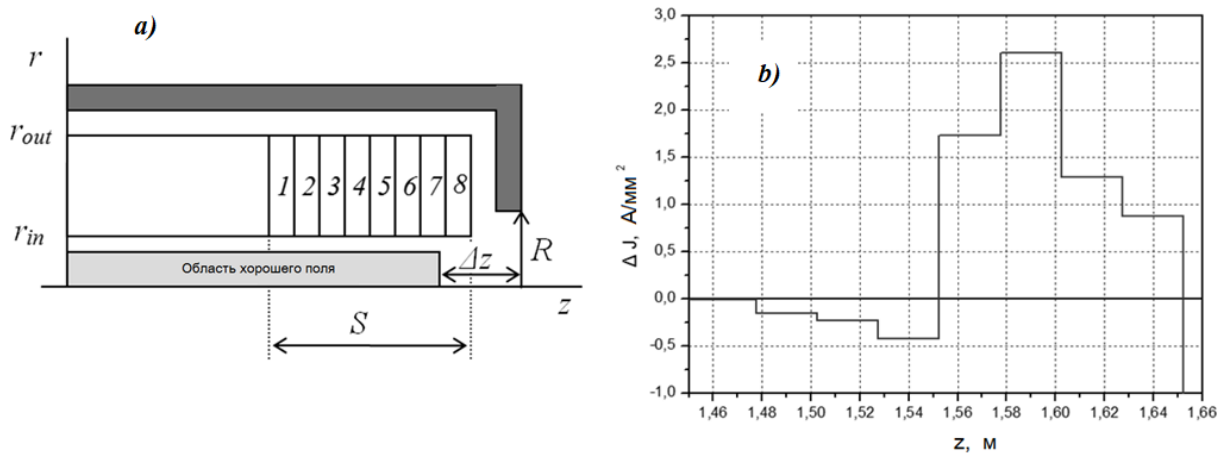


Рис. 1. Распределение плотности тока в торцевых сечениях соленоида, соответствующее оптимальному решению.
Радиус отверстия в торцевой пластине магнитопровода равен $R = 120$ мм

Fig. 1. Current density distribution in the end sections of the magnet corresponding to the optimal solution.
The radius of the hole in the end plate is $R = 120$ mm

Оптимизация характеристик магнитного поля обычно сводится к решению трудоемких обратных задач теории электромагнитного поля [14–17]. В рассматриваемой работе поиск оптимальных геометрических параметров рассматриваемого магнита был выполнен с применением надежного и эффективного алгоритма, основанного на методе деформируемого многогранника Нелдера – Мида. В качестве целевой функции, подлежащей минимизации, было выбрано максимальное значение радиальной составляющей магнитной индукции в рабочей области соленоида.

Для выбора наилучшего варианта магнитной системы были последовательно решены две различные оптимизационные задачи. Первая из них заключалась в определении оптимальной линейной зависимости плотности тока в обмотке, обеспечивающей минимальное значение радиальной составляющей индукции магнитного поля внутри рабочей области соленоида. Для этого торцевая часть магнита длиной $S = 160$ мм была разделена на несколько тонких кольцевых слоев. Плотность тока в каждом слое была предполагалась постоянной, общее количество таких слоев было установлено равным 8.

Поиск оптимального решения проводился при различных значениях радиуса R отверстия в торцевой части ферромагнитного экрана. Внутренний радиус катушки в исследуемой модели равен $r_{in} = 80$ мм, что определяется основными требованиями к конструкции соленоида. Плотность тока в центральной обмотке была выбрана равной $J = 4,5$ А/мм², что типично для ускорительных магнитов с водяным охлаждением. Соответственно внешний радиус обмотки равен $r_{out} = 185$ мм. В этом случае индукция магнитного поля в центральной части соленоида достигает необходимого уровня $B = 0,6$ Т. Модель рассматриваемого магнита показана на рис. 1а.

Важным параметром модели является соотношение между длиной всего магнита и размером области хорошего поля. Сравнение соответствующих значений показывает, что та часть пространства в магните, где радиальная напряженность поля может выходить за рамки предельных значений, имеет длину всего $\Delta z = 180$ мм. Такое малое расстояние требует очень тщательной и точной проработки геометрии катушки соленоида.

Распределение магнитного поля в торцевой части магнита сильно зависит от радиуса окна в торцевом экране R . Очевидно, меньшие радиусы обеспечивают лучшее качество магнитного поля во всей внутренней области соленоида при неизменяющемся во времени магнитном поле. Для поиска приемлемой конфигурации соленоида процедура оптимизации распределения плот-

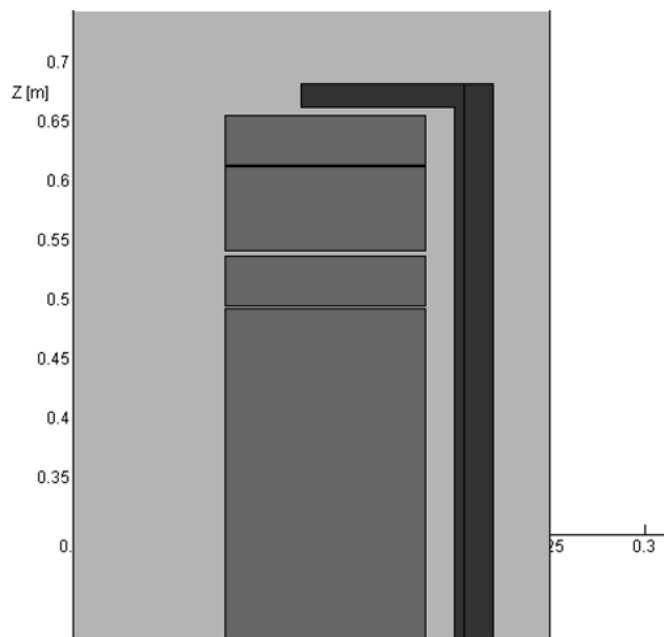


Рис. 2. Модель соленоида с тремя торцевыми секциями
 Fig. 2. A model of the solenoid end part with 3 separate sections

ности тока в обмотке была применена к моделям магнита с различными значениями этого радиуса. Характерный пример решения, соответствующего радиусу $R = 120$ мм, показан на рис. 1б.

Максимальное значение радиальной составляющей плотности потока внутри области хорошего поля для этого варианта составляет $B_r / B = 1.5 \cdot 10^{-4}$, что заметно меньше максимально допустимого значения. Оптимальное распределение плотности тока для других значений радиуса R , которое варьировалось в диапазоне $80 \text{ мм} < R < 150 \text{ мм}$, также обеспечивает требуемое качество поля.

В реальной обмотке соленоида практически невозможно обеспечить требуемые значения средней плотности тока одновременно в нескольких торцевых секциях катушки. Поэтому целью второго этапа оптимизации формы катушки было упрощение ее структуры. Распределение плотности тока в обмотке, показанной на рис. 1б, имеет несколько важных особенностей: а) в торцевой части обмотки магнита мы видим область с плотностью тока, меньшей приблизительно на 5% по отношению к центральной части соленоида; б) в центральных сегментах торцевой части катушки плотность тока достигает уровня около $7,5 \text{ А/мм}^2$ и превышает среднее значение почти на 60%; в) во внутренних сегментах обмотки плотность тока снова выходит на уровень ниже среднего. Пониженная плотность тока в отдельных областях катушки на практике может быть смоделирована путем введения определенных зазоров между соседними секциями. Повышенная средняя плотность тока внутри катушки может быть достигнута путем использования провода с поперечным сечением, которое меньше поперечного сечения кабеля в основной катушке. Для создания реальной обмотки предполагается использовать проводник квадратного сечения с круглым каналом для водяного охлаждения. Для основной катушки магнита мы выбрали кабель сечением $10 \times 10 \text{ мм}^2$ и толщиной изоляции $0,25 \text{ мм}$. Средняя плотность тока в соответствующей обмотке около $4,5 \text{ А/мм}^2$ может быть обеспечена током в проводнике $i = 500 \text{ А}$.

В соответствии с общим характером распределения плотности тока, полученного для идеализированной модели соленоида и показанного на рис. 1б, мы решили разделить торцевую часть обмотки соленоида на 3 секции. Предполагается, что две из них, первая и последняя, намотаны тем же проводником, что и основная обмотка. Для промежуточного участка был выбран прово-

дник с меньшим поперечным сечением $8,25 \times 8,25$ мм². Предполагается, что ток во всех секциях обмотки одинаков, соответственно, функционирование установки обеспечивается одним источником питания. Общая радиальная ширина всех элементов катушки равна одному и тому же значению $\Delta r = 185$ мм. Этот размер соответствует 10-слойной основной обмотке (включая 0,25 мм изоляцию кабеля) и 12-слойной катушке, намотанной проводником сечением $8,25 \times 8,25$ мм². Количество радиальных слоев и их положение в различных секциях катушки были оптимизированы для достижения наилучшего качества поля в апертуре соленоида. Соответствующая серия численных экспериментов была выполнена с привлечением как программы MULTIMAG, так и программы расчета электромагнитных полей OPERA 3D компании SOBHAM. Математическая модель торцевой части магнита показана на рис. 2.

Результаты расчета характеристик магнитного поля в апертуре магнита

Оптимизация положения секций обмотки соленоида были произведены для различных значений радиуса окна в торцевом ферромагнитном экране соленоида. Полученные результаты представлены на рис. 3.

Исходя из основных свойств представленной зависимости, можно сделать заключение, что приемлемым диапазоном изменения этого параметра является интервал $100 \text{ мм} < R < 135 \text{ мм}$. Нижний предел определяется внутренним диаметром центральной части конструкции магнита.

Разрабатываемый магнит предполагается использовать в условиях изменяющегося во времени магнитного поля в апертуре со скоростью нарастания до $dB/dt = 20$ Т/с. Простые оценки и результаты двумерного моделирования переходных процессов показывают, что вихревые токи, индуцируемые в проводящем ферромагнитном экране, существенно изменяют распределение магнитного поля в рабочем пространстве магнита. Рассмотрим это влияние более подробно. В двумерной модели соленоида экран состоит из двух торцевых пластин с центральными отверстиями и цилиндрической трубы, соединяющей эти пластины (обратный магнитопровод). Торцевые пластины проводят магнитный поток от осевой части магнита к внешнему экрану. Для уменьшения амплитуды вихревых токов эти элементы конструкции необходимо делать шихтованными. Но даже в этом случае значительные по величине вихревые токи возникают в плоскости шихтовки, поскольку магнитный поток частично входит в торцевые пластины в осевом направлении. Для ограничения величины этих токов до приемлемого уровня предлагается сконструировать торцевые экраны из двух полуколец каждый, как это показано на рис. 4.

Моделирование переходных процессов в магните с такой конструкцией торцевых пластин демонстрирует значительное уменьшение возмущения магнитного поля в апертуре соленоида. Как показывает численное моделирование, величина магнитного поля, наведенного в рабочей области магнита вихревыми токами, существенно зависит от радиуса отверстия в ферромагнитном экране. Очевидно, чем больше этот радиус, тем меньше возмущающее магнитное поле.

Влияние этого эффекта на качество магнитного поля иллюстрирует распределение, приведенное на рис. 5. Этот график показывает, что допустимые значения радиуса R превышают значение $R \approx 120$ мм. Сопоставление распределений, приведенных на рис. 3 и рис. 5 позволяет выбрать возможный диапазон изменения параметра R : $120 \text{ мм} < R < 130 \text{ мм}$.

Очевидно, что расчеты вихревых токов в рассматриваемой модели магнита могут быть выполнены только с использованием программ трехмерного моделирования электромагнитных полей. В настоящей работе для этих расчетов использовался программный модуль OPERA 3D – ELECTRA.

Обратный магнитопровод магнита влияет на качество магнитного поля в апертуре в меньшей степени. Тем не менее, к нему также предъявляется ряд требований: 1) ярмо должно быть шихтованным, в частности, для сокращения потерь в этой части магнитопровода и предотвращения его перегрева; 2) общая площадь поперечного сечения должна быть достаточной для того, чтобы

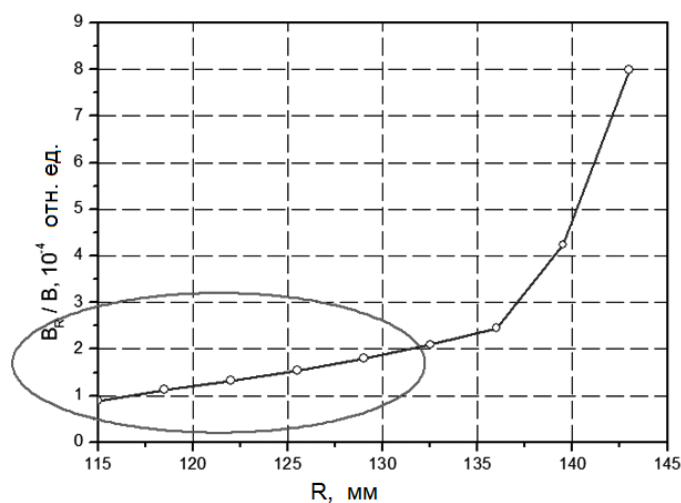


Рис. 3. Максимальное значение радиальной компоненты индукции магнитного поля в зависимости от радиуса отверстия в экране

Fig. 3. Dependence of the maximum value of the flux density radial component on the radius of the hole in the end plate

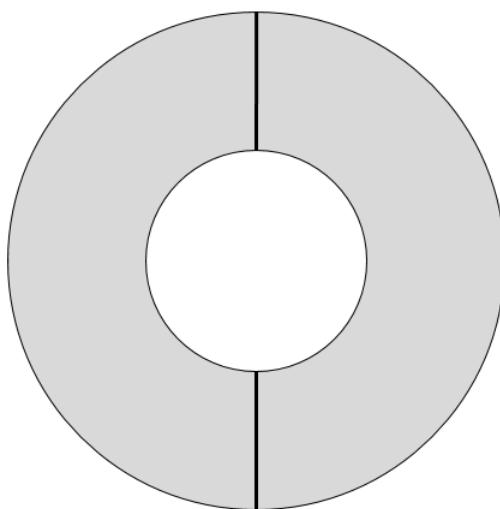


Рис. 4. Конструкция торцевой пластины ферромагнитного экрана

Fig. 4. A structure of the ferromagnetic end plate

пропустить через него индуцируемый магнитный поток без насыщения ферромагнитного материала. Наилучшей возможностью обеспечить эти свойства является компоновка магнитопровода из нескольких шихтованных стальных стержней прямоугольного сечения. Соответствующая математическая модель соленоидального магнита была подробно исследована. Полученные в результате оптимизации конструкции ферромагнитного экрана распределения радиальной составляющей магнитного поля для различных скоростей изменения тока в обмотке приведены на рис. 6. Они показывают, что максимальные отклонения индукции магнитного поля от среднего значения не превышают максимально допустимых значений как для случая относительно высокой скорости изменения магнитного поля, так и для статического режима.

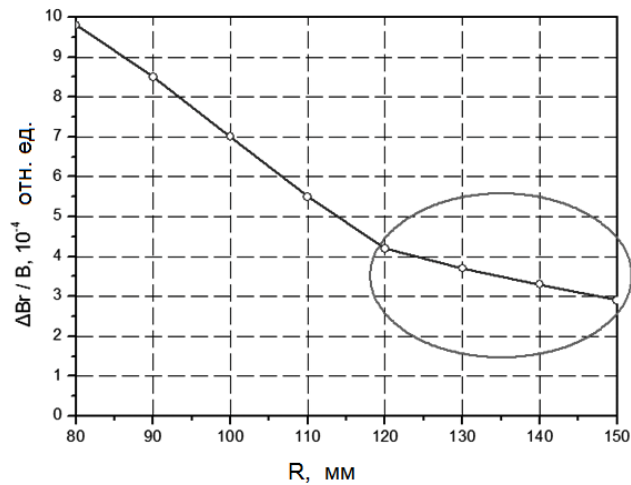


Рис. 5. Влияние вихревых токов на радиальную компоненту индукции магнитного поля в апертуре магнита
 Fig. 5. Influence of the eddy currents on the flux density radial component in the magnet aperture

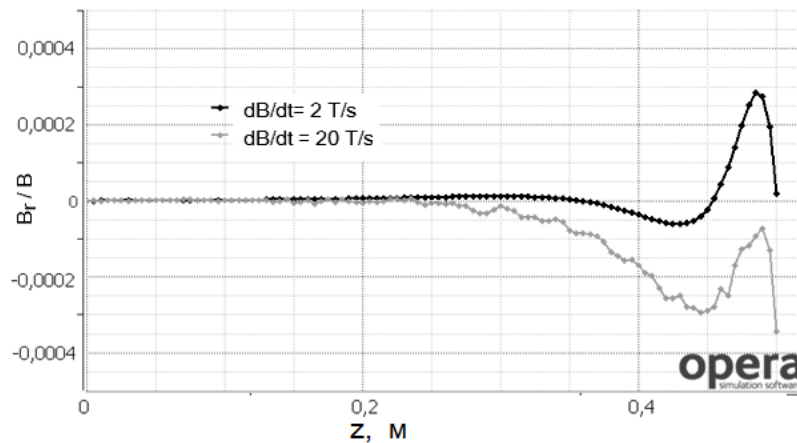


Рис. 6. Координатная зависимость радиальной компоненты индукции магнитного поля на границе области хорошего поля для различных скоростей изменения индукции магнитного поля в 3-мерной модели магнита
 Fig. 6. Distribution of the flux density radial component along the border of the good field area for different rates of the magnetic field variation in a 3D magnet model

Обсуждение

Исследованный магнит соленоидного типа, является ключевым элементом электронной линзы, предназначенного для установки в проектируемом ускорителе проекта FAIR. В процессе оптимизации размеров и формы основных элементов конструкции магнитной системы было показано, что условие высокой однородности магнитного поля в апертуре ($B_r/B < 5 \cdot 10^{-4}$) накладывает противоречивые требования на конструкцию торцевых частей соленоида. В частности, уменьшение диаметра выходного окна ферромагнитного экрана улучшало качества поля в статическом режиме и одновременно ухудшало его в условиях осцилляций рабочего тока. Благодаря разделению экрана на электрически изолированные фрагменты удалось снизить негативное влияние вихревых токов и обеспечить требуемое качество магнитного поля во всех предполагаемых ре-

жмах работы рассматриваемого магнита. Как показали численные эксперименты, важную роль в обеспечении интегральной и локальной однородности магнитного поля играет и правильный выбор характеристик внешнего магнитного экрана, который неявно оказывал заметное влияние на распределение характеристик магнитного поля в апертуре при постоянном и переменном токе обмоток возбуждения.

Заключение

В итоге оптимизация катушки и системы экранирования, проведенная как для двухмерной, так и для трехмерной моделей соленоида, позволила удовлетворить всем требованиям к качеству магнитного поля в рабочей зоне. Предложенная конструкция торцевых пластин и обратного магнитопровода соленоида обеспечила приемлемые значения радиальной составляющей индукции магнитного поля как в статическом, так и динамическом режимах его работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Вольник Г.** Оптика заряженных частиц: СПб.: Энергоатомиздат, 1992. 280 с.
- [2] **Bai Y., Price J.S., Safdar A., Neculaes B.** Design of shielded solenoids for Charged particle beam application, IEEE trans. On Applied Superconductivity, 30(4) (2020), # 4003104.
- [3] **Anerella M., Fischer W., Gupta R., Jain A., Joshi P., Kovach P., Marone A., Pikin A., Plate S.** Mechanical Design and Construction of Superconducting e-Lens Solenoid Magnet System for RHIC Head-on Beam-Beam Compensation, IEEE trans. On Applied Superconductivity, 24(3) (2014), # 4100505.
- [4] **Gu S.X., et. al.** Electron lenses for head-on beam-beam compensation in RHIC, Physical Review Accelerators and Beams, 20, (2017), DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.20.023501.
- [5] **Kalimov A., Muhle C., Ondreka D., K-Schulte-Urlichs, Spiller P.** Optimization of a Solenoid for an Electron Lens in SIS18, IEEE Trans. on Applied Superconductivity, 30(4) (2020), # 4001404.
- [6] **Spiller P., et. al.** Status of the FAIR Project, IPAC 2018: Proceedings of the 9th International Accelerator Conference (2018) 63–68.
- [7] **Kester O., Spiller P., Stoecker H.** FAIR project at GSI, In book: Challenges and Goals for Accelerators in the XXI Century. World Scientific Publishing, Singapore, (2016).
- [8] **Таряник Н.В., Варюхин Д.В., Федюк Д.О.** Сверхпроводниковая магнитная система с однородным магнитным полем // Физика и техника высоких давлений 2018. Т. 28, № 3, С. 113–139.
- [9] **Соловьев К.В.** Идеально фокусирующие системы с однородными магнитными полями // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 102–109.
- [10] **Семенов Е.С., Юнаковский А.Д.** Расчет статического магнитного поля системы соленоидов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2010. Т. 53. № 12, С. 799–802.
- [11] **Бинс П.Дж., Лауренсон П.Дж.** Анализ и расчет электрических и магнитных полей: М.: Энергия, 1970. 376 с.
- [12] **Зенкевич О.С.** Метод конечных элементов в технике: М.: Мир, 1975. 542 с.
- [13] **Kalimov A., Leibrock H., Muehle C., Nalimov P.** “Optimization of the Radiation Resistant Quadrupole Magnets for the SIS100 Accelerator of the FAIR Project”. IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2018. – V. 28. – № 3, # 10.1109/TASC.2018.2795534.
- [14] **Коровкин Н.В., Поттиенко А.А., Чечурин В.Л.** Обратные задачи в электротехнике и их численное решение: СПб: Нестор, 2003. 155 с.
- [15] **Бахвалов Ю.А., Горбатенко Н.И., Гречихин В.В., Юфанова А.Л.** Проектирование оптимальных электромагнитов систем магнитной левитации и боковой стабилизации наземного транспорта на основе решения обратных задач // Электротехника. 2017. Т. 88. № 1. С. 43–47.

[16] **Доронин М.В., Грешняков Г.В., Коровкин Н.В.** Магнитные экраны специальной конструкции // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2017. Т. 23 № 1. С. 124–133.

[17] **Калимов А.Г., Налимов П.В., Горбунова С.В.** Оптимизация формы полюса в мультиполюсных магнитах // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2018. Т. 24, № 2. С. 94–103.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КАЛИМОВ Александр Гелиевич – профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, д-р техн. наук.
E-mail: alexanderkalimov@gmail.com

ВАЖНОВ Сергей Александрович – доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, без степени.
E-mail: seva_011249@mail.ru

ГОВОР Владислав Михайлович – аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, без степени.
E-mail: pwnway@gmail.com

Дата поступления статьи в редакцию: 16.02.2021

REFERENCES

- [1] **H. Wollnik**, Optics of Charged Particles, Academic Press, 1987.
- [2] **Y. Bai, J.S. Price, A. Safdar, B. Neculaes**, Design of shielded solenoids for Charged particle beam application, IEEE trans. On Applied Superconductivity, 30(4) (2020), # 4003104.
- [3] **M. Anerella, W. Fischer, R. Gupta, A. Jain, P. Joshi, P. Kovach, A. Marone, A. Pikin, S. Plate**, Mechanical Design and Construction of Superconducting e-Lens Solenoid Magnet System for RHIC Head-on Beam-Beam Compensation, IEEE trans. On Applied Superconductivity, 24(3) (2014), # 4100505.
- [4] **S.X. Gu et. al.**, Electron lenses for head-on beam-beam compensation in RHIC, Physical Review Accelerators and Beams, 20, (2017), DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.20.023501
- [5] **A. Kalimov, C. Muhle, D. Ondreka, K-Schulte-Urlichs, P. Spiller**, Optimization of a Solenoid for an Electron Lens in SIS18, IEEE Trans. on Applied Superconductivity, 30(4) (2020), # 4001404.
- [6] **P. Spiller et. al.**, Status of the FAIR Project, IPAC 2018: Proceedings of the 9th International Accelerator Conference (2018) 63–68.
- [7] **O. Kester, P. Spiller, H. Stoecker**, FAIR project at GSI, In book: Challenges and Goals for Accelerators in the XXI Century. World Scientific Publishing, Singapore, (2016).
- [8] **N.V. Taryanik, D.V. Varyukhin, D.O. Fedyuk**, Sverkhprovodnikovaya magnitnaya sistema s odnorodnym magnitnym polem // Fizika i tekhnika vysokikh davleniy 2018. Т. 28, № 3, S. 113–139.
- [9] **K.V. Solovyev**, Idealno fokusiruyushchiye sistemy s odnorodnymi magnitnymi polyami // Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskoye nauki. 2020. Т. 13. № 4. S. 102–109.
- [10] **Ye.S. Semenov, A.D. Yunakovskiy**, Raschet staticheskogo magnitnogo polya sistemy solenoidov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Radiofizika. 2010. Т. 53, № 12, S. 799–802.
- [11] **K.J. Binns, P.J. Lawrenson**, Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems, Pergamon Press, New York, 1973.

[12] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science. Mcgraw Hill, London, 1971.

[13] A. Kalimov, H. Leibrock, C. Muehle, P. Nalimov, “Optimization of the Radiation Resistant Quadrupole Magnets for the SIS100 Accelerator of the FAIR Project”. IEEE Trans. on Applied Superconductivity. – 2018. – V. 28. – № 3, # 10.1109/TASC.2018.2795534.

[14] N.V. Korovkin, A.A. Potiyenko, V.L. Chechurin, Obratnyye zadachi v elektrotekhnike i ikh chislennoye resheniye: SPb: Nestor, 2003. 155 s.

[15] Yu.A. Bakhvalov, N.I. Gorbatenko, V.V. Grechikhin, A.L. Yufanova, Proyektirovaniye optimalnykh elektromagnitov sistem magnitnoy levitatsii i bokovoy stabilizatsii nazemnogo transporta na osnove resheniya obratnykh zadach // Elektrotehnika. 2017. T. 88. № 1. S. 43–47.

[16] M.V. Doronin, G.V. Greshnyakov, N.V. Korovkin, Magnitnyye ekrany spetsialnoy konstruksii // Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbPU. Yestestvennyye i inzhenernyye nauki. 2017. T. 23. № 1. S. 124–133. M.V. Doronin, G.V. Greshnyakov, N.V. Korovkin, Magnet Shields Special design, St.-Petersburg Polytechnic University Journal: Natural sciences, 23(1) (2017) 124–133.

[17] A.G. Kalimov, P.V. Nalimov, S.V. Gorbunova, Optimizatsiya formy polyusa v multipolnykh magnitakh // Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbPU. Yestestvennyye i inzhenernyye nauki. 2018. T. 24, № 2. S. 94–103. A.G. Kalimov, P.V. Nalimov, C.V. Gorbunova, Pole Shape Optimization in Multipole Magnets, St.-Petersburg Polytechnic University Journal: Natural sciences, 24(2) (2018) 94–103.

THE AUTHORS

KALIMOV Aleksandr G. – *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*
E-mail: alexanderkalimov@gmail.com

VAZHNOV Sergey A. – *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*
E-mail: seva_011249@mail.ru

GOVOR Vladislav M. – *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*
E-mail: pwnway@gmail.com

Received: 16.02.2021