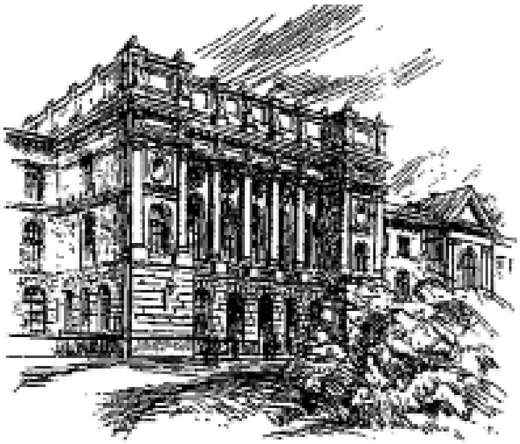
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

## САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## Физико-математические науки

**Том 14, №2**
**2021**

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2021

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**



Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

Распространяется по Каталогу стран СНГ, Объединенному каталогу «Пресса России» и по Интернет-каталогу «Пресса по подписке». Подписной индекс 71823.

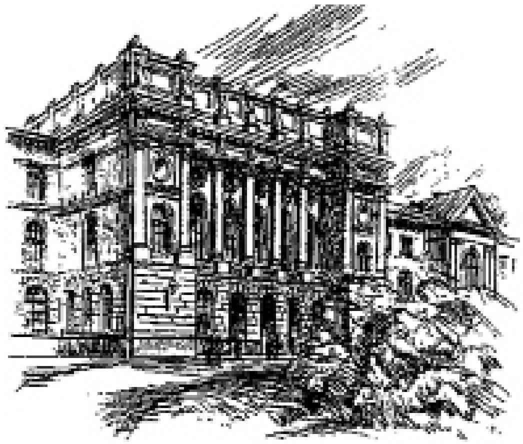
Журнал индексируется в базе данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), а также включен в базу данных «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте

http://www.elibrary.ru



**Адрес редакции и издательства:**
Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
Тел. редакции (812) 294-22-85.
http://ntv.spbstu.ru/physics

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION



# ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL

## Physics and Mathematics

**VOLUME 14, No.2, 2021**

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2021

**ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL.**
**PHYSICS AND MATHEMATICS**



The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is distributed through the CIS countries catalogue, the «Press of Russia» joint catalogue and the «Press by subscription» Internet catalogue. The subscription index is **71823**.

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) and the **Russian Science Citation Index** (RSCI) databases.

© Scientific Electronic Library (http://www.elibrary.ru).



Address: 195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

Phone: (812) 294-22-85.

http://ntv.spbstu.ru/physics

# Содержание

## Физика конденсированного состояния



## Математическое моделирование физических процессов



## Ядерная физика



## Радиофизика



## Теоретическая физика



## Механика



## Хроника

# Contents

## Condensed matter physics



## Simulation of physical processes



## Nuclear physics



## Radiophysics



## Theoretical physics



## Mechanics



## Chronicle

DOI: 10.18721/JPM.14201
УДК 537.956

# ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА (R)-3-ХИНУКЛИДИНОЛА В ПОРИСТОЙ МАТРИЦЕ ОКСИДА АЛЮМИНИЯ

**С.В. Барышников**[1], **А.Ю. Милинский**[1], **Е.В. Стукова**[2], **А.А. Антонов**[1]

[1] Благовещенский государственный педагогический университет,
г. Благовещенск, Российская Федерация;

[2] Амурский государственный университет,
г. Благовещенск, Российская Федерация

Представлены результаты исследований линейных и нелинейных диэлектрических свойств (R)-3-хинуклидинола, внедренного в пористый оксид алюминия (размер пор – 300 нм), в сравнении со свойствами объемного (R)-3-хинуклидинола. Выявлено понижение температуры Кюри в нанокомпозите как при нагреве, так и охлаждении, по сравнению с объемным образцом. Понижение температуры фазового перехода допускает интерпретацию на основе известных теоретических моделей для сегнетоэлектрических малых частиц.

**Ключевые слова:** (R)-3-хинуклидинол, оксид алюминия, сегнетоэлектрик, диэлектрическая проницаемость, нанокомпозит, фазовый переход

**Ссылка при цитировании:** Барышников С.В., Милинский А.Ю., Стукова Е.В., Антонов А.А. Диэлектрические свойства (R)-3-хинуклидинола в пористой матрице оксида алюминия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 7–15. DOI: 10.18721/JPM.14201



# DIELECTRIC PROPERTIES OF (R)-3-QUINUCLIDINOL IN THE POROUS MATRIX OF ALUMINUM OXIDE

**S.V. Baryshnikov**[1], **A.Yu. Milinskiy**[1], **E.V. Stukova**[2], **A.A. Antonov**[1]

[1] Blagoveshchensk State Pedagogical University,
Blagoveshchensk, Russian Federation;

[2] Amur State University,
Blagoveshchensk, Russian Federation

The paper presents findings of an investigation of the linear and nonlinear dielectric properties of (R)-3-quinuclidinol embedded in porous aluminum oxide (pores of size 300 nm), in comparison with the properties of bulk (R)-3-quinuclidinol. A decrease in the Curie temperature in the nanocomposite, both upon heating and cooling, in comparison with a bulk sample is revealed. A decrease in the phase transition temperature allows for interpretation on the basis of the known theoretical models for ferroelectric small particles.

**Keywords:** (R)-3-quinuclidinol, aluminum oxide, ferroelectric, dielectric constant, nanocomposite, phase transition

**Citation:** Baryshnikov S.V., Milinskiy A.Yu., Stukova E.V., Antonov A.A., Dielectric properties of (R)-3-quinuclidinol in the porous matrix of aluminum oxide, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 7–15. DOI: 10.18721/JPM.14201

## Введение

Сегнетоэлектрические материалы обладают уникальными свойствами и широко используются на практике. Наличие спонтанной поляризации и большие значения диэлектрической проницаемости, а также их зависимость от внешних воздействий (электрические поля, механические напряжения и т. п.) делает сегнетоэлектрики востребованными для создания различных функциональных электронных устройств. В последнее время ведется постоянный поиск органических материалов, обладающих высокими значениями диэлектрической проницаемости ε', спонтанной поляризации $P_s$ и температуры Кюри $T_C$; кроме того, такие материалы дешевы и экологически безопасны ввиду отсутствия в их структуре тяжелых металлов.

Недавно были обнаружены сегнетоэлектрические свойства у органических солей $C_6H_{16}NHal$, где галогены Hal включают Cl, Br и I [1 – 3]: хлорид диизопропиламмония (DIPAC) с температурой Кюри примерно 440 K и спонтанной поляризацией около 8,2 мкКл/см$^2$; бромид диизопропиламмония (DIPAB) с температурой Кюри примерно 426 K и спонтанной поляризацией около 23 мкКл/см$^2$; иодид диизопропиламмония (DIPAI) с температурой Кюри примерно 378 K и спонтанной поляризацией около 5,17 мкКл/см$^2$.

В связи с перспективами практического применения органических сегнетоэлектриков в наноэлектронике, значительный интерес вызывают исследования влияния размеров частиц на свойства материалов. Сегнетоэлектрические фазовые переходы в нанокомпозитах, полученных на основе DIPAC, DIPAB и DIPAI и нанопористых матриц, изучались в работах [4 – 7].

В статьях [8, 9] сообщалось об открытии сегнетоэлектрических свойств в однокомпонентных гомохиральных органических кристаллах (R)-3- и (S)-3-хинуклидинола ($C_7H_{13}NO$). Эти кристаллы существуют в двух зеркально-изомерных (энантиоморфных) формах: гомохиральных (R)- и (S)-3-хинуклидинолов. При комнатной температуре они кристаллизуются в энантиоморфно-полярной точечной группе 6 ($C6$), показывающей зеркальное отображение в колебательных спектрах. Температура Кюри, определенная методом дифференциального термического анализа (DTA) для монокристаллических образцов составляла $T_{C1} \approx 398$ K при нагреве и $T_{C2} \approx 360$ K при охлаждении [8]. Диэлектрическая проницаемость при фазовом переходе имеет резкую ступенчатую аномалию, меняясь примерно от 5 до 17. Спонтанная поляризация при $T \approx 300$ K составляет примерно 7 мкКл/см$^2$, коэрцитивное поле – 15 кВ/см. Было также обнаружено, что их рацемическая смесь (R*ac*)-3-хинуклидинол кристаллизуется в центросимметричной точечной группе $2/m$ ($C2h$), не являясь сегнетоэлектриком.

Это открытие показывает значительную роль гомохиральности при возникновении сегнетоэлектрического состояния в органических сегнетоэлектриках. Как было обнаружено в работе [9], температуры фазовых переходов понижаются до $T_{C1} \approx 338$ K при нагреве и $T_{C2} \approx 324$ K при охлаждении для пленок (R)-3-хинуклидинола (толщина – 150 нм) на подложке.

В настоящей статье приводятся результаты исследований диэлектрических свойств (R)-3-хинуклидинола, внедренного в пористые пленки оксида алюминия $Al_2O_3$ с размером пор 300 нм. Для сравнения были изучены аналогичные свойства объемного поликристаллического (R)-3-хинуклидинола.

## Образцы и методика эксперимента

Для получения нанокомпозитов был использован (R)-3-хинуклидинол производства фирмы Acros Organics (Бельгия). Температуры фазовых переходов, по паспортным данным, составляли $T_{C1} \approx 390$ K при нагреве и $T_{C2} \approx 364$ K при охлаждении. Образцы для исследования представляли собой пленки оксида алюминия толщиной 50 мкм, с диаметром пор 300 нм. Фотогра-

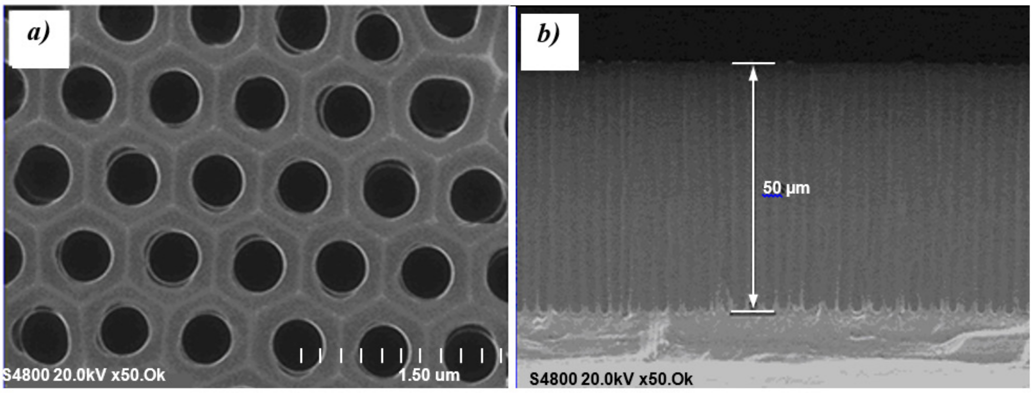



Рис. 1. Микрофотографии пленки $Al_2O_3$: *a* – поверхность, *b* – вид с торца

фии пленок, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа, приведены на рис. 1. Для заполнения пленок оксида алюминия сегнетоэлектриком использовался насыщенный раствор (R)-3-хинуклидинола в метаноле. Образец оксида помещали в нагретый до температуры 320 K раствор и медленно охлаждали. Удаление оставшегося метанола производили при помощи вакуумной сушки. После трехкратного повторения описанной процедуры степень заполнения пор, определенная по изменению массы пленок при помощи весов AND BM-252G (точность $10^{-6}$ г), составляла 53 – 55 %.

Диэлектрические свойства объемного и наноструктурированного (R)-3-хинуклидинола измеряли на частоте 100 кГц при рабочем напряжении 0,7 В при помощи измерителя иммитанса E7-25. Для нанесения электродов на поверхность образцов использовали индий-галлиевую пасту. Температура определялась с точностью 0,1 K электронным термометром ТС-6621 на основе хромель-алюмелевой термопары. В процессе измерений образцы нагревали от 300 до 440 K и затем охлаждали. Скорость изменения температуры составляла 1 град/мин.

Для определения амплитуды сигналов кратных частот на образец с последовательно включенным резистором подавали синусоидальное напряжение частотой несколько килогерц и напряженностью поля порядка $10^2$ В/мм. Для определения области существования сегнетоэлектрической фазы использовали коэффициент третьей гармоники ($\gamma_{3\omega} = U_{3\omega}/U_{\omega}$). Более подробно методика исследования сегнетоэлектриков с использованием нелинейной диэлектрической спектроскопии описана в статьях [10, 11].

## Экспериментальные результаты и их обсуждение

По результатам исследований диэлектрических характеристик образцов (R)-3-хинуклидинола в объеме и (R)-3-хинуклидинолом в пленке оксида алюминия были проанализированы температурные зависимости $\varepsilon'(T)$ (рис. 2). Переход в параэлектрическую фазу из сегнетоэлектрической происходит при температуре 390 K, чему соответствует максимум диэлектрической проницаемости на температурной зависимости $\varepsilon'(T)$. Для объемного образца при повышении температуры наблюдается аномалия $\varepsilon'$ при 390 K, соответствующая переходу из сегнетоэлектрической в параэлектрическую фазу. При охлаждении температура фазового перехода зависит от температуры, до которой был прогрет образец, и от скорости охлаждения. Для температуры прогрева 420 K и скорости охлаждения 1 K/мин она составляет 372 K. Для эффективной диэлектрической проницаемости нанокомпозита (R)-3-хинуклидинол/$Al_2O_3$ (измерены при тех же условиях) аномалии

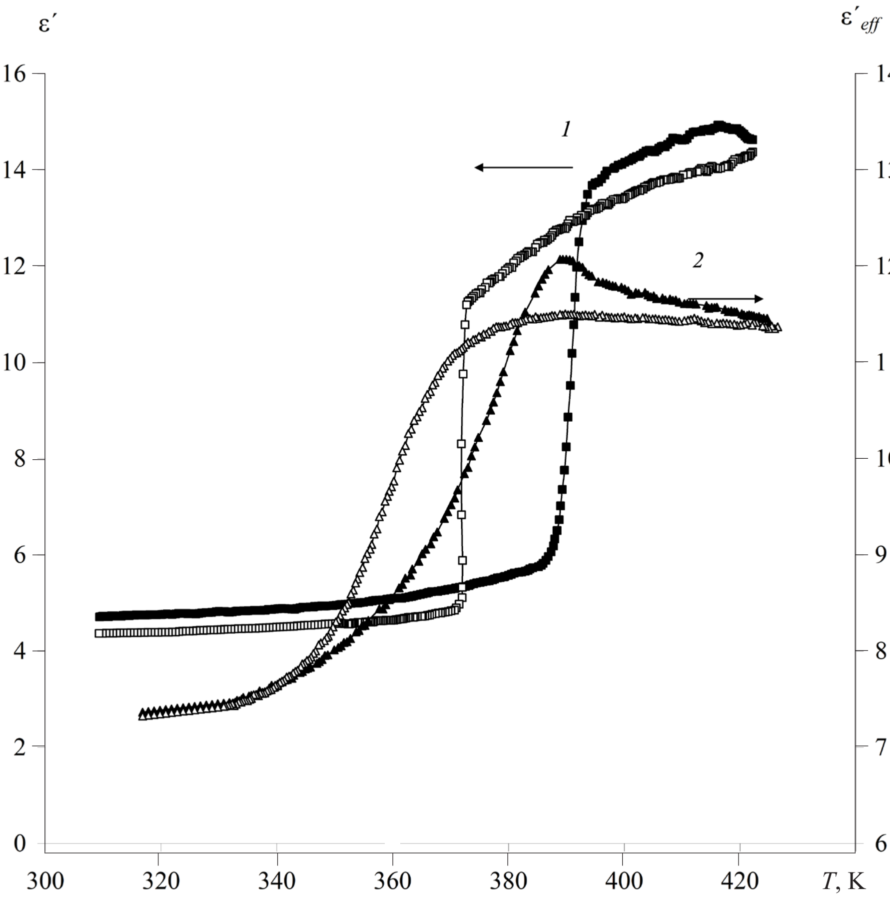



Рис. 2. Зависимости ε′(*T*) для объемного (*1*) и для композитного в $Al_2O_3$ (*2*) образцов (R)-3-хинуклидинола на частоте 100 кГц (затушеванные символы – нагрев, не затушеванные – охлаждение)

вблизи фазовых переходов сильно размыты и смещены в область более низких температур. Как показывает сравнение результатов для объемного и наноструктурированного (R)-3-хинуклидинола, для (R)-3-хинуклидинола в порах пленок $Al_2O_3$ при нагреве температура перехода снижается на 10 K, в то время как при охлаждении – на 25 K.

На следующем этапе исследований, с целью более точного определения температурного интервала сегнетоэлектрической фазы в наноразмерном (R)-3-хинуклидиноле, измеряли нелинейные диэлектрические характеристики объемного и наноструктурированного (R)-3-хинуклидинола. Температуры фазовых переходов определяли по температурным зависимостям коэффициента третьей гармоники $\gamma_{3\omega}$ в цикле нагрев-охлаждение (рис. 3). В ходе процесса нагрева оба образца имеют высокие значения коэффициента $\gamma_{3\omega}$ от комнатной температуры до 391 K (для объемного образца) и 380 K (для нанокомпозитного образца). Выше указанных температур коэффициент третьей гармоники меняется незначительно, что связано с переходом образцов в параэлектрическое состояние. При охлаждении рост коэффициента $\gamma_{3\omega}$ начинается около 372 и 347 K для объемного и нанокомпозитного (R)-3-хинуклидинолов соответственно.

Изменение температуры Кюри для сегнетоэлектриков, находящихся в нанопористых матрицах, может происходить под действием нескольких факторов. В первую очередь это связано с размерными эффектами, наблюдаемыми для изолированных наночастиц. При

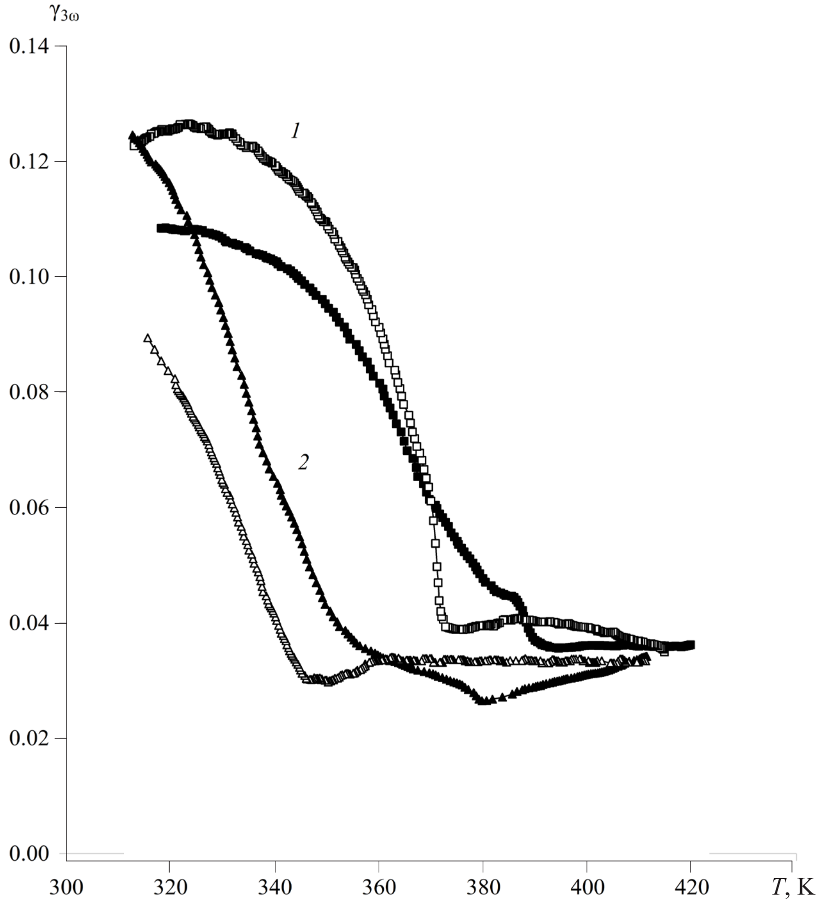



Рис. 3. Температурные зависимости коэффициента третьей гармоники для объемного (*1*) и композитного в $Al_2O_3$ (*2*) образцов (R)-3-хинуклидинола в циклах нагрев-охлаждение (затушеванные символы – нагрев, не затушеванные – охлаждение)

уменьшении размеров частиц доля поверхностных атомов растет. Свободная энергия $F$ наночастиц представляет собой сумму объемного ($F_V$) и поверхностного ($F_s$) вкладов:

$$F = F_V + F_s.$$

Понижение температуры фазового перехода (R)-3-хинуклидинола, введенного в поры оксида алюминия, согласуется с выводами теоретических моделей, разработанных на основе феноменологической теории Ландау и модели Изинга [12 – 14]. Эти модели предсказывают, что температура структурного фазового перехода для малых изолированных частиц сферической или цилиндрической формы смещается в глубь сегнетоэлектрической фазы при уменьшении размеров частиц. Выводы этих моделей были экспериментально подтверждены также для отдельных малых частиц сегнетоэлектриков типа титаната бария (см. работу [15] и ссылки в ней).

Для матричных нанокомпозитов, в отличие от отдельных сегнетоэлектрических частиц, необходимо учитывать взаимодействие включений с матрицей. В этом случае изменение поверхностной энергии будет определяться как

$$\tilde{F}_S = F_S + \sum \int_{S_i} \sigma_i dS_i + \sum \int_{S_i} \varphi_i \delta_i dS_i,$$

где $\sigma_i$ – поверхностное натяжение; $S_i$ – площадь поверхности частицы; $\varphi_i$ – электрический потенциал; $\delta_i$ – плотность поверхностного заряда.

Слагаемое $\sigma dS$ может давать значительный вклад в общую энергию систем с высокоразвитой поверхностью межфазных границ. Образование на межфазной границе двойного электрического слоя в результате эмиссии электронов или экранирования спонтанной поляризации приводит к появлению поверхностной проводимости и возникновению поляризации Максвелла — Вагнера. Деполяризующее поле, которое зависит от диэлектрической проницаемости, проводимости, формы и размера частиц, дает дополнительный вклад в размерный эффект, приводя к понижению температуры Кюри.

Кроме того, в статье [16] указывалось, что на сдвиг фазового перехода в матричных нанокомпозитах может влиять электрическое взаимодействие между сегнетоэлектрическими частицами в соседних порах. Однако в нашем случае электрическое взаимодействие между частицами в соседних порах существенной роли не играет в связи с малой величиной спонтанной поляризации (R)-3-хинуклидинола ($P_s \approx 7$ мкКл/см$^2$) и значительными расстояниями между соседними порами (около 200 нм). Учет механических напряжений для наночастиц при расчетах необходим в плане сохранения полярных свойств сегнетоэлектрика. В таком случае давление под кривой поверхностью будет определяться тензором поверхностных напряжений $\mu$. Зависимость полярных свойств сегнетоэлектрических наночастиц от поверхностного натяжения оценивалась в работах [17 – 19]. Так, в статье [19] было показано, что при $\mu = 0{,}5 - 50$ Н/м эффект сдвига температуры перехода за счет электрострикции начинает работать при радиусе кривизны наночастицы $R = 5 - 50$ нм, что значительно меньше размера пор в исследуемом композите.

Таким образом, понижение температуры сегнетоэлектрического фазового перехода (R)-3-хинуклидинола в пористых матрицах оксида алюминия, обнаруженное в данной работе, обусловлено влиянием размерных эффектов, характерных для свободных частиц.

### Заключение

Результаты исследования (R)-3-хинуклидинола, внедренного в поры оксида алюминия, представленные в данной работе, выявили понижение температуры Кюри и при нагреве, и при охлаждении образцов, по сравнению с объемными образцами. Понижение температуры фазового перехода допускает интерпретацию на основе известных теоретических моделей для сегнетоэлектрических малых частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-29-03004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fu D.-W., Zhang W., Cai H.-L., Ge J.-Z., Zhang Y., Xiong R.-G.** Diisopropyl ammonium chloride: a ferroelectric organic salt with a high phase transition temperature and practical utilization level of spontaneous polarization // Advanced Materials. 2011. Vol. 23. No. 47. Pp. 5658–5662.

2. **Fu D.-W., Cai H.-L., Liu Y., Ye Q., Zhang W., Zhang Y., Chen X.-Y., Giovannetti G., Capone M., Li J., Xiong R.-G.** Diisopropyl ammonium bromide is a high-temperature molecular ferroelectric crystal // Science. 2013. Vol. 339. No. 6118. Pp. 425–428.

3. **Piecha A., Gągor A., Jakubas R., Szklarz P.** Room-temperature ferroelectricity in diisopropyl ammonium bromide // CrystEngComm. 2013. Vol. 15. No. 5. Pp. 940–944.

4. **Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., Milinskiy A.Yu., Parfenov V.A., Egorova I.V.** Impact of nanoconfinement on the diisopropyl ammonium chloride ($C_6H_{16}ClN$) organic ferroelectric // Phase Transitions. 2018. Vol. 91. No. 3. Pp. 293–300.

5. **Milinskiy A.Yu., Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., Egorova I.V., Nguyen H.T.** Dielectric properties of an organic ferroelectric of bromide diisopro-

pyl ammonium embedded into the pores of nano-sized $Al_2O_3$ films // Journal of Physics: Condensed Matter. 2019. Vol. 31. No. 48. P. 485704.

6. **Nguyen H.T., Baryshnikov S.V., Milinskiy A.Yu., Charnaya E.V., Egorova I.V.** Linear and nonlinear dielectric properties of nanocomposites based on the organic ferroelectric of diisopropyl ammonium bromide // Phase Transitions. 2019. Vol. 92. No. 10. Pp. 899–906.

7. **Milinskiy A.Y., Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., Egorova I.V., Sarnatskii V.M.** Phase transitions in bulk and confined organic ferroelectric DIPAI // Results in Physics. 2020. Vol. 17. June. P. 103069.

8. **Li P.-F., Liao W.-Q., Tang Y.-Y., Qiao W., Zhao D., Ai Y., Yao Y.-F., Xiong R.-G.** Organic enantiomeric high-$T_C$ ferroelectrics // Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS). 2019. Vol. 116. No. 13. Pp. 5878–5885.

9. **Li P.-F., Tang Y.-Y., Wang Z.-X., Ye H.-Y., You Y.-M., Xiong R.-G.** Anomalously rotary polarization discovered in homochiral organic ferroelectrics // Nature Communications. 2016. Vol. 7. P. 13635.

10. **Ikeda S., Kominami H., Koyama K., Wada Y.J.** Nonlinear dielectric constant and ferroelectric-to-paraelectric phase transition in copolymers of vinylidene fluoride and trifluoroethylene // Applied Physics. 1987. Vol. 62. No. 8. Pp. 3339–3342.

11. **Юдин С.Г., Блинов Л.М., Петухова Н.Н., Палто С.П.** Сегнетоэлектрический фазовый переход в пленках Ленгмюра – Блоджетт фталоцианина меди // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. Вып. 9. С. 625–631.

12. **Zhong W.L., Wang Y.G., Zhang P.L., Qu D.B.** Phenomenological study of the size effect on phase transition in ferroelectric particles // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. No. 2. Pp. 698–703.

13. **Wang, C.L., Xin Y., Wang X.S., Zhong W.L.** Size effects of ferroelectric particles described by the transverse Ising model // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 62. No. 17. Pp. 11423–11427.

14. **Uskov A.V., Charnaya E.V., Pirozerskii A.L., Bugaev A.S.** The transverse Ising model of the ferroelectric phase transition in a system of coupled small particles // Ferroelectrics. 2015. Vol. 482. No. 1. P. 70–81.

15. **Sedykh P., Michael D.** Ferroelectric phase transition in barium titanate nanoparticles // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 79. No. 13. P. 134119.

16. **Пирозерский А.Л., Чарная Е.В.** Модель Изинга сегнетоэлектрического фазового перехода в системе взаимодействующих малых частиц // Физика твердого тела. 2010. Т. 52. Вып. 3. С. 572–576.

17. **Shchukin V.A., Bimberg D.** Spontaneous ordering of nanostructures on crystal surfaces // Rev. Mod. Phys. 1999. Vol. 71. No. 4. Pp. 1125–1171.

18. **Morozovska A.N., Glinchuk M.D., Eliseev E.A.** Phase transitions induced by confinement of ferroic nanoparticles // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 76. No. 1. P. 014102.

19. **Morozovska A.N., Eliseev E.A., Glinchuk M.D.** Size effects and depolarization field influence on the phase diagrams of cylindrical ferroelectric nanoparticles // Physica B. Condensed Matter. 2006. Vol. 387. No. 1–2. Pp. 358–366.

*Статья поступила в редакцию 30.03.2021, принята к публикации 11.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БАРЫШНИКОВ Сергей Васильевич** – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физического и математического образования Благовещенского государственного педагогического университета, г. Благовещенск, Российская Федерация.*

675000, Российская Федерация, г. Благовещенск, ул. Ленина, 104

svbar2003@list.ru

**МИЛИНСКИЙ Алексей Юрьевич** – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Благовещенского государственного педагогического университета, г. Благовещенск, Российская Федерация.*

675000, Российская Федерация, г. Благовещенск, ул. Ленина, 104

a.milinskiy@mail.ru

**СТУКОВА Елена Владимировна** – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой физики Амурского государственного университета, г. Благовещенск, Российская Федерация.*
675027, Российская Федерация, г. Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21
lenast@bk.ru

**АНТОНОВ Антон Анатольевич** – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физического и математического образования Благовещенского государственного педагогического университета, г. Благовещенск, Российская Федерация.*
675000, Российская Федерация, г. Благовещенск, ул. Ленина, 104
antonov.lit@bgpu.ru

## REFERENCES

1. **Fu D.-W., Zhang W., Cai H.-L., et al.,** Diisopropyl ammonium chloride: a ferroelectric organic salt with a high phase transition temperature and practical utilization level of spontaneous polarization, Advanced Materials. 23 (47) (2011) 5658–5662.

2. **Fu D.-W., Cai H.-L., Liu Y., et al.,** Diisopropyl ammonium bromide is a high-temperature molecular ferroelectric crystal, Science. 339 (6118) (2013) 425–428.

3. **Piecha A., Gągor A., Jakubas R., Szklarz P.,** Room-temperature ferroelectricity in diisopropyl ammonium bromide, CrystEngComm. 15 (5) (2013) 940–944.

4. **Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., Milinskiy A.Yu., et al.,** Impact of nanoconfinement on the diisopropyl ammonium chloride ($C_6H_{16}ClN$) organic ferroelectric, Phase Transitions. 91 (3) (2018) 293–300.

5. **Milinskiy A.Yu., Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., et al.,** Dielectric properties of an organic ferroelectric of bromide diisopropyl ammonium embedded into the pores of nanosized $Al_2O_3$ films, Journal of Physics: Condensed Matter. 31 (48) (2019) 485704.

6. **Nguyen H.T., Baryshnikov S.V., Milinskiy A.Yu., et al.,** Linear and nonlinear dielectric properties of nanocomposites based on the organic ferroelectric of diisopropyl ammonium bromide, Phase Transitions. 92 (10) (2019) 899–906.

7. **Milinskiy A.Y., Baryshnikov S.V., Charnaya E.V., et al.,** Phase transitions in bulk and confined organic ferroelectric DIPAI, Results in Physics. 17 (2020) 103069.

8. **Li P.-F., Liao W.-Q., Tang Y.-Y., et al.,** Organic enantiomeric high-$T_C$ ferroelectrics, PNAS. 116 (13) (2019) 5878–5885.

9. **Li P.-F., Tang Y.-Y., Wang Z.-X., et al.,** Anomalously rotary polarization discovered in homochiral organic ferroelectrics, Nature Communications. 7 (2016) 13635.

10. **Ikeda S., Kominami H., Koyama K., Wada Y.J.,** Nonlinear dielectric constant and ferroelectric-to-paraelectric phase transition in copolymers of vinylidene fluoride and trifluoroethylene, Applied Physics. 62 (8) (1987) 3339–3342.

11. **Yudin S.G., Blinov L.M., Petukhova N.N., Palto S.P.,** Ferroelectric phase transition in Langmuir – Blodgett films of copper phthalocyanine, Journal of Experimental and Theoretical Physics. Letters. 70 (9) (1999) 633–640.

12. **Zhong W.L., Wang Y.G., Zhang P.L., Qu D.B.,** Phenomenological study of the size effect on phase transition in ferroelectric particles, Phys. Rev. B. 50 (2) (1994) 698–703.

13. **Wang, C.L., Xin Y., Wang X.S., Zhong W.L.,** Size effects of ferroelectric particles described by the transverse Ising model, Phys. Rev. B. 62 (17) (2000) 11423–11427.

14. **Uskov A.V., Charnaya E.V., Pirozerskii A.L., Bugaev A.S.,** The transverse Ising model of the ferroelectric phase transition in a system of coupled small particles, Ferroelectrics. 482 (1) (2015) 70–81.

15. **Sedykh P., Michael D.,** Ferroelectric phase transition in barium titanate nanoparticles, Phys. Rev. B. 79 (13) (2009) 134119.

16. **Pirozerskii, A.L. Charnaya E.V.,** Ising model

for a ferroelectric phase transition in a system of interacting small particles, Physics of the Solid State. 52 (3) (2010) 620–624.

17. **Shchukin V.A., Bimberg D.,** Spontaneous ordering of nanostructures on crystal surfaces, Reviews of Modern Physics. 71 (4) (1999) 1125–1171.

18. **Morozovska A.N., Glinchuk M.D., Eliseev E.A.,** Phase transitions induced by confinement of ferroic nanoparticles, Phys. Rev. B. 76 (1) (2007) 014102.

19. **Morozovska A.N., Eliseev E.A., Glinchuk M.D.,** Size effects and depolarization field influence on the phase diagrams of cylindrical ferroelectric nanoparticles, Physica B: Condensed Matter. 387 (1–2) (2006) 358–366.

*Received 30.03.2021, accepted 11.05.2021.*

## THE AUTHORS

**BARYSHNIKOV Sergey V.**
*Blagoveschensk State Pedagogical University*
104 Lenin St., Blagoveshchensk, 675000, Russian Federation
svbar2003@list.ru

**MILINSKIY Alexey Yu.**
*Blagoveshchensk State Pedagogical University*
104 Lenin St., Blagoveshchensk, 675000, Russian Federation
a.milinskiy@mail.ru

**STUKOVA Elena V.**
*Amur State University*
21 Ignatievskoe Ave., Blagoveshchensk, 675027, Russian Federation
lenast@bk.ru

**ANTONOV Anton A.**
*Blagoveshchensk State Pedagogical University*
104 Lenin St., Blagoveshchensk, 675000, Russian Federation
antonov.lit@bgpu.ru

DOI: 10.18721/JPM.14202
УДК 546.03.535.015

# ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И СПЕКТРЫ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ТИТАНАТА-ЦИРКОНАТА БАРИЯ

**М.М. Михайлов[1], О.А. Алексеева[1], С.А. Юрьев[1], А.Н. Лапин[1], Е.Ю. Королева[2]**

[1] Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Исследованы состав, структура, гранулометрический состав, спектры диффузного отражения, интегральные коэффициенты поглощения солнечного излучения и диэлектрические свойства порошков $BaTi(1–x)Zr(x)O_3$, синтезированных из микропорошков $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$ при концентрации замещающих катионов циркония в диапазоне значений $x$ от 0 до 0,3. Установлены изменения интегрального коэффициента поглощения исследованных порошков при различной концентрации замещающих катионов циркония в пределах 34 %. Диэлектрические исследования, проведенные в широком температурном и частотном диапазонах, выявили существование двух фазовых переходов в исследованных соединениях. Определены температуры фазовых переходов; установлено, что низкотемпературный фазовый переход происходит при комнатных температурах, что позволяет рассматривать данные порошки в качестве пигментов для термостабилизирующих покрытий космических аппаратов при рабочих температурах.

**Ключевые слова:** титанат-цирконат бария, термостабилизирующее покрытие, фазовый переход, спектр диффузного отражения

**Ссылка при цитировании:** Михайлов М.М., Алексеева О.А., Юрьев С.А., Лапин А.Н., Королева Е.Ю. Фазовые переходы и спектры диффузного отражения твердых растворов титаната-цирконата бария // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 16–27. DOI: 10.18721/JPM.14202



# PHASE TRANSITIONS AND DIFFUSE REFLECTANCE SPECTRA OF BARIUM TITANATE-ZIRCONATE SOLID SOLUTIONS

**M.M. Mikhailov[1], O.A. Alekseeva[1], S.A. Yuryev[1], A.N. Lapin[1], E.Yu. Koroleva[2]**

[1] Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The composition, structure, particle size distribution, diffuse reflectance spectra, integral absorption coefficients of solar radiation and dielectric properties of $BaTi(1–x)Zr(x)O_3$ powders synthesized from micro powders $BaCO_3$, $ZrO_2$ and $TiO_2$ at $x = 0 – 0.3$ have been studied. Changes in the integral absorption coefficient of the powders at different concentrations of zirconium cations were found to be within 34 %. Dielectric studies conducted over the wide ranges of temperature and frequency showed the presence of two phase transitions, one of them undergoing near the room temperatures. This fact makes it possible to consider these powders as pigments for thermal control coatings at operating temperatures of space crafts.

**Keywords:** barium titanate-zirconate, thermal control coating, phase transition, diffuse reflectance spectrum

**Citation:** Mikhailov M.M., Alekseeva O.A., Yuryev S.A., Lapin A.N., Koroleva E.Yu., Phase transitions and diffuse reflectance spectra of barium titanate-zirconate solid solutions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 16–27. DOI: 10.18721/JPM.14202



## Введение

В настоящее время активно растет интерес к исследованию покрытий для термостабилизации, которые могут быть использованы для поддержания на заданном уровне температуры объектов, на которые они наносятся [1, 2]. Особенно интересны так называемые интеллектуальные покрытия, обладающие способностями отклика на малые изменения окружающей среды и модификации своих функциональных физических свойств под этим воздействием. Подобные покрытия очень перспективны для применения в качестве термостабилизирующих, в частности покрытий приборов космической техники, где способность таких покрытий изменять излучательную способность и излучаемую мощность в ответ на изменение температуры окружающего пространства или поглощаемой энергии позволяет стабилизировать температуру рабочих узлов космического аппарата.

В качестве пигментов для термостабилизирующих покрытий (ТСП) отражающего типа можно использовать твердые растворы с фазовыми переходами (ФП), которые сопровождаются перестройкой кристаллической структуры; ФП расположены в области рабочих температур эксплуатации аппарата. К соединениям такого типа относятся твердые растворы титанатов бария $BaTiO_3$, где катионы бария или титана частично замещены катионами других элементов. Температура Кюри титаната бария $BaTiO_3$ составляет 120 °C. Выше этого значения титанат бария имеет кубическую структуру. С понижением температуры $T$ происходит структурный переход в фазы с тетрагональной ($5 \leq T \leq 120$ °C), ромбической ($-90 \leq T \leq$ $\leq +5$ °C) и ромбоэдрической ($T < -90$ °C) решетками. При этом происходит изменение электрических [3], диэлектрических [4] и оптических [5] свойств. Наиболее существенная модификация указанных свойств наблюдается вблизи точки Кюри (при переходе от кубической к тетрагональной сингонии): в несколько раз меняется диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ и более чем на пять порядков электрическая проводимость $\sigma$ [3]. При этом могут меняться и оптические свойства [6].

Изменение электрических свойств в области фазовых переходов приводит к тому, что излучательная способность титаната бария, которая зависит от концентрации носителей заряда, может существенно меняться [6] в этой температурной области от значений, характерных для квазиметаллического состояния (0,10), до значений, характерных для диэлектриков (0,96). В случае нагрева покрытия до температуры ФП, его коэффициент излучения резко возрастает, что приводит к увеличению излучаемой энергии и снижению температуры покрытия. В обратной ситуации, т. е. при понижении температуры покрытия ниже рабочей, происходит скачкообразное падение излучательной способности. Это приводит к уменьшению излучаемой энергии и соответственно к повышению температуры до прежнего уровня. На этом основан принцип стабилизации температуры в рабочей области объекта, на поверхности которого находится стабилизирующее покрытие.

Для практических целей необходимы покрытия, работающие при более низких значениях температуры, по сравнению с теми, которые может обеспечить использование чистого титаната бария. Частичное замещение катионов бария или титана другими положительными ионами *A* или *B* с формированием твердых растворов типа $Ba_{1-x}A_xTiO_3$ или $BaTi_{1-x}B_xO_3$ позволяет сдвигать температуры Кюри в сторону более низких значений [7]. Величина смещения и характеристики ФП определяются типом замещающего элемента и его концентрацией. Если варьировать тип и концентрацию замещающих элементов *A* или *B*, а также условия получения пигментов, то можно управлять фазовыми переходами покрытий, изготовленными на основе таких соединений [8 – 10].

Целями настоящего исследования являлись твердофазный синтез соединения $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ при различных значениях *x*, а также определение его фазового и гранулометрического составов, температуры фазовых переходов и других важных физических свойств, характеризующих его способность отражать солнечное излучение (необходимо получить материал, перспективный для создания отражающих покрытий космических аппаратов).

В связи с поставленной целью, синтезированные образцы подвергались рентгенофазовому и гранулометрическому анализам, изучались их диэлектрические свойства, получены и проанализированы их спектры диффузного отражения и интегральный коэффициент поглощения.

### Образцы и методика эксперимента

В данной работе проведен твердофазный синтез твердого раствора $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ на основе микропорошков $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$ при концентрации замещающих катионов циркония в диапазоне от 0 до 0,3.

Образцы изготавливались методом твердофазного синтеза из микроразмерных порошков $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$ промышленного производства. Для каждой концентрации замещающих катионов циркония готовили смесь исходных микропорошков $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$ в таком соотношении, чтобы для полученного соединения $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ выполнялось заданное соотношение 1 : 1 атомов бария и соединения $Ti_{1-x}Zr_x$ при каждом значении *x*, в соответствии с молекулярными массами исходных порошков $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$. Микропорошок углекислого бария растворяли в дистиллированной воде при наложении ультразвуковых волн, затем в полученный раствор добавляли микропорошки диоксида кремния и диоксида титана. Полученную смесь перемешивали в течение 1 ч в магнитной мешалке. Смесь сушили при температуре 150 °С, перетирали в агатовой ступке и подвергали двойному нагреву в атмосфере: сначала прогревали 2 ч при температуре 800 °С, затем (после полного остывания) прогревали 2 ч при температуре 1200 °С. Скорость подъема температуры в среднем составляла 50 °С /мин, остывания – 9 °С /мин.

Были исследованы образцы $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ с шестью различными концентрациями замещающих катионов циркония в диапазоне от 0 до 30 %: $x = 0{,}01$; 0,03; 0,10; 0,15; 0,20; 0,30. Гранулометрический состав порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ исследовали с помощью лазерного счетчика-анализатора частиц Shimadzu SALD-2300. Рентгенофазовый анализ (РФА) выполняли на рентгеновском дифрактометре Shimadzu XRD 6000.

Для проведения диэлектрических измерений порошки прессовались под давлением 10 МПа в таблетки диаметром 1 см и толщиной 1 мм. В качестве электродов напылялись золотые контакты с подслоем хрома для лучшей адгезии. При измерениях для удаления адсорбированной воды образцы предварительно прогревались в течение 30 мин при температуре 120 °С.

Диэлектрические измерения проводились на широкополосном спектрометре Novocontrol BDS80 в диапазоне частот от 0,1 Гц до 10 МГц, амплитуда измерительного поля – 10 В/см; относительные погрешности измерения импеданса и емкости – около $3 \cdot 10^{-5}$. Измерения проводились в режиме нагрев-охлаждение, скорость изменения температуры составляла 1 – 2 °C/мин, температурный диапазон измерений составлял от –50 до 150 °C.

Для измерения спектров диффузного отражения образцы $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ прессовали в подложки диаметром 24 мм, высотой 2 мм под давлением 1 МПа со временем выдержки 2 мин. Регистрацию спектров диффузного отражения осуществляли на спектрофотометре Shimadzu UV-3600 Plus с приставкой диффузного отражения ISR-603 в диапазоне длин волн от 200 до 2200 нм с разрешением 5 нм.

## Экспериментальные результаты и их обсуждение

**Данные рентгенофазового анализа.** Анализ дифракционных спектров синтезированных порошков титанатов бария с частично замещенными катионами порошков показал, что пики наибольшей интенсивности соответствуют соединениям $BaTiO_3$ или $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$. В качестве примера на рис. 1 приведена рентгенограмма порошка $BaZr_{0,1}Ti_{0,9}O_3$ ($x$ = 0,1). Кроме основного соединения, в синтезированных порошках присутствовали фазы $ZrTiO_4$ и $BaZrO_3$, а также остатки непрореагировавших исходных порошков, использованных при синтезе: $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$. Изучение полученных рентгенограмм позволило сделать вывод, что основная фаза приготовленных порошков имела тетрагональную структуру.

На основе полученных дифракционных данных было рассчитано содержание различных соединений в синтезированных порошках $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ (табл. 1). Выход основной фазы для всех полученных образцов с содержанием замещающих катионов циркония от 0 до 0,3 составляет от 62,0 до 90,3 %. Наибольший выход основной фазы (90,3 %) наблюдается при концентрации замещающих катионов циркония $x$ = 0,05, а наименьший (62 %) – при $x$ = 0,30. Содержание фаз $BaZrO_3$ и $ZrO_2$ растет с увеличением содержания замещающих катионов циркония. Процент остальных неосновных фаз в синтезированных твердых растворах зависит от концентрации замещающих катионов незначительно и при различных концентрациях $x$ = 0,01 – 0,30 находится в следующих пределах:

$TiO_2$ – от 2,8 до 7,2 %,
$ZrTiO_4$ – от 2 до 3,7 %,
$BaCO_3$ – от 1,9 до 3,6 %.

**Данные по гранулометрическому составу образцов.** Гранулометрические исследования показали, что в синтезированных порошках содержатся частицы размерами от 0,2

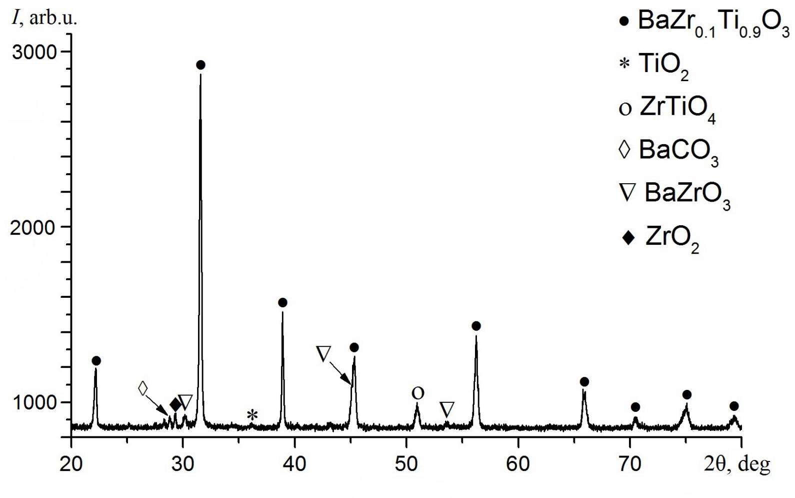



Рис. 1. Рентгенограмма порошка $BaZr_{0,1}Ti_{0,9}O_3$

Таблица 1

**Процентное содержание различных соединений в синтезированных порошках $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ при значениях $x$ = 0,01 – 0,30**

| $x$ | Содержание соединения, % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $BaTi_{1-x}Zr_xO_3/BaTiO_3$ | $ZrO_2$ | $TiO_2$ | $ZrTiO_4$ | $BaCO_3$ | $BaZrO_3$ |
| 0,01 | 84,9 | 0,2 | 6,7 | 3,7 | 3,6 | 0,9 |
| 0,03 | 85,1 | 0,8 | 7,0 | 3,3 | 3,4 | 0,4 |
| 0,05 | 90,3 | 1,3 | 2,8 | 2,2 | 1,9 | 1,5 |
| 0,10 | 80,6 | 3,9 | 6,2 | 3,0 | 3,1 | 3,3 |
| 0,15 | 78,9 | 5,0 | 5,1 | 2,5 | 2,3 | 6,2 |
| 0,20 | 67,6 | 11,4 | 6,2 | 2,0 | 2,0 | 10,8 |
| 0,30 | 62,0 | 10,8 | 7,2 | 2,6 | 2,4 | 15,0 |

Примечание. Представленные результаты получены по данным рентгенофазового анализа.

до 12 мкм. Функция распределения частиц порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ имеет вид кривой с двумя максимумами, которые соответствуют размерам частиц 0,51 – 0,53 мкм и 2,30 – 2,67 мкм. При изменении процентного содержания замещающего катиона циркония от 1 до 30 % значительного сдвига максимумов распределения не происходит (в пределах 0,02 и 0,37 мкм для первого и второго максимумов соответственно), как не происходит существенного изменения интенсивности данных максимумов (до 20 % для первого максимума и до 10 % для второго). Медианный размер частиц в порошках $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ составляет от 1,911 до 2,990 мкм. Максимальный медианный размер частиц наблюдается для порошка $BaTiO_3$ (2,196 мкм) и при содержании замещающих катионов циркония, равном 0,15 (2,199 мкм). Минимальный медианный размер частиц (1,911 мкм) соответствует максимальной концентрации катионов циркония, равной 0,03. Модальный диаметр частиц (диаметр с наибольшей частотой встречаемости размеров зерен или преобладающая фракция) для всех исследуемых порошков одинаков и составлял 2,234 мкм.

**Исследования диэлектрических свойств.** На температурных зависимостях диэлектрической проницаемости всех исследованных образцов можно выделить два пика: более выраженный наблюдается в температурной области 109 – 117 °C и менее выраженный – в области 27 – 47 °C (рис. 2). Следует отметить, что при нагреве значения температуры, соответствующие максимумам диэлектрической проницаемости, ниже, чем при охлаждении (см. для примера рис. 2), для высокотемпературного пика в области температур 109 – 117 °C температурный гистерезис составляет величину порядка 5 °C. Соответствующие данные для остальных значений $x$ аналогичны.

Во всем температурном диапазоне измерений были получены и проанализированы частотные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$ твердых растворов $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$. Для описания релаксационных вкладов использовалось распределение Коула – Коула, позволяющее описывать спектры, уширенные по сравнению с дебаевскими. В качестве модельной функции использовалась сумма вкладов от проводимости на постоянном токе (DC), от нескольких релаксационных процессов и вклад от высокочастотной проводимости:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{i=1}^{n} CC_i + j\frac{\sigma_{DC}}{\omega\varepsilon_0} =$$

$$= \varepsilon_\infty + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta\varepsilon_i}{1+(i\omega\tau_i)^{\alpha_i}} + j\frac{\sigma_{DC}}{\omega\varepsilon_0},$$

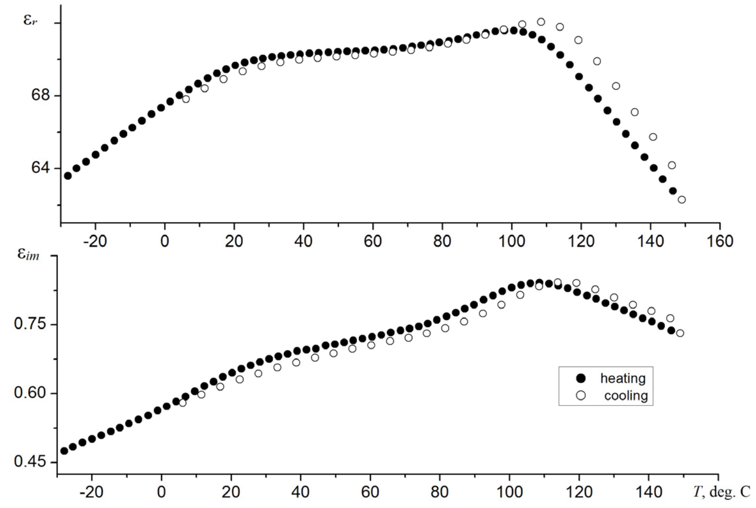



Рис. 2. Температурные зависимости диэлектрической проницаемости твердого раствора $BaZr_{0,1}Ti_{0,9}O_3$ при нагреве и охлаждении; частота измерения $f = 1{,}4$ кГц

где $CC_i$ – вклад релаксационного процесса, описываемый эмпирической формулой Коула – Коула; $\varepsilon_\infty$ – вклад фононных мод и электронной поляризуемости; $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_\infty$; $\tau$, с, – наиболее вероятное значение времени (частоты релаксации $\omega$), $\tau = 2\pi/\omega$; $\sigma_{DC}$, См/м, – удельная проводимость на постоянном токе; $\alpha$ – коэффициент распределения времен релаксации ($0 < \alpha < 1$).

Наилучшим образом частотные зависимости аппроксимировались при суммировании вкладов от трех релаксационных процессов; процессы различаются наиболее вероятными частотами релаксации: один из процессов наблюдался в области частот $f = 0{,}1 - 1$ Гц и имел монотонную температурную зависимость параметра $\Delta\varepsilon$; два других, имеющих разные частоты релаксации, лежащие в области $f = 10^3 - 10^4$ Гц, имели максимумы на зависимостях $\Delta\varepsilon(T)$ при температурах около 27 °C (процесс *1*) и около 109 °C (процесс *2*) (рис. 3). На рис. 3 для примера представлены соответствующие данные для двух исследованных образцов.

Таким образом, нам удалось выявить релаксационные процессы, ответственные за фазовые переходы в исследуемом материале. Из температурных зависимостей $\Delta\varepsilon$ нами были определены температуры фазовых переходов для всех составов (табл. 2). Температура максимумов $\Delta\varepsilon(T)$ для процесса *2* во всех образцах близка к температуре сегнетоэлектрического перехода из кубической в тетрагональную фазу в чистом $BaTiO_3$ ($T_C$ = = 120 °C) или твердых растворах $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ с низкой концентрацией циркония. Небольшое понижение температуры этого перехода согласуется с фазовой диаграммой твердых растворов $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$, согласно которой при низком содержании циркония в этих растворах происходит понижение температуры этого перехода [11].

Максимумы $\Delta\varepsilon(T)$ для релаксационного процесса *1* в образцах $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ наблюдаются при температурах, близких к соответствующему значению перехода между двумя сегнетоэлектрическими фазами чистого $BaTiO_3$ (T = 5 °C) с орторомбической и тетрагональной кристаллическими структурами. Наблюдаемое повышение температуры этого перехода в наших образцах согласуется с фазовой диаграммой твердых растворов $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ в области малых концентраций циркония.

Однако следует заметить, что значения температуры обоих фазовых переходов во всех шести образцах меняются несущественно при изменении предполагаемой концен-

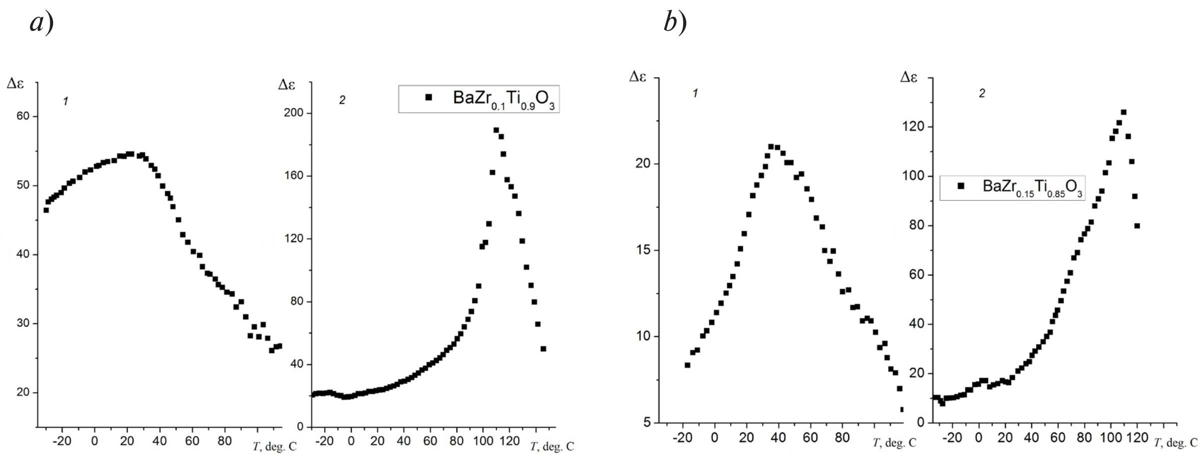



Рис. 3. Температурные зависимости параметра Δε для релаксационных процессов *1* и *2* (см. текст) в твердых растворах $BaZr_{0,1}Ti_{0,9}O_3$ (*a*) и $BaZr_{0,15}Ti_{0,85}O_3$ (*b*)

Таблица 2

**Значения температуры, при которых наблюдались максимумы на зависимостях Δε(*T*) для релаксационных процессов *1* и *2* в исследованных образцах $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$**

| Значение *x* | Температура максимума, °C | |
|---|---|---|
| | Процесс *1* | Процесс *2* |
| 0,01 | 31,6 | 118,5 |
| 0,03 | 36,9 | 115,6 |
| 0,10 | 27,4 | 112,4 |
| 0,15 | 35,9 | 111,2 |
| 0,20 | 42,1 | 109,6 |
| 0,30 | 27,8 | 113,9 |

П р и м е ч а н и е. Представленные результаты получены по данным диэлектрических измерений. Процессы *1* и *2* различаются диапазонами температуры, где у них наблюдались максимумы.

трации циркония в растворах и не проявляют зависимости от *x* [12]. Вероятно, это связано с тем, что основной вклад в диэлектрический отклик полученных растворов вносит фаза твердых растворов $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ с низкой, примерно одинаковой во всех образцах концентрацией циркония $x < 0,1$.

**Спектры диффузного отражения и интегральный коэффициент поглощения.** Исследование спектров диффузного отражения в солнечном диапазоне синтезированных порошков, необходимое для определения оптимальной концентрации атомов циркония для получения порошка $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ с высокой отражательной способностью и малым значением коэффициента поглощения $a_s$, представляет особый интерес.

Спектры диффузного отражения порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ регистрировались в ультрафиолетовой, видимой и ближней инфракрасной (ИК) областях. На рис. 4 приведены спектры диффузного отражения синтезированных порошков с содержанием замещающих катионов циркония в диапазоне от 0 до 30%.

Для всех концентраций замещающих катионов циркония коэффициент отражения

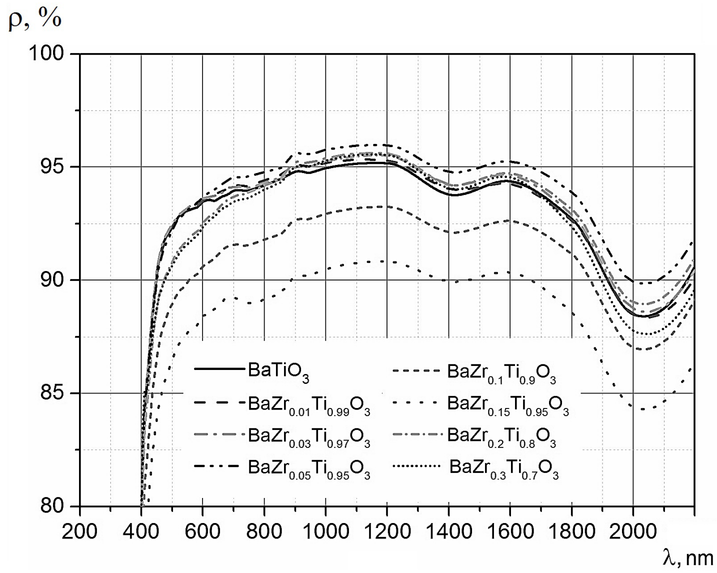



Рис. 4. Спектры диффузного отражения твердых растворов $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ с различным содержанием замещающих катионов циркония

порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ изменяется в пределах от 85 до 96 % в области от края основного поглощения до 2200 нм. Качественно форма спектров ρ практически не различается для всех исследуемых порошков, при длинах волны 1400 и 2040 нм видны полосы поглощения, обусловленные ОН-группами, находящимися на поверхности зерен и гранул порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ [13]. В области края основного поглощения при увеличении концентрации атомов циркония наблюдается незначительное ухудшение отражательной способности. Из спектров диффузного отражения, изображенных на рис. 4, следует, что наибольшим отражением в видимой и ближней ИК-областях обладает порошок $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ при концентрации атомов циркония $x$ = 0,05, а наименьшим отражением – при концентрации $x$ = 0,15. Разница в коэффициентах отражения для различного содержания атомов циркония на одной длине волны достигает 10 %.

Интегральный коэффициент поглощения солнечного излучения $a_s$ рассчитывался на основе коэффициента диффузного отражения по следующей формуле:

$$a_s = 1 - R_s = \\ = 1 - \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_\lambda I_\lambda d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_\lambda d\lambda} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_\lambda}{n},$$

где $R_s$ – интегральный коэффициент диффузного отражения солнечного излучения, рассчитанный как среднеарифметическое значение коэффициента диффузного отражения по 24 точкам, расположенным на равноэнергетических участках спектра излучения Солнца, согласно международным стандартам [14, 15]; $\rho_\lambda$ – спектральная отражательная способность; $I_\lambda$ – спектр излучения Солнца; $\lambda_1$, $\lambda_2$, мкм, – крайние значения диапазона солнечного спектра (в области 0,2 – 2,5 мкм Солнце излучает 98 % всей энергии); $n$ – количество равноэнергетических участков солнечного спектра, определяемых из таблиц стандартов [14, 15].

Как видно из данных табл. 3, все синтезированные порошки имеют достаточно низкие интегральные коэффициенты по-

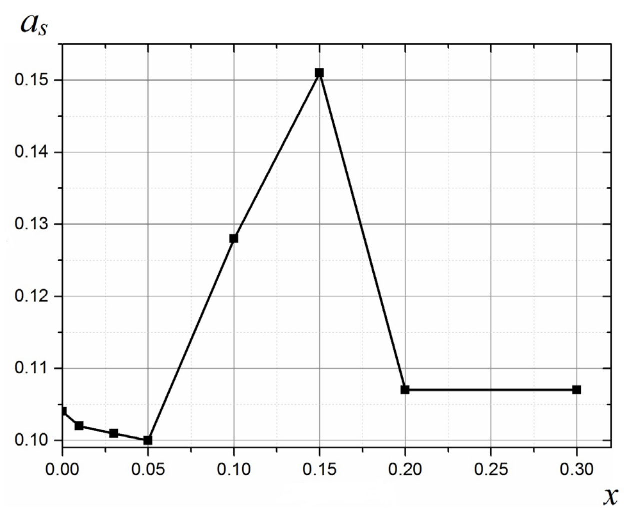



Рис. 5. Зависимость интегрального коэффициента поглощения солнечного излучения от содержания циркония в твердом растворе $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$

Таблица 3

**Значения интегрального коэффициента поглощения солнечного излучения порошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ при различных значениях $x$**

| $x$ | 0,00 | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_s$ | 0,104 | 0,102 | 0,101 | 0,100 | 0,128 | 0,151 | 0,107 | 0,107 |

П р и м е ч а н и е. Представленные результаты получены расчетным путем на основе спектров диффузного отражения солнечного излучения.

глощения солнечного излучения в диапазоне от 0,100 до 0,151 и могут быть отнесены к классу «солнечный отражатель». Наименьшим значением $a_s$ (0,100) обладает порошок $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$, содержащий 5 % катионов циркония ($x$ = 0,05), а наибольшим (0,151) – порошок с содержанием 15 % катионов циркония ($x$ = 0,15).

На рис. 5 представлена зависимость $a_s$ от процентного содержания замещающих атомов циркония в диапазоне от 0 до 30 % ($a$ = = 0 – 0,30). При увеличении концентрации атомов циркония в соединениях $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ интегральный коэффициент поглощения солнечного излучения изменяется по достаточно сложной зависимости с минимумом и максимумом. Наибольшие значения $a_s$ наблюдаются при концентрациях атомов циркония 10 и 15 %.

## Заключение

Методом твердофазной реакции с двухстадийным прогревом синтезированы порошки $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ из смесей порошков микронных размеров $BaCO_3$, $ZrO_2$ и $TiO_2$ при концентрации замещающих атомов циркония 1 – 30 масс. % ($x$ = 0,01 – 0,30). Исследованы зависимости гранулометрического и фазового составов, спектров диффузного отражения в ультрафиолетовой, видимой и ближней инфракрасной областях и интегрального коэффициента поглощения $a_s$ от концентрации атомов циркония. Установлено, что максимальный выход основной фазы порошка составляет 90,3 %. Вид спектров диффузного отражения синтезированных микропорошков $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ в зависимости от концентрации атомов циркония изменяется незначительно, однако количественные изменения достигают 10 %. Изменение интегрального коэффициента поглощения исследованных порошков при различной концентрации замещающих катионов циркония может достигать 34 %. Проведенные диэлектрические исследования спрессованных порошков выявили присутствие двух максимумов на температурных зависимостях диэлектрической проницаемости, связанных с фазовыми переходами (ФП). Определены температуры этих ФП для всех составов. Обнаружено, что низкотемпературный ФП в исследованных растворах наблюдается при комнатных температурах, что выдвигает данные соединения в разряд перспективных для изготовления пигментов термостабилизирующих покрытий для эксплуатации при рабочих температурах космических аппаратов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-60067.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Li Q., Fan D., Xuan Y.** Thermal radiative properties of plasma sprayed thermochromic coating // Journal of Alloys and Compounds. 2014. Vol. 583. 25 February. Pp. 516–522.

2. **Green N.W., Kim W., Low N., Zhou Ch., Andersen A., Linton T., Martin E.** Electrostatic discharges from conductive thermal coatings // IEEE Transactions on Plasma Science. 2019. Vol. 47. No. 8. Part 2. Pp. 3759–3765.

3. **Yamamoto T., Sato Y., Tanaka T., Hayashi K., Ikuhara Y., Sakuma T.** Electron transport behaviors across single grain boundaries in *n*-type $BaTiO_3$, $SrTiO_3$ and ZnO // Journal of Materials Science. 2005. Vol. 40. No. 4. Pp. 881–887.

4. **Lee J.H., Nersisyan H.H., Lee H.H., Won C.W.** Structural change of hydrothermal $BaTiO_3$ powder // Journal of Materials Science. 2004. Vol. 39. No. 4. Pp. 1397–1401.

5. **Rout S.K.** Phase formation and dielectric studies of some BaO-$TiO_2$-$ZrO_2$ based perovskite system. A thesis in physics (Materials Science). April 2006. Department of Physics. National Institute of Technology. Rourkela-769 008 (A Deemed University) Orissa, India. 166 p.

6. **Wang H., Cao X., Liu F., Guo S., Ren X., Yang S.** Synthesis and electrochemical properties of transparent nanostructured $BaTiO_3$ film electrodes // Open Journal of Inorganic Chemistry. 2015. Vol. 5. No. 2. Pp. 30–39.

7. **Mikhailov M.M., Ul'yanitskii V.Yu., Vlasov V.A., Sokolovskiy A.N., Lovitskii A.A.** Thermostabilizing $BaTiO_3$ coatings synthesized by detonation spraying method // Surface and Coating Technology. 2017. Vol. 319. 15 June. Pp. 70–75.

8. **Ho C., Fu S.-L.** Effects of zirconium on the structural and dielectric properties of (Ba, Sr) $TiO_3$ solid solution // Journal of Materials Science. 1990. Vol. 25. No. 11. Pp. 4699–4703.

9. **Son S.Y., Kim B.S., Oh S.H., Choi D.K., Yoo C.C., Lee S.I., Dai Z.R., Ohuchi F.S.** Electrical properties of (Ba, Sr)$TiO_3$ on (Sr, Ca)$RuO_3$ electrode // Journal of Materials Science. 1999. Vol. 34. No. 24. Pp. 6115–6119.

10. **Сабури О., Вакино К., Фудзикава Н.** Полупроводники на основе титаната бария. Пер. с японского яз. М.: Энергоиздат, 1982. 53 с.

11. **Горев М.В., Бондарев В.С., Флёров И.Н., Сью Ф., Саварио Ж.-М.** Исследования теплоемкости двойных перовскитоподобных соединений $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ // Физика твердого тела. 2005. Т. 47. № 12. С. 2212–2216.

12. **Shvartsman V.V., Zhai J., Kleemann W.** The dielectric relaxation in solid solutions $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$ // Ferroelectrics. 2009. Vol. 379. No. 1. Pp. 77–85.

13. **Cronemeyer D.C.** Infrared absorption of reduced rutile $TiO_2$ single crystals // Physical Review. 1959. Vol. 113. No. 5. Pp. 1222–1226.

14. ASTM E490 – 00a standard solar constant and zero air mass solar spectral irradiance tables. 2005. https://www.astm.org/Standards/E490.htm

15. ASTM E903 – 96 standard test method for solar absorptance. Reflectance, and transmittance of materials using integrating spheres. 2005. https://www.astm.org/DATABASE.CART/HISTORICAL/E903-96.htm

*Статья поступила в редакцию 31.03.2021, принята к публикации 27.04.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**МИХАЙЛОВ Михаил Михайлович** — *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией радиационного и космического материаловедения Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация.*

634050, Российская Федерация, г. Томск, пр. Ленина, 40

membrana2010@mail.ru

**АЛЕКСЕЕВА Ольга Александровна** — *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории радиационного и космического материаловедения Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация.*

634050, Российская Федерация, г. Томск, пр. Ленина, 40

kblackhole2010@yandex.ru

**ЮРЬЕВ Семен Александрович** — *кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории радиационного и космического материаловедения Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация.*

634050, Российская Федерация, г. Томск, пр. Ленина, 40

semyon.yuryev@tusur.ru

**ЛАПИН Алексей Николаевич** — *кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории радиационного и космического материаловедения Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация.*

634050, Российская Федерация, г. Томск, пр. Ленина, 40

alexey.lapin@tusur.ru

**КОРОЛЕВА Екатерина Юрьевна** — *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Физика нанокомпозитных материалов электронной техники» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

e.yu.koroleva@mail.ioffe.ru

## REFERENCES

1. **Li Q., Fan D., Xuan Y.,** Thermal radiative properties of plasma sprayed thermochromic coating, Journal of Alloys and Compounds. 583 (25 February) (2014) 516–522.

2. **Green N.W., Kim W., Low N., et al.,** Electrostatic discharges from conductive thermal coatings, IEEE Transactions on Plasma Science. 47 (8-2) (2019) 3759–3765.

3. **Yamamoto T., Sato Y., Tanaka T., et al.,** Electron transport behaviors across single grain boundaries in *n*-type $BaTiO_3$, $SrTiO_3$ and ZnO, Journal of Materials Science. 40 (4) (2005) 881– 887.

4. **Lee J.H., Nersisyan H.H., Lee H.H., Won C.W.,** Structural change of hydrothermal $BaTiO_3$ powder, Journal of Materials Science. 39 (4) (2004) 1397–1401.

5. **Rout S.K.,** Phase formation and dielectric studies of some BaO-$TiO_2$-$ZrO_2$ based perovskite system, A thesis in physics (Materials Science), April 2006, Department of Physics, National Institute of Technology, Rourkela-769 008 (A Deemed University) Orissa, India, 2006.

6. **Wang H., Cao X., Liu F., et al.,** Synthesis and electrochemical properties of transparent nano-

structured $BaTiO_3$ film electrodes, Open Journal of Inorganic Chemistry. 5 (2) (2015) 30–39.

7. **Mikhailov M.M., Ul'yanitskii V.Yu., Vlasov V.A., et al.,** Thermostabilizing $BaTiO_3$ coatings synthesized by detonation spraying method, Surface Coating Technology. 319 (15 June) (2017) 70–75.

8. **Ho C., Fu S.-L.,** Effects of zirconium on the structural and dielectric properties of (Ba, Sr) $TiO_3$ solid solution, Journal of Materials Science. 25 (11) (1990) 4699–4703.

9. **Son S.Y., Kim B.S., Oh S.H., et al.,** Electrical properties of (Ba, Sr) $TiO_3$ on (Sr, Ca) $RuO_3$ electrode, Journal of Materials Science. 34 (24) (1999) 6115–6119.

10. **Saburi O., Wakino K., Fuzikawa N.,** Semiconductors based on barium titanate, Tokyo, 1977.

11. **Gorev M., Bondarev V., Flerov I., et al.,** Heat capacity study of double perovskite-like compounds $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$, Physics of the Solid State. 47 (12) (2005) 2304–2308.

12. **Shvartsman V.V., Zhai J., Kleemann W.,** The dielectric relaxation in solid solutions $BaTi_{1-x}Zr_xO_3$, Ferroelectrics. 379 (1) (2009) 77–85.

13. **Cronemeyer D.C.,** Infrared absorption of reduced rutile $TiO_2$ single crystals, Physical Review. 113 (5) (1959) 1222–1226.

14. ASTM E490 – 00a Standard Solar Constant and Zero Air Mass Solar Spectral Irradiance Tables. 2005. https://www.astm.org/Standards/E490.htm

15. ASTM E903 – 96 Standard Test Method for Solar Absorptance, Reflectance, and Transmittance of Materials Using Integrating Spheres. 2005. https://www.astm.org/DATABASE.CART/HISTORICAL/E903-96.htm

*Received 31.03.2021, accepted 27.04.2021.*

## THE AUTHORS

**MIKHAILOV Mikhail M.**
*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*
40, Lenin Ave. Tomsk, 634050, Russian Federation
membrana2010@mail.ru

**ALEKSEEVA Olga A.**
*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*
40, Lenin Ave. Tomsk, 634050, Russian Federation
blackhole2010@yandex.ru

**YURYEV Semen A.**
*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*
40, Lenin Ave. Tomsk, 634050, Russian Federation
semyon.yuryev@tusur.ru

**LAPIN Alexey N.**
*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*
40, Lenin Ave. Tomsk, 634050, Russian Federation
alexey.lapin@tusur.ru

**KOROLEVA Ekaterina Yu.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
e.yu.koroleva@mail.ioffe.ru

DOI: 10.18721/JPM.14203
УДК 537

# АНАЛИЗ ПРИЧИН АНОМАЛЬНОГО ПОВЫШЕНИЯ ЕМКОСТИ ПЛЕНОК ФУЛЛЕРИТА $C_{60}$ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

**Д.И. Долженко, И.Б. Захарова, Н.Т. Сударь**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Известный экспериментальный факт аномального возрастания диэлектрической проницаемости ε пленок фуллерита $C_{60}$ на низких частотах (ниже 1 кГц) переменного электрического тока не имеет до настоящего времени убедительного объяснения. Данное исследование было нацелено на выяснение причин указанной аномалии. Была изготовлена структура *p*-Si/$C_{60}$/эвтектика InGa и измерена частотная зависимость ее емкости. На основании полученных экспериментальных данных проведен многосторонний анализ явления. Показано, что возможной причиной аномального повышения ε в низкочастотной области является интеркаляция фуллерита молекулами кислорода с образованием молекулярных групп $C_{60}/O_2$, обладающих значительным дипольным моментом. Наличие таких групп вызывает кардинальное различие между значениями диэлектрической проницаемости поверхностных областей кристаллитов и таковой для области их объема, что, в свою очередь, приводит к кажущемуся подъему диэлектрической проницаемости исследуемой структуры.

**Ключевые слова:** фуллерит $C_{60}$, поликристаллическая пленка, диэлектрическая проницаемость, уравнение Фрёлиха, интеркаляция кислорода

**Ссылка при цитировании:** Долженко Д.И., Захарова И.Б., Сударь Н.Т. Анализ причин аномального повышения емкости пленок фуллерита $C_{60}$ на низких частотах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 28–37. DOI: 10.18721/JPM.14203



# THE ANOMALOUS RISE OF CAPACITANCE OF $C_{60}$ FULLERITE FILMS AT LOW FREQUENCIES: A CAUSE ANALYSIS

**D.I. Dolzhenko, I.B. Zakharova, N.T. Sudar**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

A known physical fact of the anomalous rise of dielectric permittivity ε of $C_{60}$ fullerite films at ac low frequencies (below 1 kHz) has not had a convincing explanation up to now. Our study was aimed at elucidating the causes of that anomaly. The *p*-Si/$C_{60}$/InGa-eutectic structure was made and a frequency dependence of its capacitance was measured. Relying on the experimental result, a versatile analysis of the phenomenon was carried out. It was shown that the anomalous rise of ε value in the low-frequency region resulted from oxygen intercalation of fullerite with formation of $C_{60}/O_2$ molecular groups exhibited significant dipole momenta. The presence of such groups produced a dramatic difference between dielectric permittivity of the crystallites' surface areas and that of their volumes. As a result, the difference led to an apparent increase in the dielectric permittivity ε of the structure under study.

**Keywords:** $C_{60}$ fullerite, polycrystalline film, permittivity, Frohlich's equation, oxygen intercalation

**Citation:** Dolzhenko D.I., Zakharova I.B., Sudar N.T., The anomalous rise of capacitance of $C_{60}$ fullerite films at low frequencies: a cause analysis, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 28–37. DOI: 10.18721/JPM.14203

## Введение

В настоящее время тонкие пленки фуллеренов рассматриваются как перспективный материал органической электроники [1 – 3]. При этом наибольшее внимание уделяется изучению свойств фуллерена $C_{60}$, поскольку его молекулы обладают наибольшей симметрией и стабильностью. Характерной особенностью фуллерена в конденсированной фазе (фуллерита) является возможность интеркаляции атомов примеси в его кристаллическую решетку [4]. В гранецентрированной кубической (ГЦК) решетке фуллерита $C_{60}$ примесные атомы заполняют октаэдрические и тетраэдрические пустоты между молекулами «хозяина», взаимодействуют с ними и способны оказывать заметное влияние на физические свойства фуллеритовых пленок [5].

Особый интерес вызывает интеркаляция фуллерита атомами кислорода. Электронное сродство молекул $C_{60}$ значительно выше, чем у молекул кислорода, оно оценивается примерно в 2,67 эВ [6], тогда как для кислорода – примерно в 0,45 эВ [7]. Поэтому можно ожидать, что кислород будет выступать как донор электронов, а фуллерит – как их акцептор. Авторы статьи [8] полагают, что частичный перенос электрона с донора на акцептор приводит к возникновению у молекулы $C_{60}/O_2$ дипольного момента, что, по их мнению, и вызывает значительный рост диэлектрической проницаемости для пленок $C_{60}$ на частотах ниже $10^3$ Гц. Однако собственно физический механизм возникновения этого явления авторами [8] не обсуждается.

Зачастую причиной аномального возрастания емкости на низких частотах приложенного переменного напряжения является электродная поляризация; последняя возникает в диэлектриках, обладающих заметной электропроводностью, когда имеется плохой контакт между образцом и электродом. При таких условиях на интерфейсе формируется тонкий слой, который характеризуется значительным электрическим импедансом [9]. Очевидно, что данная причина не связана с физическими свойствами собственно фуллеритовых пленок.

В литературе рассматриваются и другие причины аномального возрастания емкости диэлектриков в низкочастотной области. Например, поляризация Максвела – Вагнера, которая наблюдается в неоднородных диэлектриках с проводящими примесями [10] или, для поликристаллических диэлектриков, это различие между значениями диэлектрической проницаемости (и проводимости) внешней и внутренней областей кристаллитов – модель «зерно-прослойка» [3, 10].

Цель данного исследования – выяснение возможной роли описанных эффектов и оценка их влияния на диэлектрическую проницаемость пленок фуллерита $C_{60}$.

## Методика эксперимента

Объектом изучения служила пленка фуллерита $C_{60}$, нанесенная на холодную подложку из кремния *p*-типа марки КДБ-1 методом термического напыления. Толщина пленки $L$, измеренная с помощью интерференционного микроскопа МИИ-4, составляла 250 ± 50 нм.

Особое внимание уделялось обеспечению надежных контактов между образцом фулерита и электродами.

Созданная указанным методом пленка $C_{60}$ имела поликристаллическую структуру с размерами кристаллитов $D$, равными 100 – 200 нм [11]. Кристаллиты, формирующие пленку, располагались на кремниевой подложке хаотично, в несколько слоев. Перед проведением экспериментов, пленки $C_{60}$, нанесенные на подложки, выдерживались в воздушной атмосфере в течение длительного времени с целью обеспечения надежного контакта пленки с кремниевой подложкой, поскольку последняя использовалось в качестве одного из электродов.

Вторым электродом служила зонд-игла, изготовленная из жидкой индий-галлиевой эвтектики [12]. Такой электрод обеспечивал надежный электрический контакт с пленкой фуллерита, без ее механического повреждения, за счет взаимодействия сил поверхностного натяжения эвтектики и гравитационных сил.

Для измерения емкости $C$ и тангенса угла диэлектрических потерь tgδ в диапазоне частот от 25 Гц до 1 МГц использовался измеритель иммитанса Е7-20. Амплитуда тестового переменного напряжения составляла 0,04 В. Все измерения проводились при комнатной температуре $T$ = 293 К в затемненной измерительной ячейке. Перед диэлектрическими измерениями исследуемый участок пленки $C_{60}$ подвергался электроформовке, в ходе которой на электроды в течение нескольких десятков минут подавалось постоянное напряжение $U$ = 30 В. Электроформовка значительно увеличивала стабильность показаний и воспроизводимость результатов при повторных измерениях на данном участке пленки [11].

Площадь пятна контакта игольчатого электрода $S$ с пленкой фуллерита рассчитывалась нами на основании данных измерения емкости $C$ исследуемой структуры на частоте 1 МГц. Принималось, что на этой частоте диэлектрическая проницаемость исследуемой пленки близка к значению высокочастотной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_\infty$ фуллерита $C_{60}$. Согласно литературным данным [13], $\varepsilon_\infty$ = 2,6. Поэтому при значении емкости $C$ = 8,2 пФ площадь пятна контакта получается равной $S \approx 0{,}09$ мм$^2$. В дальнейшем это значение $S$ использовалось при расчете спектра диэлектрической проницаемости во всем исследованном диапазоне частот.

## Экспериментальные результаты и их обсуждение

На первом этапе исследования стояла задача выяснить, вызвано ли возрастание емкости в области низких частот явлением электродной поляризации. Согласно сведениям, изложенным в монографии [9], при низкочастотных измерениях поправка на электродные эффекты, определяемая как разность между измеряемой емкостью $C$ и истинной емкостью $C_{true}$ (она реализуется в отсутствие электродной поляризации), зависит от проводимости материала σ и частоты $f$, на которой проводится измерение, причем

$$C - C_{true} \sim \sigma^2 / f^2. \qquad (1)$$

Поскольку фотопроводимость фуллерита $C_{60}$ наблюдается в видимом спектральном диапазоне, проводимость исследуемой структуры можно было увеличить путем светового воздействия на нее. С этой целью мы использовали светодиод белого свечения с цветовой температурой 4000 К, создающий световой поток в 250 лм. Свет с помощью специальной линзы фокусировался на область контакта индий-галлиевого электрода с пленкой фуллерита. При освещении структуры ее проводимость возрастала от $7 \cdot 10^{-7}$ См/см (значение при затемнении) до $3 \cdot 10^{-5}$ См/см.

На рис. 1 представлены полученные нами низкочастотные зависимости емкости исследуемой структуры в условиях затемнения (кривая *1*) и светодиодного освещения (кривая *2*), т. е. при различной концентрации в ней свободных носителей заряда, определяющих проводимость. Видно, что кривые на графике практически совпадают, хотя значение емкости должно было бы вырасти примерно на четыре порядка, в соответствии с формулой (1). Следует также отметить, что в рассматриваемых координатах $C\,(1/f^2)$ предполагаемая зависимость в случае электродной поляризации должна была бы быть линейной, однако этого также не наблюдается.

Таким образом, анализ эксперимента, проведенного на первом этапе исследования, позволяет не рассматривать электродную поляризацию в качестве причины аномального возрастания емкости в низкочастотной области спектра. Другими словами, наблюдаемое исследователями возрастание емкости не следует считать артефактом, т. е. не связано с особенностями проведения эксперимента

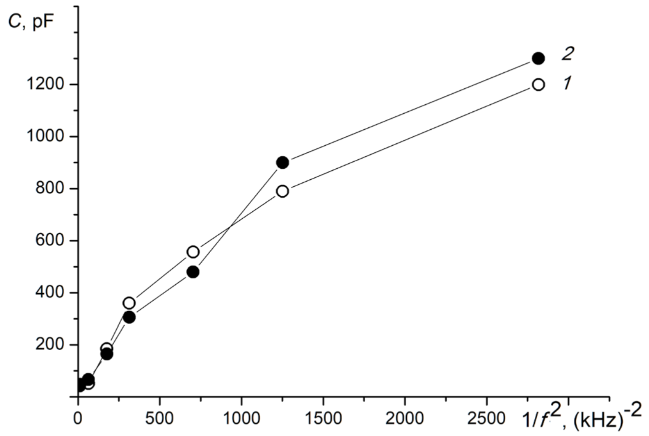



Рис. 1. Низкочастотные зависимости емкости структуры *p*-Si/$C_{60}$/эвтектика InGa в условиях затемнения (*1*) и светодиодного освещения (*2*). Световой поток (250 лм) фокусировался на область контакта $C_{60}$/эвтектика InGa при $T$ = 293 K

и особенностями электрических контактов.

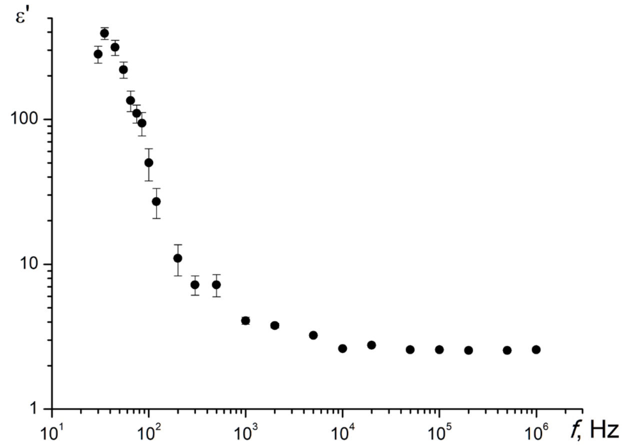
На втором этапе исследования рассматривались глубинные механизмы возрастания емкости рассматриваемой структуры на низких частотах.

Как отмечалось выше, пленки фуллерита, полученные методом термического напыления, являются поликристаллическими. Молекулы кислорода быстро проникает внутрь пленки, диффундируя по границам раздела кристаллитов, вследствие чего приграничные области кристаллитов насыщены кислородом в большей степени, чем их объем. Поэтому проводимость и диэлектрическая проницаемость поверхностных слоев кристаллитов и их объема будут различными [3]. Следовательно, для описания диэлектрической дисперсии в таких структурах целесообразно использовать представления о многослойных диэлектрических системах, для которых характерна аномально высокая диэлектрическая проницаемость в низкочастотной области [9].

На рис. 2, *a* представлена зависимость диэлектрической проницаемости от частоты *f*. Значения ε' рассчитаны с помощью формулы плоского конденсатора на основании измерений емкости. Видно, что диэлектрическая проницаемость при снижении частоты приложенного переменного напряжения быстро и монотонно возрастает. Так, на частоте $10^3$ Гц значение ε' ≈ 3, а на частоте 30 Гц оно достигает ε' ≈ 300.

Характер зависимости тангенса угла диэлектрических потерь tgδ(*f*) (рис. 2, *b*) – немонотонный. На частотах свыше $10^5$ Гц величина tgδ ≈ 0,01, однако она постепенно возрастает по мере уменьшения частоты, достигая максимального значения около 0,8 при *f* ≈ $10^2$ Гц, и в дальнейшем снижается до значения примерно 0,1. Точно определить позицию данного максимума на частотной шкале не представляется возможным, вследствие значительного разброса данных при измерении tgδ. Следует отметить, что авторы работы [8] также наблюдали широкий максимум на частотной кривой tgδ в области 1 кГц при измерениях пленок фуллерита $C_{60}$. Возникновение максимума они связывали с процессом интеркаляции фуллерита кислородом и образованием дипольных групп у молекулы $C_{60}/O_2$.

Согласно модели «зерно-прослойка», совокупность звеньев в виде внутренних областей кристаллитов (зерен) и их внешних областей (прослоек) рассматривается как однородная структура с одним временем релаксации τ, соответствующим времени релаксации отдельного звена, а для расчета величины τ используются уравнения Дебая для *a*)




*b*)

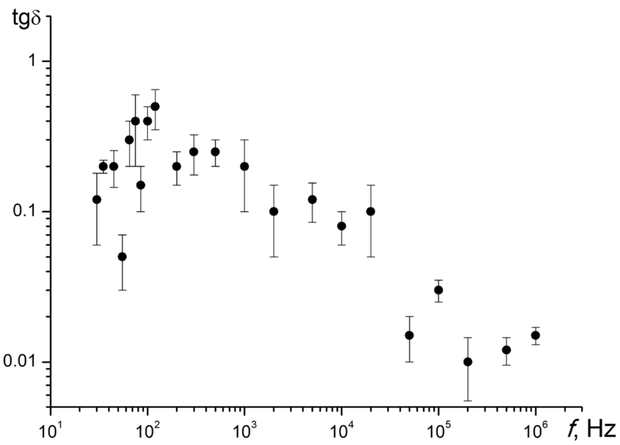



Рис. 2. Зависимости диэлектрической проницаемости (*a*) и тангенса угла диэлектрических потерь (*b*) для структуры *p*-Si/$C_{60}$/эвтектика InGa; $T = 293$ K

дипольно-ориентационной поляризации.

При накапливании полярных молекулярных групп $C_{60}/O_2$ в прослойках их диэлектрическая проницаемость оказывается выше, чем таковая у зерен, а проводимость этих групп – ниже [9]. Поэтому низкочастотную диэлектрическую проницаемость окисленного приповерхностного слоя кристаллита (прослойки) $\varepsilon_1$ можно оценить с помощью соотношения

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 D/d, \qquad (2)$$

где ε' – диэлектрическая проницаемость пленки $C_{60}$, определяемая экспериментально; $d$ – толщина окисленного приповерхностного слоя кристаллита (прослойки).

Значение толщины $d$ можно оценить только приближенно. Согласно данным статьи [14], величина $d$, по-видимому, не должна превышать 15 нм. Поэтому при размере кристаллита $D = 150$ нм получим, что на частоте 35 Гц при значениях $d$ в пределах от 5 до 15 нм значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1$ прослойки лежит в интервале от 10 до 30.

Оценим, при каких значениях дипольного момента молекулы $C_{60}/O_2$ и при какой концентрации этих молекул достижимо данное значение $\varepsilon_1$. Воспользуемся уравнением Фрёлиха, связывающего макроскопическую диэлектрическую проницаемость с дипольным моментом молекулы:

$$\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_\infty)(2\varepsilon_1+\varepsilon_\infty)}{\varepsilon_1(\varepsilon_\infty+2)^2}=\frac{Ngp^2}{9\varepsilon_0 k_B T}, \qquad (3)$$

где $N$ – число полярных молекул $C_{60}/O_2$ (диполей) в единице объема прослойки; $p$, Д, – их дипольный момент; $T$, К, – температура, $k_B$, Дж·К$^{-1}$, – постоянная Больцмана; $\varepsilon_0$, Ф/м, – электрическая постоянная; $g$ – параметр, учитывающий локальную упорядоченность молекул;

$$g = 1 + z\langle\cos\gamma\rangle.$$

Здесь $z$ – координационное число (для ГЦК решетки $z$ = 12), $\langle\cos\gamma\rangle$ – среднее значение косинуса угла между молекулой в точке отсчета и ее ближайшими соседями (при расчетах мы принимали $\langle\cos\gamma\rangle$ = 0,7).

Вычислим величину $N$, учитывая, что на каждую ГЦК ячейку приходятся две молекулы $C_{60}$. Допустим, что все молекулы $C_{60}$ в приповерхностном слое соединения окислены; тогда число диполей в единице объема данного слоя равно

$$N = 2\frac{V_{ox}}{(a\cdot D)^3}, \qquad (4)$$

где $V_{ox}$, нм$^3$, – объем окисленного слоя в одном кристаллите; $a$, нм, – длина ребра ГЦК ячейки $C_{60}$ ($a$ = 1,417 нм [14]).

При этих условиях получим, что $N \approx 2{,}5\cdot10^{26}$ м$^{-3}$. Такое значение концентрации полярных групп представляется разумным, поскольку согласно данным работы [14] в окисленном слое относительное содержание кислорода С : О = 10 : 1.

В соответствии с данными работы [8], величина дипольного момента $p$ молекулы $C_{60}/O_2$ составляет 0,9 Д. При его оценке авторы предполагали, что доля $\xi$ заряда, перешедшего с донора (интеркалированный кислород $O_2$) на акцептор (молекула фуллерита $C_{60}$), составляет 4 %. Такое значение $\xi$ было определено авторами из условия наилучшего согласия результатов расчета с экспериментом. Тем не менее, в статье [15] указывается на возможность переноса существенно большей доли заряда. Согласно приведенным там оценкам, величина $\xi$ может достигать 49 %.

Отметим, что при оценке дипольных моментов рассматриваемых молекулярных групп следует иметь в виду, что процесс взаимодействия кислорода с молекулами фуллерена приводит к образованию различных форм окисленного фуллерена $C_{60}O_n$. Например, возможно образование так называемых «открытого» и «закрытого» эпоксидов, а также других изомеров, где атомы кислорода могут присоединяться в различных местах молекулы фуллерена. У «открытого» эпоксида, $C_{60}O$ (5-6, пентагон-гексагон), атом кислорода присоединяется к двум атомам углерода на границе соответствующих граней. У «закрытого», $C_{60}O$ (6-6, гексагон-гексагон), атом кислорода располагается над двойной связью на границе двух гексагонов [16]. У других изомеров, как уже сказано, атомы кислорода могут присоединяться в самых разных местах молекулы фуллерена.

Очевидно, что все образующиеся молекулы $C_{60}O_n$ характеризуются различными длинами химических связей и степенью переноса электронной плотности с донора на акцептор, и, как следствие этого, различными дипольными моментами.

С учетом вышеизложенного выясним, при каких значениях толщины прослойки $d$ и дипольного момента $p$ может выполняться соотношение (3). При вычислении его левой части для различных величин $d$, воспользуемся выражением (2), приняв ε' = 300 и $D$ = = 150 нм. Обозначим эту левую часть как А($d$), а правую, в которую входят ранее оцененные нами параметры $N$ и $g$, – как В($d$). Дипольный момент молекулы $C_{60}/O_2$ будем рассматривать в качестве параметра, варьируя его значения.

Данные зависимости представлены на рис. 3. Видно, что условие А = В может быть реализовано только при толщинах окисленного слоя $d \approx 15$ нм (что согласуется с извест-

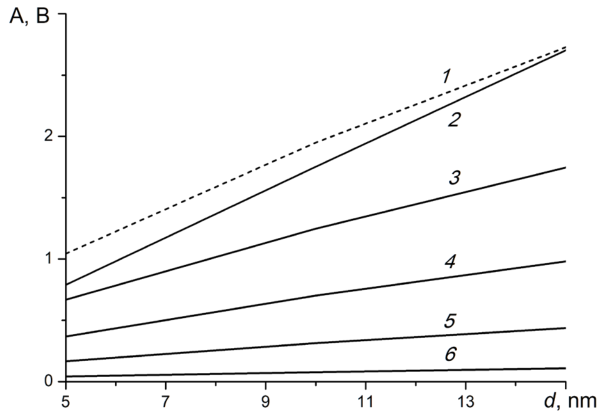



Рис. 3. Зависимости величин левой (А) (прямая *1*) и правой (В) (прямые *2 – 6*) частей уравнения Фрёлиха (3) от толщины окисленного приповерхностного слоя кристаллита (прослойки) при различных значениях дипольного момента молекулы $C_{60}/O_2$, *p*, Д: 5 (*2*), 4 (*3*), 3 (*4*), 2 (*5*), 1 (*6*)

ными экспериментальными результатами), но при значительных дипольных моментах молекул $C_{60}/O_2$, составляющих 4 – 5 Д, когда относительная доля $\delta$ переносимого заряда электрона, согласно данным работы [8], будет превышать 22 %.

### Заключение

Выполнено исследование частотной зависимости диэлектрических свойств структур *p*-Si/$C_{60}$/эвтектика InGa. Показано, что в качестве физического механизма, определяющего аномально высокое возрастание емкости исследуемой структуры на низкой частоте можно рассматривать образование во внешних областях кристаллитов фуллерита $C_{60}$ молекулярных групп $C_{60}/O_2$, обладающих значительным дипольным моментом. При этом проводимость и диэлектрическая проницаемость поверхностных слоев кристаллитов и их объема оказываются различными, что и приводит к кажущемуся увеличению диэлектрической проницаемости исследуемой структуры. Поэтому для описания диэлектрической проницаемости в таких структурах можно использовать представления о многослойных диэлектрических системах.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность кандидату физико-математических наук В.Ф. Бородзюле за помощь в проведении экспериментов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению «Передовые цифровые технологии» СПбПУ (соглашение от 17. 11. 2020 № 075-15-2020-934).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sachdeva S., Singh D., Tripathi S.K.** Optical and electrical properties of fullerene $C_{70}$ for solar cell applications // Optical Materials. 2020. Vol. 101. March. P. 109717.

2. **Pascual J., Delgado J.L., Tena-Zaera R.** Physicochemical phenomena and application in solar cells of perovskite: Fullerene films // The Journal of Physical Chemistry Letters. 2018. Vol. 9. No. 11. Pp. 2893–2902.

3. **Долженко Д.И., Бородзюля В.Ф., Захарова И.Б., Сударь Н.Т.** Влияние тока, ограниченного объемным зарядом, на диэлектрические

свойства поликристаллических пленок фуллерита $C_{60}$ // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. Вып. 1. С. 58–63.

4. **Assink R.A., Schirber J.E., Loy D.A., Morosin B., Carlson G.A.** Intercalation of molecular species into the interstitial sites of fullerene // Journal of Materials Research. 1992. Vol. 7. No. 8. Pp. 2136–2143.

5. **Яготинцев К.А., Стеценко Ю.Е., Гальцов Н.Н., Легченкова И.В., Прохватилов А.И.** Влияние примесных молекул кислорода на структурные и термодинамические свойства фуллерита $C_{60}$ // Физика низких температур. 2010. Т. 36. № 3. С. 335–342.

6. **Brink C., Andersen L.H., Hvelplund P., Mathur D., Voldstad J.D.** Laser photodetachment of $C_{60}^-$ and $C_{70}^-$ ions cooled in a storage ring // Chemical Physics Letters. 1995. Vol. 233. No. 1–2. Pp. 52–56.

7. **Гурвич Л.В., Карачевцев Г.В., Кондратьев В.Н., Лебедев Ю.А., Медведев В.А., Потапов В.К., Ходеев Ю.С.** Энергии разрыва химических связей. Потенциалы ионизации и сродство к электрону. М.: Наука, 1974. 351 с.

8. **Pevzner B., Hebard A.F., Dresselhaus M.S.** Role of molecular oxygen and other impurities in the electrical transport and dielectric properties of $C_{60}$ films // Physical Review B. 1997. Vol. 55. No. 24. Pp. 16439–16449.

9. **Блайт Э.Р., Блур Д.** Электрические свойства полимеров. М.: Физматлит, 2008. 376 с.

10. **Koops C.G.** On the dispersion of resistivity and dielectric constant of some semiconductors at audio frequencies // Physical Review. 1951. Vol. 83. No. 1. Pp. 121–124.

11. **Захарова И.Б., Долженко Д.И., Бородзюля В.Ф., Сударь Н.Т.** Эффект электроформовки в поликристаллических пленках фуллерена $C_{60}$ // Письма в Журнал технической физики. 2019. Т. 45. Вып. 4. С. 21–23.

12. **Бородзюля В.Ф., Мошников В.А., Пермяков Н.В.** Измерительный зонд и способ его изготовления. Пат. RU 2654385 C1. Россия. G 01 Q 60/00, 70/16, B 82 Y 35/00. Заявка № 2017 11 4837. Заявл. 26.04.2017. Опубл. 17.05.2018. Патентообладатели: Бородзюля В.Ф., Мошников В.А., Пермяков Н.В. Бюл. № 14. 2018. 2 с.

13. **Mondal P., Lunkenheimer P., Loidl A.** Dielectric relaxation, ac and dc conductivities in the fullerenes $C_{60}$ and $C_{70}$ // Zeitschrift für Physik. B: Condensed Matter. 1995. Vol. 99. No. 1. Pp. 527–533.

14. **Макарова Т.Л., Захарова И.Б., Зубкова Т.И., Вуль А.Я.** Ориентированный рост бескислородных кристаллитов $C_{60}$ на кремниевых подложках // Физика твердого тела. 1999. Т. 41. № 2. С. 354–359.

15. **Dattani R., Gibson K.F., Few S., Borg A.J., Dimaggio P.A., Nelson J., Kazarian S.G., Cabral J.T.** Fullerene oxidation and clustering in solution induced by light // Journal of Colloid and Interface Science. 2015. Vol. 446. 15 May. Pp. 24–30.

16. **Creegan K.M., Robbins J.L., Robbins W.K., Millar J.M., Sherwood R.D., Tindall P.J., Jones D.R.** Synthesis and characterization of $C_{60}O$, the first fullerene epoxide // Journal of the American Chemical Society. 1992. Vol. 114. No. 3. Pp. 1103 –1105.

*Статья поступила в редакцию 16.05.2021, принята к публикации 20.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ДОЛЖЕНКО Дмитрий Игоревич** – *аспирант Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
ddi.dev.94@gmail.com

**ЗАХАРОВА Ирина Борисовна** – *доктор физико-математических наук, доцент инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zakharova@rpht.spbstu.ru

**СУДАРЬ Николай Тобисович** – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

sudar53@mail.ru

## REFERENCES

1. **Sachdeva S., Singh D., Tripathi S.K.,** Optical and electrical properties of fullerene $C_{70}$ for solar cell applications, Optical Materials. 101 (March) (2020) 109717.

2. **Pascual J., Delgado J.L., Tena-Zaera R.,** Physicochemical phenomena and application in solar cells of perovskite: Fullerene films, The Journal of Physical Chemistry Letters. 9 (11) (2018) 2893–2902.

3. **Dolzhenko D.I., Borodzyulya V.F., Zakharova I.B., Sudar' N.T.,** The influence of space-charge-limited current on the dielectric properties of polycrystalline films of fullerite $C_{60}$, Technical Physics. 66 (1) (2021) 53–58.

4. **Assink R.A., Schirber J.E., Loy D.A., et al.,** Intercalation of molecular species into the interstitial sites of fullerene, Journal of Materials Research. 7 (8) (1992) 2136–2143.

5. **Yagotintsev K.A., Stetsenko Yu.E., Gal'tsov N.N., et al.,** Effect of impurity oxygen molecules on the structural and thermodynamic properties of fullerite $C_{60}$, Low Temperature Physics. 36 (3) (2010) 266–271.

6. **Brink C., Andersen L.H., Hvelplund P., et al.,** Laser photodetachment of $C_{60}^-$ and $C_{70}^-$ ions cooled in a storage ring, Chemical Physics Letters. 233 (1–2) (1995) 52–56.

7. **Gurvich L.V., Karachevcev G.V., Kondratiev V.N., et al.,** Energii razryva khimicheskikh sviazey. Potentsial ionizatsii i srodstvo k elektronu. Spravichnik. [Chemical bound energies. Ionization potential and electron affinity, Reference book], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).

8. **Pevzner B., Hebard A.F., Dresselhaus M.S.,** Role of molecular oxygen and other impurities in the electrical transportand dielectric properties of $C_{60}$ films, Physical Review B. 55 (24) (1997) 16439–16449.

9. **Blythe A.R., Blythe T, Bloor D.,** Electrical properties of polymers, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

10. **Koops C.G.,** On the dispersion of resistivity and dielectric constant of some semiconductors at audio frequencies, Physical Review. 83 (1) (1951) 121–124.

11. **Zakharova I.B., Dolzhenko D.I., Borodzyulya V.F., Sudar' N.T.,** The electroforming effect in polycrystalline fullerene $C_{60}$ films, Technical Physics Letters. 45 (2) (2019) 142–144.

12. **Borodzyulya V.F., Moshnikov B.A., Permiakov H.V.,** Measuring probe and method of its manufacture. Pat. RU 2654385 C1. Russia, G 01 Q 60/00, 70/16, B 82 Y 35/00. No. 2017 11 4837. Date of filing: 26.04. 2017. Published 17.05.2018. Proprietors: Borodzyulya V.F., Moshnikov B.A., Permiakov H.V., Bul. No. 14. 2018.

13. **Mondal P., Lunkenheimer P., Loidl A.,** Dielectric relaxation, ac and dc conductivities in the fullerenes $C_{60}$ and $C_{70}$, Zeitschrift für Physik. B: Condensed Matter. 99 (1) (1995) 527–533.

14. **Makarova T.L., Vul' A.Ya., Zakharova I.B., Zubkova T.I.,** Oriented growth of oxygen-free $C_{60}$ crystallites on silicon substrates, Physics of the Solid State. 41 (2) (1999) 319–323.

15. **Dattani R., Gibson K.F., Few S., et al.,** Fullerene oxidation and clustering in solution induced by light, Journal of Colloid and Interface Science. 446 (15 May) (2015) 24–30.

16. **Creegan K.M., Robbins J.L., Robbins W.K., et al.,** Synthesis and characterization of $C_{60}O$, the first fullerene epoxide, Journal of the American Chemical Society. 114 (3) (1992) 1103 –1105.

*Received 16.05.2021, accepted 20.05.2021.*

## THE AUTHORS

**DOLZHENKO Dmitry I.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
ddi.dev.94@gmail.com

**ZAKHAROVA Irina B.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
zakharova@rpht.spbstu.ru

**SUDAR Nicolay T.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
sudar53@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.14204
УДК 531.2: 519.63

# УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

**М.В. Сухотерин**[1], **Т.П. Кныш**[1], **Е.М. Пастушок**[1], **Р.А. Абдикаримов**[2]

[1] Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2] Ташкентский финансовый институт, г. Ташкент, Республика Узбекистан

В работе исследуется устойчивость упругой ортотропной прямоугольной консольной пластинки под действием сжимающих усилий, приложенных к грани, противоположной заделке. Целью исследования является получение спектра критическиих усилий и соответствующих форм закритического равновесия. Функция прогибов выбирается в виде суммы двух гиперболо-тригонометрических рядов с добавлением к симметричному решению специальных компенсирующих слагаемых для свободных членов разложения функций в ряды Фурье по косинусам. Выполнение всех условий краевой задачи приводит к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов. Поиск критических нагрузок (собственных чисел), дающих нетривиальное решение этой системы, осуществляется перебором величины сжимающей нагрузки в сочетании с методом последовательных приближений. Для квадратной ребристой пластинки получены первые три критические нагрузки симметричного решения и первая критическая нагрузка антисимметричного решения. Представлены 3D-изображения соответствующих форм равновесия. Результаты работы могут быть использованы для исследования устойчивости консольных элементов различных конструкций.

**Ключевые слова:** ортотропная консольная пластина, устойчивость, ряд Фурье, критическая нагрузки, форма равновесия

**Ссылка при цитировании:** Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пастушок Е.М., Абдикаримов Р.А. Устойчивость упругой ортотропной консольной пластинки // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 38–52. DOI: 10.18721/JPM.14204



# STABILITY OF AN ELASTIC ORTHOTROPIC CANTILEVER PLATE

**M.V. Sukhoterin**[1], **T.P. Knysh**[1], **E.M. Pastushok**[1], **R.A. Abdikarimov**[2]

[1] Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, Russian Federation;
[2] Tashkent Financial Institute, Tashkent, Republic of Uzbekistan

The paper studies the stability of an elastic orthotropic rectangular cantilever plate under compressive forces applied to the face opposite to the seal. The aim of the study was to obtain the range of critical forces and the relevant shapes of the supercritical equilibrium. The deflection function was chosen as a sum of two hyperbolic-trigonometric series with the addition of special compensating terms for the free terms of the Fourier cosine series to the symmetric solution. For the square ribbed plate, the first three critical loads of the symmetric solution and the first critical load of the antisymmetric solution were obtained. The authors present 3D images of the respective equilibrium forms. The results obtained can be used to study the stability of cantilever elements of various structures.

**Keywords:** orthotropic cantilever plate, stability, Fourier series, critical load, equilibrium form

**Citation:** Sukhoterin M.V., Knysh T.P., Pastushok E.M., Abdikarimov R.A., Stability of an elastic orthotropic cantilever plate, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 38–52. DOI: 10.18721/JPM.14204



## Введение

Консольные пластины (плиты) применяются в различных областях техники: в гражданском строительстве, в машиностроении, судостроении и авиации, в приборостроении [1] (ферромагнитные пластинки). В нанотехнике консольные пластинки используются в качестве ключевых компонентов сенсоров наномасштабных транзисторов [2], где они подвергаются воздействию магнитных полей в плоскости пластинки. Применяются консольные пластинки и в различных смарт-структурах [3, 4].

Проблема устойчивости ортотропных консольных пластин недостаточно исследована ввиду сложности основного дифференциального уравнения задачи и граничных условий. Она требует разработки надежных численно-аналитических методов ее решения. Если считать материал пластины идеально упругим, то будет иметь место бесконечное число критических нагрузок, меняющих форму равновесия пластины. Эта задача на собственные значения аналогична задаче определения спектра частот свободных колебаний пластинки [5]. Она прежде всего интересна с математической точки зрения. На практике для плоских элементов обычных металлических конструкций вычисляют лишь первую критическую нагрузку, которую считают разрушающей, однако при наличии конструктивных ограничителей изгиба и быстрого роста сжимающей нагрузки упругие пластины могут работать и в закритической области, приобретая последующие формы равновесия, в том числе антисимметричные. Разрушение может произойти не при первой критической нагрузке, поэтому практическое значение имеет определение некоторого спектра критических нагрузок и соответствующих форм равновесия.

В данной работе задача устойчивости решается в линейной постановке в рамках теории тонких жестких пластин. При исследовании устойчивости гибких пластин надо рассматривать более сложную нелинейную задачу, однако при проверке точности того или иного приближенного метода линейные решения привлекаются как эталонные.

Проблеме устойчивости анизотропных и изотропных прямоугольных пластин с использованием различных методов ее решения посвящены работы [6 – 16]. В статьях [6 – 9] рассматривались задачи устойчивости анизотропных пластин и оболочек, методы решения которых применимы и для консольных пластин.

В работах [10, 11] исследовалась устойчивость изотропной консольной пластины для случаев, когда сжимающая нагрузка приложена к грани, параллельной заделке [10], и когда она приложена к боковой грани [11]. Из условия минимума потенциальной энергии найдены первые критические нагрузки. Боковая устойчивость от действия сосредоточенной силы исследовалась и в работе [12] с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Этим методом в работе [1] изучалась устойчивость ферромагнитных консольных пластинок в магнитном поле с учетом пластических деформаций.

В работе [2] рассматриваются анизотропные консольные нанопластины, которые подвергаются воздействию магнитных полей в своей плоскости. Аналитическое решение линейной задачи построено симплексным методом с помощью тригонометрических рядов. Получен спектр критических усилий для изотропных и ортотропных пластин.

В работе [13] с помощью МКЭ и приближенного аналитического подхода исследуется влияние жесткости центрального ребра на изгиб консольной пластины.

Работы [14, 15] посвящены устойчивости изотропной консольной пластины под действием сжимающих усилий, приложенных к двум свободным параллельным граням [14] или ко всем трем свободным граням [15]. Использование двух гиперболо-тригонометрических рядов привело к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, содержащих в качестве параметра сжимающую нагрузку. Получены численные результаты для критических нагрузок.

Отметим, что широкое применение МКЭ сталкивается с проблемой проверки выполнения граничных условий. Такая проверка сопряжена с большими трудностями, так как указанный численный метод работает с массивами чисел, а не с аналитическими выражениями (которые можно подставлять в граничные условия). МКЭ не является универсальным методом решения задач механики и имеет помимо этого и другие проблемы: недостаточная точность решения дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, «запирание» вычислительного процесса при частой сетке дробления конструкции, связанное с погрешностями округления при решении огромной системы линейных алгебраических уравнений, «просмотр» особых точек решения (концентраторов напряжений). Этот метод часто сам нуждается в проверке с помощью аналитических и численно-аналитических методов.

В настоящей работе точное решение задачи устойчивости получено с использованием гиперболо-тригонометрических рядов по обеим переменным. Выполнение всех условий задачи привело к бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов этих рядов. Равенство нулю определителя системы дает нетривиальные значения коэффициентов. Однако процедура получения и решения этого уравнения оказывается весьма трудоемкой.

В данном исследовании предложен метод перебора значений нагрузки с последующим итерационным процессом определения коэффициентов. Начальные коэффициенты первого функционального ряда задавались в виде произвольной убывающей последовательности, вычисляются значения остальных коэффициентов, затем все они уточнялись в ходе итерационного процесса. Подбиралась нагрузка, при который процесс сходится к нетривиальным решениям, то есть когда соседние итерации (с ненулевыми коэффициентами) не должны отличаться друг от друга. Эта нагрузка и принималась за критическую. Данный метод успешно использовался в наших работах [14, 15].

**Постановка задачи**

Пусть равномерные сжимающие усилия интенсивностью $T_Y$ приложены к свободному краю $Y = b$ тонкой ортотропной прямоугольной консольной пластины постоянной толщины $h$ (рис. 1). Будем считать, что главные направления упругости параллельны сторонам пластины.

В безразмерном виде дифференциальное уравнение устойчивости пластины имеет вид [16]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где $w$ – относительный прогиб ($w = W/b$, $W(X,Y)$ – функция прогибов срединной поверхности пластины); $x$, $y$ – безразмерные координаты ($x = X/b$, $y = Y/b$); $D_x$, $D_y$, $D_{xy}$ – относительные жесткости по главным направлениям, $D_x = D_1/D$, $D_y = D_2/D$, $D_{xy} = D_3/D$ ($D$ – цилиндрическая жесткость соответствующей изотропной плиты той же толщины, $D_1$, $D_2$, $D_3$ – главные жесткости); $T_y$ – интенсивность относительных сжимающих усилий ($T_y = T_Y b^2/D$).

Величина $D$ выражается как

$$D = Eh^3 \Big/ \left[ 12\left(1 - \nu^2\right) \right],$$

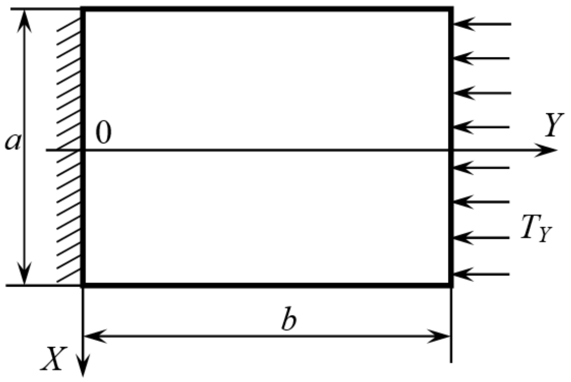



Рис. 1. Схема нагружения консольной пластины (толщиной $h$); $T_Y$ – интенсивность равномерных сжимающих усилий

где $E$ – модуль Юнга указанной пластины, $\nu$ – ее коэффициент Пуассона.

Главные жесткости следуют выражениям

$$D_1 = E_1 h^3 / \left[12\left(1-\nu_1\nu_2\right)\right],$$
$$D_2 = E_2 h^3 / \left[12\left(1-\nu_1\nu_2\right)\right],$$
$$D_3 = D_1\nu_2 + 2D_r,$$

где $E_1$, $E_2$, $\nu_1$, $\nu_2$ – главные упругие постоянные; $D_r$ – жесткость кручения, $D_r = Gh^3/12$ ($G$ – модуль сдвига).

Относительные размеры пластины будут $\gamma \times 1$, где $\gamma = a/b$.

Граничные условия запишутся следующим образом [16, 17]:
на грани $y = 0$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

на грани $y = 1$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \tag{3}$$

$$+ T_y \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

на гранях $x = \pm\gamma/2$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0; \tag{4}$$

в точках $(\pm\,\gamma/2, 1)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \tag{5}$$

Здесь уравнения (2) являются геометрическими условиями жесткой заделки (сечение не перемещается и не поворачивается). Уравнения (3), (4) запрещают изгибающие моменты и перерезывающие силы на свободных гранях. Условие (5) исключает крутящие моменты в угловых точках свободной части контура. Заметим, что второе условие (3) для перерезывающих сил на грани, вдоль которой приложена сжимающая нагрузка, дополнено слагаемым для учета действия этой нагрузки в отклоненном состоянии этой грани. На это указывал Н.А. Алфутов в работе [17].

Задача (1) – (5) всегда имеет тривиальное (нулевое) решение для функции прогибов. Это соответствует устойчивому недеформированному состоянию пластины. Помимо тривиального решения, задача может иметь и нетривиальные решения при определенных значениях нагрузки $T_y$, когда после потери устойчивости пластина приобретает новую форму равновесия. Пластины, обладающие высокой упругостью, могут несколько раз «проходить» критическое состояние с ростом нагрузки, меняя формы последующего равновесия. Речь идет о пластинах из новых высокоупругих материалов, включая нанопластинки (графен).

**Построение симметричного решения**

Искомую функцию прогибов представим в виде суммы двух рядов:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \begin{pmatrix} A_k \operatorname{ch}\alpha_k x + \\ +B_k \operatorname{ch}\beta_k x \end{pmatrix} \sin\lambda_k y, \tag{6}$$

$$w_2(x,y) = = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \begin{pmatrix} C_s \operatorname{sh}\xi_s\tilde{y} + \\ +H_s \operatorname{sh}\eta_s\tilde{y} + \\ +E_s \operatorname{ch}\xi_s\tilde{y} + \\ +F_s \operatorname{ch}\eta_s\tilde{y} \end{pmatrix} \cos\mu_s x, \quad (7)$$

где $A_k$, $B_k$, $Cs$, $H_s$, $E_s$, $F_s$, $\alpha_k$, $\beta_k$, $\xi_s$, $\eta_s$ – неопределенные коэффициенты; $\lambda_k = k\pi/2$; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$; $\tilde{y} = y - 1$.

Заметим, что обе эти функции удовлетворяют граничному условию (5).

Потребуем, чтобы функции (6), (7) удовлетворяли дифференциальному уравнению (1). Это дает для коэффициентов $\alpha_k$, $\beta_k$, $\xi_s$, $\eta_s$ биквадратные уравнения вида

$$\begin{gathered} D_x\alpha_k^4 - 2D_{xy}\alpha_k^2\lambda_k^2 + D_y\lambda_k^4 - T_y\lambda_k^2 = 0, \\ D_x\mu_s^4 - 2D_{xy}\xi_s^2\mu_s^2 + D_y\xi_s^4 + T_y\xi_s^2 = 0 \end{gathered} \quad (8)$$

(уравнения для коэффициентов $\beta_k$ и $\eta_s$ аналогичны).

Эти уравнения имеют по четыре корня, однако, исходя из свойств гиперболических функций, достаточно взять по паре корней из квартетов:

$$\alpha_k = \lambda_k\sqrt{\frac{D_{xy} + \sqrt{D_{xy}^2 - D_xD_y + \dfrac{D_xT_y}{\lambda_k^2}}}{D_x}},$$

$$\beta_k = \lambda_k\sqrt{\frac{D_{xy} - \sqrt{D_{xy}^2 - D_xD_y + \dfrac{D_xT_y}{\lambda_k^2}}}{D_x}},$$

$$\xi_s = \sqrt{\frac{2D_{xy}\mu_s^2 - T_y + R_s}{2D_y}}, \quad (9)$$

$$\eta_s = \sqrt{\frac{2D_{xy}\mu_s^2 - T_y - R_s}{2D_y}},$$

где

$$R_s = \sqrt{\begin{matrix} T_y^2 - 4D_{xy}\mu_s^2T_y + \\ + 4\mu_s^4\left(D_{xy}^2 - D_xD_y\right) \end{matrix}}. \quad (9)$$

Потребуем теперь, чтобы сумма функций (6), (7) удовлетворяла граничным условиям (2) – (4). Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} C_s \operatorname{sh}\xi_s + H_s \operatorname{sh}\eta_s - \\ - E_s \operatorname{ch}\xi_s - F_s \operatorname{ch}\eta_s = 0, \end{gathered} \quad (10)$$

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \begin{pmatrix} C_s\xi_s \operatorname{ch}\xi_s + \\ +H_s\eta_s \operatorname{ch}\eta_s - \\ -E_s\xi_s \operatorname{sh}\xi_s - \\ -F_s\eta_s \operatorname{sh}\eta_s \end{pmatrix}\cos\mu_s x + \\ + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k x + B_k \operatorname{ch}\beta_k x\right) = 0, \end{gathered} \quad (11)$$

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \begin{bmatrix} E_s\left(\xi_s^2 - \nu_1\mu_s^2\right) + \\ + F_s\left(\eta_s^2 - \nu_1\mu_s^2\right) \end{bmatrix}\cos\mu_s x - \\ - \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{\tilde{k}} \begin{bmatrix} A_k\left(\nu_1\alpha_k^2 - \lambda_k^2\right)\operatorname{ch}\alpha_k x + \\ + B_k\left(\nu_1\beta_k^2 - \lambda_k^2\right)\operatorname{ch}\beta_k x \end{bmatrix} = 0, \end{gathered} \quad (12)$$

$$\begin{gathered} C_s\xi_s\left[T_y + D_y\xi_s^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\mu_s^2\right] + \\ + H_s\eta_s\left[T_y + D_y\eta_s^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\mu_s^2\right] = 0, \end{gathered} \quad (13)$$

$$\begin{gathered} -\sum_{s=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_s\left(\mu_s^2 - \nu_2\xi_s^2\right)\operatorname{sh}\xi_s\tilde{y} + \\ + H_s\left(\mu_s^2 - \nu_2\eta_s^2\right)\operatorname{sh}\eta_s\tilde{y} + \\ + E_s\left(\mu_s^2 - \nu_2\xi_s^2\right)\operatorname{ch}\xi_s\tilde{y} + \\ + F_s\left(\mu_s^2 - \nu_2\eta_s^2\right)\operatorname{ch}\eta_s\tilde{y} \end{bmatrix} + \\ + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \begin{bmatrix} A_k\left(\alpha_k^2 - \nu_2\lambda_k^2\right)\operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k + \\ +B_k\left(\beta_k^2 - \nu_2\lambda_k^2\right)\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k \end{bmatrix}\sin\lambda_k y = 0, \end{gathered} \quad (14)$$

$$\begin{gathered} A_k\alpha_k\left[D_x\alpha_k^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2 + \right]\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k + \\ +B_k\beta_k\left[D_x\beta_k^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2\right]\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k = 0. \end{gathered} \quad (15)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k \gamma/2$, $\tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma/2$, $\tilde{k} = (k+1)/2$.

Заметим, что в уравнениях (10), (13) и (15) опущены знаки суммы, так как тригонометрический ряд обращается в нуль, когда все его коэффициенты равны нулю.

В уравнениях (11), (12), (14) суммирование в рядах ведется по разным индексам, поэтому гиперболические функции в них разложим в ряды Фурье. Для уравнений (11) и (12) используем известные разложения по $\cos(\mu_s x)$:

$$\operatorname{ch}\alpha_k x = \\ = \operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k \left[ \frac{1}{\tilde{\alpha}_k} + \frac{4\alpha_k}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos\mu_s x}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} \right],$$
$$\operatorname{ch}\beta_k x = \qquad (16)$$
$$= \operatorname{sh}\tilde{\beta}_k \left[ \frac{1}{\tilde{\beta}_k} + \frac{4\beta_k}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos\mu_s x}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \right];$$

тогда эти уравнения (после перестановки знаков суммирования в двойных рядах) примут вид

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \begin{pmatrix} C_s \xi_s \operatorname{ch}\xi_s + \\ + H_s \eta_s \operatorname{ch}\eta_s - \\ - E_s \xi_s \operatorname{sh}\xi_s - \\ - F_s \eta_s \operatorname{sh}\eta_s \end{pmatrix} \cos\mu_s x + \\ + \varphi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \varphi_s \cos\mu_s x = 0, \qquad (17)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[ \begin{matrix} E_s \left( \xi_s^2 - \nu_1 \mu_s^2 \right) + \\ + F_s \left( \eta_s^2 - \nu_1 \mu_s^2 \right) \end{matrix} \right] \cos\mu_s x + \\ + m_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s m_s \cos\mu_s x = 0, \qquad (18)$$

где

$$\varphi_0 = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \lambda_k \left( A_k \frac{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_k} + B_k \frac{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\tilde{\beta}_k} \right),$$

$$\varphi_s = \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \lambda_k \left( A_k \frac{\alpha_k \operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + B_k \frac{\beta_k \operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \right),$$

$$m_0 = -\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[ \begin{matrix} A_k \left( \nu_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2 \right) \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_k} + \\ + B_k \left( \nu_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2 \right) \dfrac{\operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\tilde{\beta}_k} \end{matrix} \right],$$

$$m_s = -\frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[ \begin{matrix} A_k \left( \nu_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2 \right) \times \\ \times \dfrac{\alpha_k \operatorname{sh}\tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + \\ + B_k \left( \nu_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2 \right) \times \\ \times \dfrac{\beta_k \operatorname{sh}\tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \end{matrix} \right]. \qquad (19)$$

Для преобразования уравнения (14) используем разложения

$$\operatorname{sh}\xi_s \tilde{y} = -2 \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{k}} \xi_s + \lambda_k \operatorname{sh}\xi_s}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \sin\lambda_k y,$$
$$\operatorname{ch}\xi_s \tilde{y} = 2 \operatorname{sh}\xi_s \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \sin\lambda_k y \qquad (20)$$

(для $\operatorname{sh}(\eta_s \tilde{y})$ и $\operatorname{ch}(\eta_s \tilde{y})$ выражения аналогичны при замене $\xi_s$ на $\eta_s$) и переставим в полученном двойном ряду знаки суммирования:

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_k \sin\lambda_k y + \\ + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left[ \begin{matrix} A_k \left( \alpha_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2 \right) \operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k + \\ + B_k \left( \beta_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2 \right) \operatorname{ch}\tilde{\beta}_k \end{matrix} \right] \sin\lambda_k y = 0, \qquad (21)$$

где

$$b_k = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \begin{matrix} \dfrac{\mu_s^2 - \nu_2 \xi_s^2}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} C_s \left[ \begin{matrix} (-1)^{\tilde{k}} \xi_s + \\ + \lambda_k \operatorname{sh}\xi_s \end{matrix} \right] - \\ - E_s \lambda_k \operatorname{ch}\xi_s \end{matrix} \right\} + \\ + \dfrac{\mu_s^2 - \nu_2 \eta_s^2}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} H_s \left[ \begin{matrix} (-1)^{\tilde{k}} \eta_s + \\ + \lambda_k \operatorname{sh}\eta_s \end{matrix} \right] - \\ - F_s \lambda_k \operatorname{ch}\eta_s \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right]. \qquad (22)$$

Так как в уравнениях (17), (18) появились свободные члены $\varphi_0$ и $m_0$ от разложения в ряды по косинусам, необходимо ввести вспомогательную функцию прогибов $w_3$, которая бы компенсировала эти свободные члены, удовлетворяя, вместе с основным решением, уравнениям (1) – (3), (5) задачи.

Эту функцию выберем в виде

$$w_3\left(y\right)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} g_k \sin\lambda_k y+\frac{1}{2}My^2-\Phi y, \quad (23)$$

где коэффициенты $g_k$, $M$, $\Phi$ определяются из условий (2) – (4):

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} g_k\lambda_k^2\left(D_y\lambda_k^2-T_y\right)\sin\lambda_k y+MT_y=0,$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} g_k\lambda_k-\Phi+\varphi_0=0, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left(-1\right)^{\tilde{k}}\lambda_k^2 g_k+M+m_0=0.$$

Постоянную $MT_y$ в первом уравнении (24) разложим в ряд Фурье по синусам:

$$MT_y=MT_y\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{2}{\lambda_k}\sin\lambda_k y. \quad (25)$$

Тогда получим следующие выражения:

$$g_k=\frac{-2MT_y}{\lambda_k^3\left(D_y\lambda_k^2-T_y\right)},$$

$$M=\frac{-m_0}{1-2\sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{\tilde{k}}T_y}{\lambda_k\left(D_y\lambda_k^2-T_y\right)}}, \quad (26)$$

$$\Phi=\varphi_0+\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} g_k\lambda_k.$$

Невязка от функции $w_3$ по изгибающему моменту $M_x$ на гранях $x=\pm\gamma/2$ (первое условие (4)) выражается как

$$\nu_2\left(M-\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} g_k\lambda_k^2\sin\lambda_k y\right)= \quad (27)$$

$$=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_k^*\sin\lambda_k y, \quad (27)$$

где коэффициент

$$b_k^*=\frac{2\nu_2 MD_y\lambda_k}{D_y\lambda_k^2-T_y}=$$

$$=\frac{-2\nu_2 D_y\lambda_k m_0\Big/\left(D_y\lambda_k^2-T_y\right)}{1-2T_y\sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{\tilde{k}}}{\lambda_k\left(D_y\lambda_k^2-T_y\right)}} \quad (28)$$

добавится в уравнение (21).

Тогда система уравнений (10) – (15) после освобождения от внешних знаков суммирования, с учетом формул (17), (18), (21), (27), примет следующий окончательный вид:

$$\begin{gathered}C_s\,\mathrm{sh}\,\xi_s+H_s\,\mathrm{sh}\,\eta_s-\\-E_s\,\mathrm{ch}\,\xi_s-F_s\,\mathrm{ch}\,\eta_s=0,\end{gathered} \quad (29)$$

$$\begin{gathered}C_s\xi_s\,\mathrm{ch}\,\xi_s+H_s\eta_s\,\mathrm{ch}\,\eta_s-\\-E_s\xi_s\,\mathrm{sh}\,\xi_s-F_s\eta_s\,\mathrm{sh}\,\eta_s=-\varphi_s,\end{gathered} \quad (30)$$

$$E_s\left(\xi_s^2-\nu_1\mu_s^2\right)+F_s\left(\eta_s^2-\nu_1\mu_s^2\right)=-m_s, \quad (31)$$

$$\begin{gathered}C_s\xi_s\left[D_y\xi_s^2-\left(D_{xy}+2\bar{D}_r\right)\mu_s^2+T_y\right]+\\+H_s\eta_s\left[D_y\eta_s^2-\left(D_{xy}+2\bar{D}_r\right)\mu_s^2+T_y\right]=0,\end{gathered} \quad (32)$$

$$\begin{gathered}A_k\left(\alpha_k^2-\nu_2\lambda_k^2\right)\mathrm{ch}\,\tilde{\alpha}_k+\\+B_k\left(\beta_k^2-\nu_2\lambda_k^2\right)\mathrm{ch}\,\tilde{\beta}_k=-\left(b_k+b_k^*\right),\end{gathered} \quad (33)$$

$$\begin{gathered}A_k\alpha_k\left[D_x\alpha_k^2-\left(D_{xy}+2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2\right]\mathrm{sh}\,\tilde{\alpha}_k+\\+B_k\beta_k\left[D_x\beta_k^2-\left(D_{xy}+2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2\right]\mathrm{sh}\,\tilde{\beta}_k=0.\end{gathered} \quad (34)$$

Совокупность уравнений (29) – (34) является бесконечной однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_k$, $B_k$, $C_s$, $H_s$, $E_s$, $F_s$.

Заметим, что правые части $\varphi_s$ и $m_s$ уравнений (30), (31) содержат коэффициенты $A_k$, $B_k$, стоящие под знаком суммы (см. формулы

(19)), а слагаемые в правой части уравнения (33) содержат под знаками суммы, соответственно, коэффициенты $C_s, H_s, E_s, F_s$, а также $A_k$, $B_k$ (см. формулы (22, 28)). Представлять однородную систему в стандартной форме, составлять и раскрывать соответствующий определитель системы, находить его корни, дающие нетривиальные решения, – весьма сложная задача, поэтому здесь предложен метод перебора параметра $T_y$ (метод «пристрелки») в сочетании с методом последовательных приближений определения коэффициентов $A_k, B_k, C_s, H_s, E_s, F_s$.

Для организации итерационного процесса разрешающая система разделяется на две подсистемы:

(29) – (32), в которой основными считаются коэффициенты $C_s, H_s, E_s, F_s$;

(33), (34), в которой основными считаются коэффициенты $A_k, B_k$.

Сначала правая часть уравнения (33) заменяется на начальную произвольную убывающую последовательность (в данном случае $1/\lambda_k$), затем решается подсистема уравнений (33), (34) при выбранном значении сжимающей нагрузки $T_y$. Найденные начальные коэффициенты $A_{k0}$, $B_{k0}$ подставляются в подсистему (29) – (32), из которой находятся коэффициенты $C_{s0}$, $H_{s0}$, $E_{s0}$, $F_{s0}$, используемые затем вместе с $A_{k0}$, $B_{k0}$ для формирования правой части уравнения (33) и нового решения $A_{k1}, B_{k1}$ системы (33), (34). Затем вычисляются коэффициенты $C_{s1}$, $H_{s1}$, $E_{s1}$, $F_{s1}$ первого приближения, и далее идет итерационный процесс уточнения коэффициентов задачи.

Если, при выбранном значении нагрузки, начиная с некоторой итерации, соответствующие коэффициенты рядов будут совпадать по абсолютной величине (до 4 – 5 значащих цифр), то это и есть ненулевое решение однородной системы (29) – (34): ее определитель будет равен нулю. Эта нагрузка (критическая) определит новую форму равновесия после потери устойчивости (ей будет соответствовать минимум потенциальной энергии пластины).

**Построение антисимметричного решения**

Искомое решение также представим в виде суммы двух рядов, где будут фигурировать нечетные функции по переменной $x$:

$$w_1(x,y) = \sum_{k=1,3,...}^{\infty} \begin{pmatrix} A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + \\ + B_k \operatorname{sh} \beta_k x \end{pmatrix} \sin \lambda_k y, \qquad (35)$$

$$w_2(x,y) = \\ = \sum_{s=1,3,...}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} \begin{pmatrix} C_s \operatorname{sh} \xi_s \tilde{y} + \\ + H_s \operatorname{sh} \eta_s \tilde{y} + \\ + E_s \operatorname{ch} \xi_s \tilde{y} + \\ + F_s \operatorname{ch} \eta_s \tilde{y} \end{pmatrix} \sin \mu_s x. \qquad (36)$$

Здесь $\tilde{s} = (s+1)/2$, $\mu_s = \pi s/\gamma$; коэффициенты $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ имеют прежние значения.

Удовлетворяя всем граничным условиям задачи, придем к системе, аналогичной (29) – (34), но в последних двух уравнениях поменяются местами синусы и косинусы:

$$C_s \operatorname{sh} \xi_s + H_s \operatorname{sh} \eta_s - \\ - E_s \operatorname{ch} \xi_s - F_s \operatorname{ch} \eta_s = 0, \qquad (37)$$

$$C_s \xi_s \operatorname{ch} \xi_s + H_s \eta_s \operatorname{ch} \eta_s - \\ - E_s \xi_s \operatorname{sh} \xi_s - F_s \eta_s \operatorname{sh} \eta_s = -\varphi_s, \qquad (38)$$

$$E_s\left(\xi_s^2 - \nu_1 \mu_s^2\right) + F_s\left(\eta_s^2 - \nu_1 \mu_s^2\right) = -m_s, \qquad (39)$$

$$C_s \xi_s \left[ D_y \xi_s^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\mu_s^2 \right] + \\ + H_s \eta_s \left[ D_y \eta_s^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\mu_s^2 \right] = 0, \qquad (40)$$

$$A_k\left(\alpha_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2\right) \operatorname{sh} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k\left(\beta_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2\right) \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k = -b_k, \qquad (41)$$

$$A_k \alpha_k \left[ D_x \alpha_k^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2 \right] \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k \beta_k \left[ D_x \beta_k^2 - \left(D_{xy} + 2\bar{D}_r\right)\lambda_k^2 \right] \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k = 0, \qquad (42)$$

где

$$\varphi_s = -\frac{4}{\gamma}\sum_{k=1,3,...}^{\infty}\lambda_k\left(\begin{array}{l} A_k\dfrac{\alpha_k \operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2+\mu_s^2}+ \\ +B_k\dfrac{\beta_k \operatorname{ch}\tilde{\beta}_k}{\beta_k^2+\mu_s^2}\end{array}\right),$$

$$m_s = \frac{4}{\gamma}\sum_{k=1,3,...}^{\infty}(-1)^{\tilde{k}}\left[\begin{array}{c} A_k\left(\nu_1\alpha_k^2-\lambda_k^2\right)\times \\ \times\dfrac{\alpha_k \operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2+\mu_s^2}+ \\ +B_k\left(\nu_1\beta_k^2-\lambda_k^2\right)\times \\ \times\dfrac{\beta_k \operatorname{ch}\tilde{\beta}_k}{\beta_k^2+\mu_s^2}\end{array}\right],$$

$$b_k = -2\sum_{s=1,3,...}^{\infty}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\mu_s^2-\nu_2\xi_s^2}{\lambda_k^2+\xi_s^2}\times \\ \times\left\{\begin{array}{l} C_s\left[\begin{array}{l}(-1)^{\tilde{k}}\xi_s+ \\ +\lambda_k \operatorname{sh}\xi_s\end{array}\right]- \\ -E_s\lambda_k \operatorname{ch}\xi_s\end{array}\right\}+ \\ +\dfrac{\mu_s^2-\nu_2\eta_s^2}{\lambda_k^2+\eta_s^2}\times \\ \times\left\{\begin{array}{l} H_s\left[\begin{array}{l}(-1)^{\tilde{k}}\eta_s+ \\ +\lambda_k \operatorname{sh}\eta_s\end{array}\right]- \\ -F_s\lambda_k \operatorname{ch}\eta_s\end{array}\right\}\end{array}\right]. \quad (43)$$

Здесь использовались разложения гиперболических функций переменной $x$ в ряды Фурье по синусам:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\alpha_k x &= -\frac{4\alpha_k}{\gamma}\operatorname{ch}\tilde{\alpha}_k\sum_{s=1,3,...}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\sin\mu_s x}{\alpha_k^2+\mu_s^2}, \\ \operatorname{sh}\beta_k x &= -\frac{4\beta_k}{\gamma}\operatorname{ch}\tilde{\beta}_k\sum_{s=1,3,...}^{\infty}(-1)^{\tilde{s}}\frac{\sin\mu_s x}{\beta_k^2+\mu_s^2}.\end{aligned} \quad (44)$$

## Расчет ребристой пластины

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину с часто поставленными одинаковыми ребрами жесткости, которые идут параллельно осям координат на равном расстоянии друг от друга (рис. 2).

В работе [16] приведены формулы вычисления жесткостей для такой ребристой пластины:

$$D_1 = D_2 = D + \frac{E_R I_R}{d},\ D_3 = D, \quad (45)$$

где $D$ – цилиндрическая жесткость самой пластины; $E_R$, $I_R$ – соответственно модуль Юнга и момент инерции ребер относительно срединной линии; $d$ – расстояние между ребрами.

Тогда относительные жесткости примут вид

$$D_x = D_y = 1+\bar{D},\ D_{xy} = 1 \quad \left(\bar{D} = E_R I_R / dD\right), \quad (46)$$

и дискриминант биквадратного уравнения (8) (и аналогичного ему для $\varphi_s$ и $\psi_s$) будет отрицательным:

$$D_{xy}^2 - D_x D_y = -\left(\bar{D}^2 + 2\bar{D}\right) < 0, \quad (47)$$

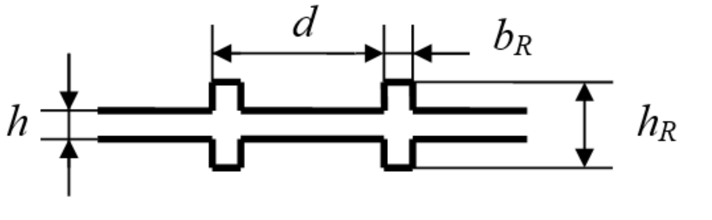



Рис. 2. Форма ребристой панели

что приводит к комплексным корням $\alpha_k$, $\beta_k$, $\varphi_s$ и $\psi_s$.

Проведенные преобразования комплексных выражений показали, что искомое решение получается в действительной форме. Вычисления в системе компьютерной математике Maple это подтвердили.

Будем считать, что пластина и ребра изготовлены из одного материала. Примем коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, ширину ребра $b_R = h$, высоту ребра $h_R = 3h$, отношение ширины ребра к расстоянию между ребрами $b_R/d = 0,1$. Тогда момент инерции ребра и его относительная жесткость будут выражаться как

$$I_R = \frac{b_R h_R^3}{12} - \frac{h^4}{12} = \frac{26}{12} h^4,$$

$$\overline{D} = \frac{E_R I_R}{dD} = \frac{26Eh^4 12\left(1-\nu^2\right)}{12\cdot 10hEh^3} =$$

$$= 2,6\left(1-\nu^2\right) = 2,366.$$

### Численные результаты

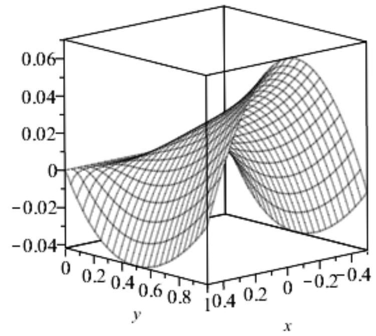
Критические нагрузки и формы равновесия определялись по приведенному выше алгоритму в системе компьютерной математики Maple.

Использовались следующие параметры вычислительного процесса:

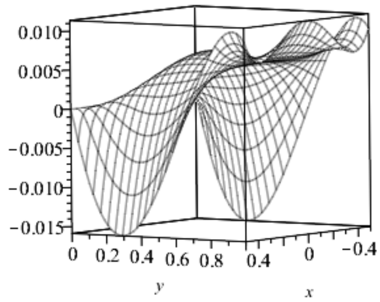
$T_y$ – величина интенсивности относительной сжимающей нагрузки, приложенной к грани $y = 1$; $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона; $\gamma = a/b$ –отношение сторон пластины; $N$ – число членов в рядах; $N_c$ – число итераций.

Коэффициенты рядов (7), (8) или (36), (37) выводились на печать на каждой итерации с целью контроля процесса последовательных приближений. После отыскания критического значения вычислялась функция прогибов и на печать выводилось 3$D$-изображение соответствующей формы равновесия пластины. В рядах удерживалось 59 членов, большее число членов не влияло заметно на точность вычислений. Число итераций было принято равным 25. Время счета каждого варианта нагрузки – не более двух минут. Стратегия перебора нагрузки диктовалась характером поведения значений искомых коэффициентов и не занимала много времени.

*a*)




*b*)




*c*)

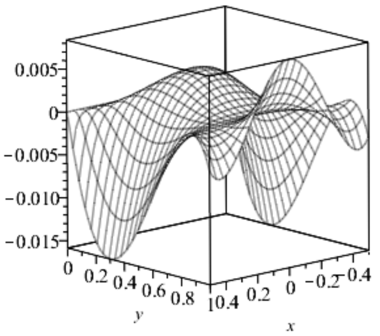



Рис. 3. Первая (*a*), вторая (*b*) и третья (*c*) симметричные формы равновесия ребристой квадратной пластины при $T_{cr1} = 7,824$, $T_{cr2} = 64,933$ и $T_{cr3} = 100,970$ соответственно

Найденные первые три критические нагрузки симметричных форм и первые критические нагрузки антисимметричной формы равновесия для квадратных пластин (ребристой, с малой анизотропией, изотропной)

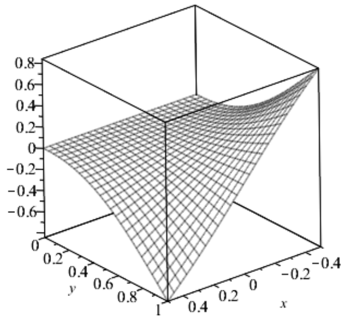



Рис. 4. Первая антисимметричная форма равновесия ребристой квадратной пластины при $T_{cr1}$ = 25,6765

Таблица

**Расчетный спектр критических нагрузок $T_y$ для квадратных консольных пластин**

| Вид пластины | $\bar{D}$ | $T_y = T_Y b^2/D$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Симметричное решение | | | Антисимметричное решение |
| | | $T_{cr1}$ | $T_{cr2}$ | $T_{cr3}$ | $T_{cr1}$ |
| Ребристая | 2,366 | 7,8235 | 64,933 | 100,970 | 25,676 |
| С малой анизотропией | 0,005 | 2,1164 | 20,525 | 58,721 | 7,835 |
| Изотропная | 0 | 2,1057 | 20,457 | 58,597 | 8,080 |

О б о з н а ч е н и я: $\bar{D}$ – относительная жесткость ребер, $T_Y$ – интенсивность равномерных сжимающих усилий, $b$ – длина пластины, $D$ – цилиндрическая жесткость изотропной пластины.

приведены в таблице, а соответствующие 3$D$-формы равновесия ребристой пластины представлены на рис. 3, 4. Следует отметить, что при отыскании первой антисимметричной критической нагрузки пришлось увеличивать число итераций до 200 ввиду слабой сходимости процесса.

### Обсуждение расчетных результатов

В работе [10] вариационным методом была найдена первая критическая нагрузка для изотропной квадратной консольной пластины $p_{cr} = 2{,}4571 \cdot D/a^2$. В настоящей работе для сравнения была рассчитана первая критическая нагрузка для пластины с малой анизотропией $\bar{D} = 0{,}005$, которая составила $2{,}1164 \cdot D/a^2$. Эти величины сопоставимы. Заметим, что энергетические методы дают, как правило, завышенные результаты.

В работе [2] получены численные результаты устойчивости упругих изотропных и ортотропных консольных нанопластин в магнитном поле с использованием симплексного метода суперпозиции, основанного на нелокальной теории упругости. Для верификации метода были выполнены расчеты устойчивости весьма тонкой ($h/a = 1/1000$) изотропной консольной пластины, но в рамках линейной теории Кирхгофа. В частности, для пластины с отношением сторон $\gamma = 2$ под действием равномерной сжимающей нагрузки, приложенной к грани $y = 1$, первые относительные критические значения симметричных форм равновесия составили (если эти данные привести к нашим обозначениям) 2,4174 и 20,5173 против полученных нами значений 2,1594 и 20,663 для обычной тонкой пластины ($h/a < 1/5$).

Значительное расхождение (10,7 %) для первой критической нагрузки можно объяснить большой разницей относительных толщин пластины. Отметим, что в работе [2] приведен спектр первых шести критических нагрузок и получены соответствующие формы равновесия. Это, пожалуй, единственная работа по определению спектра собственных чисел и форм в задаче устойчивости консольных пластин, хотя, например, для защемленной пластины в работе [18] в задаче устойчивости под действием сдвигающих усилий на контуре в рамках линейной теории получен спектр из 10 первых критических нагрузок и представлены соответствующие $3D$-формы равновесия пластин с различным отношением сторон.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования устойчивости упругой ортотропной прямоугольной консольной пластины позволяет с высокой точностью определять спектр критических нагрузок и соответствующие формы равновесия, увеличивая количество членов в рядах, число итераций и длину мантиссы при вычислениях.

**Заключение**

В данной работе получено численно-аналитическое решение задачи устойчивости упругой прямоугольной ортотропной консольной пластины. С помощью гиперболо-тригонометрических рядов проблема свелась к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, содержащей в качестве параметра сжимающую нагрузку. Построен эффективный итерационный процесс поиска критических нагрузок. Для конкретного примера ребристой пластины получен спектр критических нагрузок, который при необходимости можно расширить, используя вычислительную программу в системе аналитических вычислений Maple. Приведены соответствующие $3D$-формы равновесия. Знание критических нагрузок позволит избежать разрушения консольных элементов или установить характер их поведения в закритических областях, что найдет применение в нанотехнике и смарт-структурах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gao Y.** Analysis on the magneto-elastic-plastic buckling/snapping of cantilever rectangular ferromagnetic plates // Acta Mechanica Solida Sinica. 2007. Vol. 20. No. 2. Pp. 180–188.

2. **Wang W., Rong D., Xu C., Zhang Ju., Xu X., Zhou Z.** Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2020. Vol. 8. No. 4. Pp. 505–515.

3. **Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Bao X.Q.** Finite element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments // Smart Materials and Structures. 1996. Vol. 5. No. 2. Pp. 165–170.

4. **Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z.** A novel explicit solution for twisting control of smart laminated cantilever composite plates/beams using inclined piezoelectric actuators // Composite Structures. 2017. Vol. 161. 1 February. Pp. 477–504.

5. **Sukhoterin M.V., Baryshnikov S.O., Aksenov D.A.** Free vibration analysis of rectangular cantilever plates using the hyperbolic-trigonometric series // American Journal of Applied Sciences. 2016. Vol. 13. No. 12. Pp. 1442–1451.

6. **Tsiatas G.C., Yiotis A.J.** A BEM-based meshless solution to buckling and vibration problems of orthotropic plates // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2013. Vol. 37. No. 3. Pp. 579–584.

7. **Papkov S.O., Banerjee J.R.** A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates // Journal of Sound and Vibration. 2015. Vol. 339. 17 March. Pp. 342–358.

8. **Манухин В.А., Коршунов В.А., Вирячева Н.Н.** О работоспособности тонких пластин после потери устойчивости // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2015. Т. 89. № 2. С. 151–160.

9. **Семенов А.А., Москаленко Л.П., Карпов В.В., Сухотерин М.В.** Устойчивость цилиндрических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер // Вестник гражданских инженеров. 2020. Т. 83. № 6. С. 117–125.

10. **Xiang-Sheng C.** The bending stability and

vibration of cantilever rectangular plates // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 1987. Vol. 8. No. 7. Pp. 673–683.

11. **Xiang-Sheng C.** On several problems for lateral instability of cantilever plates // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 1988. Vol. 9. No. 8. Pp. 787–792.

12. **Jiang L., Wu S., Zheng H.** Lateral buckling analysis for rectangular cantilever plate subjected to a concentrated loads // Advanced Materials Research. 2013. Vols. 671–674. Pp. 1596–1599.

13. **Yakoob J.A., Hasan I.J.** Study the increasing of the cantilever plate stiffness by using stiffeners // International Journal of Scientific & Engineering Research. 2015. Vol. 6. No. 4. Pp. 1678–1687.

14. **Барышников С.О., Сухотерин М.В., Кныш Т.П.** Устойчивость внешних консольных элементов глубоководных аппаратов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2020. Т. 12. № 2. С. 347–358.

15. **Барышников С.О., Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пижурина Н.Ф.** Устойчивость стабилизаторов глубоководных аппаратов // Морские интеллектуальные технологии. 2020. Т. 48. № 2-1. С. 83–90.

16. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1947. 355 с.

17. **Алфутов Н.А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.

18. **Ullah S., Zhou J., Zhang J., Zhou C., Wang H., Zhong Y., Wang B., Li R.** New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2020. Vol. 20. No. 02. P. 2071002.

*Статья поступила в редакцию 15.03.2021, принята к публикации 24.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**СУХОТЕРИН Михаил Васильевич** – *доктор технических наук, член-корреспондент РАЕ, заведующий кафедрой Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
sukhoterinmv@gumrf.ru

**КНЫШ Татьяна Петровна** – *кандидат физико-математических наук, заместитель начальника управления информатизации Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
knyshtp@gumrf.ru

**ПАСТУШОК Елена Михайловна** – *доцент Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
pastushokem@gumrf.ru

**АБДИКАРИМОВ Рустамхан Алимханович** – *доктор физико-математических наук, профессор Ташкентского финансового института, г. Ташкент, Республика Узбекистан.*

100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. А. Темур, 60А
rabdikarimov@mail.ru

## REFERENCES


1. **Gao Y.,** Analysis on the magneto-elastic-plastic buckling/snapping of cantilever rectangular ferromagnetic plates, Acta Mechanica Solida Sinica. 20 (2007) 180–188.

2. **Wang W., Rong D., Xu C., et al.,** Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields, Journal of Vibration Engineering & Technologies. 8 (4) (2020). 505–515.

3. **Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Bao X.Q.,** Finite element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments, Smart Materials and Structures. 5 (2) (1996) 165–170.

4. **Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z.,** A novel explicit solution for twisting control of smart laminated cantilever composite plates/beams using inclined piezoelectric actuators, Composite Structures. 161 (1 February) (2017) 477–504.

5. **Sukhoterin M.V., Baryshnikov S.O., Aksenov D.A.,** Free vibration analysis of rectangular cantilever plates using the hyperbolic-trigonometric series, American Journal of Applied Sciences. 13 (12) (2016) 1442–1451.

6. **Tsiatas G.C., Yiotis A.J.,** A BEM-based meshless solution to buckling and vibration problems of orthotropic plates, Engineering Analysis with Boundary Elements. 37 (3) (2013) 579–584.

7. **Papkov S.O., Banerjee J.R.,** A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates, Journal of Sound and Vibration. 339 (17 March) (2015) 342–358.

8. **Manukhin V.A., Korshunov V.A., Viryacheva N.N.,** O rabotosposobnosti tonkikh plastin posle poteri ustoychivosti [On serviceability of thin plates after buckling], Transactions of the CRI named after acad. A.N. Krylov. (89.2(373)) (2015) 151–160 (in Russian).

9. **Semenov A.A., Moskalenko L.P., Karpov V.V., Sukhoterin M.V.,** Buckling of cylindrical panels strengthened with an orthogonal grid of stiffeners, Bulletin of Civil Engineers. 83 (6) (2020) 117–125 (in Russian).

10. **Xiang-Sheng C.,** The bending stability and vibration of cantilever rectangular plates, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 8 (7) (1987) 673–683.

11. **Xiang-Sheng C.,** On several problems for lateral instability of cantilever plates, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 9 (8) (1988) 787–792.

12. **Jiang L., Wu S., Zheng H.,** Lateral buckling analysis for rectangular cantilever plate subjected to a concentrated load, Advanced Materials Research. 671–674 (2013) 1596–1599.

13. **Yakoob J.A., Hasan I.J.** Study the increasing of the cantilever plate stiffness by using stiffeners, International Journal of Scientific & Engineering Research. 6 (4) (2015) 1678–1687.

14. **Baryshnikov S.O., Sukhoterin M.V., Knysh T.P.,** Stability of external cantilever elements of deep-sea vehicles, Vestnik Gosudarstvennogo Universiteta Morskogo i Rechnogo Flota Imeni Admirala S.O. Makarova. 12 (2 (60)) (2020) 347–358 (in Russian).

15. **Baryshnikov S.O., Sukhoterin M.V., Knysh T.P., Pizhurina N.F.,** Buckling of stabilizers deep-sea vehicles, Marine Intellectual Technologies. 48 (2-1) (2020) 83–90 (in Russian).

16. **Lekhnitskii S.G.,** Anisotropic plates, Gordon and Breach, London, 1968.

17. **Alfutov N.A.,** Stability of elastic structures, Series: Foundations of Engineering Mechanics, Eds.: Babitsky V.I., Wittenburg J., Springer, Berlin, Germany, 2000.

18. **Ullah S., Zhou J., Zhang J., et al.,** New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method, International Journal of Structural Stability and Dynamics. 20 (02) (2020) 2071002.


*Received 15.03.2021, accepted 24.05.2021.*

## THE AUTHORS

**SUKHOTERIN Mikhail V.**
*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*
5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
sukhoterinmv@gumrf.ru

**KNYSH Tatiana P.**
*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*
5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
knyshtp@gumrf.ru

**PASTUSHOK Elena M.**
*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*
5/7 Dvinskayia St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
pastushokem@gumrf.ru

**ABDIKARIMOV Rustamkhan A.**
*Tashkent Financial Institute*
60A, A. Temur St., Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan
rabdikarimov@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.14205
УДК 532.529

# ЧИСЛЕННЫЕ СЦЕНАРИИ ДИНАМИКИ НЕРАВНОМЕРНОГО ПО ШИРИНЕ СЛОЯ ГАЗОВЗВЕСИ, УСКОРЯЕМОГО ПРОХОДЯЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

**Д.В. Садин**

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе изучены закономерности взаимодействия ударной волны со слоем газовзвеси, имеющим искривленные границы; при этом волна набегает на указанный слой. Использован гибридный метод крупных частиц. Проведенное исследование позволило обнаружить двумерные эффекты двойного преломления (эффекты фон Неймана), фокусировки или расхождения преломленной ударной волны, бароклинной неустойчивости на поверхности раздела газа и взвеси с образованием грибовидных или кольцевых вихревых структур. Выявлены особенности неравновесности течения, связанные с уменьшением интенсивности проходящей ударной волны и расщеплением начального раздела сред на два контактных разрыва: скачок пористости и контактный разрыв в газовой фазе.

**Ключевые слова:** гибридный метод крупных частиц, неравномерный слой газовзвеси, ударная волна, преломление

**Ссылка при цитировании:** Садин Д.В. Численные сценарии динамики неравномерного по ширине слоя газовзвеси, ускоряемого проходящей ударной волной // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 53–64. DOI: 10.18721/JPM.14205



# NUMERICAL DYNAMICS SCENARIOS OF A VARIABLE IN WIDTH GAS SUSPENSION LAYER ACCELERATED BY A PASSING SHOCK WAVE

**D.V. Sadin**

Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky,
St. Petersburg, Russian Federation

The behavior of the interaction between a shock wave and a gas suspension layer with curved boundaries has been studied using the hybrid large-particle method, the wave running over the layer. The conducted research made it possible to reveal two-dimensional effects of double refraction (von Neumann effects), focusing or divergence of the refracted shock wave, and baroclinic instability at the gas-suspension interface with the formation of mushroom-shaped or ring-shaped vortex structures. The features of the flow nonequilibrium were brought out. These features were associated with a decrease in the intensity of the passing shock wave and the splitting of the initial separation of the media into two contact discontinuities: a jump in porosity and a contact discontinuity in the gas phase.

**Keywords:** hybrid large-particle method, gas suspension layer, shock wave, baroclinic instability

**Citation:** Sadin D.V., Numerical dynamics scenarios of a variable in width gas suspension layer accelerated by a passing shock wave, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 53–64. DOI: 10.18721/JPM.14205

**Введение**

Исследование распространения ударных волн в средах с неоднородностью (неравномерным распределением физико-химических и термодинамических параметров, в том числе с границами раздела сред) является актуальным в различных научных и технических приложениях. Эта проблема встречается при решении задач газодинамики, предполагающих изменения в пространстве показателя адиабаты, молекулярного веса или температуры. Явления взаимодействия ударных волн с неоднородностью отличаются сложной топологией отражения, преломления и дифракции ударных волн, а также развитием неустойчивости Рихтмайера – Мешкова [1 – 6].

В последние десятилетия усиливается интерес к изучению движения ударных волн в неоднородных релаксирующих многофазных средах (смеси газа с частицами, жидкости с пузырьками). Работы в этом направлении связаны с изучением ускорения облака газовзвеси в проходящей ударной волне [7, 8], дисперсией облака частиц [9, 10], деформацией границ и развитием неустойчивости [11, 12], разлета и истечения смеси газа и частиц [13, 14]. Наряду с общими качественными закономерностями, возникающими в неоднородных потоках «чистого» газа, наличие мелкодисперсных включений может приводить к неочевидным результатам, например образованию «аномальных» ударно-волновых структур на дозвуковом по несущему газу режиме течения [14, 15].

Вследствие значительной трудоемкости экспериментов и получения количественных результатов эффективным методом исследования представляется математическое моделирование. Важной особенностью постановок задач для неравновесных течений гетерогенных сред является многомасштабность решений. Если релаксационный масштаб (время релаксации фазы) существенно меньше газодинамического масштаба времени распространения возмущения между узлами или ячейками сетки (условие Куранта – Фридрихса – Леви), то такие задачи относятся к жестким. Применение традиционных явных разностных схем расчета источниковых членов становится нецелесообразным из-за неприемлемо малого шага по времени, который ограничен характерным временным масштабом для быстрого компонента решения. Для преодоления указанной трудности численного интегрирования уравнений динамики газодисперсных сред предложены схемы с явной пространственной аппроксимацией производных и неявной схемой расчета источников (межфазных взаимодействий) [16 – 20]. Другой подход заключается в построении полностью неявных схем с их реализацией через векторную и скалярную прогонки [21 – 23].

На выбор разностной или конечно-объемной схемы оказывает влияние тип и свойства системы дифференциальных уравнений, например гиперболичность. Для двухскоростной и двухтемпературной формулировок с общим давлением или двумя давлениями, законы сохранения относятся для некоторых моделей к гиперболическому или составному типу, в зависимости от разности скоростей фаз [24 – 26]. Это накладывает ограничения на применимость дискретных моделей, опирающихся на характеристическое представление исходной системы уравнений, например схемы типа Годунова или сеточно-характеристические методы.

Модификация схем, применяемых в задачах вычислительной гидродинамики, для моделирования гетерогенных течений сталкивается в общем случае с проблемой неконсервативности (недивергентности) законов сохранения, ввиду действия силы Архимеда, обусловленной изменением трубки тока газа: $p\nabla\alpha_1$ ($p$ – давление газа, $\alpha_1$ – его объемная доля). Для устранения этой трудности в схемах, требующих дивергентную запись дискретных законов сохранения, обычно используют искусственный прием: величину $p\nabla\alpha_1$ переносят в правую часть законов сохранения и объединяют с источниковыми членами (межфазными взаимодействиями) [17].

Целями настоящей работы являются детальный численный анализ взаимодействия ударной волны с неравномерным по ширине слоем газовзвеси, учитывающий релаксационные процессы, а также проверка возможностей гибридного метода крупных частиц [20, 27] для решения данного класса задач.

**Математическая модель и метод расчета**

Рассмотрим законы сохранения калорически совершенного газа и твердых несжимаемых частиц в рамках взаимопроникающих континуумов [28] в формулировке [20]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_i\mathbf{v}_i\right)=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1\mathbf{v}_1\right)+\nabla\left(\rho_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1\right)+\alpha_1\nabla p=-\mathbf{F}_\mu,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_2\mathbf{v}_2\right)+\nabla\left(\rho_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2\right)+\alpha_2\nabla p=\mathbf{F}_\mu,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_2 e_2\right)+\nabla\cdot\left(\rho_2 e_2\mathbf{v}_2\right)=Q_T,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1 E_1+\rho_2 K_2\right)+\\
+\nabla\cdot\left(\rho_1 E_1\mathbf{v}_1+\rho_2 K_2\mathbf{v}_2\right)+\\
+\nabla\cdot\left[p\left(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2\right)\right]=-Q_T,\\
\rho_i=\rho_i^\circ\alpha_i\ \ (i=1,\ 2),\ \alpha_1+\alpha_2=1,\\
E_1=e_1+\mathbf{v}_1^2/2,\quad K_2=\mathbf{v}_2^2/2,\\
E_2=K_2+e_2,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\nabla$ – оператор Гамильтона; $\alpha_i$, $\rho_i$, кг/м$^3$, $\mathbf{v}_i$, м/с, $E_i$, $e_i$, Дж/кг, $p$, Па, — объемная доля, приведенная плотность, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы $i$-й фазы, давление газа; $\mathbf{F}_\mu$, Н/м$^3$, – вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия; $Q$, Вт·м$^{-3}$, — мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема; $t$, с, — время; здесь и далее нижние индексы 1 и 2 относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, верхний индекс в виде кружка относится к истинным значениям плотности.

Замыкающими соотношениями системы (1) являются уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц:

$$
p=\left(\gamma_1-1\right)\rho_1^\circ e_1,\ e_1=c_v T_1,
$$

$$
e_2=c_2 T_2,\ \left\{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\right\}\equiv\text{const},
$$

где $T_1$, $T_2$, К, – температуры несущей фазы и частиц; $\gamma_1$, $c_v$, Дж/(кг·К), – показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; $c_2$, Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость частиц.

Силовое и тепловое межфазные взаимодействия $\mathbf{F}_\mu$, $Q_T$ определяются из критериальных соотношений [28].

Для расчетов используется гибридный метод крупных частиц второго порядка аппроксимации по пространству и времени [27]. Регуляризация численного решения осуществлялась двумя способами. На первом этапе алгоритма в схему добавлялась искусственная диссипация с нелинейной коррекцией типа Христенсена. В отличие от линейной или квадратичной искусственной вязкости, предложенная численная вязкость не понижает порядка аппроксимации и стремится к нулю на сетках произвольного разрешения на гладких решениях. С учетом полученных предварительных значений искомых функций на втором этапе формировались дивергентные потоки путем гибридизации: взвешенной ограничителем квазилинейной комбинации центральной и противопоточной аппроксимаций. При этом выполняются дискретные аналоги законов сохранения. Повышение порядка точности по времени осуществлялось двухшаговым методом Рунге — Кутты. Межфазные взаимодействия рассчитывались без расщепления на газодинамическую и релаксационную стадии безытерационной схемой за счет линеаризации и неявного учета линейной части источниковых членов.

Метод обладает рядом позитивных вычислительных свойств, к которым относится $K$-устойчивость [18] (независимость шага по времени от размеров расчетной сетки и интенсивности межфазных взаимодействий). Схема является бездиссипативной на гладких решениях, демонстрирует монотонность и высокую разрешающую способность для структурно-сложных течений. Алгоритм отличается универсальностью решения расширенного класса задач с доминированием конвекции как гиперболического, так и составного типа [20, 27].

Шаг по времени определяется из условия Куранта – Фридрихса – Леви для «чистого» газа:

$$\tau^k = \mathrm{CFL}\frac{h}{\max\limits_{\forall n}\left(\left|v_{1,n}^k\right| + a_n^k\right)},$$

где CFL – фиксированное число Куранта, $a_n^k$ – скорость звука по газовой фазе в точке $\left(x_n, t^k\right)$.

## Постановка задач

Плоский канал *1* заполнен невозмущенным воздухом *2*. Внутри канала имеется слой газовзвеси *3* с цилиндрическим утолщением *4* или выемкой *5* диаметром $D$ = 5 см (рис. 1). Слева направо движется ударная волна *6* постоянной интенсивности с числом Маха M = 1,22. Рассматриваются варианты задач с цилиндрическим искривлением слоя газовзвеси на левой (при $x = 3D$) или правой (при $x = 4D$) его границе (рис. 1,*a* и *b*, соответственно).

В начальный момент времени фронт ударной волны расположен в плоскости $x_s = 1{,}5D$. Газовзвесь представляет собой неподвижную при $t = 0$ смесь воздуха ($\gamma_1 = 1{,}4$) с монодисперсными несжимаемыми сферическими частицами плотностью $\rho_2^\circ$ = 2500 кг/м³, с объемной долей $\alpha_2 = 0{,}001$ и теплоемкостью $c_2$ = 710 Дж/(кг·K) в условиях термодинамического равновесия ($T_1 = T_2$ = 293,23 K) и при давлении $p$ = 101325 Па.

На стенках заданы граничные условия отражения, а на входе (при $x = 0$) и выходе (при $x = 9D$) использованы мягкие краевые условия продолжения решения изнутри расчетной области. С целью исключения (минимизации) влияния ограниченности расчетной области на решение вблизи правой границы $8{,}5D < x \le 9D$ (рис. 1) применялась сетка с возрастающим шагом. Задачи решались численно, гибридным методом крупных частиц с числом Куранта CFL = 0,4 до оси симметрии, на равномерной сетке с шагом $h/D$ = = 0,0025 . Для однородности алгоритма в области «чистого» газа объемная концентрация частиц принята пренебрежимо малой ($\alpha_2$ = = $10^{-10}$).

## Обсуждение результатов численных решений

Взаимодействие проходящей ударной волны и ограниченного слоя газовзвеси с

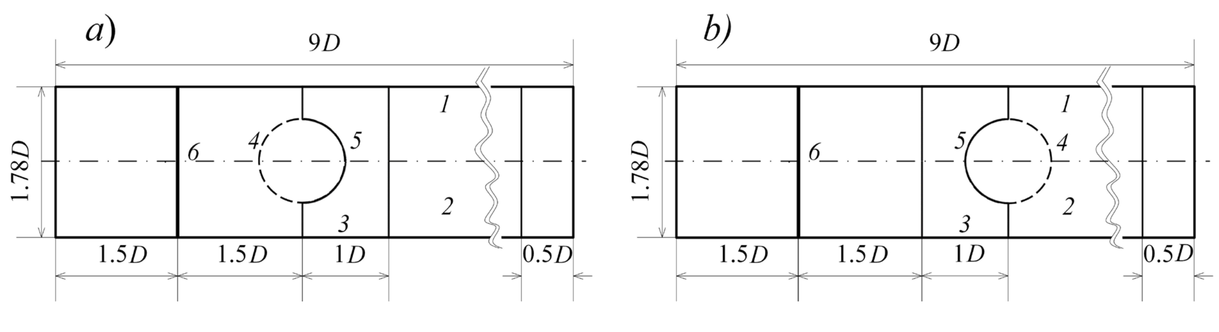



Рис. 1. Расчетные схемы задач с искривлением левой (*a*) или правой (*b*) границы слоя газовзвеси: *1* – плоский канал, заполненный невозмущенным воздухом (*2*); *3* – слой газовзвеси; *4* – цилиндрическое утолщение; *5* – выемка; *6* – ударная волна постоянной интенсивности

искривленными границами сопровождается рядом нелинейных физических явлений: распадом разрыва на поверхностях раздела сред, их деформацией, развитием неустойчивости и формированием вихревых структур.

В зависимости от разницы эффективного акустического импеданса

$$\delta R = \rho_+ a_+ - \rho_- a_-$$

(справа плюс и слева минус) от контакта газа и взвеси (в этом выражении

$$a = \sqrt{p / \left[ \left( \rho_1 + \rho_2 \right) \alpha_1 \right]}$$

– эффективная скорость звука смеси газа *1* и частиц *2*) реализуются конфигурации с двумя ударными волнами при $\delta R > 0$ или прошедшим скачком уплотнения и волной разрежения при $\delta R < 0$.

Для всех рассматриваемых вариантов задач, на левой ($L$) и правой ($R$) границах слоя значения $\delta R$ составляют:

$$\delta R_L = 238{,}423 \text{ кг/(м}^2\cdot\text{с)},$$

$$\delta R_R = -238{,}423 \text{ кг/(м}^2\cdot\text{с)}.$$

Физической причиной нестабильности и вихреобразования на контактных поверхностях является бароклинная неустойчивость – несовпадение градиентов плотности и давления. Действительно, в односкоростном приближении ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$) в начальный момент времени величина завихренности

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

а транспортное уравнение для завихренности имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \omega = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \left( \omega \cdot \nabla \right) \mathbf{v} - \omega \left( \nabla \cdot \mathbf{v} \right).$$

Следовательно, при $t > 0$, в случае разнонаправленных градиентов плотности и давления ($\nabla\rho\times\nabla p \neq 0$), в окрестности искривленных контактных границ возникает вихревое движение смеси газа и частиц.

Еще один существенный фактор связан с неравновесностью динамики газовзвеси (различием скоростей и температур газа и частиц), которая характеризуется безразмерными временами динамической $\overline{t}_1^{(\mu)}$, $\overline{t}_2^{(\mu)}$ и тепловой $\overline{t}_1^{(T)}$, $\overline{t}_2^{(T)}$ релаксациями фаз [18]:

$$\overline{t}_1^{(\mu)} = \frac{1}{18} \frac{\rho_1^\circ d^2}{\mu_1 \alpha_2} \frac{a_{10}}{D}, \quad \overline{t}_2^{(\mu)} = \frac{1}{18} \frac{\rho_2^\circ d^2}{\mu_1 \alpha_1} \frac{a_{10}}{D};$$

$$\overline{t}_1^{(T)} = \frac{d^2 \rho_1^\circ c_p}{4 \lambda_1 \alpha_2} \frac{a_{10}}{D}, \quad \overline{t}_2^{(T)} = \frac{d^2 \rho_2^\circ c_2}{4 \lambda_2 \alpha_1} \frac{a_{10}}{D},$$

где $d$ – диаметр частицы, $a_{10}$ – начальная скорость звука в несущей фазе.

**Численные сценарии динамики пылевого слоя для взвеси мелких частиц.** Рассмотрим подробнее указанные сценарии для мелких частиц диаметром $d$ = 0,1 мкм и пылевого слоя с цилиндрической выемкой или утолщением слоя на левой (рис. 2) или правой (рис. 3) границе. Визуализация течений выполнена в виде численных шлирен-изображений функции градиента приведенной плотности смеси $s(\nabla\rho)$ [29]. Результаты приведены для четырех последовательных характерных моментов времени: распада разрыва на левой границе взвеси (рис. 2, *a*, *e* и рис. 3, *a*, *e*), прохождения скачка уплотнения внутри слоя (рис. 2, *b*, *f* и рис. 3, *b*, *f*), преломления ударной волны на правой границе (рис. 2, *c*, *g* и рис. 3, *c*, *g*) и развития неустойчивости с формированием вихревого движения на поверхностях раздела сред (рис. 2, *d*, *h* и рис. 3, *d*, *h*). Осевые и поперечные координаты отнесены к диаметру $D$ начальной кривизны слоя: $x' = x/D$ и $y' = y/D$. Время отсчитывается в безразмерном виде: $t' = \alpha_{10}\, t/D$.

Начало взаимодействия падающей ударной волны $s_1$ сопровождается распадом разрыва на прямолинейных (рис. 3) или искривленных (рис. 2) поверхностях слоя пыли $c_1$. Поскольку разница эффективного акустического импеданса $\delta R_L$ = 238,423 кг/(м²·с),

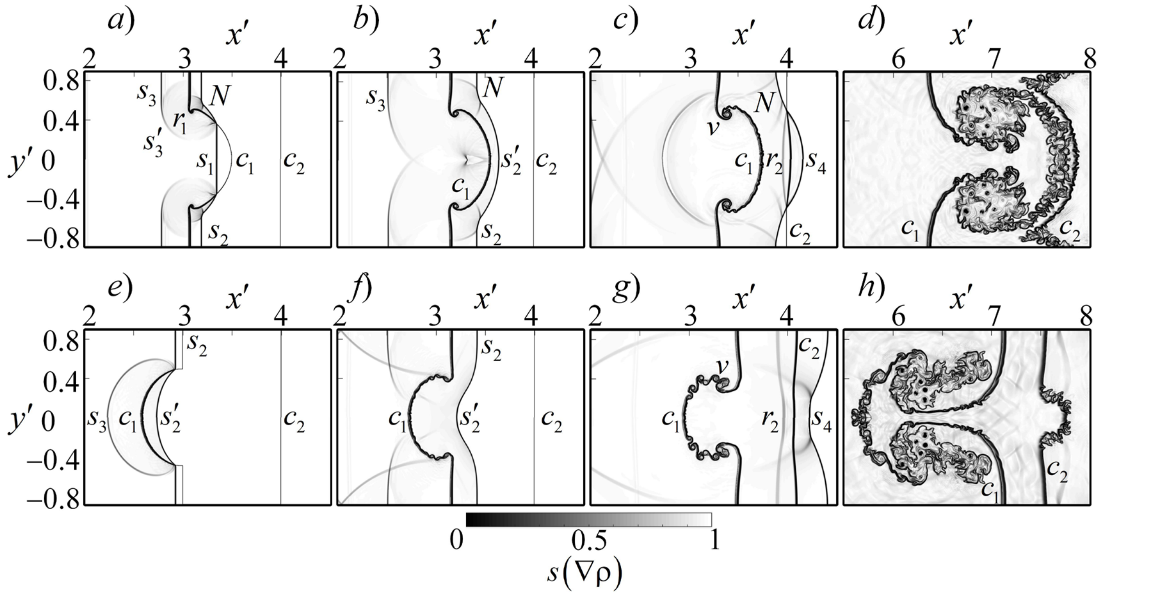



Рис. 2. Взаимодействие ударной волны с выемкой ($a - d$) или утолщением ($e - h$) левой границы слоя газовзвеси ($d$ = 0,1 мкм). Даны численные шлирен-изображения функции градиента плотности смеси в последовательные безразмерные моменты времени: 1,51 ($a$), 1,85 ($b$), 2,54 ($c$), 13,73 ($d$), 1,17 ($e$), 1,85 ($f$); 3,09 ($g$), 13,73 ($h$).
Размер сетки сверху от оси симметрии – 3600 × 356; $N$ – двойное преломление фон Неймана; $c_1$, $c_2$ – левая и правая поверхности слоя пыли; $s_1$, $s_2$, $s'_2$, $s_3$, $s'_3$, $s_4$ – ударные волны; $r_1$, $r_2$ – волны разрежения; $v$ – вихри

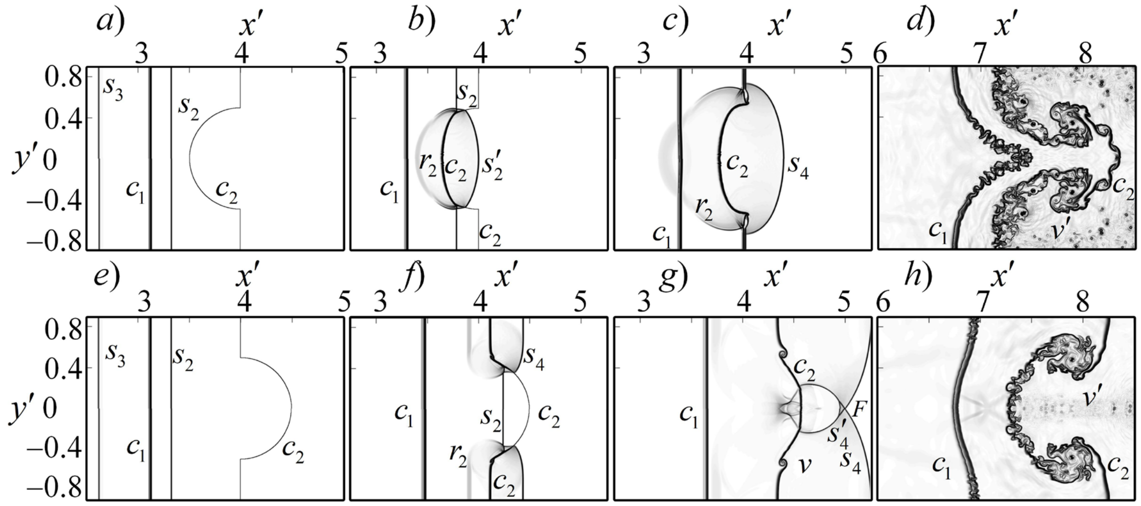



Рис. 3. Графики, аналогичные приведенным на рис. 2, но для правой границы слоя газовзвеси; кроме того, численные шлирен-изображения функции градиента плотности смеси даны частично в другие последовательные безразмерные моменты времени: 1,72 ($a$); 2,40 ($b$); 2,75 ($c$); 13,73 ($d$); 1,72 ($e$), 3,09 ($f$); 3,78 ($g$); 13,73 ($h$).
$F$ – область фокусировки поперечных ударных волн $s'_4$, $v'$ – срывные вихри

т. е. больше нуля, отражение происходит в виде прямолинейного $s_3$ (рис. 3, *a*, *e*) или искривленного $s_3 - s_3'$ (рис. 2, *a*, *e*) скачков уплотнения. При взаимодействии с неоднородностью формируется волна разрежения $r_1$ (рис. 2, *a*) или выпуклая ударная волна (рис. 2, *e*). В случае выемки слева (рис. 2, *a*) образуется проходящая ударная волна $s_2$ и двойное преломление фон Неймана $N$ или диск $s_2'$ при утолщении слоя (рис. 2, *e*).

В последующие моменты времени изогнутый скачок уплотнения $s_2 - s_2'$ движется внутри слоя двухфазной среды (рис. 2, *b*, *f*) и при набегании на правую границу $c_2$ распадается на прошедшую ударную волну $s_4$ и отраженную волну разрежения $r_2$ в противоположном направлении (рис. 2, *c*, *g*). Отличительными чертами распада разрыва на правой искривленной границе выступают расходящийся характер прошедшей через слой ударной волны $s_4$ в случае цилиндрической выемки (рис. 3, *c*) или эффект фокусировки $F$ при отражении поперечных скачков уплотнения от оси симметрии $s_4'$ (рис. 3, *g*).

Для случаев выемки и утолщения слоя векторное произведение градиентов плотности смеси и давления $\nabla\rho\times\nabla p$ имеет противоположные направления, что вызывает образование разнонаправленных вихрей (рис. 2 и 3, *c*, *g*). В дальнейшем формируются грибовидные (рис. 2, *h*) или кольцевые (рис. 3, *d*) вихревые структуры *t*. Интересно отметить появление мелких срывных завихрений в газовой фазе вниз по потоку по периферии (рис. 3, *d*) или в окрестности оси симметрии (рис. 3, *h*).

Динамика слоя для рассматриваемых вариантов задач показана на рис. 4 в виде траекторий заданных точек на границе раздела сред. Приняты следующие обозначения: сплошная и штриховая линии соответствуют траекториям левой и правой границы на оси симметрии (при $y'=0$), а пунктирная и штрихпунктирная кривые – изменения во времени положений левой и правой контактной поверхности на стенке канала (при $y'=0{,}89$).

Деформация границ пылевого слоя происходит со сжатием на оси симметрии для варианта взаимодействия с выемкой слева (рис. 4, *a*), а наличие цилиндрического утолщения, напротив, приводит к отставанию контактной поверхности в центре канала от движения взвеси на периферии (рис. 4, *b*). В случае начального искривления правого края слоя газовзвеси наблюдаются пересечение траекторий характерных точек (рис. 4, *c* и *d*). Например, правый край слоя вблизи стенки (штрихпунктирная линия) с течением времени отстает (рис. 4, *c*) или опережает (рис. 4, *d*) положения границ слоя на оси симметрии (сплошная и штриховая кривые).

Рассмотренные сценарии реализуются для мелких частиц газовзвеси, для которых

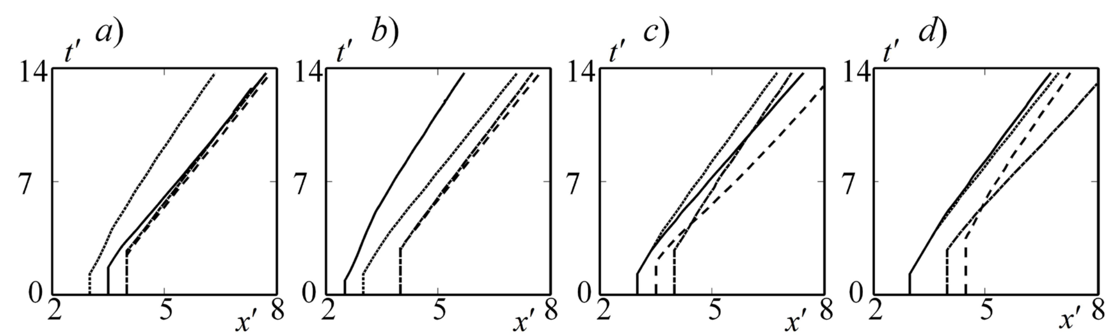



Рис. 4. Траектории левой и правой границ слоя газовзвеси (сплошная и штриховая линии, соответственно) на оси симметрии ($y'=0$), а также на стенке канала ($y'=0{,}89$) (пунктирная и штрихпунктирная линии, соответственно) для случаев выемки или утолщения соответственно левой (*a* и *b*), а также правой (*c* и *d*) границ

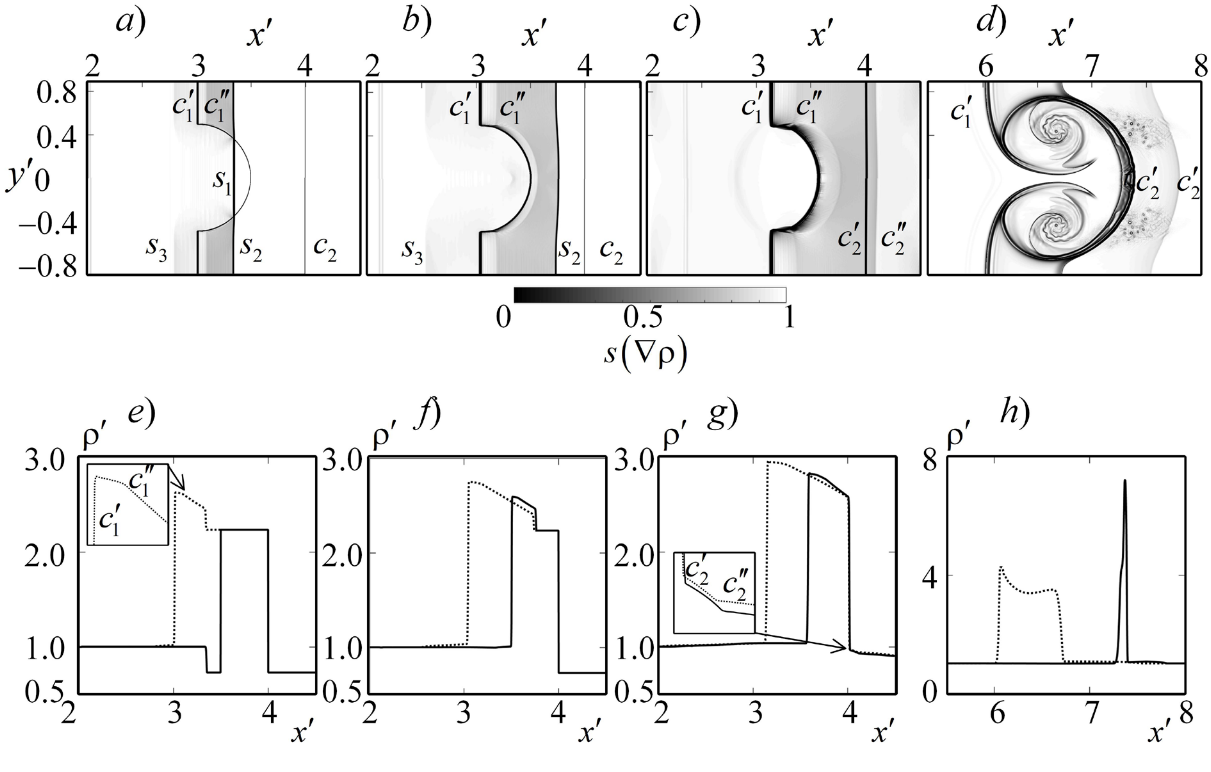


Рис. 5. Взаимодействие ударной волны с выемкой левой границы слоя газовзвеси ($d$ = 10 мкм). Даны численные шлирен-изображения функции градиента плотности смеси ($a - d$) и профили относительной плотности смеси ($e - h$) на оси симметрии (сплошные кривые) и на стенке (пунктиры) в последовательные безразмерные моменты времени: 1,51 ($a$, $e$), 1,85 ($b$, $f$), 2,54 ($c$, $g$), 13,73 ($d$, $h$)

времена выравнивания скоростей и температур фаз малы, т. е.

$$\overline{t_1}^{(\mu)}10^4 = 2{,}551, \overline{t_2}^{(\mu)}10^4 = 5{,}302;$$

$$\overline{t_1}^{(T)}10^4 = 8{,}303,\ \overline{t_2}^{(T)}10^4 = 0{,}277,$$

и зоны релаксации являются подсеточными.

**Численные сценарии динамики пылевого слоя для взвеси частиц бóльшего размера.** Рассмотрим теперь взаимодействие ударной волны со слоем газовзвеси для частиц диаметром $d$ = 10 мкм на примере задачи с начальным уменьшением ширины (выемкой) на левой поверхности.

Результаты расчетов в последовательные моменты времени представлены на рис. 5 как численные шлирен-изображения и как распределения плотности смеси, отнесенные к ее величине за ударной волной $\rho' = \rho/\rho_s$.

Вследствие значительных времен релаксаций фаз, равных

$$\overline{t_1}^{(\mu)} = 2{,}551, \overline{t_2}^{(\mu)} = 5{,}302;$$

$$\overline{t_1}^{(T)} = 8{,}303,\ \overline{t_2}^{(T)} = 0{,}277,$$

динамика слоя газовзвеси имеет ряд существенных особенностей. При падении ударной волны $s_1$ на левую границу дисперсной среды образуется проходящая ударная волна $s_2$ уменьшающейся интенсивности и отраженная слабая волна сжатия $s_3$.

Поскольку газовая несущая фаза опережает увлекаемые ею дисперсные частицы, начальная поверхность между газом и дисперсной средой расщепляется на два контактных разрыва. Первый из них – это скачок пористости $c_1'$, а второй – контактный разрыв в газовой фазе $c_1''$ (рис. 5, $a$, $b$ и $e$, $f$). Аналогичная ситуация возникает и на правой границе газовзвеси с разделом сред $c_2'$ и интерфейсной поверхности газов $c_2''$ (рис. 5, *c* и *g*).

Межфазное трение и теплообмен являются существенными факторами подавления вихрей малого масштаба. К моменту окончания счета слой деформируется со значительным сжатием на оси симметрии (рис. 5, *g*) и формируется крупное кольцевое газодисперсное вихревое образование (рис. 5, *d*).

**Заключение**

Методом численного моделирования изучены закономерности взаимодействия ударной волны при ее набегании на слой газовзвеси с искривленными границами. В зависимости от разницы эффективного акустического импеданса реализуются два типа распада разрыва на границе раздела сред: две ударные волны либо волна разрежения и ударная волна. Наличие утолщения или сужения слоя газовзвеси приводит к формированию двумерных эффектов двойного преломления фон Неймана и фокусировки либо расхождения проходящей ударной волны. Несовпадение градиентов плотности и давления является причиной развития неустойчивости на поверхности раздела газа и взвеси и образования грибовидных или кольцевых вихревых структур. Фактор неравновесности течения при увеличении размера дисперсных частиц вносит существенные особенности: ударная волна внутри слоя газовзвеси движется со снижением ее интенсивности, а начальная поверхность между газом и дисперсной средой расщепляется на два контактных разрыва: скачок пористости и контактный разрыв в газовой фазе.

Результаты численного моделирования подтвердили надежность, большой запас устойчивости и высокую разрешающую способность гибридного метода крупных частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.** Shock waves at a fast-slow gas interface // Journal of Fluid Mechanics. 1978. Vol. 86. No. 1. Pp. 15–32.

2. **Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.** Shock waves at a slow-fast gas interface // Journal of Fluid Mechanics. 1978. Vol. 89. No. 1. Pp. 79–95.

3. **Войнович П.А., Жмакин А.И., Фурсенко А.А.** Моделирование взаимодействия ударных волн в газах с пространственными неоднородностями параметров // Журнал технической физики. 1988. Т. 58. № 7. С. 1259–1267.

4. **Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г.** Пространственные эффекты при взаимодействии ударной волны с продольным каналом газа пониженной плотности // Письма в Журнал технической физики. 2018. Т. 44. № 20. С. 5–13.

5. **Ranjan D., Oakley J., Bonazza R.** Shock-bubble interactions // Annual Review of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 43. Pp. 117–140.

6. **Wang M., Si T., Luo X.** Experimental study on the interaction of planar shock wave with polygonal helium cylinders // Shock Waves. 2015. Vol. 25. No. 4. Pp. 347–355.

7. **Kiselev V.P., Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V.** Interaction of a shock wave with a particle cloud of finite size // Shock Waves. 2006. Vol. 16. No. 1. Pp. 53–64.

8. **Тукмаков Д.А.** Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. С. 141–154.

9. **Дэвис С.Л., Диттман Т.Б., Якобс Дж.Б., Дон В.С.** Дисперсия облака частиц в ударной волне. Влияние формы, угла поворота и геометрических параметров облака на динамику потока и дисперсию // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 6. С. 45–59.

10. **Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Тетерина И.В.** Влияние двумерных эффектов на взаимодействие ударной волны с облаком частиц // Вычислительные методы и программирование. 2020. Т. 21. № 3. С. 207–224.

11. **Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г.** Фокусировка ударной волны при взаимо-

действии ударной волны с цилиндрическим облаком пыли // Письма в Журнал технической физики. 2016. Т. 42. № 18. С. 17–24.

12. **Садин Д.В., Давидчук В.А.** Взаимодействие плоской ударной волны с областями различной формы и плотности в мелкодисперсной газовзвеси // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 489–498.

13. **Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А.** Ударно-волновой разлет газовзвесей // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466. № 4. С. 418–421.

14. **Садин Д.В., Любарский С.Д., Гравченко Ю.А.** Особенности недорасширенной импульсной импактной газодисперсной струи с высокой концентрацией частиц // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. №1. С. 22–26.

15. **Садин Д.В., Гузенков В.О., Любарский С.Д.** Численное исследование структуры нестационарной двухфазной тонкодисперсной струи // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 2. С. 91–97.

16. **Садин Д.В.** Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 1033–1039.

17. **Saurel R., Abgrall R.** A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 150. No. 2. Pp. 425–467.

18. **Садин Д.В.** О жесткости систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 11. С. 43–53.

19. **Saurel R., Petitpas F., Berry R.A.** Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // Journal of Computational Physics. 2009. Vol. 228. No. 5. Pp. 1678–1712.

20. **Садин Д.В.** TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098–2109.

21. **Frepoli C., Mahaffy J.H., Ohkawa K.** Notes on the implementation of a fully-implicit numerical scheme for a two-phase three-field flow model // Nuclear Engineering and Design. 2003. Vol. 225. No. 12. Pp. 191–217.

22. **Nascimento J.C.S., Santos A., Pires A.P.** A fully-implicit solution for the single-pressure two-fluid model with sharp discontinuities // Computers and Fluids. 2018. Vol. 175. No. 15. Pp. 214–229.

23. **Булович С.В.** Неявный экономичный алгоритм численного интегрирования системы уравнений для описания состояния многофазного потока с общим давлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 47–60.

24. **Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И., Нигматулин Р.И.** О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 1. С. 83–95.

25. **Drew D.A.** Mathematical modelling of two-phase flow // Annual Review of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 15. Pp. 261–291.

26. **Hudson J., Harris D.** A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow // Journal of Computational Physics. 2006. Vol. 216. No. 2. Pp. 494–525.

27. **Садин Д.В.** Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газовзвеси // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 112–122.

28. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.

29. **Quirk J.J., Karni S.** On the dynamics of a shock-bubble interaction // Journal of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 318. 10 July. Pp. 129–163.

*Статья поступила в редакцию 30.03.2021, принята к публикации 20.04.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**САДИН Дмитрий Викторович** – *доктор технических наук, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197198, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13

sadin@yandex.ru

## REFERENCES

1. **Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.,** Shock waves at a fast-slow gas interface, Journal of Fluid Mechanics. 86 (1) (1978) 15–32.

2. **Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F.,** Shock waves at a slow-fast gas interface, Journal of Fluid Mechanics. 89 (1) (1978) 79–95.

3. **Voinovich P.A., Zhmakin A.I., Fursenko A.A.,** Numerical simulation of the interaction of shock waves in spatially inhomogeneous gases, Sov. Phys. Tech. Phys. 33 (1988) 748–753.

4. **Georgievskiy P.Yu., Levin V.A., Sutyrin O.G.,** Spatial effects of interaction of a shock with a lateral low-density gas channel, Technical Physics Letters. 44 (10) (2018) 905–908.

5. **Ranjan D., Oakley J., Bonazza R.,** Shock-bubble interactions, Annual Review of Fluid Mechanics. 43 (2011) 117–140.

6. **Wang M., Si T. & Luo X.,** Experimental study on the interaction of planar shock wave with polygonal helium cylinders, Shock Waves. 25 (4) (2015) 347–355.

7. **Kiselev V.P., Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V.,** Interaction of a shock wave with a particle cloud of finite size, Shock Waves. 16 (1) (2006) 53–64.

8. **Tukmakov D.A.,** Numerical study of intense shock waves in dusty media with a homogeneous and two-component carrier phase, Computer Research and Modeling. 12 (1) (2020) 141–154 (in Russian).

9. **Davis S.L., Dittmann T.B., Jacobs G.B., Don W.S.,** Dispersion of a cloud of particles by a moving shock: effects of the shape, angle of rotation, and aspect ratio, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 54 (6) (2013) 900–912.

10. **Volkov K.N., Emel'yanov V.N., Karpenko A.G., Teterina I.V.,** Simulation of unsteady gas-particle flow induced by the shock wave interaction with a particle layer, Numerical Methods and Programming. 21 (1) (2020) 96–114.

11. **Georgievskiy P.Yu., Levin V.A., Sutyrin O.G.,** Shock focusing upon interaction of a shock with a cylindrical dust cloud, Technical Physics Letters. 42 (9) (2016) 936–939.

12. **Sadin D.V., Davidchuk V.A.,** Interaction of a plane shock wave with regions of varying shape and density in a finely divided gas suspension, J. Eng. Phys. Thermophys. 93 (2) (2020) 474–483.

13. **Nigmatulin R.I., Gubajdullin D.A., Tukmakov D.A.,** Shock-wave dispersion of gas–particle mixtures, Doklady Physics. 61 (2) (2016) 70–73.

14. **Sadin D.V., Lyubarskii S.D., Gravchenko Yu.A.,** Features of an underexpanded pulsed impact gas-dispersed jet with a high particle concentration, Technical Physics. 62 (1) (2017) 18–23.

15. **Sadin D.V., Guzenkov V.O., Lyubarskii S.D.,** Numerical study of the structure of a finely disperse unsteady two-phase jet, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 46 (2) (2005) 224–229.

16. **Sadin D.V.,** A method for computing heterogeneous wave flows with intense phase interaction, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 38 (6) (1998) 987–993.

17. **Saurel R., Abgrall R.,** A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, Journal of Computational Physics. 150 (2) (1999) 425–467.

18. **Sadin D.V.,** On stiff systems of partial differential equations for motion of heterogeneous media, Mathematical Models and Computer Simulations. 14 (11) (2002) 43–53 (in Russian).

19. **Saurel R., Petitpas F., Berry R.A.,** Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures, Journal of Computational Physics. 228 (5) (2009) 1678–1712.

20. **Sadin D.V.,** TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of non-hyperbolic nonconservative type, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 56 (12) (2016) 2068–2078.

21. **Frepoli C., Mahaffy J.H., Ohkawa K.,** Notes on the implementation of a fully-implicit numerical scheme for a two-phase three-field flow model, Nuclear Engineering and Design. 225 (12) (2003) 191–217.

22. **Nascimento J.C.S., Santos A., Pires A.P.,** A fully-implicit solution for the single-pressure two-fluid model with sharp discontinuities, Computers and Fluids. 175 (15) (2018) 214–229.

23. **Bulovich S.V.,** An implicit economical algorithm for numerical integration of the equation system describing a multiphase flow state with common pressure, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (4) (2020) 47–60.

24. **Klebanov L.A., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I., Nigmatulin R.I.,** On hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for a differential equations system of the two-speed motion of two-phase media, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 46 (1) (1982) 83–95 (in Russian).

25. **Drew D.A.,** Mathematical modelling of two-phase flow, Annual Review of Fluid Mechanics. 15 (1983) 261–291.

26. **Hudson J., Harris D.,** A high resolution scheme for Eulerian gas–solid two-phase isentropic flow, Journal of Computational Physics. 216 (2) (2006) 494–525.

27. **Sadin D.V.,** A modification of the large-particle method to a scheme having the second order of accuracy in space and time for shockwave flows in a gas suspension, Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). 12 (2) (2019) 112–122 (in Russian).

28. **Nigmatulin R.I.,** Dynamics of multiphase media, Vol. 1, 2; Hemisphere Publ. Corp., New York, United States, 1990.

29. **Quirk J.J., Karni S.,** On the dynamics of a shock-bubble interaction, Journal of Fluid Mechanics. 318 (10 July) (1996) 129–163.

*Received 30.03.2021, accepted 20.04.2021.*

## THE AUTHOR

**SADIN Dmitriy V.**
*Military Space Academy named after A.F. Mozhaysky*
13, Zhdanovskaya St., St. Petersburg, 197198, Russian Federation
sadin@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.14206
УДК 531.383

# ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАТОРА ТВГ

**С.А. Шевченко, О.И. Конотопов**

АО «НИИ командных приборов»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье методом конечных элементов (МКЭ) исследованы собственные частоты полусферического резонатора твердотельного волнового гироскопа (ТВГ) с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical. Рассмотрена применимость различных КЭ, использующихся в ANSYS, для решения задачи определения собственных частот. Установлены особенности работы с оболочечными и твердотельными элементами. Проведено сравнение результатов аналитического и численного решений задачи по определению собственных частот резонатора. Отмечено наличие «математического» расщепления частоты, вызванного применяемым МКЭ и несимметричностью КЭ-сетки, а также необходимость учета данного расщепления при внесении в модель функции распределения дефекта. Представлен способ нахождения величины расщепления от внесенного дефекта при наличии составляющей «математического» расщепления.

**Ключевые слова:** твердотельный волновой гироскоп, полусферический резонатор, расщепление частоты, метод конечных элементов

**Ссылка при цитировании:** Шевченко С.А., Конотопов О.И. Применение конечно-элементного моделирования для исследования динамических характеристик резонатора ТВГ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 65–80. DOI: 10.18721/JPM.14206



# THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A RESONATOR OF THE GIROSCOPE BASED ON ELASTIC WAVES IN SOLIDS: FINITE-ELEMENT MODELING

**S.A. Shevchenko, O.I. Konotopov**

JSC "Command Devices Research Institute",
St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the eigenfrequencies of a hemispherical resonator of the Coriolis vibratory gyroscope have been studied by the finite element method (FEM) using ANSYS Mechanical. Consideration was given to the feasibility of various FE used in the ANSYS to solve the problem of determining the eigenfrequencies. The specifics of working with shell and solid-state elements were established. The results of analytical and numerical solutions of the mentioned problem were compared. The presence of "mathematical" frequency split caused by the used FEM and the unsymmetrical mesh of the FEM was noted, and the need to take this split into account when introducing the defect distribution function into the model was pointed out. The technique for finding the frequency split value resulted by added defect in the presence of "mathematical" frequency split component was demonstrated.

**Keywords:** Coriolis vibratory gyroscopes, hemispherical resonator, eigenfrequency split, finite element method

**Citation:** Shevchenko S.A., Konotopov O.I., The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 65–80. DOI: 10.18721/JPM.14206



### Введение

Разнообразные типы гироскопических приборов находят применение в современных системах наведения, ориентации и стабилизации. Гироскопы применяются в судостроении, авиации, а также ракетной и космической технике. Одним из перспективных направлений развития гироскопических приборов является создание твердотельных волновых гироскопов (ТВГ). Традиционная гироскопия постепенно уступает место новым поколениям оптических, вибрационных, волновых твердотельных и других гироскопов [1, 2]. Создание и применение новых типов гироскопических приборов связано с необходимостью миниатюризации при обеспечении заданных требований по точности, надежности и длительности срока службы.

В основе работы современных ТВГ лежит явление инертности упругих волн [3]. При повороте объекта, на котором установлен ТВГ, прибор считывает прецессию стоячей волны, возникающую при постоянных колебаниях чувствительного элемента – резонатора. Измерение углового перемещения волны дает возможность вычислять угловую скорость ТВГ в инерциальном пространстве, что и используется для построения датчиков угловой скорости и углового перемещения [4]. В конструкции ТВГ часто применяются тонкостенные цилиндрические и полусферические резонаторы, представляющие собой классические оболочки с формами колебаний, удобными для практического использования.

Далее рассматриваются конструкция полусферического резонатора (рис. 1), его основные геометрические параметры, а также свойства его материала (табл. 1).

Добротность резонатора – это одна из главных характеристик, определяющих работу прибора. Поэтому при изготовлении резонаторов применяют материалы с низким внутренним трением. Материалом, обладающим одним из наиболее низких уровней внутреннего трения, является кварцевое стекло. Например, металлы имеют соответствующие показатели на 2 – 3 порядка выше, поэтому изготовленные из них приборы обладают худшими техническими характеристиками [4], а значит, не обеспечивают высокой точности. Стоит отметить, что кварцевому стеклу свойственна также изотропия упругих характеристик, что необходимо для материала чувствительных элементов ТВГ. Значения физико-механических характеристик кварцевого стекла, принятые для расчетов,

Таблица 1

**Основные характеристики полусферического резонатора**

| Материал | Кварцевое стекло КУ-1 |
|---|---|
| Модуль упругости, ГПа | 73,6 |
| Коэффициент Пуассона | 0,17 |
| Плотность, кг/м$^3$ | 2210 |
| Внешний радиус полусферы, мм | 15,25 |
| Толщина стенки полусферы, мм | 0,90 |

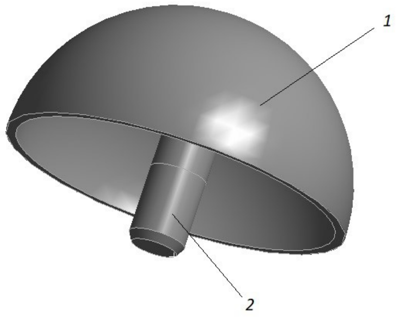



Рис. 1. Геометрическая модель полусферического резонатора:
*1* – тонкостенная полусферическая оболочка,
*2* – ножка

представленных в статье, выбраны согласно ГОСТ 15130-86.

К точности гироскопических систем вообще и к ТВГ в частности, предъявляются высокие требования. В настоящее время, в связи с достаточно высоким уровнем развития радиоэлектронной аппаратуры, к определяющим факторам, влияющим на точность ТВГ, относятся геометрические и физические параметры его упругого элемента – резонатора, получаемые в процессе изготовления. Другими словами, на уровень точностных параметров ТВГ влияют в первую очередь различные погрешности, возникающие при изготовлении упругого элемента (разнотолщинность, некруглость, шероховатость поверхности, разнотолщинность напыленной металлической пленки и др.), а также несовершенство физических характеристик используемого материала (неоднородность упругих характеристик, разнодобротность, разноплотность, внутренние дефекты и др.). Указанные несовершенства вызывают эффект расщепления собственных частот и форм колебаний резонатора за счет возмущения его осевой симметрии. Это выражается в том, что в спектре неидеального резонатора вместо одной возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, приводящие к изменению режима работы прибора. При возникновении расщепления рабочей частоты резонатора снижается его добротность, что приводит к уходу гироскопа, и, следовательно, к снижению точностных характеристик ТВГ.

Для оценки степени влияния погрешностей и несовершенства изготовления ТВГ на величину расщепления его рабочей частоты, в процессе разработки применяются различные математические методы, одним из которых служит метод конечных элементов (МКЭ).

Способам расчета собственных значений тонкостенных оболочек различной формы, а также изучению расщепления собственной частоты оболочек посвящено большое количество работ (см., например, статьи [5 – 8] и диссертацию [11]). В указанных источниках наряду с распространенными аналитическими вычислениями авторами используется и МКЭ. Например, в работе [8] отмечается хорошая, по сравнению с аналитическими методами, сходимость результатов, полученных с использованием МКЭ. Стоит отметить, что в указанных работах, за исключением [11], не упоминается расщепление собственной частоты резонатора, вызываемое непосредственно применением самого МКЭ и обусловленное, по-видимому, погрешностью метода определения собственных частот (в настоящей работе это блочный метод Ланцоша [9, 10]) и неидеальностью конечноэлементной сетки. Далее такое расщепление называется «математическим».

Наиболее подробное (среди рассмотренных работ) исследование расщепления частоты резонатора с использованием МКЭ приводится в диссертации [11]. Автор отмечает невозможность отделения величины «математического» (в работе [11] оно именуется «паразитным») расщепления от такового, вызванного дефектами производства, и предлагает минимизировать величину «математического» расщепления путем построения конечно-элементной сетки в соответствии с авторской методикой. При этом в указанной диссертации, как и в других отмеченных работах, не уделяется должного внимания влиянию фазового угла между гармониками различных дефектов при исследовании их совместного действия на расщепление частоты резонатора. Примечательно, что часто изменение толщины стенки резонатора авторы описывают гармонической функцией относительно срединной поверхности, хотя технологически, в процессе изготовления, наружная поверхность резонатора обычно имеет лучшее качество, по сравнению с внутренней. Поэтому описание изменения указанной толщины через гармоническую функцию по окружности относительно координатной поверхности резонатора, образованной внешним радиусом полусферы, представляет не меньший интерес.

Целью настоящей работы является построение конечно-элементной модели (КЭМ) резонатора ТВГ, предназначенной для определения значения рабочей собственной частоты резонатора с достаточной точностью, и определение возможности учета разнотолщинности стенки резонатора при определении расщепления частот.

Для построения КЭМ использовался программный комплекс ANSYS Mechanical [12]. В рамках настоящей работы рассматривались две обособленные задачи создания модели:

расчета точного значения рабочей собственной частоты резонатора;

оценки влияния различных факторов на эффект расщепления рабочей собственной частоты резонатора, например разнотолщинности.

### Постановка задачи

В основе проведенного исследования лежала задача определения собственных частот колебаний тонкостенной полусферической оболочки. При этом целесообразно применить вариационный принцип Гамильтона [13]:

$$\delta I = \\ = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\left(q_1, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n,\ t\right) dt = 0,$$

где $\delta I$ – вариация искомого функционала, $L = T - W$ ($T$, $W$ – кинетическая энергия рассматриваемого элементарного объема оболочки и потенциальная энергия деформаций соответственно).

Выражения для кинетической и потенциальной энергии в общем виде можно записать как

$$T = \frac{1}{2}\int_\sigma \rho V^2 d\sigma,$$

$$W = \frac{1}{2}\int_\sigma \left(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \right. \\ \left. + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23}\right) d\sigma,$$

где $\rho$, кг/см$^3$, – плотность материала; $\mathbf{V}$, м/с, – вектор абсолютной скорости произвольной точки упругого тела; $\sigma_{11}$, $\sigma_{22}$, $\sigma_{33}$, Па, – нормальные напряжения выделенного элемента упругого тела; $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{33}$, – соответствующие им деформации удлинения; $\sigma_{12}$, $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$, Па, – касательные напряжения выделенного элемента упругого тела; $\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{13}$, $\varepsilon_{23}$, – соответствующие им деформации сдвига; $\sigma$, м$^3$, – объем выделенного элемента упругого тела.

Выражения для $T$ и $W$ применительно к расчету собственной частоты резонатора можно найти в ряде работ; при этом выражения могут различаться тем, что в них отсутствует учет каких-либо компонент тензора напряжений (деформаций). Так, в данной работе, для сравнения расчетных значений частот, полученных методом конечных элементов, использовались выражения в постановке теории тонких оболочек, приведенные, в частности, в книге [14]:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho h V^2 A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

$$W = \frac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2 - \right. \\ \left. - 2\left(1-\nu\right)\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)\right] A_1 A_2 d\theta d\varphi + \to$$

$$\rightarrow + \frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[ \left(\kappa_1+\kappa_2\right)^2 -$$

$$- 2\left(1-\nu\right)\left(\kappa_1\kappa_2-\tau^2\right) \Big] A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

где $h$, м, – толщина полусферической оболочки; $A_1$, $A_2$ – параметры Ляме; $\nu$ – коэффициент Пуассона материала; $E$, МПа, – модуль упругости материала; $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ – параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности; $\kappa_1$, $\kappa_2$ – параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности; $\omega$, $\tau$ – параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно; $\theta$, $\varphi$, град, – зенитный и азимутальный углы, соответственно.

Если использовать метод Ритца [15], то задача по нахождению собственных частот сводится к алгебраической задаче на собственные значения:

$$\left(A-\boldsymbol{\lambda}^2 B\right)\mathbf{C}=0,$$

где $A$, $B$ – матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями, а также координатными функциями; $\mathbf{C}$ – вектор-столбец неизвестных коэффициентов; $\boldsymbol{\lambda}$ – вектор-столбец значений собственных частот.

Важно отметить, что приведенные выше соотношения в постановке теории оболочек соответствуют основным допущениям оболочки Кирхгофа – Лява [16]:

плоское сечение, перпендикулярное срединной поверхности до деформации, перпендикулярно к ней и после нее;

нормальное напряжение по оси, перпендикулярной срединной поверхности, не рассматривается ввиду его малости;

толщина оболочки в процессе деформирования не изменяется.

Также расчет подразумевает допущение о малости деформаций и, соответственно, об отсутствии учета геометрической нелинейности.

Далее изложение задачи создания КЭМ будет включать не только объемные элементы типа Solid, но и оболочечные элементы типа Shell. В используемом программном комплексе ANSYS моделирование с использованием элементов типа Shell также подразумевает представленные выше допущения, за исключением первого, для оболочки Кирхгофа – Лява. В данном случае допускается изменение угла между плоским сечением и срединной поверхностью в результате деформации оболочки. Эта постановка соответствует варианту оболочки Миндлина – Рейсснера [17], который в отечественной литературе более известен как оболочка Тимошенко [18].

### Выбор оптимальных КЭМ резонатора

Работа резонатора характеризуется численным значением рабочей собственной частоты и соответствующей ей формой колебаний. Значение собственной частоты и форма колебаний определяются следующими факторами:

геометрическими размерами резонатора (радиус полусферы, ее толщина);

размерами ножки и способом ее закрепления;

физико-механическими характеристиками выбранного материала.

Традиционно работа ТВГ строится на совместных колебаниях резонатора по двум гироскопически связанным эллиптическим формам, соответствующим его рабочей частоте [4, 19] (рис. 2).

Неидеальность геометрических параметров резонатора влечет за собой возмущение осевой симметрии, вызывающее эффект расщепления его собственных частот колебаний. Этот эффект выражается в том, что вместо одной частоты в спектре неидеального резонатора возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, приводящие к изменению режима работы прибора и недопустимому снижению точности [7]. Таким образом, разрабатываемая КЭМ должна обладать достаточной степенью чувствительности, чтобы зафиксировать расщепление частоты, соответствующее его допустимому значению для исследуемого из-

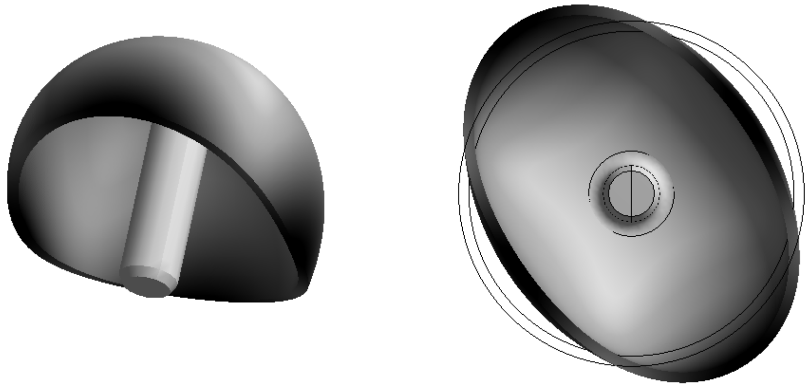


Рис. 2. Эллиптическая форма колебаний резонатора, соответствующая его рабочей частоте (показаны две проекции, на правой показано для наглядности отклонение от идеальной круговой формы в плоскости колебаний)

делия. Другими словами, для оценки характеристик резонатора, влияющих на точностные параметры ТВГ, интерес представляет не столько определение точного значения собственной частоты колебаний выбранного конструктива, сколько зависимость ее изменения от величины рассматриваемых отклонений от идеальной системы.

В связи с этим предлагается использовать различные модели для решения двух отдельных задач: точное определение рабочей собственной частоты колебаний резонатора и определение влияния разнотолщинности на величину расщепления частоты.

Критерием, определяющим качество разработанных моделей, может служить требуемая точность расчетного значения собственной частоты (для первой задачи) и величина расщепления частоты в зависимости от размера дефекта (для второй задачи). Отметим, что для первичного анализа определение значения собственной частоты с точностью до 1 Гц является достаточным. За максимально допустимую погрешность вычисления расщепления (для второй задачи) принималось значение $1 \cdot 10^{-4}$ Гц, что на порядок выше допускаемого значения расщепления частоты кварцевых полусферических резонаторов после балансировки.

Поскольку для построения КЭМ можно использовать различные типы элементов, в процессе исследования было проведено сравнение моделей, построенных с применением некоторых видов оболочечных и твердотельных элементов. При этом ставилась цель найти оптимальный баланс между трудоемкостью расчета и его точностью. Для сравнения были построены четыре КЭМ.

**Первая модель (КЭМ I).** Полусфера разбивалась на элементы типа SHELL181, т. е. на оболочечные элементы 1-го порядка, имеющие 4 узла с шестью степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей и повороты вокруг этих осей);

**Вторая модель (КЭМ II).** Разбиение полусферы осуществлялось на элементы типа SHELL281, т. е. на оболочечные элементы 2-го порядка, имеющие 8 узлов с шестью степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей и повороты вокруг них);

**Третья модель (КЭМ III).** Полусфера разбивалась на элементы типа SOLID186, т. е. на твердотельные элементы 2-го порядка, имеющие 20 узлов с тремя степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей);

**Четвертая модель (КЭМ IV).** Построение сетки на полусфере осуществлялось элементами типа SOLID187, т. е. твердотельными элементами 2-го порядка, имеющими 10 узлов с тремя степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей).

Для повышения точности получаемых результатов было необходимо обеспечить

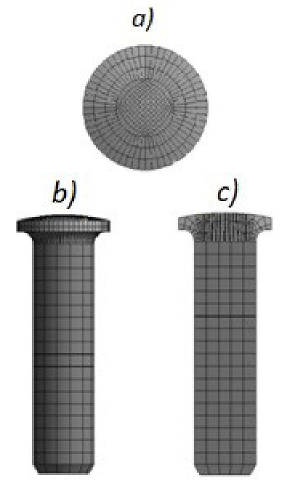



Рис. 3. Сетки конечных элементов участка скругления (*a*) и ножки резонатора (*b*, *c*). Разбиение выполнено на элементы SOLID186 и SOLID185 соответственно; *b*, *c* – ножка и ее продольное сечение

разбиение исходной геометрии объекта на регулярную конечно-элементную сетку. Отличительной особенностью такой сетки является структурированность и упорядоченность расположения используемых элементов, преимущественно правильной формы.

Во всех четырех КЭМ разбиение ножки осуществлялось твердотельными элементами 1-го порядка SOLID185. Это было сделано с целью уменьшения расчетного времени, так как степень разбиения ножки резонатора не влияет на значение собственной частоты его колебаний, соответствующей второй (эллиптической) форме колебаний. Разбиение участка скругления от ножки к полусфере осуществлялось элементами SOLID186 (рис. 3). Необходимо отметить, что отсутствие указанного влияния определяется конструкцией самой ножки, а именно ее диаметром и длиной. Выбранные конструктивные параметры обеспечивают достаточную отстройку частот колебаний резонатора, обусловленных изгибом ножки, от рабочей эллиптической частоты. В случае близких значений указанных частот возможно возникновение негативных эффектов, рассмотренных в статье [20].

В ходе расчетов, нацеленных на получение модели требуемой точности при минимизации расчетного времени, устанавливалось минимально необходимое число элементов и узлов полусферы. В случае оболочечных моделей размер элементов полусферы варьировался от 0,9000 до 0,1125 мм. Сетка конечных элементов SHELL281 показана на рис. 4, *a*, *b*.

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов типа оболочка или пластина с использованием конечных элементов типа SOLID, для получения приемлемого результата необходимо обеспечить при построении КЭМ достаточное количество элементов по толщине. Поэтому в работе рассматривались различные варианты моделей с количеством элементов по толщине стенки полусферы от одного до восьми. На рис. 4, *c*, *d* показан пример разбиения полусферы на элементы SOLID186.

На рис. 5, 6 показаны зависимости значений собственной частоты колебаний резонатора от количества узлов, использованных в моделях. По полученным графикам можно определить оптимальное количество узлов, при котором величина $\Delta$ – изменение значения полученного решения при увеличении количества узлов – будет менее 0,01 %.

Анализ графиков на рис. 5, соответствующих моделям с оболочечными элементами, позволяет заключить, что значение собственной частоты устанавливается на уровне 4808 – 4809 Гц. Графики приводятся для модели с использованием срединной поверхности в качестве поверхности приведения. В КЭМ I величина $\Delta$ = 0,005 %, а в КЭМ II $\Delta$ = 0,006 %. Различие полученных значений частоты между двумя моделями составляет не более 0,6 Гц. Здесь же видно, что применение элементов 2-го порядка (SHELL281) предпочтительнее, так как для достижения установившегося решения достаточно 50 тыс. узлов, тогда как при использовании элементов 1-го порядка необходимо не менее 83 тыс. узлов.

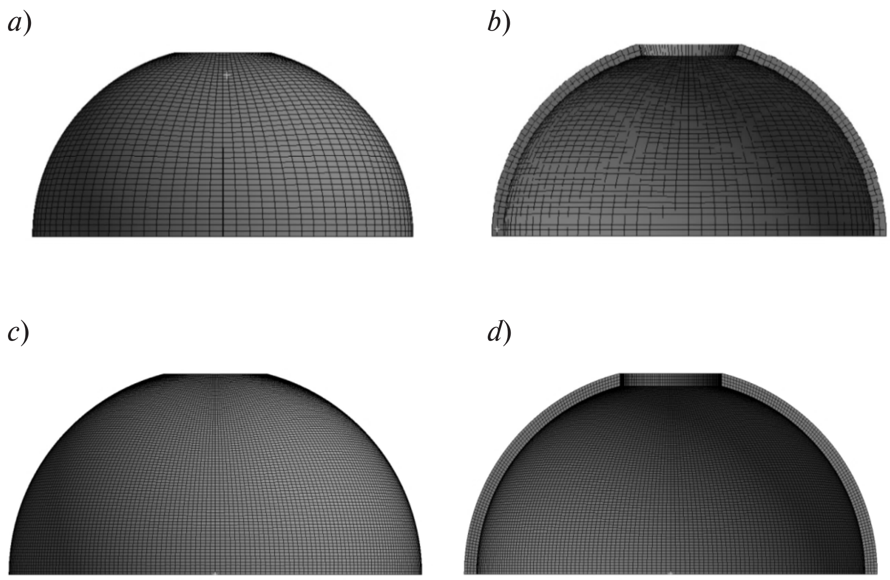



Рис. 4. Разбиение полусферы (*a*, *c*) и ее поперечного сечения (*b*, *d*) на элементы SHELL281 (*a*, *b*) и SOLID186 (*c*, *d*)

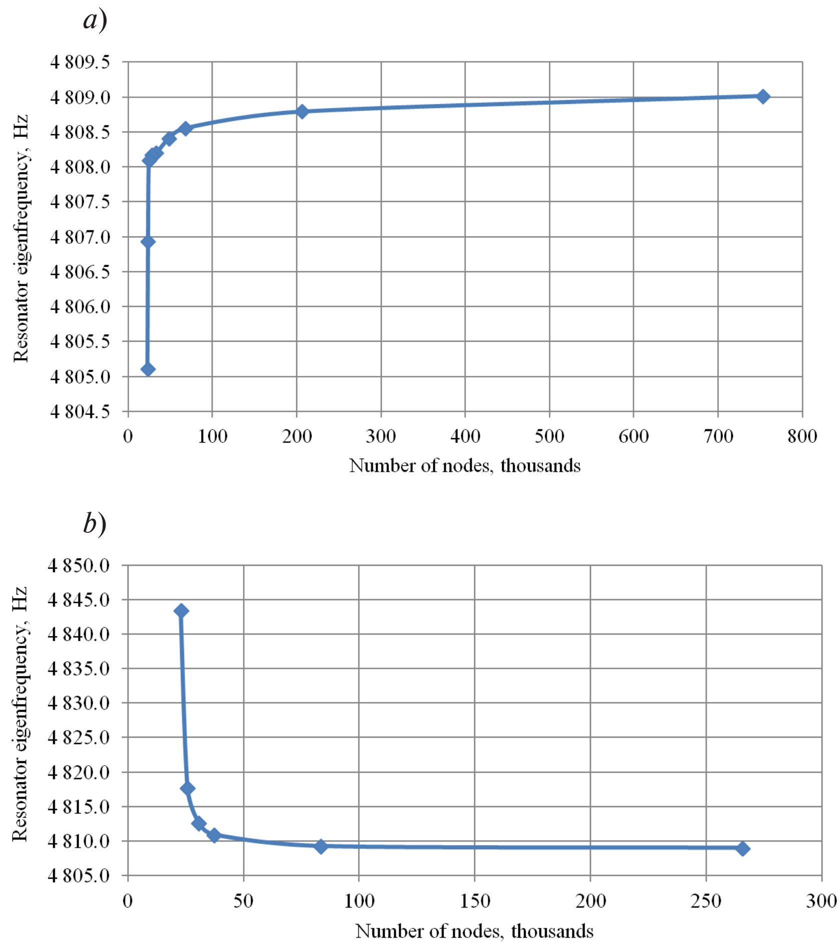



Рис. 5. Расчетные графики зависимостей частоты колебаний резонатора от количества узлов, использованных в КЭМ I (SHELL281) (*a*) и КЭМ II (SHELL181) (*b*)

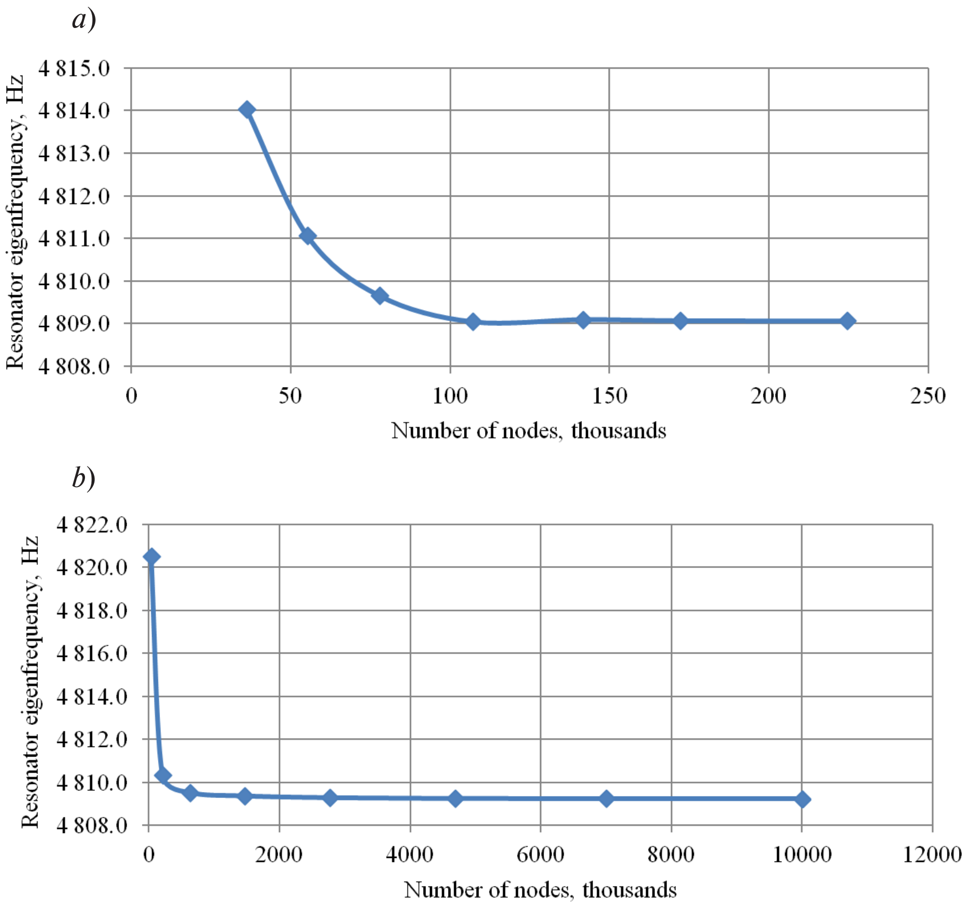



Рис. 6. Расчетные графики зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 5, но для КЭМ III (SOLID186) (*a*) и КЭМ IV (SOLID187) (*b*)

Необходимо отметить, что сходимость результатов в моделях с использованием оболочечных элементов происходит с разных сторон. Задача с элементами типа SHELL181 сходится к устойчивому решению от бóльших значений, что соответствует классическому поведению графиков сходимости численной задачи. Однако использование элементов SHELL281 показывает обратную картину. Это, возможно, связано с используемым типом контактного взаимодействия (SHELL-SOLID) полусферы и ножки. Контакт между телами осуществляется по линии, что приводит к локальному нагружению по граням твердотельных элементов. При этом в случае исключения ножки из модели и реализации жесткой заделки по соответствующей грани полусферы «жесткая» характеристика графика сходимости наблюдается и для элемента SHELL281.

Анализ графиков твердотельных моделей (рис. 6) показывает, что искомое значение собственной частоты остается постоянным, начиная с определенной дискретизации модели. Различие значений частоты между твердотельными элементами SOLID186 и SOLID187 составляет не более 0,06 Гц. Значение Δ, полученное по результатам проведения сеточной сходимости, для КЭМ III и КЭМ IV составили 0,0002 % в обоих случаях. Однако для получения близких по точности результатов, в случае применения элементов SOLID187 потребовалось в полтора раза большее количество узлов КЭМ. В связи с этим, для проведения расчетов целесообразно применять элементы SOLID186. В целом можно заключить, что четыре элемента по толщине стенки полусферы является оптимальным вариантом разбиения для анализа собственных частот с точностью до 0,1 Гц.

Отметим, что для первичной оценки значения собственной частоты (с точностью до 1 Гц) оказывается достаточным разбиение полусферы по толщине на два элемента. Отличие при таком разбиении от установившегося решения составляет 0,44 Гц.

### Результаты расчета рабочей собственной частоты резонатора

Одновременно с конечно-элементным моделированием для сравнения проводился аналитический расчет по упрощенным выражениям для полусферической оболочки, полученным Рэлеем [21], и по теории оболочек Гольденвейзера [22], с уточнением в части учета растяжимости срединной поверхности. Результаты всех найденных значений собственной частоты для второй формы колебаний приведены в табл. 2.

Необходимо отметить, что в настоящей работе при сравнении полученных данных за точное решение принимается результат установившегося расчета с использованием твердотельных элементов. Это объясняется тем, что модели с твердотельными элементами подразумевают решение задачи теории упругости без каких-либо упрощений. При этом точность результата определяется степенью дискретизации модели и математической погрешностью самого метода решения задачи на собственные значения.

Как видно из данных табл. 2, результат определения собственной частоты резонатора, полученный с помощью рассмотренных КЭМ с оболочечными и твердотельными элементами, показывает сопоставимые значения. При этом среди расчетных результатов, полученных с использованием аналитических методов, наиболее точным оказывается значение по Гольденвейзеру.

При решении второй из поставленных выше задач, а именно — определении расщепления собственных частот резонатора, использовались элементы типа SHELL281 (КЭМ I) для анализа влияния разнотолщинности на динамические характеристики резонатора. Применение оболочечных элементов позволяет довольно просто задавать изменение толщины полусферы без фактического изменения ее геометрии, а также значительно снижает расчетное время с сохранением достаточной точности вычислений.

### Влияние дефектов на величину расщепления рабочей частоты резонатора

Особенности внесения в КЭМ резонатора различных дефектов. Для определения расщепления рабочей частоты резонатора при наличии какого-либо дефекта необходимо внести в КЭМ функцию распределения этого дефекта. В реальном резонаторе распределение таких дефектов, как разнотолщинность и разноплотность по азимутальному или меридиональному углу имеет случайный характер. Однако при моделировании часто используется гармоническая зависимость распределения дефекта как наиболее простая в отношении вычислений:

$$x(\alpha) = x_0 + X \cdot \sin(m\alpha + \beta),$$

где $x_0$, м, — номинальная величина параметра (толщина полусферы, плотность материала); $X$, м, — амплитуда; $m$ — номер гармоники де-

Таблица 2

**Значения рабочей собственной частоты колебаний резонатора (вторая форма), рассчитанные различными методами**

| Метод расчета | Частота, Гц |
|---|---|
| Рэлея | 5277,60 |
| Теории оболочек Гольденвейзера | 4814,20 |
| Конечных элементов | |
| типа SHELL | 4809,02 |
| типа SOLID | 4809,08 |

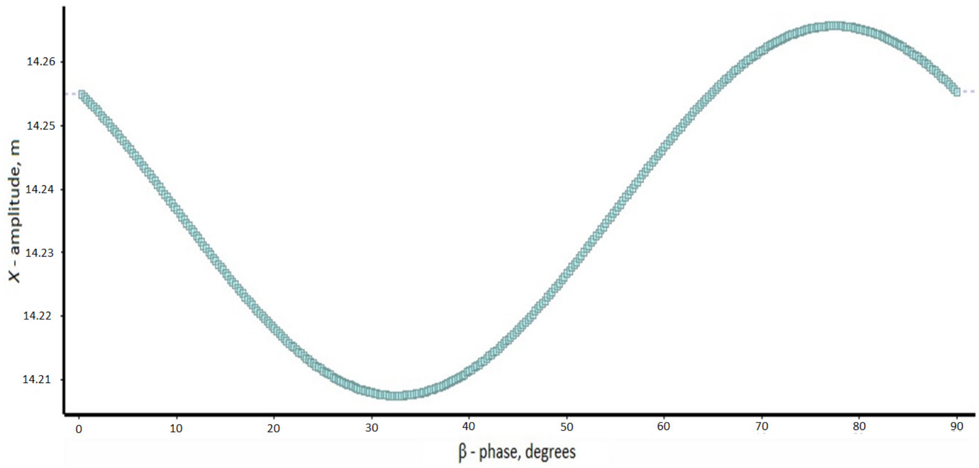



Рис. 7. Расчетная зависимость суммарного расщепления рабочей частоты резонатора от фазового угла функции дефекта

фекта; α, β, град, – начальные угол и фаза соответственно.

Номер гармоники выбирается произвольно, в зависимости от моделируемой функции дефекта; отметим лишь, что четвертая гармоника имеет наибольшее влияние на расщепление частоты резонатора, соответствующей эллиптической форме колебаний. Причины указанного влияния подробно описаны в литературе [3, 19]. При этом гармоники, отличные от четвертой, имеют влияние, меньшее на порядок. Таким образом, для моделирования наихудшего случая влияния дефекта на расщепление частоты целесообразно использовать четвертую гармонику распределения дефекта.

Как упоминалось ранее, при использовании МКЭ возникает «математическое» расщепление даже при использовании идеальной геометрии. При этом важно отметить, что величина «математического» расщепления является измеримой (расчетной) величиной. Основной причиной возникновения «математического» расщепления является неидеальность сетки конечных элементов. Таким образом, при решении задачи на собственные частоты в модели резонатора с внесенным дефектом $x(\alpha)$ в результате получается некоторое суммарное расщепление, одним из составляющих которого является величина «математического» расщепления.

Исходя из того, что рассматриваемая рабочая собственная частота является эллиптической, а, следовательно, соответствует второй гармонике, «математическое» расщепление представляется в виде второй гармоники в качестве составляющей суммарного расщепления. С учетом вышеизложенного, для того чтобы определить значения составляющих расщепления, необходимо знать фазовый сдвиг гармоник друг относительно друга. При этом необходимо отметить, что при совпадении фаз гармоник, представляющих «математическое» расщепление и распределение дефекта, итоговое расщепление будет составлять сумму значений расщепления обоих дефектов, а в случае противофазы – разность значений. Отмеченное свойство наглядно прослеживается, например, при внесении в модель четвертой гармоники дефекта с изменением угла начальной фазы от 0° до 90° (рис. 7).

На этом рисунке по оси ординат отложена суммарная величина расщепления $\sum\Delta f$, по оси абсцисс – фазовый угол β. Фазовый угол максимумов и минимумов зависит от построенной сетки и сохраняется при изменении амплитуды или природы дефекта (дефект вызван погрешностями изготовления или неоднородностью материала).

**Вычисление величины расщепления при внесении дефектов в КЭМ резонатора.** Одним из факторов, определяющих возникновение эффекта расщепления собственной частоты резонатора, выступает массовый дисбаланс чувствительного элемента. В реальном полусферическом резонаторе неуравновешенная масса непрерывно распределена по всей оболочке, что при возбуждении вызывает колебания его центра масс и приводит к расщеплению частоты и снижению добротности за счет рассеяния энергии колебаний в опорах. Сам массовый дисбаланс вызван отмеченными выше геометрическими и физическими погрешностями, в том числе разнотолщинностью и разноплотностью. В связи с тем, что применение МКЭ приводит к возникновению «математического» расщепления, для вычисления составляющей внесенного дефекта разнотолщинности необходимо также найти значение данного расщепления. Это возможно, если в качестве функции распределения дефекта – разнотолщинности – используется гармоническая функция:

$$h(\alpha) = h_0 + X_h \cdot \sin(m\alpha + \beta),$$

где $h_0$, м, – номинальная толщина стенки резонатора; $X_h$, м, – половина величины разнотолщинности; α, град, – угловая координата, соответствующая азимутальному углу.

В данной работе при решении задачи по нахождению собственных частот резонатора с помощью ANSYS, расщепление рабочей частоты может определяться через разность двух близких частот, соответствующих эллиптической форме колебаний. При этом результатом данного расчета будет некоторое суммарное расщепление от различных дефектов, если они внесены в КЭМ резонатора. В случае «идеальной» геометрии (отсутствие дефектов), суммарное расщепление будет равняться «математическому»:

$$\sum \Delta f = \Delta f_m = f_{II}^{(2)} - f_{II}^{(1)},$$

где $\Delta f_m$, Гц, – математическое расщепление; $f_{II}^{(2)}, f_{II}^{(1)}$, Гц, – бóльшая и меньшая по значению собственные частоты, определяющие расщепление.

Если же в модель внесен для рассмотрения дополнительный дефект, например разнотолщинность, то суммарное расщепление будет определяться как

$$\sum \Delta f = f_{II}^{(2)} - f_{II}^{(1)} =$$
$$= \Delta f_m \cdot \sin(2\alpha_1 + \beta_1) + \Delta f_h \cdot \sin(m\alpha_2 + \beta_2),$$

где $\Delta f_h$, Гц, – расщепление, вызванное разнотолщинностью; $\alpha_i$, $\beta_i$, град, – углы и фазы, определяющие распределение дефектов по азимутальному углу.

Из приведенных выше соотношений видно, что для однозначного определения $\Delta f_h$ необходимо знать начальные углы и фазы гармоник, соответствующих дефектам. Если это учесть и использовать два экстремальных значения суммарного расщепления (при нахождении гармоник в фазе и в противофазе), то можно составить простую систему из двух уравнений, позволяющую определить значение расщеплений от каждого дефекта:

$$\begin{cases} \sum \Delta f_{\max} = \Delta f_h + \Delta f_m, \\ \sum \Delta f_{\min} = \Delta f_h - \Delta f_m. \end{cases}$$

Для автоматизации расчета по нахождению двух экстремальных значений суммарного расщепления в ANSYS, можно определить β и $\sum \Delta f$ как параметры, построив тем самым график, аналогичный приведенному на рис. 7. Следует отметить, что найденные угол и фаза, соответствующие «математическому» расщеплению, сохраняются в модели и после изменения характеристик, описывающих иные дефекты, что исключает необходимость проведения дополнительных расчетов для обеспечения поиска экстремальных значений суммарного расщепления. Таким образом, при использовании блочного метода Ланцоша в программном комплексе ANSYS можно определить величину расщепления, вызванного разнотолщинностью, путем учета «математического» расщепления.

В качестве примера использования пред-

Таблица 3

**Результаты определения расщепления рабочей частоты резонатора**

| Заданная функция дефекта | Расщепление, Гц |
|---|---|
| $\rho(\alpha) = 2210 + 10 \cdot \sin 4\alpha$ | 7,7193 |
| $h(\alpha) = 9 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 4\alpha$ | 6,4881 |

ставленной методики вычислений, для полусферического резонатора заданной конструкции были получены численные значения расщеплений, вызванных разнотолщинностью и разноплотностью (табл. 3). Каждый дефект рассматривался отдельно. Величина разнотолщинности составляла 6 мкм, плотность кварцевого стекла изменяли в пределах 2200 – 2220 кг/см$^3$. Функции дефектов представлены в виде четвертой гармоники.

В результате полученные значения ограничиваются применяемым методом численного расчета и упрощениями, принятыми в математической модели оболочки для конечных элементов типа SHELL281.

В процессе исследования также был отмечен ряд особенностей, например при внесении в КЭМ дефекта плотности установлено, что величина «математического» расщепления изменяется пропорционально среднему арифметическому значению частот $f_{II}^{(1)}$ и $f_{II}^{(2)}$, что позволяет вычислить величину «математического» расщепления не только при проведении расчета, когда гармоники находятся в фазе/противофазе. Это также не отменяет необходимости нахождения экстремальных значений суммарного расщепления вновь разработанной КЭМ. Одновременно с этим, аналогичная зависимость не наблюдается при изменении, например, толщины полусферы или модуля упругости материала. Таким образом, при нахождении зависимости расщепления от дефектов, изменяющих сформированную матрицу жесткости КЭМ, необходимо при каждом изменении определять и новое значение «математического» расщепления.

## Заключение

В представленном исследовании разработаны конечно-элементные модели (КЭМ) с применением различных типов элементов, которые могут использоваться для изучения динамики работы резонатора. Было установлено, что для определения собственной частоты полусферического резонатора с эллиптической формой колебаний следует использовать элементы SHELL281 как оптимальные по соотношению времени расчета и точности. Также КЭМ с использованием указанных элементов и методики, описанной и апробированной в данной работе, удобно применять для изучения влияния различных дефектов на работу резонатора.

Чувствительность оболочечных элементов к величине разнотолщинности, по-видимому, ограничивается погрешностью численного метода расчета, оценка которой выходит за рамки данной работы. Показанная методика позволяет исследовать расщепление частоты, вызванное неравномерным распределением свойств материала (плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона), а также разнотолщинностью внутренней, внешней или срединной поверхностей полусферы с использованием стандартных функций программного комплекса ANSYS Mechanical.

В работе также отмечена важность учета фазы функций, описывающих распределение дефектов, ввиду присутствия в любой КЭМ «математического» расщепления, вызванного погрешностью расчетного метода и несовершенством конечно-элементной сетки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пешехонов В.Г.** Перспективы гироскопии // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: Изд. Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 36–38.

2. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Голиков А.В.** Общая и прикладная теория гироскопов с применением компьютерных технологий. Под ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: Изд. ЦНИИ «Электроприбор», 2010. 154 с.

3. **Журавлев В.Ф., Климов Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

4. **Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А.** Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.

5. **Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А.** Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. Спец. выпуск № 6 «Современные проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин». С. 176–185.

6. **Heidari A., Chan M., Yang H., Jaramillo G., Taheri-Tehrani P., Fonda P., Najar H., Yamazaki K., Lin L., Horsley D.** Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2013. Vol. 23. No. 12. Pp. 125016–125023.

7. **Козубняк С.А.** Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3 (102). С. 39–49.

8. **Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А.** Численное исследование резонаторов ВТГ различной формы при наличии дефектов различного типа // Наука и образование. Электронное научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 10. С. 1–22.

9. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Structural Analysis guide, Modal Analysis, ANSYS, Inc.

10. **Друскин В.Л., Книжнерман Л.А.** Оценки ошибок в простом процессе Ланцоша при вычислении функции от симметричных матриц и собственных значений // Журнал вычислительной математики и математической физики 1991. Т. 31. № 7. С. 970–983.

11. **Вахлярский Д.С.** Оптимизация формы резонатора волнового твердотельного гироскопа по критерию минимума расщепления собственных частот. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Специальность 01.02.06: Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры. М.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2019. 197 с.

12. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5.

13. **Голдстейн Г.** Классическая механика. Пер. с англ. М.: Наука. Гл. редакция физико-математической литературы, 1975. 413 с.

14. **Новожилов В.В.** Теория тонких оболочек. Ленинград: Судпромгиз, 1962. 431 с.

15. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. М.: Гостехиздат, 1958. 628 с.

16. **Кирхгоф Г.** Механика. Лекции по математической физике. Пер. с нем. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 392 с.

17. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Element Reference, ANSYS, Inc.

18. **Тимошенко С.П., Войновский-Криггер С.** Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

19. **Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 168 с.

20. **Киреенков А.А.** Расчет спектра полусферы на ножке // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 23–29.

21. **Дж.В. Стретт (Лорд Рэлей).** Теория звука. Т. 2. Пер. с англ. М.: ГТТЛ, 1955. 474 с.

22. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

*Статья поступила в редакцию 25.02.2021, принята к публикации 05.04.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ШЕВЧЕНКО Сергей Александрович** – *начальник сектора АО «НИИ командных приборов», Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

198216, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Трамвайный пр-т, 16
shevchenko.sergei.a@yandex.ru

**КОНОТОПОВ Олег Игоревич** – *инженер-конструктор АО «НИИ командных приборов», Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

198216, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Трамвайный пр-т, 16
konotopov96@gmail.com

## REFERENCES

1. **Peshehonov V.G.,** Perspektivy giroskopii [The prospects for gyroscopy], In the book: Proceedings of the 13-th All-Russian Conference on the Management Problems "VSPU-2019", Publication of Institute of Control Sciences RAS, Moscow (2019) 36–38 (in Russian).

2. **Dzhashitov V.E., Pankratov V.M., Golikov A.V.,** Obshaya i prikladnaya teoriya giroskopov s primeneniem komputernih tehnologii [The general and applied theories of gyroscopes using computer technology], Edited by Peshehonov V.G., Publication of State Research Center of the Russian Concern CSRI "Electropribor", St. Petersburg, 2010 (in Russian).

3. **Zhuravlev V.F., Klimov D.M.,** Volnovoi tverdotelnii giroskop [The solid-state wave gyro], Moscow, "Nauka" Publ., 1985 (in Russian).

4. **Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A.,** Volnovoi tverdotelnii giroskop. Teoriya I tecnologiya [The solid-state wave gyro. The theory and technology], "Radiotechnika" Publ., Moscow, 2014 (in Russian).

5. **Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A.,** Rasheplenie sobstvennih chastot kolcevogo resonarota tverdotelnogo volnovogo gyroscopa, vizvannoe vozmushcheniem formy [Splitting of natural frequencies of a ring resonator of the solid-state gyro due to form perturbation], Herald of the Bauman Moscow State University, Machinery. (6) (2012) 176–185 (in Russian).

6. **Heidari A., Chan M., Yang H., et al.,** Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond, Journal of Micromechanics and Microengineering. 23 (12) (2013) 125016–125023.

7. **Kozubnyak S.A.,** Splitting of natural frequencies of cylindrical resonator gyro due to non-ideal shape, Herald of the Bauman Moscow State University, Machinery. (3 (102)) (2015) 176–185 (in Russian).

8. **Vahlyarskiy D.S., Guskov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A.,** Numerical study of differently shaped HRG resonators with various defects, Science & Education of the Bauman MGTU. Electronic Journal. (10) (2016) 1–22 (in Russian).

9. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Structural Analysis guide, Modal Analysis, ANSYS, Inc.

10. **Druskin V.L., Knizhnerman L.A.,** Error bounds in the simple Lanczos procedure for computing functions of symmetric matrices and eigenvalues, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 31 (7) (1991) 20–30.

11. **Vahlyarskiy D.S.,** Optimizatsiya formy rezonatora volnovogo tvyordotelnogo giroskopa po kriteriyu minimuma rasshchepleniya sobstvennykh chastot [Optimizing the resonator shape of solid-state wave gyro according to the criterion of minimum splitting of eigenfrequency], PhD Thesis, Bauman State Technical University, Moscow, 2019 (in Russian).

12. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5.

13. **Goldstein H.,** Classical mechanics, Addison-Wesley, USA, 1951.

14. **Novozhilov V.V., Radok J.M.R.** (Eds.), Thin shell theory, Springer Netherlands, 1964.

15. **Babakov I.M.,** Teoriya kolebaniy [The theory of vibrations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

16. **Kirchhoff G.,** Vorlesungen über mechanic, Publisher B.G. Teubner, Leipzig, 1824.

17. Ansys®MechanicalTM, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Element Reference, ANSYS, Inc.

18. **Timoshenko S., Woinowky-Krieger S.,** Theory of plates and shells, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, inc., New York, Toronto, London, 1959.

19. **Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V.,** Proektirovanie volnovogo tverdotelnogo gyroscopa [Design of a solid-state gyroscope], Bauman MSTU Publ., Moscow, 1997 (in Russian).

20. **Kireenkov A.A.,** Calculation of the spectrum of a hemisphere on a leg, Mechanics of Solids. A Journal of RAS. 33 (4) (1998) 19–24.

21. **Strutt J.W. (3rd Baron Rayleigh),** The theory of sound, Vol. II, Macmillan, London, 1896.

22. **Goldenweiser A.L.,** Theory of thin elastic shells, Int. Ser. of Monograph in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, New York, 1961.

*Received 25.02.2021, accepted 05.04.2021.*

## THE AUTHORS

**SHEVCHENKO Sergei A.**
*JSC "Command Devices Research Institute"*
16, Tramvaynyy Ave., St. Petersburg, 198216, Russian Federation
shevchenko.sergei.a@yandex.ru

**KONOTOPOV Oleg I.**
*JSC "Command Devices Research Institute"*
16, Tramvaynyy Ave., St. Petersburg, 198216, Russian Federation
konotopov96@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.14207
УДК 539.1.03

# ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ИЗОТОПА МЕДИ-64 ИЗ ПРИРОДНОГО НИКЕЛЯ НА ЦИКЛОТРОНЕ

**А. Тиба, Я.А. Бердников**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Статья посвящена проблеме разработки технологии получения изотопа $^{64}$Cu, важного для применения в ядерной медицине, путем циклотронного облучения протонами мишени из природного никеля. С этой целью проанализирована энергетическая зависимость сечений взаимодействия протонов, обладающих начальной кинетической энергией 10 – 15 МэВ, с мишенью из никеля (природная смесь изотопов). Кроме того, рассмотрены величины периодов полураспада образующихся изотопов. На основе проведенного анализа определены оптимальные условия получения изотопа $^{64}$Cu (энергия пучка протонов и время выдержки после облучения) из природного никеля. Установлено, что в условиях, близких к идеальным (случай полного отделения изотопов никеля и кобальта от требуемого изотопа меди) можно ожидать, что радионуклидная чистота изотопа $^{64}$Cu будет очень высокой и достигать не менее 99 %.

**Ключевые слова:** изотоп меди-64, циклотронное облучение, никелевая мишень, радионуклидная чистота, расчет выхода

**Ссылка при цитировании:** Тиба А., Бердников Я.А. Оптимизация получения изотопа меди-64 из природного никеля на циклотроне // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 81–89. DOI: 10.18721/JPM.14207



# OPTIMIZATION OF THE COPPER-64 PRODUCTION FROM NATURAL NICKEL TARGET AT A CYCLOTRON

**A. Tiba, Ya.A. Berdnikov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The paper is devoted to the problem of the copper-64 isotope production engineering that is important for application in the nuclear medicine. The production is carried out by proton irradiation of a nickel target (a natural mixture of isotopes). For this purpose, the energy dependence of the protons-nickel target interaction cross-sections, protons with initial kinetic energies of 10–15 MeV in this case, has been analyzed. Besides, the half-lives of the resulting isotopes were considered. Based on the analysis, the optimal conditions (the proton beam energy and the waiting time after irradiation) for obtaining the $^{64}$Cu isotope from natural nickel were found. It was established that under conditions close to ideal, it could be expected that $^{64}$Cu radionuclide purity would be very high and reach at least 99 %. Ideal conditions mean complete separation of nickel and cobalt isotopes from the required copper one.

**Keywords:** copper-64 isotope, cyclotron irradiation, nickel target, radionuclide purity, yield calculation

**Citation:** Tiba A., Berdnikov Ya.A., Optimization of the copper-64 production from natural nickel target at a cyclotron, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 81–89. DOI: 10.18721/JPM.14207

## Введение

Хорошо известно, что изотоп $^{64}$Cu испытывает радиоактивное превращение в результате трех процессов: позитронного и электронного распада и захвата электронов. Указанный изотоп испускает $\beta^+$-, $\beta^-$-частицы (их энергии равны соответственно 0,65 и 0,57 МэВ, а значения выхода 17,6 и 38,5 %) с периодом полураспада 12,7 ч. Он играет важную роль среди бифункциональных радиоизотопов как для позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ), так и для лучевой радионуклидной терапии. Период полураспада $^{64}$Cu позволяет производить этот изотоп на региональных или национальных циклотронных установках и распределять его по местным отделениям ядерной медицины с потерей не более одного (примерно) периода полураспада [1, 2].

Кроме того, период полураспада изотопа $^{64}$Cu совместим с временными масштабами, необходимыми для введения радиофармпрепарата (содержащего молекулярный носитель: пептиды, антитела, наночастицы и т. п.), его распределения в теле пациента и накопления в организме.

Изотоп $^{64}$Cu лучше подходит для ПЭТ-визуализации высокого разрешения, чем для терапии, благодаря его низкой средней энергии $\beta^+$-частиц (278 кэВ) и очень низкой интенсивности сопутствующего гамма-излучения (1345,77 кэВ, с выходом 0,475 %). В то же время, его средняя энергия $\beta^-$-частиц подходит для радионуклидной терапии небольших опухолей [1, 2].

Изотоп $^{64}$Cu имеет многочисленные преимущества перед ПЭТ-изотопами $^{18}$F (его период полураспада $t_{1/2}$ = 109,8 мин) и $^{11}$C ($t_{1/2}$ = 20,4 мин), используемыми в настоящее время в клиниках. Поскольку период полураспада как $^{18}$F, так и $^{11}$C относительно мал, эти изотопы обычно готовятся на циклотронах, расположенных рядом с клиниками.

Изотоп $^{64}$Cu может быть получен на реакторе с помощью реакции захвата тепловых нейтронов $^{63}$Cu($n$,γ)$^{64}$Cu или с помощью реакции быстрых нейтронов $^{64}$Zn($n$,γ)$^{64}$Cu. Однако выходы реакций для получения $^{64}$Cu на ядерном реакторе низки [3].

Следует отметить, что в настоящее время для производства $^{64}$Cu используются два циклотронных метода. Один из них основан на использовании в качестве мишени изотопа $^{64}$Ni, а другой – изотопа $^{68}$Zn.

Производство изотопа $^{64}$Cu на основе реакции $^{68}$Zn($p$,α$n$)$^{64}$Cu с использованием протонов имеет определенные преимущества, поскольку в этом случае возможна одновременная наработка используемых в медицине изотопов

$$^{67}\mathrm{Ga}(^{68}\mathrm{Zn}(p,2n)^{67}\mathrm{Ga})$$

и

$$^{64}\mathrm{Cu}(^{68}\mathrm{Zn}(p,\alpha n)^{64}\mathrm{Cu}),$$

производимых из одной и той же мишени [5].

Однако у этого метода есть ряд недостатков:

во-первых, требуется наличие циклотрона с более высокой энергией – 30 МэВ;

во-вторых, возникает необходимость сложного радиохимического разделения;

в-третьих, производство изотопов в этом случае дает высокое загрязнение (в виде отходов) от нескольких радионуклидных примесей;

в-четвертых, выход изотопов $^{64}$Cu невелик, поскольку сечение реакции мало (около 20 мб при энергии протонов 30 МэВ) [5, 6].

Как было отмечено выше, для получения $^{64}$Cu возможно использование реакции $^{64}$Ni($p$,$n$)$^{64}$Cu как на природной, так и на никелевой мишени, обогащенной изотопом $^{64}$Ni, с использованием относительно низкой энергии протонов – 10 МэВ (это существенно ниже 30 МэВ). Недостатком использования мишени, обогащенной $^{64}$Ni, является очень высокая цена изотопа $^{64}$Ni [4].

Использование относительно дешевой мишени из природного никеля представляется более привлекательным, но недостатком в этом случае выступает низкое содержание изотопа $^{64}$Ni в мишени и, следовательно, недостаточно высокая эффективность производства $^{64}$Cu, а также образование большого количества других примесей в процессе облучения и требования к сложным химическим процедурам для разделения и выделения $^{64}$Cu из этих примесей [5].

Однако правильный выбор начальной энергии протонов, соответствующей максимуму величины сечения реакции $^{64}$Ni($p$,$n$)$^{64}$Cu (647 мб при энергии 10,5 МэВ [11]), и оптимизация времени выдержки после облучения позволяют в значительной степени обойти это трудности.

Целью настоящей работы является анализ возможностей и оптимизация получения изотопа $^{64}$Cu из природного никеля с использованием протонов с энергией 10 – 15 МэВ на циклотроне МГЦ-20 Санкт-Петербургского политехнического университета.

## Методика анализа выхода изотопов в никелевой мишени (природная смесь) при облучении пучком протонов с энергией 10 – 15 МэВ

Как было отмечено выше, для получения изотопа $^{64}$Cu можно использовать пучок протонов с энергией 10 – 15 МэВ. Мишенью служит природная смесь изотопов никеля: $^{58}$Ni (68 %), $^{60}$Ni (26 %), $^{61}$Ni (1,14 %), $^{62}$Ni (3,71 %) и $^{64}$Ni (0,926 %) [7].

Протоны с энергиями 10 – 15 МэВ могут вызывать в мишени различные ядерные реакции на разных изотопах никеля и таким образом приводить к образованию разных изотопов в качестве побочных продуктов, которые будут мешать как процессу выделения изотопа $^{64}$Cu из смеси полученных изотопов, так и определению количества наработанного изотопа $^{64}$Cu спектрометрическими методами.

Из вышеизложенного следует, что полезно знать суммарный выход каждого из изотопов в результате различных реакций (см. табл. 1) и сравнивать его с выходом изотопа $^{64}$Cu. Изотопы, образующиеся в мишени при облучении протонами природной смеси изотопов никеля, приведены в табл. 1 [8 – 12].

При определении выходов изотопов при облучении протонами природной смеси изотопов никеля, необходимо учитывать потери энергии протона на возбуждение и ионизацию при прохождении через вещество мишени [13]:

$$\left\langle -\frac{dE}{dx}\right\rangle = \\ = \frac{4\pi}{m_e c^2}\frac{nz^2}{\beta^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\ln\left(\frac{2m_e c^2\beta^2}{I}\right)\right], \tag{1}$$

где $-dE/dx$, МэВ/см, – удельные ионизационные потери ($x$ – глубина проникновения протонов); $z$ – зарядовые числа снаряда; $m_e$, г, – масса электрона; $e$, Кл, – заряд электрона; $c$, см/с, – скорость света; β – отношение скорости снаряда к скорости света ($\beta = v/c$); $I$, эВ, – средний ионизационный потенциал; $\varepsilon_0$, Ф/м, – электрическая постоянная; $n$, см$^{-3}$, – электронная концентрация мишени,

$$n = \frac{N_A Z\rho}{AM_u};$$

$N_A$, 1/мол, – постоянная Авогадро; ρ, г/см$^3$, – плотность мишени; $Z$ – зарядовые числа мишени; $A$ – атомная масса; $M_u$, г/мол, – молярная масса.

Средний ионизационный потенциал никеля составляет, как и средний ионизационный потенциал для других элементов, $I$ = = 328 ± 10 эВ [14].

В нерелятивистском случае $\beta^2 << 1$, и с учетом того, что частицей-снарядом является протон ($z$ = 1), формула (1) упрощается:

$$\left\langle -\frac{dE}{dx}\right\rangle = \\ = \left(\frac{144\rho Zz^2}{AE}\right)\ln\left[\frac{2179E}{I}\right]. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) дает зависимость $E(x)$ – средней энергии протонов $E$ от глубины $x$.

Наработка всех изотопов на различной

Таблица 1

**Характеристики изотопов, образующихся в мишени в результате ядерных реакций при облучении протонами *p* природной смеси изотопов никеля [8 – 12]**

| Изотоп | Период полураспада | Ядерная реакция | $E_{thr}$, МэВ | σ, мб, при энергии | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 15 МэВ | 10 МэВ |
| $^{55}$Co | 17,5 ч | $^{58}$Ni($p$,α) | 1,36 | 35,7 | 8,7 |
| $^{57}$Co | 271,74 сут | $^{58}$Ni($p$,2$p$)<br>$^{58}$Ni($p$, $p$ + n)$^{57}$Ni→ $^{57}$Co<br>$^{60}$Ni($p$,α)<br>$^{61}$Ni($p$, $n$ + α)<br>$^{62}$Ni($p$, 2$n$ + α)<br>$^{58}$Ni($p$,$d$) | 8,3<br>12,3<br>0,3<br>8,2<br>18,9<br>10,0 | 149,3 | 4,9 |
| $^{58}$Co | 70,86 сут | $^{61}$Ni(p,α)<br>$^{62}$Ni(p,α + $n$) | 0,7<br>10,3 | 0,88 | 0,78 |
| $^{57}$Ni | 35,6 ч | $^{58}$Ni($p$, $p$ + $n$)<br>$^{58}$Ni($p$,$d$) | 12,4<br>10,1 | 8,8 | – |
| $^{60}$Cu | 23,7 мин | $^{64}$Ni($p$,$n$) | 7,0 | 58,8 | 79,8 |
| $^{61}$Cu | 3,3 ч | $^{61}$Ni($p$,$n$)<br>$^{62}$Ni($p$,2$n$) | 3,1<br>13,0 | 186 | 472 |
| $^{62}$Cu | 9,67 мин | $^{62}$Ni($p$,$n$) | 5,0 | 359,3 | 498,9 |
| $^{64}$Cu | 12,7 ч | $^{64}$Ni($p$,$n$) | 2,5 | 206,0 | 647,0 |

О б о з н а ч е н и я: $E_{thr}$ – пороговая энергия реакции, σ – сечение реакции (для двух значений начальной кинетической энергии протонного пучка.

глубине мишени при этом будет определяться по следующей формуле [15]:

$$\frac{dN_i}{dx} = \left(\frac{Jn_f}{\lambda e}\right)\left(1-\exp\left(-t_{rad}\lambda\right)\right)\sigma\left(x\right), \quad (3)$$

где $N_i$, см$^{-3}$, – количество атомов типа $i$ производимого радиоизотопа; $J$, А, – ток циклотрона; $n_f$ – концентрация ядер изотопа никеля в природном никеле; λ, с$^{-1}$, – постоянная распада производимого радионуклида; $t_{rad}$, с, – время облучения мишени.

Интегрируя распределение (3) от нуля до толщины мишени τ, получим зависимость наработки производимых радиоизотопов в мишени толщиной τ:

$$N_i\left(\tau, t_{rad}\right) = \int_0^\tau dx\left\{\frac{dN_i}{dx}\right\}. \quad (4)$$

Уменьшением потока протонов с глубиной, а также наличием других процессов, выводящих протоны из пучка, в данном случае можно пренебречь.

С помощью уравнений (2), (4) и значений сечения реакций σ (см. табл. 1), была определена активность каждого изотопа при использовании протонов с начальными кинетическими энергиями 15 (рис. 1, $a$,$b$) и 10 МэВ (рис. 1, $c$,$d$), тока циклотрона, равного 2 мкА, и мишени из природного никеля. На рис. 1 представлены результаты вычисления активности изотопов $^{55}$Co и $^{64}$Cu для мишеней различной толщины и различных времен облучения.

Анализ рис. 1 показывает, что для началь-

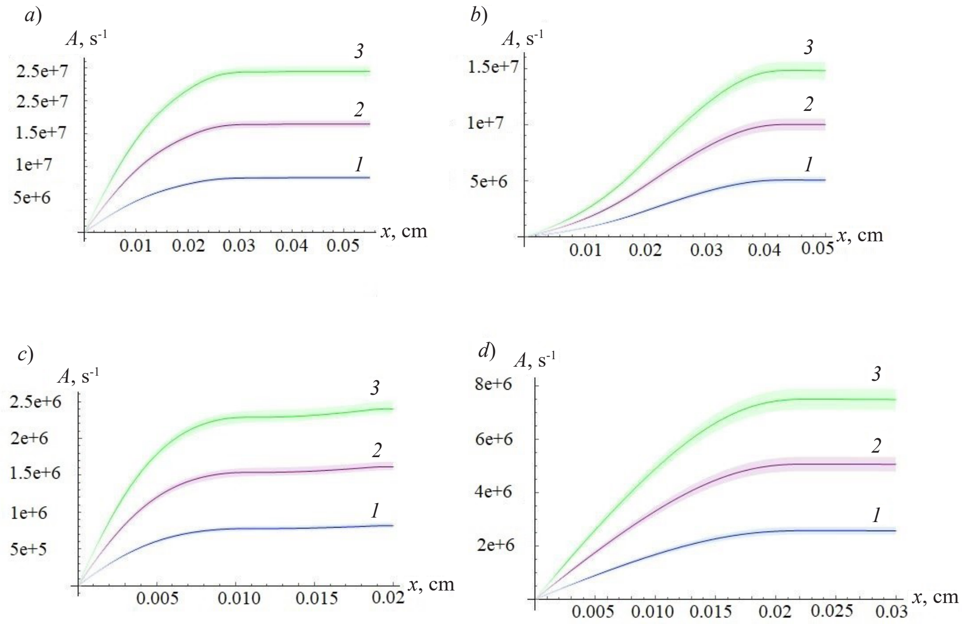



Рис. 1. Зависимости наработанной активности радиоизотопов $^{55}$Co (*a*,*c*) и $^{64}$Cu (*b*,*d*) от толщины мишени из природного никеля при использовании протонов с начальной кинетической энергией 15 МэВ (*a*,*b*) и 10 МэВ (*c*,*d*), для различного времени облучения, ч: 0,5 (*1*), 1,0 (*2*), 1,5 (*3*). Линиями показаны кривые зависимостей, а полосами – погрешности их определения (связаны с погрешностями нахождения сечения реакции)

ной энергии протонов 15 МэВ достаточной толщиной мишени является значение 400 мкм, при которой пропадает зависимость наработанной активности от толщины мишени. При начальной энергии 10 МэВ это значение составляет 200 мкм.

Для расчета активности каждого изотопа после окончания облучения и после различных времени ожидания использовалось уравнение

$$A_t = A_0 \exp\left(-\lambda t\right), \qquad (5)$$

где $A_0$, с$^{-1}$, – активность изотопа при $t = 0$; $A_t$, с$^{-1}$, – активность изотопа после времени ожидания $t$, с; $\lambda$, с$^{-1}$,– постоянная распада изотопа.

Результаты вычислений активности и отношений активностей наработанных изотопов к активности наработанного изотопа $^{64}$Cu для различных времен выдержки после окончания облучения приведены в табл. 2 (время облучения мишени – 1,5 ч, $E$ = 15 и 10 МэВ, ток циклотрона – 2 мкА).

После завершения облучения никелевой мишени (природная смесь изотопов) необходимо провести процедуру выделения изотопа $^{64}$Cu из мишени. Обычно это делается с помощью хорошо известного метода хроматографии на колонке ионообменной смолы (Dowex1-8X [1] или AG1-X8 [16]). Поскольку в мишени при облучении образуется ряд радиоизотопов с малым периодом полураспада (см. табл. 1), целесообразно перед хроматографией выдержать мишень в течение 12 – 17 ч (как это следует из данных табл. 2) с целью ослабления активности изотопов $^{60}$Cu и $^{62}$Cu. При этом достигается их ослабление более чем в 1 млн. раз. Процесс химического разделения занимает в среднем около 20 ч. Как следует из данных табл. 2, можно достичь очень высокой радионуклидной чистоты изотопа $^{64}$Cu, не менее 99 %, если полностью отделить его (идеальный случай) от изотопов никеля и кобальта).

Таблица 2

**Сравнение значений активности наработанных изотопов, образующихся в мишени в результате ядерных реакций при облучении природной смеси изотопов никеля протонами**

| Изотоп | $\frac{\text{Активность } A_t,\ c^{-1}}{\left(\text{Отношение } A_t/A_t\ {}^{64}\text{Cu}\right)}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t = 0$ | $t$=9,67 мин | $t$=23,7 мин | $t$=3,3 ч | $t$=12,7 ч | $t$=17,5 ч | $t$=50 ч |
| *Начальная кинетическая энергия пучка протонов – 15 МэВ* | | | | | | | |
| $^{55}$Co | $\frac{2{,}5\cdot10^{7}}{(2{,}3)}$ | $\frac{2{,}4\cdot10^{7}}{(2{,}4)}$ | $\frac{2{,}4\cdot10^{7}}{(2{,}5)}$ | $\frac{2{,}1\cdot10^{7}}{(2{,}3)}$ | $\frac{1{,}5\cdot10^{7}}{(2{,}8)}$ | $\frac{1{,}2\cdot10^{7}}{(2{,}85)}$ | $\frac{3{,}4\cdot10^{6}}{(4{,}8)}$ |
| $^{57}$Co | $\frac{2{,}3\cdot10^{5}}{(0{,}02)}$ | $\frac{229996}{(0{,}02)}$ | $\frac{229990}{(0{,}02)}$ | $\frac{229919}{(0{,}02)}$ | $\frac{229689}{(0{,}04)}$ | $\frac{229572}{(0{,}05)}$ | $\frac{229781}{(0{,}32)}$ |
| $^{58}$Co | $\frac{17500}{(0{,}002)}$ | $\frac{17498}{(0{,}002)}$ | $\frac{17497}{(0{,}002)}$ | $\frac{17476}{(0{,}001)}$ | $\frac{17409}{(0{,}003)}$ | $\frac{17375}{(0{,}004)}$ | $\frac{17147}{(0{,}02)}$ |
| $^{57}$Ni | $\frac{4{,}15\cdot10^{5}}{(0{,}04)}$ | $\frac{413699}{(0{,}04)}$ | $\frac{413819}{(0{,}038)}$ | $\frac{389166}{(0{,}04)}$ | $\frac{324061}{(0{,}06)}$ | $\frac{295139}{(0{,}07)}$ | $\frac{156722}{(0{,}22)}$ |
| $^{60}$Cu | $\frac{6{,}0\cdot10^{8}}{(54{,}5)}$ | $\frac{4{,}5\cdot10^{8}}{(45{,}0)}$ | $\frac{3{,}0\cdot10^{8}}{(28{,}0)}$ | $\frac{1{,}8\cdot10^{6}}{(0{,}19)}$ | – | – | – |
| $^{61}$Cu | $\frac{3{,}7\cdot10^{7}}{(3{,}4)}$ | $\frac{3{,}5\cdot10^{7}}{(3{,}5)}$ | $\frac{3{,}4\cdot10^{7}}{(3{,}2)}$ | $\frac{1{,}8\cdot10^{7}}{(1{,}9)}$ | $\frac{2{,}5\cdot10^{6}}{(0{,}5)}$ | $\frac{9{,}3\cdot10^{5}}{(0{,}2)}$ | $\frac{1024}{(0{,}001)}$ |
| $^{62}$Cu | $\frac{5{,}7\cdot10^{8}}{(51{,}8)}$ | $\frac{2{,}8\cdot10^{8}}{(28)}$ | $\frac{1{,}0\cdot10^{8}}{(9{,}3)}$ | – | – | – | – |
| $^{64}$Cu | $\frac{1{,}1\cdot10^{7}}{(1{,}0)}$ | $\frac{1{,}09\cdot10^{7}}{(1{,}0)}$ | $\frac{1{,}07\cdot10^{7}}{(1{,}0)}$ | $\frac{9{,}1\cdot10^{7}}{(1{,}0)}$ | $\frac{5{,}4\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{4{,}2\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{7{,}0\cdot10^{5}}{(1{,}0)}$ |
| *Начальная кинетическая энергия пучка протонов – 10 МэВ* | | | | | | | |
| $^{55}$Co | $\frac{2{,}4\cdot10^{6}}{(0{,}30)}$ | $\frac{2{,}4\cdot10^{6}}{(0{,}32)}$ | $\frac{2{,}3\cdot10^{6}}{(0{,}30)}$ | $\frac{2{,}1\cdot10^{6}}{(0{,}30)}$ | $\frac{1{,}5\cdot10^{6}}{(0{,}40)}$ | $\frac{1{,}2\cdot10^{5}}{(0{,}40)}$ | $\frac{3{,}3\cdot10^{5}}{(0{,}66)}$ |
| $^{57}$Co | $\frac{12500}{(0{,}001)}$ | $\frac{12499}{(0{,}001)}$ | $\frac{12499}{(0{,}001)}$ | $\frac{12495}{(0{,}001)}$ | $\frac{12483}{(0{,}003)}$ | $\frac{12476}{(0{,}004)}$ | $\frac{12433}{(0{,}02)}$ |
| $^{58}$Co | $\frac{5500}{(0{,}0007)}$ | $\frac{5499}{(0{,}0007)}$ | $\frac{5499}{(0{,}0007)}$ | $\frac{5492}{(0{,}0008)}$ | $\frac{5471}{(0{,}001)}$ | $\frac{5460}{(0{,}001)}$ | $\frac{5389}{(0{,}01)}$ |
| $^{60}$Cu | $\frac{1{,}8\cdot10^{8}}{(24{,}0)}$ | $\frac{1{,}3\cdot10^{8}}{(17{,}5)}$ | $\frac{9{,}0\cdot10^{7}}{(12{,}3)}$ | $\frac{5{,}5\cdot10^{5}}{(0{,}08)}$ | – | – | – |
| $^{61}$Cu | $\frac{2{,}2\cdot10^{7}}{(2{,}90)}$ | $\frac{2{,}1\cdot10^{7}}{(2{,}83)}$ | $\frac{2{,}0\cdot10^{7}}{(2{,}74)}$ | $\frac{1{,}1\cdot10^{7}}{(1{,}70)}$ | $\frac{1{,}5\cdot10^{6}}{(0{,}4)}$ | $\frac{5{,}5\cdot10^{5}}{(0{,}2)}$ | $\frac{609}{(0{,}001)}$ |
| $^{62}$Cu | $\frac{2{,}9\cdot10^{8}}{(38{,}6)}$ | $\frac{1{,}4\cdot10^{8}}{(19{,}0)}$ | $\frac{5{,}3\cdot10^{7}}{(7{,}3)}$ | – | – | – | – |
| $^{64}$Cu | $\frac{7{,}5\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{7{,}4\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{7{,}3\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{6{,}3\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{3{,}7\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{2{,}8\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ | $\frac{0{,}5\cdot10^{6}}{(1{,}0)}$ |

П р и м е ч а н и я. 1. Представлены значения активности наработанных изотопов $A_t$, а также отношений величины $A_t$ к соответствующей активности наработанного изотопа $^{64}$Cu (в скобках) для различных времен выдержки $t$ после окончания облучения. 2. Время облучения мишени – 1,5 ч, ток циклотрона – 2 мкА. 3. Прочерки обозначают, что активность изотопа ниже 1 распада в секунду.

### Заключение

В настоящей работе выполнен анализ технологии получения изотопа $^{64}$Cu, важного для применения в ядерной медицине, путем циклотронного облучения протонами мишени из природного никеля (значения начальной кинетической энергия протонного пучка – 10 и 15 МэВ, ток циклотрона – 2 мкА) для различных периодов времени облучения. Установлено, что в условиях, близких к идеальным (случай полного отделения изотопов никеля и кобальта от требуемого изотопа меди) можно ожидать, что радионуклидная чистота изотопа $^{64}$Cu будет очень высокой и достигать не менее 99 %.

### Благодарность

Авторы благодарят Анатолия Юрьевича Егорова, ассистента Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, за полезные советы и содержательные обсуждения материалов проведенного исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szucs Z., Takacs S., Alirezapour B.** Development of cost-effective method for production of $^{64}$Cu from nat. Ni // Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. 2014. Vol. 302. No. 2. Pp. 1035–1038.

2. **Jalilian A.R., Jr J.O.** The current status and future of theranostic copper-64 radiopharmaceuticals // Iran Journal of Nuclear Medicine. 2017. Vol. 25. No. 1. Pp. 1–10.

3. **Qaim S.M.** The present and future of medical radionuclide production // Radiochimica Acta. 2012. Vol. 100. No. 9. Pp. 635–651.

4. **Ma M.T., Donnelly P.S.** Peptide targeted copper-64 radiopharmaceuticals // Journal of Current Topics in Medicinal Chemistry. 2011. Vol. 11. No. 5. Pp. 500–520.

5. **Van So Le., Howse J., Zaw M., Pellegrini P., Katsifis A., Greguric I., Weiner R.** Alternative method for $^{64}$Cu radioisotope production // Journal of Applied Radiation and Isotopes. 2009. Vol. 67. No. 7. Pp. 1324–1331.

6. **Hilgers K., Stoll T., Skakun Y., Coenen H.H., Qaim S.M.** Cross-section measurements of the nuclear reactions nat. Zn$(d,x)^{64}$Cu, $^{66}$Zn$(d,a)^{64}$Cu and $^{68}$Zn$(p,\alpha n)^{64}$Cu for production of $^{64}$Cu and technical developments for small-scale production of $^{67}$Cu via the $^{70}$Zn$(p,\alpha)^{67}$Cu process // Journal of Applied Radiation and Isotopes. 2003. Vol. 59. No. 6. Pp. 343–351.

7. **Rosman K.J.R., Taylor P.D.P.** Isotopic compositions of the elements // Pure and Applied Chemistry. 1998. Vol. 70. No. 1. Pp. 217–235.

8. **Amjed N., Hussain M., Aslam M.N., Tarkanyi F., Qaim S.M.** Evaluation of nuclear reaction cross sections for optimization of production of the emerging diagnostic radionuclide $^{55}$Co // Journal of Applied Radiation and Isotopes. 2016. Vol. 108. February. Pp. 38–48.

9. **Tarkányi F.T., Ignatyuk A.V., Hermanne A., et al.** Recommended nuclear data for medical radioisotope production: diagnostic positron emitters // Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. 2019. Vol. 319. No. 2. Pp. 533–666.

10. **Khandaker M.U., Kim K., Lee M., Kim K.S., Kim G.** Excitation functions of $(p,x)$ reactions on natural nickel up to 40 MeV // Journal of Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Part B. 2011. Vol. 269. No. 10. Pp. 1140–1149.

11. **Aslam M.N., Sudár S., Hussain M., Malik A.A., Shah H.A., Qaim S.M.** Charged particle induced reaction cross section data for production of the emerging medically important positron emitter $^{64}$Cu: A comprehensive evaluation // Radiochimica Acta. 2009. Vol. 97. No. 12. Pp. 669–686.

12. **Uddin M.S., Chakraborty A.K., Spellerberg San, Shariff M.A., Das S., Rashid M.A., Spahn I., Qaim S.M.** Experimental determination of proton induced reaction cross sections on nat. Ni near threshold energy // Radiochimica Acta. 2016. Vol. 104. No. 5. Pp. 305–314.

13. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.** (Particle Data Group). Review of Particle Physics // Physical Review. D. 2018. Vol. 98. No. 3. P. 030001.

14. **Seltzer S.M., Berger M.J.** Evaluation of the collision stopping power of elements and compounds for electrons and positrons // The International Journal of Applied Radiation and Isotopes. 1982. Vol. 33. No. 11. Pp. 1189–1218.

15. International Atomic Energy Agency. Cyclotron produced radionuclides: physical characteristics and production methods. Technical Reports Series. No. 468. Vienna: IAEA, 2009. 266 p.

16. **Jeffery C.M., Smithc S.V., Asad A.H., Chana S., Price R.I.** Routine production of copper-64 using 11.7 MeV protons // AIP (American Institute of Physics). Conference Proceedings. 2012. Vol. 1509. No. 84. Pp. 84–90.

*Статья поступила в редакцию 14.05.2021, принята к публикации 26.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ТИБА Али** – *аспирант Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

alitiba1991@gmail.com

**БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович** – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

berdnikov@spbstu.ru

## REFERENCES

1. **Szucs Z., Takacs S., Alirezapour B.,** Development of cost-effective method for production of $^{64}$Cu from nat. Ni, Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. 302 (2) (2014) 1035–1038.

2. **Jalilian A.R., Jr J.O.,** The current status and future of theranostic copper-64 radiopharmaceuticals, Iran Journal of Nuclear Medicine. 25 (1) (2017) 1–10.

3. **Qaim S.M.,** The present and future of medical radionuclide production, Radiochimica Acta. 100 (9) (2012) 635–651.

4. **Ma M.T., Donnelly P.S.,** Peptide targeted copper-64 radiopharmaceuticals, Journal of Current Topics in Medicinal Chemistry. 11 (5) (2011) 500–520.

5. **Van So Le, Howse J., Zaw M., et al.,** Alternative method for $^{64}$Cu radioisotope production, Journal of Applied Radiation and Isotopes. 67 (7) (2009) 1324–1331.

6. **Hilgers K., Stoll T., Skakun Y., et al.,** Cross-section measurements of the nuclear reactions nat. Zn($d$,$x$)$^{64}$Cu, $^{66}$Zn($d$,$a$)$^{64}$Cu and $^{68}$Zn($p$,$\alpha n$)$^{64}$Cu for production of $^{64}$Cu and technical developments for small-scale production of $^{67}$Cu via the $^{70}$Zn($p$,$a$)$^{67}$Cu process, Journal of Applied Radiation and Isotopes. 59 (6) (2003) 343–351.

7. **Rosman K.J.R., Taylor P.D.P.,** Isotopic compositions of the elements, Pure and Applied Chemistry. 70 (1) (1998) 217–235.

8. **Amjed N., Hussain M., Aslam M.N., et al.,** Evaluation of nuclear reaction cross sections for optimization of production of the emerging diagnostic radionuclide $^{55}$Co, Journal of Applied Radiation and Isotopes. 108 (February) (2016) 38–48.

9. **Tarkányi F.T., Ignatyuk A.V., Hermanne A., et al.,** Recommended nuclear data for medical radioisotope production: diagnostic positron emitters, Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. 319 (2) (2019) 533–666.

10. **Khandaker M.U., Kim K., Lee M., et al.,** Excitation functions of ($p$,$x$) reactions on natural nickel up to 40 MeV, Journal of Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Part B. 269 (10) (2011) 1140–1149.

11. **Aslam M.N., Sudár S., Hussain M., et al.,** Charged particle induced reaction cross section da-

ta for production of the emerging medically important positron emitter $^{64}Cu$: A comprehensive evaluation, Radiochimica Acta. 97 (12) (2009) 669–686.

12. **Uddin M.S., Chakraborty A.K., Spellerberg San, et al.,** Experimental determination of proton induced reaction cross sections on nat. Ni near threshold energy, Radiochimica Acta. 104 (5) (2016) 305–314.

13. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.** (Particle Data Group), Review of Particle Physics, Physical Review, D. 98 (3) (2018) 030001.

14. **Seltzer S.M., Berger M.J.,** Evaluation of the collision stopping power of elements and compounds for electrons and positrons, The International Journal of Applied Radiation and Isotopes. 33 (11) (1982) 1189–1218.

15. International Atomic Energy Agency, Cyclotron produced radionuclides: physical characteristics and production methods, Technical Reports Series. No. 468. IAEA, Vienna, 2009.

16. **Jeffery C.M., Smithc S.V., Asad A.H., et al.,** Routine production of copper-64 using 11.7 MeV protons, AIP (American Institute of Physics). Conference Proceedings. 1509 (84) (2012) 84–90.

*Received 14.05.2021, accepted 26.05.2021.*

## THE AUTHORS

**TIBA Ali**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alitiba1991@gmail.com

**BERDNIKOV Yaroslav A.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.14208
UDC 539.125.4

# DIQUARK PARTON DISTRIBUTION FUNCTIONS BASED ON THE LIGHT-FRONT AdS/QCD QUARK-DIQUARK NUCLEON MODEL

**B. Rodriguez-Aguilar, Ya.A. Berdnikov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, we present a phenomenological unpolarized parton distribution functions (PDFs) for diquarks based on the light front soft-wall AdS/QCD quark-diquark nucleon model. From a probed model consistent with the Drewll–Yan–West relation and quark counting rule, we have performed a fit of some free parameters using known phenomenological data of quark PDFs. The model considers the entire set of possible valence diquarks within the nucleon. In our investigation, we focused on the spin-0 ($(ud)_0$), spin-1 ($(ud)_1$) and spin-1 ($(uu)_1$) valence diquarks in the proton. The diquark PDFs obtained can be used in proton-proton collision simulations.

**Keywords:** diquark, parton distribution function, AdS/QCD, holography

**Citation:** Rodriguez-Aguilar B., Berdnikov Ya.A., Diquark parton distribution functions based on the light-front AdS/QCD quark-diquark nucleon model, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 90–103. DOI: 10.18721/JPM.14208



# ПАРТОННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИКВАРКОВ, ОСНОВАННЫЕ НА (АдС/КХД)-МОДЕЛИ НУКЛОНА КВАРК-ДИКВАРК

**Б. Родригес-Агилар, Я.А. Бердников**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе представлены феноменологические неполяризованные партонные функции распределения для дикварков, основанные на модели с мягкой стеной на световом конусе AdS/QCD кварк-дикваркового нуклона. На основе проверенной модели, согласующейся с соотношением Дрелла – Яна – Веста и правилом счета кварков, в работе определен набор параметров с использованием известных феноменологических данных кварковых функций распределения партонов (ФРП). Модель рассматривает все возможные состояния валентных дикварков. В данном исследовании мы остановились на рассмотрении состояний валентных дикварков *ud* со спинами 0 ($(ud)_0$) и 1 ($(ud)_1$), а также *uu* со спином 1 ($(uu)_1$) в протоне. Полученные дикварковые ФРП могут быть использованы при моделировании протон-протонных столкновений.

**Ключевые слова:** дикварк, функция распределения партонов, АдС/КХД, голография

**Ссылка при цитировании:** Родригес-Агилар Б., Бердников Я.А. Партонные функции распределения дикварков, основанные на (АдС/КХД)-модели нуклона кварк-дикварк // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 90–103. DOI: 10.18721/JPM.14208

## Introduction

Since the second half of the last decade of the 20th century, the AdS/CFT correspondence [1] between string theory in anti-de Sitter (AdS) space-time and conformal field theories (CFTs) in physical space-time has been a very active and interesting field of study. Among other things, the wealth of this correspondence stands in the possibility to perform calculations between opposite coupling regimes, strongly coupled theories can be mapped into weakly coupled ones and *vice versa*. CFTs are defined as scale invariant theories, so it is impossible to applicate the AdS/CFT correspondence to the quantum chromodynamics (QCD) itself directly.

It is worth noting that this is because the coupling constants change with the renormalization scale μ in QCD that we get the condition under which perturbation theory is valid [2].

Nevertheless, in the strong coupling regime of QCD, the couplings appear to be approximately constant. This is the basis for a light-front holography, an approximation of the AdS/CFT to QCD quantized on the light front (light-front AdS/QCD) [3] that has shown the ability to find analytic solutions in the non-perturbative regime of QCD, like improving predictions of hadron masses and structure properties (see e.g. Ref. [4]).

In this work, we are particularly interested in the fact that light-front AdS/QCD predicts a general form of two particle bound state wave function inside nucleons which cannot be derived simply from valence quarks [4, 5]. This has led to considerable progress in nucleon analytical results considering valence diquarks in their structure, just as light-front wave functions QCD matched with soft-wall AdS/QCD predictions [6 – 8].

Another recent result contemplates the scale evolution of the parton distribution functions (PDFs) for a quark-diquark nucleon model using scale-dependent parameters following the DGLAP (Dokshitzer – Gribov – Lipatov – Altarelli – Parisi) evolution [5], that are consistent with the quark counting rule and Drell – Yan – West relation [9, 10]. Based on these last two results, we have fitted the PDF parameters of the quark-diquark nucleon model to the available data from NNPDF2.3 QCD + QED NNLO [11] for $u$ and $d$ quarks, in order to get the unpolarized PDFs for the spin-0 $(ud)_0$, spin-1 $(ud)_1$ and spin-1 $(uu)_1$ diquarks. With such parameters available, the diquark PDFs can be used to simulations of proton (and neutron) collisions with participating diquarks.

To consider proton collisions based on a nucleon model with diquark structures inside, it is useful to inspect the properties of the parton model.

## The parton model

The cross section for proton-proton collisions can be expressed by the so called improved parton model formula [12]:

$$\sigma_{(P_1,P_2)} = \sum_{i,j} dx_1 dx_2 f_i^1\left(x_1,\mu\right) f_j^2\left(x_2,\mu\right)\times \\ \times\hat{\sigma}_{ij}\left(x_1P_1, x_2P_2, \alpha_s\left(\mu\right),\mu\right), \tag{1}$$

where the scripts 1 and 2 are labels to incoming proton beams carried momentum $P$.

In this scenario, the incoming proton beam is equivalent to a beam made of constituent partons. Typically, these partons are taken as the massless-pointlike elementary particles, quarks and gluons [12], with longitudinal momentum distribution characterized by the parton distribution functions $f_i(x, \mu)$.

This means, given some proton with momentum $P$, the probability to find in such parton $i$ with momentum between $xP$ and $(x + dx)P$ is precisely $dxf_i(x, \mu)$ being dependent as well of the renormalization scale μ.

While represents the parton cross sections, which can be computed with perturbative QCD (pQCD) for sufficiently small running coupling $\alpha_s(\mu)$ [2].

However, due to the fact that partons cannot be observed as free particles, the PDFs cannot be calculated using pQCD. Nowadays, the simplest way to obtain PDFs is fitting observables to experimental data, among other phenomenological tools (see e.g. Refs. [13, 14]).

Nevertheless, in order to work with a parton model using constituent diquarks, we must expand this picture beyond quarks and gluons. As we mentioned above, recent results from soft-wall AdS/QCD [4, 7] have shown a phenomenological approach to reproduce unpolarized PDFs of quark-diquark nucleons [5].

In the next section we show how this phenomenological approach has been constructed to finally obtain our parameters that allow us to exhibit our diquark PDFs.

## The soft-wall light front AdS/QCD quark-diquark nucleon model

In this section we intend to outline how to obtain the PDF of a quark-diquark nucleon model using soft-wall light front holographic QCD (for a more detailed analysis see Ref. [5] and its references, from where this section is heavily based).

To construct such a PDF model, it is assumed that a virtual incoming photon interacts with a massless-valence quark. The other two valence quarks are then forming a spectator diquark. In this way, it is ensured that this model is in accordance with the traditional quark-interacting frameworks, from where it is possible to build reliable properties for the nucleon model, so for diquarks. The diquarks can have then either spin-0 (scalar diquark) or spin-1 (vector diquark).

The nucleon state is represented by a spin-flavor SU (4) symmetry. This implies that the possible states are the isoscalar-scalar diquark singlet state, the isoscalar-vector diquark state and the isovector-vector diquark state. Shortly, the diquark can be either scalar or axial-vector.

For the proton state we can write it as

$$\left|P;\pm\right\rangle = C_S\left|uS^0\right\rangle^{\pm} + C_V\left|uA^0\right\rangle^{\pm} + \\ + C_{VV}\left|dA^1\right\rangle^{\pm}, \tag{2}$$

where, following the original notation in Ref. [5], $S$ and $A$ represent the scalar and vector diquark having isospin at their superscript; the subscripts in the coefficients denote the isoscalar-scalar ($S$), the isoscalar-vector state ($V$) and the isovector-vector state ($VV$).

For the neutron, the state is given by the isospin symmetry $u \leftrightarrow d$.

Without losing the generality of the model, we will take the case for the proton, which is what we care about in this work.

Using the light-cone convention $x^{\pm} = x^0 \pm x^3$ [15] it is convenient to choose a frame where the proton transverse momentum vanishes, denoted as

$$P \equiv \left( P^+, \frac{M^2}{P^+}, \mathbf{0}_\perp \right),$$

where $M$ is the proton mass.

So the momentum of the struck quark can be taken as

$$p \equiv \left( xP^+, \frac{p^2 + \left|p_\perp\right|^2}{xP^+}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

and the diquark

$$P_X \equiv \left( \left(1-x\right)P^+, P_X^-, -\mathbf{p}_\perp \right).$$

We can interpret from this notation that $x = p^+/P^+$ is the longitudinal momentum fraction carried by the struck quark.

Now, we can express the two particle Fock-state expansion.

For total angular momentum projection $J^z = \pm 1/2$ with spin-0 diquark is given by

$$\left|uS\right\rangle^{\pm} = \int \frac{dxd^2\mathbf{p}_\perp}{2(2\pi)^3\sqrt{x(1-x)}} \times \\ \times \left[ \psi_+^{\pm(u)}\left(x,\mathbf{p}_\perp\right)\left| +\frac{1}{2}s; sP^+, \mathbf{p}_\perp \right\rangle + \\ + \psi_-^{\pm(u)}\left(x,\mathbf{p}_\perp\right)\left| -\frac{1}{2}s; sP^+, \mathbf{p}_\perp \right\rangle \right], \tag{3}$$

where

$$\left|\lambda_q \lambda_S; sP^+, \mathbf{p}_\perp\right\rangle$$

is the two-particle state having struck quark of helicity $\lambda_q$ and a scalar diquark having helicity $\lambda_s = s$ (spin-0 singlet diquark helicity is denoted by $s$ to distinguish from triplet diquark).

While, the spin-1 diquark state is given by the following expression [16]:

$$\left|\nu A\right\rangle^{\pm} = \int \frac{dx d^2\mathbf{p}_\perp}{2(2\pi)^3\sqrt{x(1-x)}} \times$$
$$\times\left[\psi_{++}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|+\frac{1}{2}+1;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle+\right.$$
$$+\psi_{-+}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|-\frac{1}{2}+1;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle+$$
$$+\psi_{+0}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|+\frac{1}{2}0;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle+ \tag{4}$$
$$+\psi_{-0}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|-\frac{1}{2}0;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle+$$
$$+\psi_{+-}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|+\frac{1}{2}-1;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle+$$
$$\left.+\psi_{--}^{\pm(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)\left|-\frac{1}{2}-1;xP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle\right].$$

where $\left|\lambda_q\lambda_D;sP^+,\mathbf{p}_\perp\right\rangle$ represents a two-particle state with a quark of helicity $\lambda_q=\pm\frac{1}{2}$ and a vector diquark of helicity $\lambda_D = \pm1,0$ (triplet). Here $\nu = u, d$ is a flavor index.

The light-front (LF) wave functions with spin-0 diquark state, $\psi_{\pm}^{\pm(u)}$ at the initial scale $\mu_0$ for $J=\pm\frac{1}{2}$ are given by expressions [8]:

$$J=+\frac{1}{2}:\begin{cases}\psi_{+}^{+(u)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_S\varphi_1^{(u)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{-}^{+(u)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_S\left(-\dfrac{p^1+ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(u)}(x,\mathbf{p}_\perp);\end{cases} \tag{5}$$

$$J=-\frac{1}{2}:\begin{cases}\psi_{+}^{-(u)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_S\left(\dfrac{p^1-ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(u)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{-}^{-(u)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_S\varphi_1^{(u)}(x,\mathbf{p}_\perp).\end{cases} \tag{6}$$

In a very similar way, for vector diquarks with $J=\pm\frac{1}{2}$ the LF wave functions $\psi_{\pm\pm}^{\pm(\nu)}$ at the initial scale $\mu_0$ can be written as

$$J=+\frac{1}{2}:\begin{cases}\psi_{++}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_1^\nu\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{p^1-ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{-+}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_1^\nu\sqrt{\dfrac{2}{3}}\varphi_1^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{+0}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_0^\nu\sqrt{\dfrac{1}{3}}\varphi_1^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{-0}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_0^\nu\sqrt{\dfrac{1}{3}}\left(\dfrac{p^1+ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{+-}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=0,\\ \psi_{--}^{+(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=0;\end{cases} \tag{7}$$

$$J=-\frac{1}{2}:\begin{cases}\psi_{++}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=0,\\ \psi_{-+}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=0,\\ \psi_{+0}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_0^\nu\sqrt{\dfrac{1}{3}}\left(\dfrac{p^1-ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{-0}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_0^\nu\sqrt{\dfrac{1}{3}}\varphi_1^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{+-}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=N_1^\nu\sqrt{\dfrac{2}{3}}\varphi_1^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp),\\ \psi_{--}^{-(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp)=\\ =N_1^\nu\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{p^1+ip^2}{xM}\right)\varphi_2^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp).\end{cases} \tag{8}$$

The LF wave functions $\varphi_i^{(\nu)}$ ($i$ = 1, 2) are the twist-3 LF wave functions. These functions can be derived in light-front QCD and in soft-wall AdS/QCD [4, 17 – 19, 6].

In Ref. [7] a generalized form to $\varphi_i^{(\nu)}$ was proposed by matching the electromagnetic form factors of the nucleon in soft-wall AdS/QCD and light-front QCD, getting that

Table 1

**The fitted parameters for nucleon valence *u* and *d* quarks at the initial scale $\mu_0$ [5]**

| Parameter | Value | |
|---|---|---|
| | $u$ | $d$ |
| $a_1^\nu$ | $0.280 \pm 0.001$ | $0.5850 \pm 0,0003$ |
| $b_1^\nu$ | $0.1716 \pm 0.0051$ | $0.7000 \pm 0.0002$ |
| $a_2^\nu$ | $0.84 \pm 0.02$ | $0.9434^{+0.0017}_{-0.0013}$ |
| $b_2^\nu$ | $0.2284 \pm 0.0035$ | $0.6400^{+0.0082}_{-0.0022}$ |
| $\delta^\nu$ | 1.0 | 1.0 |

N o t a t i o n: $\nu = u$, $d$ – quarks, while $a_1^\nu, b_1^\nu, a_2^\nu, b_2^\nu$, $\delta^\nu$ – parameters defined in Eq. (9).

$$\varphi_i^{(\nu)}(x,\mathbf{p}_\perp) = \frac{4\pi}{\kappa}\sqrt{\frac{\log(1/x)}{(1-x)}}x^{a_i^\nu}(1-x)^{b_i^\nu} \times \\ \times \exp\left[-\delta^\nu \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2\kappa^2}\frac{\log(1/x)}{(1-x)^2}\right], \tag{9}$$

where $\kappa$ is a scale parameter coming from the soft-wall AdS/QCD model.

With this information, it is possible to write the Dirac and Pauli form factors for spin-1/2 composite particle systems [20].

In Ref. [21] it was found, by fitting the proton form factors from the soft-wall AdS/QCD model with experimental data [22 – 26], that the best agreement if given with $\kappa = 0.4066$ GeV. Furthermore, in Ref. [5] the flavor form factors for $u$ and $d$ in this light-front diquark model was fitted with experimental data [27, 28], obtaining the value of the parameters $a_i^{(\nu)}$ and $b_i^{(\nu)}$ at the initial scale $\mu_0$ (see Table 1).

In the same way, using the Sachs form factors, the coefficients for the quark-diquark nucleon state (2) were obtained in Ref. [5]:

$$C_S^2 = 1.3872,\ \ C_V^2 = 0.6128,\ \ C_{VV}^2 = 1.0.$$

Besides, the normalized constants $N_i$ were found to be

$$N_S = 2.0191,\ \ N_0^{(u)} = 3.2050,\ \ N_0^d = 5.9423,$$
$$N_1^{(u)} = 0.9895,\ \ N_1^d = 1.1616.$$

**Quark-diquark unpolarized PDF evolution**

The unpolarized parton distribution function is defined as [8, 5]:

$$f^{(\nu)}(x,\mu_0) = \frac{1}{2}\int\frac{dz^-}{2(2\pi)}\exp\left(\frac{ip^+z^-}{2}\right)\times \\ \times\left\langle P;S\left|\bar{\psi}^{(\nu)}(0)\gamma^+\psi^{(\nu)}(z^-)\right|P;S\right\rangle\Big|_{z^+=z_T=0}, \tag{10}$$

which depends only on the light-cone momentum fraction $x = p^+/P^+$ where the proton state $|P;S\rangle$ with spin $S$ is given as in Eq. (2).

Indeed, $\gamma^+$ is the light-cone representation of the usual $\gamma^\mu$ matrix, detailed definition is found in Ref. [15].

The leading order QCD evolution of the unpolarized PDF is given as the standard DGLAP expansion [29, 30, 5]:

$$\int_0^1 dx x^n f(x,\mu) = \\ = \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)}\right)^{\frac{\gamma_n^{(0)}}{2\beta_0}}\int_0^1 dx x^n f(x,\mu_0), \tag{11}$$

where the anomalous dimension is determined by

$$\gamma_n^{(0)} = -2C_F\left(3 + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - 4\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \tag{12}$$

and the running coupling constant is given as

$$\alpha_s(\mu)=\frac{4\pi}{\beta_0\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2}\right)}. \tag{13}$$

In this work we take $C_F = 4/3$, $\beta_0 = 9$ and $\Lambda_{\mathrm{QCD}} = 0.226$ GeV.

The initial scale in most of the works on which ours is based is taken to be $\mu_0 = 0.313$ GeV since it is a value available for pion phenomenology.

Thus, the light-front diquark unpolarized PDFs at scale $\mu$ are given by [5]:

$$\begin{gathered}f^{(S)}(x,\mu)=N_S^2(\mu)\times\\ \times\left[\frac{1}{\delta^u(\mu)}x^{2a_1^u(\mu)}(1-x)^{2b_1^u(\mu)+1}+\right.\\ +x^{2a_2^u(\mu)-2}(1-x)^{2b_2^u(\mu)+3}\times\\ \left.\times\frac{\kappa^2}{\left(\delta^u(\mu)\right)^2M^2\ln(1/x)}\right];\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}f^{(A)}(x,\mu)=\left(\frac{1}{3}N_0^{(\nu)2}(\mu)+\frac{2}{3}N_1^{(\nu)2}(\mu)\right)\times\\ \times\left[\frac{1}{\delta^\nu(\mu)}x^{2a_1^\nu(\mu)}(1-x)^{2b_1^\nu(\mu)+1}+\right.\\ +x^{2a_2^\nu(\mu)-2}(1-x)^{2b_2^\nu(\mu)+3}\times\\ \left.\times\frac{\kappa^2}{\left(\delta^\nu(\mu)\right)^2M^2\ln(1/x)}\right].\end{gathered} \tag{15}$$

The parameters $a_i^\nu$, $b_i^\nu$, $\delta^\nu$ are now dependent on the scale $\mu$ such that the relation (11) holds, i. e. [5],

$$a_i^\nu(\mu)=a_i^\nu(\mu_0)+A_i^\nu(\mu), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}b_i^\nu(\mu)=b_i^\nu(\mu_0)-\\ -B_i^\nu(\mu)\frac{4C_F}{\beta_0}\ln\left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)}\right),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\delta^\nu(\mu)=\exp\left[\delta_1^\nu\left(\ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)\right)^{\delta_2^\nu}\right] \tag{18}$$

where the quantities $A_i^\nu(\mu)$ and $b_i^\nu(\mu)$ are defined as

$$\Pi_i^\nu(\mu)=\alpha_{\Pi,i}^\nu\mu^{2\beta_{\Pi,i}^\nu}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)\right]^{\gamma_{\Pi,i}^\nu}\Bigg|_{i=1,2} \tag{19}$$

for $\Pi = A, B$.

The $a_i^\nu(\mu)$ and $b_i^\nu(\mu)$ are the parameters given in Table 1. It should be noted that the parameter $\delta^\mu$ tends to unity while $\mu\to\mu_0$.

In order to find the evolution parameters $\alpha_{\Pi,i}^\nu, \beta_{\Pi,i}^\nu, \gamma_{\Pi,i}^\nu$ and $\delta^\nu$ it is useful to write the flavor decomposed PDFs $f^u(x, \mu)$ and $f^d(x, \mu)$. It was well discussed in Ref. [8] that for the relation between quark flavors and diquark states should have a linear behavior with free coefficients to be determinate with experimental data. Indeed, in the same way the proton state (2) has to be consistent with the real world under the same coefficients $C_S$, $C_V$ and $C_{VV}$, which was how the flavored form factors were decomposed from the diquarks, and such parameters founded in Ref. [5].

So, the flavor decomposed PDFs are given as

$$f^u(x,\mu)=C_S^2f^{(S)}(x,\mu)+C_V^2f^{(V)}(x,\mu), \tag{20}$$

$$f^d(x,\mu)=C_{VV}^2f^{(VV)}(x,\mu). \tag{21}$$

Then, the flavored PDF $f^\nu(x, \mu)$ in the light-front quark-diquark model can be written as

$$\begin{gathered}f^\nu(x,\mu)=\\ =N^{(\nu)}\left[\frac{1}{\delta^\nu(\mu)}x^{2a_1^\nu(\mu)}(1-x)^{2b_1^\nu(\mu)+1}+\right.\\ +x^{2a_2^\nu(\mu)-2}(1-x)^{2b_2^\nu(\mu)+3}\times\\ \left.\times\frac{\kappa^2}{\left(\delta^\nu(\mu)\right)^2M^2\ln(1/x)}\right],\end{gathered} \tag{22}$$

where

$$N^{(u)}=\left(C_S^2N_s^2+C_V^2\left(\frac{1}{3}N_0^{(u)2}+\frac{2}{3}N_1^{(u)2}\right)\right) \tag{23}$$

and

$$N^{(d)} = \left( C_{VV}^2 \left( \frac{1}{3} N_0^{(d)2} + \frac{2}{3} N_1^{(d)2} \right) \right), \qquad (24)$$

for $u$ and $d$ quarks respectively.

In this work, we have followed the fashion of Ref. [5] and we have obtained the values of the evolution parameters by fitting the flavor PDFs (22) with data from NNPDF2.3 QCD + QED NNLO [11].

The fit was performed in gnuplot [31], an open source plotting tool using non-linear least-square theory, taking first a $f^\nu$ depending on parameters $\Pi_i^\nu(\mu)$ then getting the evolution parameters $\alpha_{\Pi,i}^\nu$, $\beta_{\Pi,i}^\nu$, $\gamma_{\Pi,i}^\nu$ and $\delta^\nu$.

The unpolarized PDF data was fitted for 100 equal-spaced data points for different $x \in (0, 1)$ and $\mu^2 = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ GeV$^2$.

The fitted parameters for $\alpha_{\Pi,i}^\nu, \beta_{\Pi,i}^\nu, \gamma_{\Pi,i}^\nu$ are shown in Table 2 while the fitted $\delta^\nu$ being shown in Table 3.

In appendix $A$ we show the different fits performed for the scales mentioned above.

With this data applied to the PDFs (14) and (15), we have drawn the functions $x{\cdot}f(x)$ of the isoscalar-scalar diquark and isovector-vector diquark for energy scales $\mu^2 = 10, 10^2, 10^3$ and $10^4$ GeV$^2$ shown in Fig. 1, $a$, $b$, $c$, $d$ respectively. The smooth bands show the case of the scalar diquark, while the checkered bands are for the mentioned vector diquark. It is important to note that

$$\frac{1}{3} N_0^{(u)2} + \frac{2}{3} N_1^{(u)2} \approx N_S^2,$$

from values reported in Ref. [5], so the behavior of the $f^{(S)}$ (isoscalar-scalar) curve and the $f^{(V)}$ (isoscalar-vector) one is very similar.

Table 2

**PDF evolution parameters with 95% confidence bounds**

| $\Pi_i^\nu(\mu)$ | $\alpha_i^\nu$ | $\beta_i^\nu$ | $\gamma_i^\nu$ | $\chi^2/d.o.f$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1^u$ | –0.196314 ± 0.002266 | –0.197209 ± 0,010210 | 0.927163 ± 0.036270 | 0.09 |
| $B_1^u$ | 6.48940 ± 0.04592 | 0.161127 ± 0.006494 | –0.910813 ± 0.021850 | 0.17 |
| $A_2^u$ | –0.441651 ± 0,002674 | –0.0389503 ± 0,0058020 | 0.306214 ± 0.019020 | 0.995 |
| $B_2^u$ | 2.58149 ± 0.26410 | –0.0548368 ± 0.0780600 | –0.807298 ± 0,277900 | 1.54 |
| $A_1^d$ | –0.119059 ± 0.002517 | –0.124819 ± 0.018800 | 0.952914 ± 0.060100 | 0.27 |
| $B_1^d$ | 12.84810 ± 0.09134 | 0.0976609 ± 0.006134 | –0.80035 ± 0.01510 | 0.53 |
| $A_2^d$ | –0.514816 ± 0.000724 | –0.001555 ± 0.001244 | 0.171831 ± 0.003307 | 0.41 |
| $B_2^d$ | 1.10727 ± 0.00703 | 0.0844447 ± 0.005591 | –0.57190 ± 0.01486 | 0.03 |

Table 3

**PDF evolution parameters $\delta_1^\nu$ and $\delta_2^\nu$ for $\nu = u, d$**

| $\delta^\nu(\mu)$ | $\delta_1^\nu$ | $\delta_2^\nu$ | $\chi^2/d.o.f$ |
|---|---|---|---|
| $\delta^u$ | 0.035074 ± 0.03009 | 0.48314 ± 0.06732 | 10.50 |
| $\delta^d$ | 0.406762 ± 0.007024 | 0.46990 ± 0.01275 | 3.79 |

Footnote: in Tabs. 2 and 3 the data was used from NNPDF2.3 QCD+QED NNLO [11].

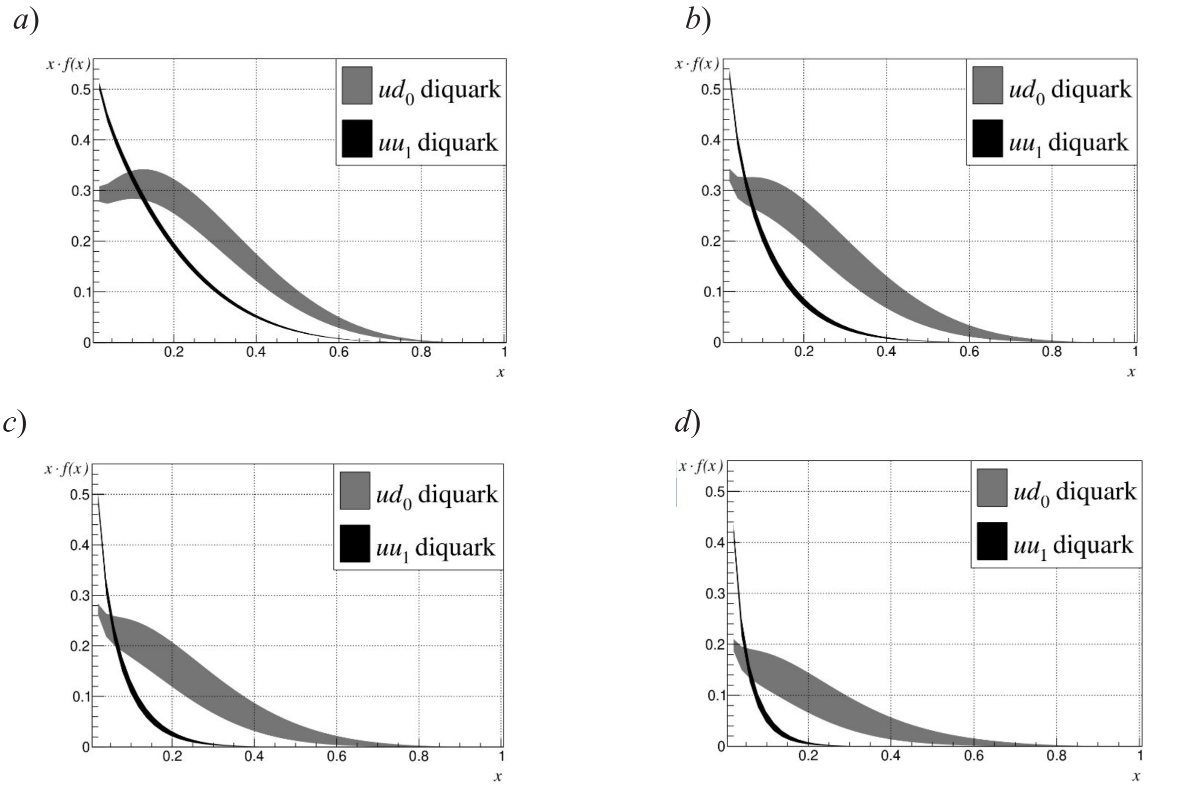



Fig. 1. Graphs of the $x{\cdot}f(x)$ functions (diquark PDFs) at different scale energies $\mu^2$, $(\mathrm{GeV})^2$: 10 (*a*), $10^2$ (*b*), $10^3$ (*c*), $10^4$ (*d*). The cases of the scalar $ud_0$ (gray bands) and vector $uu_1$ (black ones) diquarks are shown

## Conclusions

The soft-wall light front AdS/QCD has allowed us to construct parton distribution functions (PDFs) for diquarks in agreement with the data obtained for quarks phenomenologically. We have particularly taken data from NNPDF2.3 QCD+QED NNLO [11], but the model can be adapted to desired experimental data with *u* and *d* quark PDF information.

Although the uncertainties for the values in $\Pi_i^v(\mu)$ reported here should be still improved, an acceptable fit for the functions (14) and (15) is shown in our parameters in Tabs. 2 and 3 looking at $\chi^2/d.o.f$.

In general terms, the behavior of diquark PDFs observed in Figs. 1 reveals a similarity to the quark PDFs. Such behavior goes in the sense that as the energy scale increases, a shift to $x = 0$ of the peak of the functions is visible; as well as, while $x$ approaches 1, $xf$ tends to vanish exponentially. This fact can be compared with the results in Ref. [5], where using the same model with NNPDF21(NNLO) [32] data were fitted the *u* and *d* quark PDFs.

The phenomenological diquark PDFs reported here are intended to be tested within the framework of particle collisions.

Especially for us, it is expected to study the effect in the production of hadrons in collision simulations of the AdS/QCD quark-diquark nucleon model taking into account participant diquarks in hard processes.

## Acknowledgements

B.R. would like to thank to the Secrearía Nacional de Ciencia y Tecnología (Ref. Grant FINDECYT/EDUCA CTi 02-2019) of Guatemala for financial support.

Moreover, many thanks to Anatolii Iu. Egorov (HSEP IPNT Peter the Great SPbPU) for many valuable comments and insightful discussions of the conducted studies.

***Appendix***

## Parameter fitting for PDF evolution from NNPDF2.3 QCD+QED NNLO

The scale evolution of $A_i^\nu$ and $B_i^\nu$ is parameterized by $\alpha_i^\nu$, $\beta_i^\nu$ and $\gamma_i^\nu$. While $\delta^\nu$ is parameterized by $\delta_1^\nu$ and $\delta_2^\nu$, $f(x, \mu)$ is given by Eq. (22) along with Eqs. (16) – (19). The $f(x, \mu)$ function depending on the parameters $A_i^\nu$, $B_i^\nu$ and $\delta^\nu$ are fitted at 8 different energy scales $\mu^2$ in Table 4 for *u* quark, while the fitted parameters for *d* quark are given in Table 5.

Each $\chi^2/d.o.f$ was evaluated for 100 equally-spaced points for different $x \in (0, 1)$. The fitting of the parameters at $\mu^2$ = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 and 256 GeV$^2$ are shown in Fig. 2 and 3. The data points are extracted from NNPDF2.3 QCD + QED NNLO [11]. It should be noted that the $\chi^2/d.o.f$ values show that the uncertainty ranges found with the fit are overestimated, this is because for this first instance, uncertainties were not taken from the PDF data of Ref. [11]. An improvement in this fact is expected for future works.

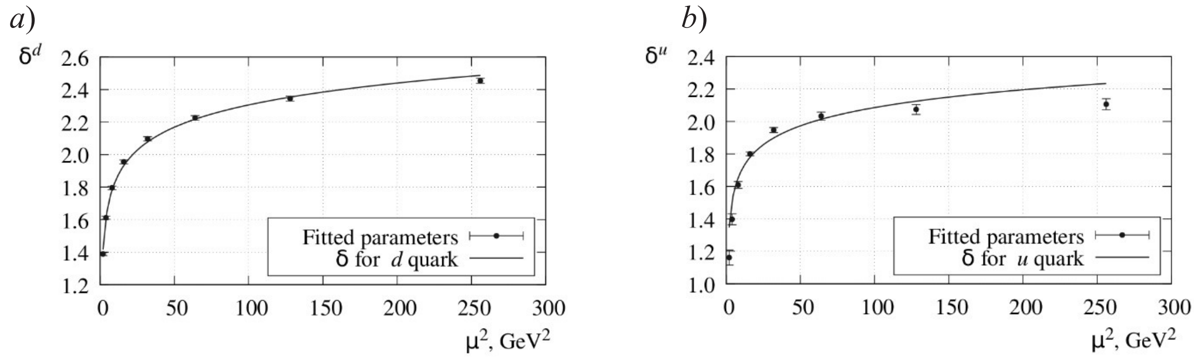



Fig. 2. Plots of $\delta^u$ (*a*) and $\delta^d$ (*b*) parameters vs. energy scales obtained by fitting the data of Table 3 through varying evolution parameters $\delta_1^\nu$ and $\delta_2^\nu$ or *u* (*a*) and *d* (*b*) quarks

Table 4

**Fitting of the PDF $f_1(x)$ at various energy scales for the *u* quark**

| $\mu^2$, GeV$^2$ | $A_1^u$ | $B_1^u$ | $A_2^u$ | $B_2^u$ | $\delta^u$ | $\chi^2/d.o.f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | –0.133482± ±0.027630 | 9.88657± ±0.57650 | –0,398994± ±0.008142 | 2.50897± ±0.82540 | 1.16148± ±0.04635 | 9.15238e –06 |
| 4.0 | –0.206116± ±0.014570 | 5.97471± ±0.18860 | –0.463197± ±0.004770 | 1.64702± ±0.29730 | 1.39743± ±0.03360 | 2.73019e –06 |
| 8.0 | –0.257193± ±0.006954 | 4.63066± ±0.06874 | –0.508357± ±0.002519 | 1.28388 ± ±0.10670 | 1.60899± ±0.02080 | 6.44055e –07 |
| 16.0 | –0.294376± ±0.002982 | 3.97296± ±0.02359 | –0.542694± ±0.001198 | 1.01137± ±0.03058 | 1.80059± ±0.01118 | 1.22395e –07 |
| 32.0 | –0.316551± ±0.003503 | 3.63544± ±0.02254 | –0.567223± ±0.001527 | 0.774017± ±0.020070 | 1.94722± ±0.01540 | 1.77367e – 07 |
| 64.0 | –0.325091± ±0.005228 | 3.45959± ±0.02855 | 0.582866± ±0.002362 | 0.620872± ±0.018460 | 2.03299± ±0.02475 | 4.29130e – 07 |
| 128.0 | –0.325202± ±0.006335 | 3.36176± ±0.03040 | –0.592571± ±0.002883 | 0.504157± ±0.019470 | 2.07403± ±0.03057 | 7.16693e – 06 |
| 256.0 | –0.324260± ±0.006969 | 3.28934± ±0.04935 | –0.600304± ±0.003162 | 0.504157± ±0.019470 | 2.10605± ±0.03384 | 6.94007e – 06 |

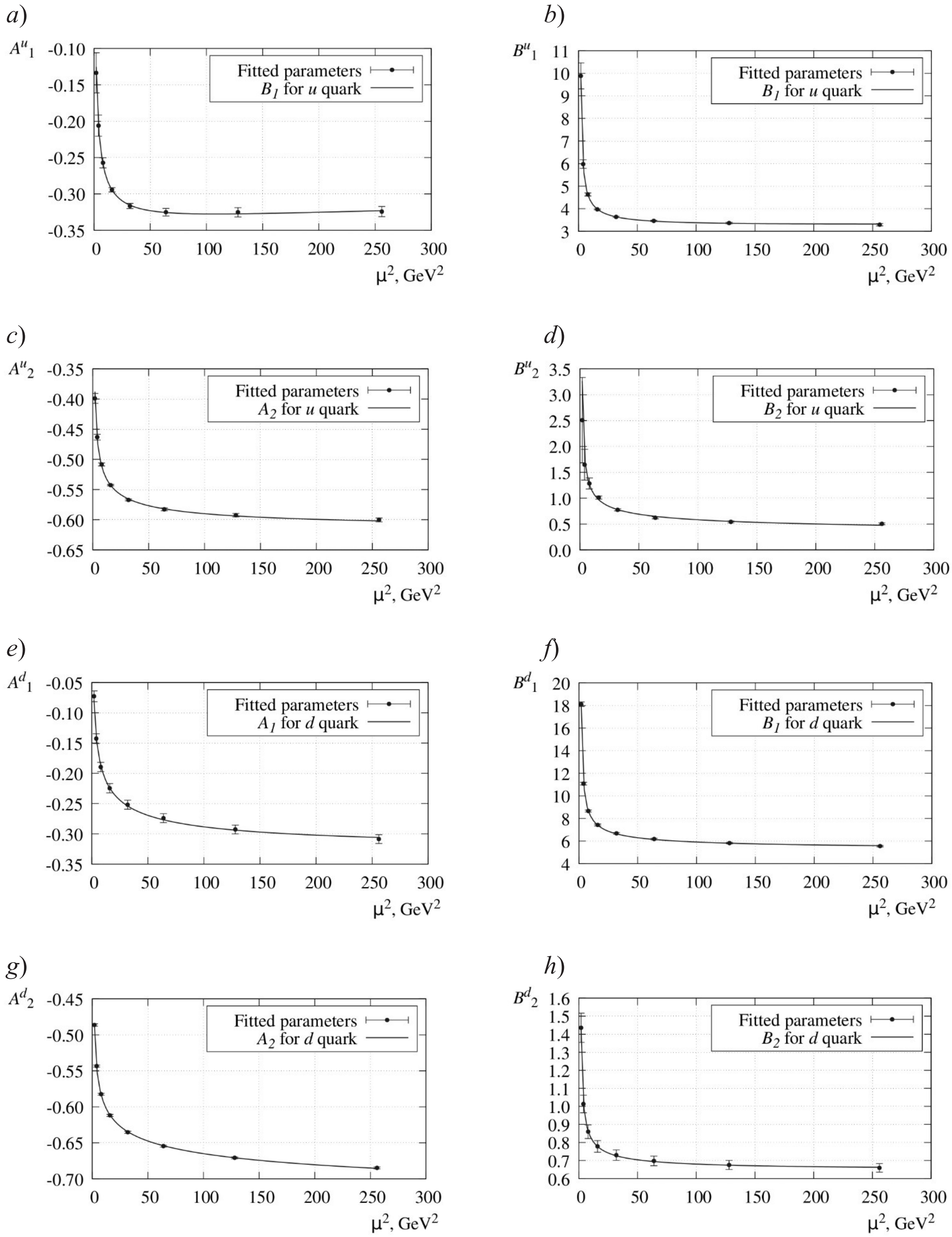



Fig. 3. Plots of $A_1^u$ (*a*), $B_1^u$ (*b*), $A_2^u$ (*c*), $B_2^u$ (*d*), $A_1^d$ (*e*), $B_1^d$ (*f*) and $A_2^d$ (*h*) parameters vs. energy scales obtained by fitting the data of Tabs. 4, 5 through using Eq. (19) and varying evolution parameters $\alpha_{\Pi,i}^{\nu}$, $\beta_{\Pi,i}^{\nu}$ and $\gamma_{\Pi,i}^{\nu}$ for $u$ ($a-d$) and $d$ ($e-h$) quarks

Table 5

**Fitting of the PDF $f_1(x)$ at various scales for the $d$ quark**

| $\mu^2$, GeV$^2$ | $A_1^d$ | $B_1^d$ | $A_2^d$ | $B_2^d$ | $\delta^d$ | $\chi^2/d.o.f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | –0.0726864± ±0.0088830 | 18.11530± ±0.19740 | –0.486242± ±0.001573 | 1.43562± ±0.08108 | 1.388050± ±0.008694 | 1.54472e –06 |
| 4.0 | –0.142581± ±0.008094 | 11.07900± ±0.11820 | –0.543380± ±0.001465 | 1.01348± ±0.04888 | 1.612030± ±0.009794 | 1.42185e –06 |
| 8.0 | –0.189572± ±0.007766 | 8.65931± ±0.09223 | –0.582432± ±0.001427 | 0.860135± ±0.037990 | 1.79567± ±0.01090 | 1.35531e –06 |
| 16.0 | –0.224539± ±0.007578 | 7.42345± ±0.07912 | –0.611889± ±0.001410 | 0.778533± ±0.032410 | 1.95505± ±0.01194 | 1.29922e –06 |
| 32.0 | –0.251850± ±0.007459 | 6,67682± ±0.07126 | –0.635289± ±0.001402 | 0.729967± ±0.028960 | 2.09703± ±0.01291 | 1.24493e –06 |
| 64.0 | –0,274124± ±0.007376 | 6.17642± ±0.06598 | –0.654558± ±0.001398 | 0.697843± ±0.026600 | 2.22594± ±0.01381 | 1.19305e –06 |
| 128.0 | –0.292732± ±0.007316 | 5.81723± ±0.06219 | –0.654558± ±0.001398 | 0.675414± ±0.024860 | 2.34434± ±0.01466 | 1.14381e –06 |
| 256.0 | –0.308610± ±0.007272 | 5.54758± ±0.05934 | –0.684823± ±0.001397 | 0.659191± ±0.023530 | 2.45415± ±0.01547 | 1.09728e –06 |

Secrearía Nacional de Ciencia y Tecnología of Guatemala FINDECYT/EDUCA CTi 02-2019.

## REFERENCES

1. **Maldacena J.M.,** The large $N$ limit of superconformal field theories and supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (2) (1998) 231–252.

2. **Peskin M.E., Schroeder D.V.,** An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, USA, 1995.

3. **De Teramond G.F., Brodsky S.J.,** Light-front holography: A first approximation to QCD, Phys. Rev. Lett. 102 (8) (2009) 081601.

4. **Brodsky S.J., de Teramond G.F.,** Light-front dynamics and AdS/QCD correspondence: The pion form factor in the space- and time-like regions, Phys. Rev. D. 77 (5) (2008) 056007.

5. **Maji T., Chakrabarti D.,** Light front quark-diquark model for the nucleons, Phys. Rev. D. 94 (9) (2016) 094020.

6. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.,** Nucleon resonances in AdS/QCD, Phys. Rev. D. 87 (1) (2013) 016917.

7. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.,** Light-front quark model consistent with Drell–Yan–West duality and quark counting rules, Phys. Rev. D. 89 (5) (2014) 054033 [Erratum: Phys. Rev. D. 92 (1) (2015) 019902].

8. **Bacchetta A., Conti F., Radici M.,** Transverse-momentum distributions in a diquark spectator model, Phys. Rev. D. 78 (7) (2008) 074010.

9. **Drell S.D., Yan T.M.,** Connection of elastic electromagnetic nucleon form-factors at large $Q^2$ and deep inelastic structure functions near threshold, Phys. Rev. Lett. 24 (4) (1970) 181–185.

10. **West G.B.,** Phenomenological model for the electromagnetic structure of the proton, Phys. Rev. Lett. 24 (21) (1970) 1206–1209.

11. **Ball R.D., Bertone V., Carrazza S., et al.,** Parton distributions with QED corrections, Nucl. Phys. B. 877 (2) (2013) 290–320.

12. **Nason P.,** Introduction to perturbative QCD, Lecture notes for the 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, January 14–27, 2001, Campos do Jordao, SP, Brazil (2002) 409–486.

13. **Pumplin J., Stump D.R., Huston J., et al.,** New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis, JHEP. 2002 (7) (2002) 12.

14. **Ball R.D., Bertone V., Carrazza S., et al.,** Parton distributions for the LHC run II, JHEP. 2015 (4) (2015) 40.

15. **Lepage G.P., Brodsky S.J.,** Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics, Phys. Rev. D. 22 (9) (1980) 2157.

16. **Ellis J.R., Hwang D. S., Kotzinian A.,** Sivers asymmetries for inclusive pion and kaon production in deep-inelastic scattering, Phys. Rev. D. 80 (7) (2009). 074033.

17. **Brodsky S.J., Cao F.-G., de Teramond G.F.,** Meson transition form factors in light-front holographic QCD, Phys. Rev. D. 84 (7) (2011) 075012.

18. **Abidin Z., Carlson C.E.,** Nucleon electromagnetic and gravitational form factors from holography, Phys. Rev. D. 79 (11) (2009) 115003.

19. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.**, Chiral symmetry breaking and meson wave functions in soft-wall AdS/QCD, Phys. Rev. D. 87 (5) (2013) 056001.

20. **Brodsky S.J., Drell S.D.,** The anomalous magnetic moment and limits on fermion substructure, Phys. Rev. D. 22 (8) (1980) 2236.

21. **Chakrabarti D., Mondal C.,** Generalized parton distributions for the proton in AdS/QCD, Phys. Rev. D. 88 (7) (2013) 073006.

22. **Gayou O., Wijesooriya K., Afanasev A., et al.,** Measurements of the elastic electromagnetic form-factor ratio $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$ via polarization transfer, Phys. Rev. C. 64 (3) (2001) 038202.

23. **Gayou O., Aniol K.A., Averett T., et al.,** Measurement of $G_{Ep}/G_{Mp}$ in $\mathbf{e}p \to e\mathbf{p}$ to $Q^2 = 5.6$ GeV$^2$, Phys. Rev. Lett. 88 (9) (2002) 092301.

24. **Arrington J., Melnitchouk W., Tjon J.A.,** Global analysis of proton elastic form factor data with two-photon exchange corrections, Phys. Rev. C. 76 (3) (2007) 035205.

25. **Punjabi V., Perdrisat C.F., Aniol K.A., et al.,** Proton elastic form-factor ratios to $Q^2 = 3.5$ GeV$^2$ by polarization transfer, Phys. Rev. C. 71 (5) (2005) 055202 [Erratum: Phys. Rev. C. 71 (6) (2005) 069902].

26. **Puckett A.J.R., Brash E.J., Jones M.K., et al.,** Recoil polarization measurements of the proton electromagnetic form factor ratio $Q^2 = 8.5$ GeV$^2$, Phys. Rev. Lett. 104 (24) (2010) 242301.

27. **Cates G.D., de Jager C.W., Riordan S., Wojtsekhowski B.,** Flavor decomposition of the elastic nucleon electromagnetic form factors, Phys. Rev. Lett. 106 (25) (2011) 252003.

28. **Diehl M., Kroll P.,** Nucleon form factors, generalized parton distributions and quark angular momentum, Eur. Phys. J. C. 73 (4) (2013) 2397.

29. **Altarelli G., Parisi G.,** Asymptotic freedom in parton language, Nucl. Phys. B. 126 (2) (1977) 298–318.

30. **Broniowski W., Arriola E.R., Golec-Biernat K.,** Generalized parton distributions of the pion in chiral quark models and their QCD evolution, Phys. Rev. D. 77 (3) (2008) 034023.

31. **Williams T., Kelley C.,** gnuplot 5.4. An interactive plotting program. Version 5.4. December, 2020, www.gnuplot.sourceforge.net. Accessed February 28, 2021.

32. **Del Debbio L., Forte S., Latorre J.I., et al.,** Neural network determination of parton distributions: the nonsinglet case, JHEP. 2007 (3) (2007) 39.

*Received 15.05.2021, accepted 27.05.2021.*

## THE AUTHORS

**RODRIGUEZ-AGUILAR Benjamin**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

rodrigesagilar.l@edu.spbstu.ru

**BERDNIKOV Yaroslav A.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

berdnikov@spbstu.ru

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Maldacena J.M.** The large *N* limit of superconformal field theories and supergravity // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. Vol. 2. No. 2. Pp. 231–252.

2. **Peskin M.E., Schroeder D.V.** An introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley Pub. Co., 1995. 842 p.

3. **De Teramond G.F., Brodsky S.J.** Light-front holography: A first approximation to QCD // Physical Review Letters. 2009. Vol. 102. No. 8. P. 081601.

4. **Brodsky S.J., de Teramond G.F.** Light-front dynamics and AdS/QCD correspondence: The pion form factor in the space- and time-like regions // Physical Review. D. 2008. Vol. 77. No. 5. P. 056007.

5. **Maji T., Chakrabarti D.** Light front quark-diquark model for the nucleons // Physical Review. D. 2016. Vol. 94. No. 9. P. 094020.

6. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.** Nucleon resonances in AdS/QCD // Physical Review. D. 2013. Vol. 87. No. 1. P. 016917.

7. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.** Light-front quark model consistent with Drell – Yan – West duality and quark counting rules // Physical Review. D. 2014. Vol. 89. No. 5. P. 054033 [Erratum: Physical Review. D. 2015. Vol. 92. No. 1. P. 019902].

8. **Bacchetta A., Conti F., Radici M.** Transverse-momentum distributions in a diquark spectator model // Physical Review. D. 2008. Vol. 78. No. 7. P. 074010.

9. **Drell S.D., Yan T.M.** Connection of elastic electromagnetic nucleon form-factors at large $Q^2$ and deep inelastic structure functions near threshold // Physical Review Letters. 1970. Vol. 24. No. 4. Pp. 181–185.

10. **West G.B.** Phenomenological model for the electromagnetic structure of the proton // Physical Review Letters. 1970. Vol. 24. No. 21. Pp. 1206–1209.

11. **Ball R.D., Bertone V., Carrazza S., Del Debbio L., Forte S., Guffanti A., Hartland N.P., Rojo J.** Parton distributions with QED corrections // Nuclear Physics. B. 2013. Vol. 877. No. 2. Pp. 290–320.

12. **Nason P.** Introduction to perturbative QCD // Lecture notes for the 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields. January 14 – 27, 2001, Campos do Jordao, SP, Brazil. 2002. Pp. 409–486.

13. **Pumplin J., Stump D.R., Huston J., Lai H.L., Nadolsky P.M., Tung W.K.** New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis // Journal of High Energy Physics. 2002. Vol. 2002. No. 7. P. 12.

14. **Ball R.D., Bertone V., Carrazza S., Deans C.S., Del Debbio L., Forte S., Guffanti A., Hartland N.P., Latorre J.I., Rojo J., Ubiali M.** Parton distributions for the LHC run II // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 2015. No. 4. P. 40.

15. **Lepage G.P., Brodsky S.J.** Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics // Physical Review. D. 1980. Vol. 22. No. 9. P. 2157.

16. **Ellis J.R., Hwang D.S., Kotzinian A.** Sivers asymmetries for inclusive pion and kaon production in deep-inelastic scattering // Physical Review. D. 2009. Vol. 80. No. 7. P. 074033.

17. **Brodsky S.J., Cao F.-G., de Teramond G.F.** Meson transition form factors in light-front holographic QCD // Physical Review. D. 2011. Vol. 84. No. 7. P. 075012.

18. **Abidin Z., Carlson C.E.** Nucleon electromagnetic and gravitational form factors from holography // Physical Review. D. 2009. Vol. 79. No. 11. P. 115003.

19. **Gutsche T., Lyubovitskij V.E., Schmidt I., Vega A.** Chiral symmetry breaking and meson wave functions in soft-wall AdS/QCD // Physical Review. D. 2013. Vol. 87. No. 5. P. 056001.

20. **Brodsky S.J., Drell S.D.** The anomalous magnetic moment and limits on fermion substructure // Physical Review. D. 1980. Vol. 22. No. 9. P. 2236.

21. **Chakrabarti D., Mondal C.** Generalized parton distributions for the proton in AdS/QCD // Physical Review. D. 2013. Vol. 88. No. 7. P. 073006.

22. **Gayou O., Wijesooriya K., Afanasev A., et al.** Measurements of the elastic electromagnetic form-factor ratio $\mu_p G_{Ep}/G_{Mp}$ via polarization transfer // Physical Review. C. 2001. Vol. 64. No. 3. P. 038202.

23. **Gayou O., Aniol K.A., Averett T., et al.** Meas-

urement of $G_{Mp}/G_{Ep}$ in $\mathbf{e}p \rightarrow e\mathbf{p}$ to $Q^2 = 5.6$ GeV$^2$// Physical Review Letters. 2002. Vol. 88. No. 9. P. 092301.

24. **Arrington J., Melnitchouk W., Tjon J.A.** Global analysis of proton elastic form factor data with two-photon exchange corrections // Physical Review. C. 2007. Vol. 76. No. 3. P. 035205.

25. **Punjabi V., Perdrisat C.F., Aniol K.A., et al.** Proton elastic form-factor ratios to $Q^2 = 3.5$ GeV$^2$ by polarization transfer // Physical Review. C. 2005. Vol. 71. No. 5. P. 055202 [Erratum: Physical Review. C. 2005. Vol. 71. No. 6. P. 069902].

26. **Puckett A.J.R., Brash E.J., Jones M.K., et al.** Recoil polarization measurements of the proton electromagnetic form factor ratio $Q^2 = 8.5$ GeV$^2$ // Physical Review Letters. 2010. Vol. 104. No. 24. P. 242301.

27. **Cates G.D., de Jager C.W., Riordan S., Wojtsekhowski B.** Flavor decomposition of the elastic nucleon electromagnetic form factors // Physical Review Letters. 2011. Vol. 106. No. 25. P. 252003.

28. **Diehl M., Kroll P.** Nucleon form factors, generalized parton distributions and quark angular momentum // European Physical Journal. C. 2013. Vol. 73. No. 4. P. 2397.

29. **Altarelli G., Parisi G.** Asymptotic freedom in parton language // Nuclear Physics. B. 1977. Vol. 126. No. 2. Pp. 298–318.

30. **Broniowski W., Arriola E.R., Golec-Biernat K.** Generalized parton distributions of the pion in chiral quark models and their QCD evolution // Physical Review. D. 2008. Vol. 77. No. 3. P. 034023.

31. **Williams T., Kelley C.** gnuplot 5.4. An interactive plotting program. Version 5.4. December, 2020 // www.gnuplot.sourceforge.net. Accessed February 28, 2021.

32. **Del Debbio L., Forte S., Latorre J.I., Piccione A., J. Rojo J.** Neural network determination of parton distributions: the nonsinglet case // Journal of High Energy Physics. 2007. Vol. 2007. No. 3. P. 39.

*Статья поступила в редакцию 15.05.2021, принята к публикации 27.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**РОДРИГЕС-АГИЛАР Бенджамин** – *студент магистратуры Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
rodrigesagilar.l@edu.spbstu.ru

**БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович** – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.14209
УДК 535.3, 535-15, 535.417

# АНАЛИЗ ПОПРАВОК К ПОСТОЯННЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ИЗОГНУТОМ МНОГОМОДОВОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

**А.А. Маркварт, Л.Б. Лиокумович, Н.А. Ушаков**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Работа посвящена исследованию равномерно изогнутого слабонаправляющего оптического многомодового волокна с параболическим профилем показателя преломления. В рамках формализма малых возмущений записана формула для поправок второго порядка малости к постоянным распространения мод равномерно возмущенного диэлектрического волновода. На этой основе получено простое аналитическое выражение для поправок к постоянным распространения мод изогнутого параболического многомодового волокна. Показано, что поправки к квадратам постоянных распространения мод одинаковы для всех мод. При этом поправки к разности постоянных распространения мод в изогнутом волокне пропорциональны разности постоянных распространения мод прямолинейного волокна с коэффициентом, не зависящим от номеров мод. Результат особенно важен для анализа интерферометрических оптоволоконных датчиков на основе изгиба чувствительного волокна.

**Ключевые слова:** оптическое волокно, градиентный профиль, изогнутый волновод, метод возмущений, постоянная распространения

**Ссылка при цитировании:** Маркварт А.А., Лиокумович Л.Б., Ушаков Н.А. Анализ поправок к постоянным распространения в изогнутом многомодовом параболическом оптическом волокне // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 104–117. DOI: 10.18721/JPM.14209



# AN ANALYSIS OF CORRECTIONS TO THE PROPAGATION CONSTANTS OF A MULTIMODE PARABOLIC OPTICAL FIBER UNDER BENDING

**A.A. Markvart, L.B. Liokumovich, N.A. Ushakov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

The goal of our work was to study a circularly bent, weakly guiding, multimode optical fiber with a parabolic refractive index profile. With this in mind, the second-order corrections to propagation constants of longitudinally perturbed arbitrary dielectric waveguide's modes were found using the perturbation theory. Based on that general result, a simple analytic equation describing the corrections to the propagation constants of the modes in the bent parabolic optical fiber was derived. It was shown that the increments of squares of mode propagation constants were the same for all modes. Moreover, the increments of mode propagation constants' differences in the bent fiber were proportional to those in the straight fiber. The proportionality coefficient was independent of the mode number. The obtained results are of high importance for development of optical fiber sensors, in which fiber bending is possible.

**Keywords:** fiber, curvature, graded index, bent waveguide, perturbation analysis, propagation constant

**Citation:** Markvart A.A., Liokumovich L.B., Ushakov N.A., An analysis of corrections to the propagation constants of a multimode parabolic optical fiber under bending, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 104–117. DOI: 10.18721/JPM.14209



## Введение

В любых протяженных оптоволоконных трактах присутствуют изгибы волокна в той или иной степени. Для одних систем такие изгибы нежелательны, например в коммуникационных системах, так как они приводят к оптическим потерям. Для других, напротив, изгиб составляет основу их работы, например, в оптических модуляторах [1], мультиплексорах [2], разветвителях [3], а также может измеряться при помощи оптоволоконных датчиков. В частности, волоконно-оптические датчики позволяют на основе регистрации изгиба световода реализовывать контроль состояния зданий, сооружений и механических агрегатов [4 – 6], мониторинг состояния здоровья людей [7 – 9]; такие датчики служат для создания медицинских приборов [10], аппаратуры в робототехнике [11] и для других целей.

В связи с вышеизложенным, для проектирования подобных волоконно-оптических систем важно иметь удобный аналитический аппарат, позволяющий рассчитывать влияние изгиба волокна на параметры распространения в нем света. К настоящему времени исследователи достаточно много внимания уделяли аналитическим [12, 13] и численным [14, 15] расчетам оптических потерь в изогнутых волокнах. Однако не менее важным аспектом следует считать изменение фазовых набегов или постоянных распространения (ПР) волноводных мод оптического волокна при его изгибе. Например, это изменение играет решающую роль в интерферометрических волоконно-оптических датчиках, где интерференционный сигнал непосредственно зависит от разности постоянных распространения (РПР) интерферирующих мод [16 – 26]. Несмотря на актуальность данной проблемы для волоконно-оптических датчиков изгиба, в литературе уделено недостаточно внимания вопросу расчета добавок к ПР мод при изгибе волокна, в частности для наиболее распространенного волокна с параболическим профилем показателя преломления. В известных работах, посвященных расчетам изменений фазовых набегов или постоянных распространения волноводных мод при изгибе волокна [27 – 33], не получено простых выражений для добавок к ПР и РПР мод в параболическом волокне. В работе [34] введено общее выражение для изменений ПР мод волокна для случая равномерного возмущения волокна, полученное из системы дифференциальных уравнений связанных мод. Однако данное выражение не позволяет вывести явное аналитическое выражение для случая параболического волокна, которое было бы удобным для расчетных оценок. В Приложении 1 данной статьи приведено это выражение и его краткий анализ.

Настоящая работа нацелена на анализ постоянных распространения и их разности для случая слабонаправляющего многомодового оптического волокна с параболическим профилем показателя преломления, равномерно изогнутого по окружности.

В связи с поставленной целью работы нами была выведена сначала общая формула для расчета поправок к ПР мод диэлектрического волновода при его равномерном возмущении вдоль оси (использован метод малых возмущений), а затем на основе этой формулы был детально проанализирован случай параболического оптического волокна.

## Расчет поправок к ПР *m*-ой моды возмущенного диэлектрического волновода

Для применения метода малых возмущений к решению задачи здесь мы базируемся на подходе, который в монографии [35] использован для получения поправки первого порядка малости к ПР мод возмущенного волновода. Как будет показано ниже, поправка первого порядка малости обращается в нуль в случае равномерного изгиба волокна. Поэтому для учета влияния изгиба нами была определена поправка для ПР мод второго порядка малости.

Следуя указанному подходу, сформулируем постановку конкретной задачи. Пусть невозмущенный диэлектрический волновод имеет профиль относительной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_0(r,\varphi) = n_0^2(r,\varphi),$$

где $n_0$ – профиль показателя преломления; $r$, $\varphi$ – координаты в цилиндрической системе координат, в которой ось $z$ совпадает с осью волокна.

При введении возмущения, равномерного вдоль оси, профиль относительной диэлектрической проницаемости возмущенного волновода можно записать в виде

$$\varepsilon(r,\varphi) = \varepsilon_0(r,\varphi) + \Delta\varepsilon(r,\varphi). \quad (1)$$

Пусть невозмущенные моды имеют вид

$$\mathbf{E}'_m = \mathbf{E}_m(r,\varphi)\exp\left[i(\omega t - \beta_m z)\right], \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

где поперечные модовые функции $E_m(r, \varphi)$ удовлетворяют невозмущенному волновому уравнению

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2\varepsilon_0\right]\cdot\mathbf{E}_m(r,\varphi) = \beta_m^2\mathbf{E}_m(r,\varphi). \quad (3)$$

Здесь мы пренебрегли членом $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}'_m)$, что оправдано для линейно поляризованных мод оптического волокна [36].

Эти моды являются взаимно ортогональными и удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int \mathbf{E}_m^* \cdot \mathbf{E}_l \, dS = N_m \delta_{ml}. \quad (4)$$

Рассмотрим влияние возмущения относительной диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon(r, \varphi)$, которое мало, по сравнению с величиной $\varepsilon(r, \varphi)$. Предположим, что столь малое возмущение будет вызывать лишь небольшие изменения модовых функций и постоянных распространения.

Пусть модовые функции изменяются на величину $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$, а квадраты постоянных распространения – на $\delta\beta_m^{2\,(1)}$. В таком случае волновое уравнение принимает вид

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2\varepsilon_0 + k_0^2\Delta\varepsilon\right]\cdot\left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)}\right) = \left(\beta_m^2 + \delta\beta_m^{2\,(1)}\right)\cdot\left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)}\right). \quad (5)$$

Если пренебречь членами второго порядка малости $\Delta\varepsilon\cdot\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и $\delta\beta_m^{2\,(1)}\cdot\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и воспользоваться соотношением (3), то уравнение (5) запишется в более простом виде:

$$\left[\nabla_t^2 + k_0^2\varepsilon_0\right]\cdot\delta\mathbf{E}_m^{(1)} + k_0^2\Delta\varepsilon\cdot\mathbf{E}_m = \beta_m^2\cdot\delta\mathbf{E}_m^{(1)} + \delta\beta_m^{2\,(1)}\cdot\mathbf{E}_m. \quad (6)$$

Чтобы решить это уравнение, разложим $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ в ряд по невозмущенным модовым функциям:

$$\delta\mathbf{E}_m^{(1)} = \sum a_{ml}\mathbf{E}_l, \quad (7)$$

где $a_{ml}$ – постоянные коэффициенты.

Подставляя в уравнение (6) выражение (7) для $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и используя (3), получаем следующее соотношение:

$$\sum_l a_{ml}\left(\beta_l^2 - \beta_m^2\right)\cdot\mathbf{E}_l = \left(\delta\beta_m^{2\,(1)} - k_0^2\Delta\varepsilon\right)\cdot\mathbf{E}_m. \quad (8)$$

Если соотношение (8) скалярно умножить на комплексно-сопряженную величину $\mathbf{E}_m^*$ и интегрировать это произведение по всей поперечной плоскости, то выражение в левой части будет равно нулю в силу соотношения ортогональности (4). Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$\int \mathbf{E}_m^*\cdot\left(\delta\beta_m^{2\,(1)} - k_0^2\Delta\varepsilon\right)\cdot\mathbf{E}_m dS = 0. \quad (9)$$

Поскольку $\delta\beta_m^{2\,(1)}$ – постоянная, из выражения (9) следует, что

$$\delta\beta_m^{2\,(1)} = \frac{k_0{}^2\int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_m dS}{N_m}. \tag{10}$$

Это выражение дает поправку первого порядка к квадрату постоянной распространения $\beta_m^2$. Поскольку поправка к квадрату ПР мала, то можно записать поправку непосредственно к самим ПР [35]:

$$\delta\beta_m = \delta\beta_m^2 / 2\beta_m .$$

В результате получим следующее выражение:

$$\delta\beta_m^{(1)} = \frac{k_0^2\int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_m dS}{2\beta_m N_m}. \tag{11}$$

Для расчета коэффициентов $a_{ml}(m \neq l)$ скалярно умножим левую и правую части уравнения (8) на $\mathbf{E}_l^*$, $(m \neq l)$ и проинтегрируем по всей поперечной плоскости. Тогда можно записать следующее выражение:

$$a_{ml} = \frac{k_0^2}{\left(\beta_m^2 - \beta_l^2\right) N_l}\int \mathbf{E}_m \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS, \quad l \neq m. \tag{12}$$

Таким образом, с точностью до обозначений, мы получили выражения для поправки первого порядка к ПР и коэффициентов $a_{ml}(m \neq l)$, аналогичные приведенным в монографии [35], за исключением введенного параметра нормировки $N_m$.

Аналогичным образом выведем поправки уже второго порядка к ПР мод. Для этого рассмотрим волновое уравнение в виде

$$\begin{gathered}\left[\nabla_t^2 + k_0^2\varepsilon_0 + k_0^2\Delta\varepsilon\right]\times \\ \times\left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m{}^{(1)} + \delta\mathbf{E}_m{}^{(2)}\right) = \\ = \left(\beta_m^2 + \delta\beta_m^{2\,(1)} + \delta\beta_m^{2\,(2)}\right)\times \\ \times\left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m{}^{(1)} + \delta\mathbf{E}_m{}^{(2)}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\delta\mathbf{E}_m^{(2)}, \delta\beta_m^{2\,(2)}$ – поправки второго порядка к модовой функции и квадрату ПР соответственно.

Если использовать соотношение (3) и дальнейшие допущения, такие как пренебрежение слагаемыми третьего и четвертого порядков малости, использование (6) в качестве начального приближения, то уравнение (13) можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}\left[\nabla_t{}^2 + k_0{}^2\varepsilon_0\right]\cdot\delta\mathbf{E}_m{}^{(2)} + k_0{}^2\Delta\varepsilon\delta\mathbf{E}_m{}^{(1)} = \\ \beta_m^2\delta\mathbf{E}_m{}^{(2)} + \delta\beta_m^{2\,(1)}\delta\mathbf{E}_m{}^{(1)} + \delta\beta_m^{2\,(2)}\mathbf{E}_m.\end{gathered} \tag{14}$$

Чтобы решить это уравнение, разложим $\delta\mathbf{E}_m{}^{(2)}$ в ряд по невозмущенным модовым функциям:

$$\delta\mathbf{E}_m{}^{(2)} = \sum_l b_{ml}\mathbf{E}_l, \tag{15}$$

где $b_{ml}$ – постоянные коэффициенты.

Подставляя в уравнение (14) выражения (7) для $\delta\mathbf{E}_m{}^{(1)}$ и (15) для $\delta\mathbf{E}_m{}^{(2)}$ и используя (3), получаем следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\sum_l b_{ml}\left(\beta_l^2 - \beta_m^2\right)\cdot\mathbf{E}_l + \\ + k_0^2\Delta\varepsilon\sum_l a_{ml}\mathbf{E}_l = \\ = \delta\beta_m^{2\,(1)}\sum_l a_{ml}\mathbf{E}_l + \delta\beta_m^{2\,(2)}\cdot\mathbf{E}_m.\end{gathered} \tag{16}$$

Если данное соотношение скалярно умножить на $\mathbf{E}_m^*$ и интегрировать по всей поперечной плоскости, то первое слагаемое в левой части и все члены суммы, за исключением члена с $l = m$, будут равны нулю в силу соотношения ортогональности (4).

Если также использовать выражение (10), то можно записать следующее соотношение:

$$\begin{gathered}k_0^2\sum_l a_{ml}\int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_l dS = \\ = k_0^2 a_{mm}\int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_m dS + \\ + \delta\beta_m^{2\,(2)}N_m.\end{gathered} \tag{17}$$

Далее, если учитывать, что первое слагаемое в правой части данного выражения взаимно уничтожается с членом суммирования $l = m$ в левой его части, и использовать выражение (12), то поправку второго порядка к квадрату ПР $m$-ой моды при возмущении волновода, равномерном вдоль оси, можно записать в следующем виде:

$$\delta\beta_m^{2\,(2)} = \sum_{l \neq m} \left(\beta_l^2 - \beta_m^2\right) a_{ml} a_{lm}, \qquad (18)$$

или

$$\delta\beta_m^{2\,(2)} = \sum_{l \neq m} \frac{k_0^4}{\left(\beta_m^2 - \beta_l^2\right) N_m N_l} \times \\ \times \left| \int \mathbf{E}_m \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS \right|^2. \qquad (19)$$

С учетом того, что $\delta\beta_m^{2\,(2)}$ – это поправка к квадрату ПР, а поправка непосредственно к ПР – это

$$\delta\beta_m^{(2)} = \delta\beta_m^{2\,(2)} \big/ 2\beta_m,$$

получаем следующее выражение:

$$\delta\beta_m^{(2)} = \sum_{l \neq m} \frac{k_0^4}{2\beta_m \left(\beta_m^2 - \beta_l^2\right) N_m N_l} \times \\ \times \left| \int \mathbf{E}_m \cdot \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS \right|^2. \qquad (20)$$

Выражения (19) и (20) представляют собой искомые выражения для поправки второго порядка к ПР моды оптического волокна.

Отметим, что выражения (19) и (20) верны для любых диэлектрических волноводов, для которых при выводе волнового уравнения можно пренебречь членом $\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{E}'_m\right)$.

В Приложении 2 данной статьи проведено сравнение формулы (20) с формулой, полученной при помощи подхода, использованного в статье [34].

### Случай равномерного изгиба оптического волокна с параболическим профилем показателя преломления

Выражения (11) и (20) описывают общий вид поправок к ПР мод при возмущении диэлектрического волновода. Конкретизируем их для случая равномерно изогнутого параболического волокна.

Профиль относительной диэлектрической проницаемости параболического оптического волокна описывается следующим выражением:

$$\varepsilon(r) = n^2(r) = \\ = n_1^2 \begin{cases} 1 - 2\Delta \cdot \left(r^2 / a^2\right), & r < a, \\ 1 - 2\Delta, & r > a, \end{cases} \qquad (21)$$

где $a$ – радиус сердцевины; $n_1$ – максимальное значение показателя преломления в поперечном сечении; $\Delta$ – относительная разность показателей преломления,

$$\Delta = \left(n_1^2 - n_2^2\right) \big/ 2n_1^2$$

($n_2$ – показатель преломления в области оболочки).

В модели слабонаправляющего волокна с неограниченным параболическим профилем собственные моды описываются в виде линейно поляризованных $LP_{lp}$-мод [37]. Скалярная компонента моды имеет вид

$$E'_{lp} = E_{lp}(r, \varphi) \exp\left[ j\left(\omega t - \beta_{lp} z\right)\right], \qquad (22)$$

где $E_{lp}(r, \varphi)$ – скалярные поперечные модовые функции, $l$ – азимутальный порядок моды, индекс $p$ – радиальный порядок моды.

Поперечные модовые функции задаются следующими выражениями:

$$E_{lp}(r, \varphi) = \Psi(r) \cdot \begin{pmatrix} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$\Psi(r) = \left(\sqrt{2}\,\frac{r}{w}\right)^l L_q^{(l)}\left(2\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{w^2}\right]. \qquad (24)$$

Здесь $L_q^{(l)}$ представляют собой обобщенные полиномы Лагерра порядка $l$ и степени $q$ ($q = p - 1$); они имеют вид

$$L_q^{(l)}(u)=\sum_{\nu=0}^{q}\binom{q+l}{q-\nu}\frac{(-u)^{\nu}}{\nu!}. \qquad (25)$$

Параметр $w$ показывает границы существования поля в радиальном направлении и определяется следующим выражением:

$$w=\sqrt{\frac{2a}{n_1k_0\sqrt{2\cdot\Delta}}}. \qquad (26)$$

Постоянная $\beta_{lp}$ распространения $LP_{lp}$-моды, с учетом выражения (26) и данных монографии [37], определяется выражением

$$\beta_{lp}=n_1k_0\sqrt{1-\frac{4}{w^2}(2p+l-1)}. \qquad (27)$$

Для расчета поправок к ПР $LP_{lp}$-моды воспользуемся нормализованными модовыми функциями:

$$E_{lpN}=\frac{E_{lp}}{\sqrt{\int E_{lp}E_{lp}dS}}. \qquad (28)$$

В этом случае параметр нормировки $N_{lp}$, введенный в условие (4), равен единице. Тогда соотношения (10), (11), (19) и (20) можно переписать в следующем виде:

$$\delta\beta_{lp}^{2\,(1)}=k_0^2\int E_{lpN}\cdot\Delta\varepsilon\cdot E_{\eta\mu N}dS, \qquad (29)$$

$$\delta\beta_{lp}^{(1)}=\frac{k_0^2}{2\beta_{lp}}\int E_{lpN}\cdot\Delta\varepsilon\cdot E_{\eta\mu N}dS, \qquad (30)$$

$$\delta\beta_{lp}^{2\,(2)}=\sum_{lp\neq\eta\mu}\frac{k_0^4}{\left(\beta_{lp}^2-\beta_{\eta\mu}^2\right)}\times \times\left(\int E_{lpN}\cdot\Delta\varepsilon\cdot E_{\eta\mu N}dS\right)^2, \qquad (31)$$

$$\delta\beta_{lp}^{(2)}=\sum_{lp\neq\eta\mu}\frac{k_0^4}{2\beta_{lp}\left(\beta_{lp}^2-\beta_{\eta\mu}^2\right)}\times \times\left(\int E_{lpN}\cdot\Delta\varepsilon\cdot E_{\eta\mu N}dS\right)^2. \qquad (32)$$

Для анализа изгиба волокна с радиусом $R$ (см. рисунок) можно применить следующий распространенный подход [37]: введем вместо равномерно изогнутого по окружности волокна эквивалентное прямолинейное волокно, имеющее профиль относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r,\varphi)$ вида (1). В данном случае $\varepsilon_0(r,\varphi)$ – профиль относительной диэлектрической проницаемости неизогнутого прямолинейного волокна, а возмущение $\Delta\varepsilon(r,\varphi)$ описывается выражением

$$\Delta\varepsilon=\frac{2n_1^2r\cos\varphi}{R}. \qquad (33)$$

В этом случае распределения поперечных полей в изогнутом и эквивалентном прямолинейном волокнах будут одинаковыми [37].

В рамках модели эквивалентного прямолинейного волокна поправку первого порядка к ПР $LP_{lp}$-моды изогнутого волокна можно получить, подставив выражение (33) в выражение (30). Однако несложно убедиться, что она равна нулю ввиду антисимметричного характера возмущения. Поэтому для случая изгиба нельзя ограничиваться только первой поправкой.

Подставив выражение (33) в выражение (31), получим поправку второго порядка к квадрату ПР $LP_{lp}$-моды:

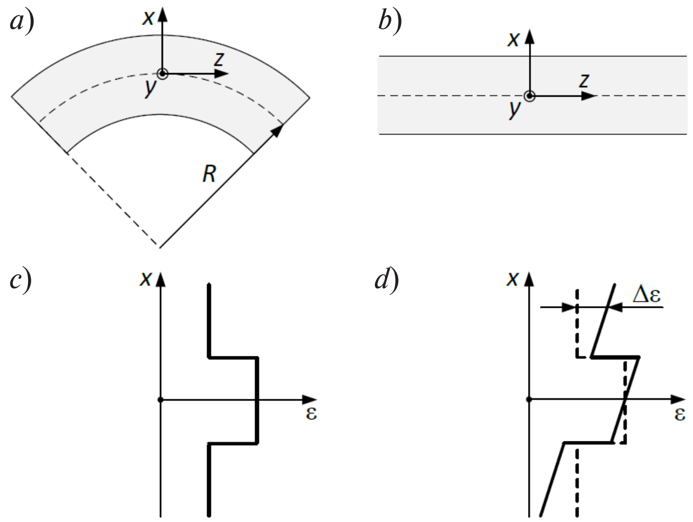
$$\delta\beta_{lp}^{2\,(2)}=\sum_{lp\neq\eta\mu}\frac{4k_0^4n_1^4}{\left(\beta_{lp}^2-\beta_{\eta\mu}^2\right)R^2}I_{lp,\eta\mu}^2; \qquad (34)$$

здесь мы ввели следующее обозначение интеграла, характеризующего связь моды $LP_{lp}$ с модой $LP_{\eta\mu}$:

$$I_{lp,\eta\mu}=\int\int E_{lpN}\cdot r^2\cos\varphi\cdot E_{\eta\mu N}drd\varphi. \qquad (35)$$

Данный интеграл можно вычислить в явном виде для всех комбинаций $LP_{lp}$-мод [37]. При этом ненулевыми будут следующие интегралы (35):

1. Интеграл, характеризующий связь $LP_{lp}$-моды с $LP_{l+1,p}$-модой, т. е.




Схематические изображения для анализа изгиба с радиусом $R$ волокна: $a$, $b$ – искривленное волокно и эквивалентное ему прямолинейное; $c$, $d$ – профили относительной диэлектрической проницаемости для волокон $a$ и $b$ соответственно

$$I_{lp,(l+1)p} = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{p+l}{\sigma_l}}; \tag{36}$$

2. Интеграл, характеризующий связь $LP_{lp}$-моды с $LP_{l-1,p+1}$-модой, т. е.

$$I_{lp,(l-1)(p+1)} = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{p}{\sigma_{l-1}}}; \tag{37}$$

3. Интеграл, характеризующий связь $LP_{lp}$-моды с $LP_{l-1,p}$-модой, т. е.

$$I_{lp,(l-1)p} = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{p+l-1}{\sigma_{l-1}}}; \tag{38}$$

4. Интеграл, характеризующий связь $LP_{lp}$-моды с $LP_{l+1,p-1}$-модой, т. е.

$$I_{lp,(l+1)(p-1)} = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{p-1}{\sigma_l}}, \tag{39}$$

при этом $\sigma_l = 1$, если $l = 0$, и $\sigma_l = 2$, если $l \neq 0$.

Остальные моды оказались не связанными с $LP_{lp}$-модой. Отметим, что все связанные моды отличаются на единицу по своему составному модовому числу $m = 2p + l - 1$.

Таким образом, модуль разности квадратов ПР связанных мод не зависит от значений $l$ и $p$ и следует выражению

$$\left|\beta_{lp}^2 - \beta_{\eta\mu}^2\right| = \frac{4}{w^2}. \tag{40}$$

Поэтому множитель перед интегралом в выражении (34) можно упростить и вынести за знак суммы (с учетом знаков плюс или минус). Тогда выражение (34) можно переписать в следующем виде:

$$\delta\beta_{lp}^{2\,(2)} = \frac{k_0^4 n_1^4 w^2}{R^2} \times \left(I_{lp,(l+1)p}^2 + I_{lp,(l-1)(p+1)}^2 - I_{lp,(l-1)p}^2 - I_{lp,(l+1)(p-1)}^2\right). \tag{41}$$

Путем перебора всех возможных комбинаций индексов $l$ и $p$ легко показать, что выражение в скобке соотношения (41) равно $w^2/4$ независимо от значений индексов и ориентации модовой функции $LP_{lp}$ ($\cos(l\varphi)$ или $\sin(l\varphi)$).

Таким образом, искомое приращение квадрата постоянной распространения $LP_{lp}$-моды в параболическом оптическом волокне принимает относительно простой вид:

$$\delta\beta_{lp}^2 = \delta\beta_{lp}^{2\,(2)} = \frac{k_0^4 n_1^4 w^4}{4R^2} = \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{2\Delta \cdot R^2} \tag{42}$$

и, что важно, не зависит от номера моды.

Приращение непосредственно ПР $\delta\beta_{lp} = \delta\beta_{lp}^2 / 2\beta_{lp}$ запишется в виде

$$\delta\beta_{lp} = \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{4\beta_{lp} \cdot \Delta \cdot R^2}. \qquad (43)$$

Теперь можно перейти к расчету разности

$$\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b = \beta_{lp}^b - \beta_{\eta\mu}^b$$

– разности постоянных распространения мод при изгибе волокна, которая важна при расчете интерферометрических датчиков:

$$\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b = \\ = \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s - \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{4 \cdot \Delta \cdot \beta_{lp}^s \beta_{\eta\mu}^s R^2} \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s, \qquad (44)$$

где $\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b$, $\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s$ – РПР мод изогнутого и прямолинейного волокон, соответственно.

Полученное выражение можно упростить, принимая во внимание, что $\beta_{lp}^s \beta_{\eta\mu}^s \approx k_0^2 n_1^2$ :

$$\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b = \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s \left(1 - \frac{a^2}{4\Delta \cdot R^2}\right). \qquad (45)$$

Таким образом, изменение РПР мод в изогнутом параболическом оптическом волокне пропорционально РПР мод прямолинейного волокна $\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s$ с коэффициентом пропорциональности $a^2/(4\Delta)$, не зависящим от номеров мод. Чтобы оценивать эффективность работы оптоволоконных датчиков, регистрирующих изгиб, важно иметь оценку чувствительности изменения РПР мод к обратному квадрату радиуса изгиба, которая, согласно выражению (45), имеет вид

$$\frac{\partial\left(\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b\right)}{\partial\left(\dfrac{1}{R^2}\right)} = \frac{a^2}{4\Delta} \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s. \qquad (46)$$

Следует иметь в виду, что как теоретические формулы для модовых функций и ПР мод параболического волокна (22) – (27), так и выведенные нами формулы для поправок к ПР и РПР мод (42) – (46), были получены в приближении неограниченного параболического профиля показателя преломления волокна. Поэтому, строго говоря, их нельзя использовать для описания поведения мод, близких к отсечке, поле которых начинает существенно выходить за пределы сердцевины волокна.

При использовании полученных выражений для анализа реальных волокон необходимо учитывать упругооптический эффект при записи выражения (33) для возмущенного профиля относительной диэлектрической проницаемости. Для приближенного учета этого эффекта можно воспользоваться следующим подходом: заменить реальный радиус кривизны изгиба эффективным, например, для стеклянного волокна $R_{eff}$ = 1,27 R [30].

**Заключение**

В данной работе для анализа влияния изгиба параболического многомодового волокна на постоянные распространения мод и их разности получены аналитические выражения для поправок второго порядка малости с использованием метода малых возмущений. Показано, что приращения к квадратам постоянных распространения мод одинаковы для всех мод. Также показано, что изменение разности постоянных распространения мод в изогнутом волокне пропорционально разности постоянных распространения мод неизогнутого волокна с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от номеров мод. При этом величина изменений определяется соотношением между радиусом сердцевины волокна и относительной разностью показателей преломления сердцевины и оболочки. Полученный результат важен при разработке интерферометрических волоконно-оптических датчиков с регистрацией изгиба волокна, а также при анализе фазовых эффектов в волоконно-оптических системах с многомодовыми световодами. При этом выведенное обобщенное выражение для поправки второго порядка малости к постоянной распространения мод (20) может представлять интерес не только для анализа оптических волокон, но и для анализа произвольных диэлектрических волноводов с равномерным возмущением.

*Приложение 1*

**Известная оценка добавки к ПР *m*-ой моды оптического волокна с параболическим профилем при его равномерном возмущении**

В работе [34] анализируется влияние изгиба волокна на ПР мод волокна, но, ввиду того факта, что в методе возмущений поправка первого порядка обращается в нуль, авторы предложили использовать не метод возмущений, а основываться на более специфическом подходе анализа системы дифференциальных уравнений связанных мод.

В результате авторы статьи [34] получили следующую оценку к приращению ПР:

$$\delta\beta_m = -\sum_l \frac{\kappa_{ml}\kappa_{lm}}{\beta_m - \beta_l}, \qquad (\text{П}1)$$

где $\delta\beta_m$ – добавка к ПР $m$-ой моды, вызванная возмущением волокна, приводящим к связи мод; $\beta_m$ – ПР $m$-ой моды без возмущения; $\kappa_{mn}$ – коэффициент связи $m$-ой и $n$-ой мод.

Выражение для коэффициентов связи можно найти, например, в книгах [36, 37]:

$$\kappa_{ml} = \frac{k_0^2}{2\beta_m}\iint E_{mN}(r,\varphi)\cdot\Delta\varepsilon(r,\varphi)\times \\ \times E_{lN}(r,\varphi)\cdot rdrd\varphi, \qquad (\text{П}2)$$

где $k_0$ – волновое число; $\Delta\varepsilon(r, \varphi)$ – возмущение профиля относительной диэлектрической проницаемости волокна под действием, в частности, изгиба; $E_{mN}(r, \varphi)$ – нормализованная модовая функция; $r$, $\varphi$ – координаты в цилиндрической системе координат, в которой ось $z$ совпадает с осью волокна. При этом модовые функции удовлетворяют условию нормировки:

$$\iint E_{mN}^2 rdrd\varphi = 1. \qquad (\text{П}3)$$

Если подставить выражение (П2) в (П1), то можно получить оценку для приращения ПР мод:

$$\delta\beta_m = \sum_{l\neq m} \frac{k_0^4}{4\beta_m\beta_l(\beta_m-\beta_l)}\times \\ \times\left(\iint E_{mN}\cdot\Delta\varepsilon\cdot E_{lN} rdrd\varphi\right)^2. \qquad (\text{П}4)$$

В случае оптического параболического волокна в формализме $LP_{lp}$, ПР мод можно найти при помощи выражения (27). Для указанного волокна интегралы в оценке (П4) также известны (см. формулы (35) – (39)). Однако выражение, полученное на основе (П4), все равно остается громоздким, что затрудняет анализ физического смысла.

*Приложение 2*

**Сравнение выражений для приращения ПР при изгибе волокна**

Сравним полученное нами выражение (20) с выражением (П4). Обратим внимание, что оценка (20) отличается от оценки (П4) знаменателем множителя перед интегралом. Знаменатель в выражении (20) можно расписать в следующем виде:

$$2\beta_m\left(\beta_m^2-\beta_l^2\right) = 2\beta_m\left(\beta_m+\beta_l\right)\left(\beta_m-\beta_l\right).$$

Для слабонаправляющего оптического волокна, при устремлении относительной разности показателей преломления к нулю, $\beta_m \approx \beta_l$, поэтому справедливо соотношение

$$2\beta_m\left(\beta_m+\beta_l\right)\left(\beta_m-\beta_l\right) \approx 4\beta_m\beta_l\left(\beta_m-\beta_l\right)$$

и формулы асимптотически сходятся.

Однако формула (20) представляется более целесообразной для использования по трем причинам:

во-первых, она получена на основе общепринятого для подобного анализа метода малых возмущений с простыми и понятными приближениями, в то время как ряд приближений, сделанных в работе [34], не позволяет четко судить о порядке малости поправки к

ПР и условиях применимости полученной оценки;

во-вторых, из формулы (20) мы получили простое и удобное выражение для приращений ПР при изгибе параболического волокна, в то время как выражение (П4) представляет собой сложную сумму с необходимостью записи ПР для всех мод, связанных с рассчитываемой;

в-третьих, полученное нами выражение позволило сделать важные физические выводы о приращения ПР мод при изгибе (они указаны в заключении), а на основе выражения (П4) сделать подобные выводы затруднительно.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-27001.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Bösch M., Liakatas I., Jäger M., Bosshard Ch., Günter P.** Polymer based electro-optic inline fiber modulator // Ferroelectrics. 1999. Vol. 223. No. 1. Pp. 405–412.

2. **Diemeer J., Spiekman L.H., Ramsamoedj R., Smit M.K.** Polymeric phased array wavelength multiplexer operating around 1550 nm // Electronics Letters. 1996. Vol. 32. No. 12. Pp. 1132–1133.

3. **Li X.-Y., Sun B., Yu Y.-Y., He K.-P.** Bending dual-core photonic crystal fiber coupler // Optik (Stuttgart). 2014. Vol. 125. No. 21. Pp. 6478–6482.

4. **Inaudi D., Vurpillot S., Casanova N., Kronenberg P.** Structural monitoring by curvature analysis using interferometric fiber optic sensors // Smart Materials and Structures. 1998. Vol. 7. No. 2. Pp. 199–208.

5. **Liu M.Y., Zhou Sh.-G., Song H., Zhou W.-J., Zhang X.** A novel fibre Bragg grating curvature sensor for structure deformation monitoring // Metrology and Measurement Systems. 2018. Vol. 25. No. 3. Pp. 577–587.

6. **Zhi G., Di H.** Wind speed monitoring system based on optical fiber curvature sensor // Optical Fiber Technology. 2021. Vol. 62. March. P. 102467.

7. **Ushakov N., Markvart A., Kulik D., Liokumovich L.** Comparison of pulse wave signal monitoring techniques with different fiber-optic interferometric sensing elements // Photonics. 2021. Vol. 8. No. 5. P. 142.

8. **Li X., Liu D., Kumar R., Ng W.P., Fu Y.-q., Yuan J., Yu Ch.** A simple optical fiber interferometer based breathing sensor // Measurement Science and Technology. 2017. Vol. 28. No. 3. P. 035105.

9. **Irawati N., Hatta A.M., Yhuwana Y.G.Y., Sekartedjo.** Heart rate monitoring sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber // Photonic Sensors. 2020. Vol. 10. No. 2. Pp. 186–193.

10. **Novais S., Silva S.O., Frazão O.** Curvature detection in a medical needle using a Fabry-Perot cavity as an intensity sensor // Measurement. 2020. Vol. 151. February. P. 107160.

11. **He Y., Zhang X., Zhu L., Sun G., Lou X., Dong M.** Curvature and force measurement of soft manipulator based on stretchable helical optic fibre // Optical Fiber Technology. 2019. Vol. 53. December. P. 102010.

12. **Savović S., Djordjevich A., Savović I.** Theoretical investigation of bending loss in step-index plastic optical fibers // Optics Communications. 2020. Vol. 475. 15 November. P. 126200.

13. **Marcuse D.** Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers // Journal of the Optical Society of America. 1976. Vol. 66. No. 4. Pp. 311–320.

14. **Schermer R., Cole M.** Improved bend loss formula verified for optical fiber by simulation and experiment // IEEE Journal of Quantum Electronics. 2007. Vol. 43. No. 10. Pp. 899–909.

15. **Velamuri A.V., Patel K., Sharma I., Gupta S.S, Gaikwad S., Krishnamurthy P.K.** Investigation of planar and helical bend losses in single- and few-mode optical fibers // Journal of Lightwave Technology. 2019. Vol. 37. No. 14. Pp. 3544–3556.

16. **Silva S., Frazão O., Viegas J., Ferreira L.A., Araújo F.M., Malcata F.X., Santos J.L.** Temperature and strain-independent curvature sensor based on a singlemode/multimode fiber optic structure // Measurement Science and Technology. 2011. Vol. 22. No. 8. P. 085201.

17. **Wu Q., Semenova Y., Wang P., Hatta A.M.,**

**Farrell G.** Experimental demonstration of a simple displacement sensor based on a bent single-mode-multimode-single-mode fiber structure // Measurement Science and Technology. 2011. Vol. 22. No. 2. P. 025203.

18. **Yang B., Niu Y., Yang B., Hu Y., Dai L., Yin Y., Ding M.** High sensitivity curvature sensor with intensity demodulation based on single-mode-tapered multimode-single-mode fiber // IEEE Sensors Journal. 2018. Vol. 18. No. 3. Pp. 1094–1099.

19. **Su J., Dong X., Lu C.** Property of bent few-mode fiber and its application in displacement sensor // IEEE Photonics Technology Letters. 2016. Vol. 28. No. 13. Pp. 1387–1390.

20. **Ivanov O.V.** Mode interaction in a structure based on optical fiber with depressed inner cladding // Journal of Communications Technology and Electronics. 2018. Vol. 63. No. 10. Pp. 1143–1151.

21. **Chen J., Lu P., Liu D., Zhang J., Wang Sh., Chen D.** Optical fiber curvature sensor based on few mode fiber // Optik (Stuttgart). 2014. Vol. 125. No. 17. Pp. 4776–4778.

22. **Dong S., Pu S., Huang J.** Highly sensitive curvature sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber structures // Journal of Optoelectronics and Advanced Materials. 2014. Vol. 16. No. 11–12. Pp. 1247–1251.

23. **Gong Y., Zhao T., Rao Y.-J., Wu Y.** All-fiber curvature sensor based on multimode interference // IEEE Photonics Technology Letters. 2011. Vol. 23. No. 11. Pp. 679–681.

24. **Tian K., Xin Y., Yang W., Geng T., Ren J., Fan Y.-X., Farrell G., Lewis E., Wang P.** A curvature sensor based on twisted single-mode-multimode-single-mode hybrid optical fiber structure // Journal of Lightwave Technology. 2017. Vol. 35. No. 9. Pp. 1725–1731.

25. **Petrov A.V., Chapalo I.E., Bisyarin M.A., Kotov O.I.** Intermodal fiber interferometer with frequency scanning laser for sensor application // Applied Optics. 2020. Vol. 59. No. 33. Pp. 10422–10431.

26. **Косарева Л.И., Котов О.И., Лиокумович Л.Б., Марков С.И., Медведев А.В., Николаев В.М.** Два механизма модуляции фазы в многомодовых волоконных интерферометрах // Письма в Журнал технической физики. 2000. Т. 26. № 2. С. 53–58.

27. **Oksanen M.I.** Perturbational analysis of curved anisotropic optical fibers // Journal of the Optical Society of America. A. 1989. Vol. 6. No. 2. Pp. 180–189.

28. **Shemirani M.B., Mao W., Panicker R.A., Kahn J.M.** Errata to “Principal modes in graded-index multimode fiber in presence of spatial- and polarization-mode coupling” // Journal of Lightwave Technology. 2011. Vol. 29. No. 12. Pp. 1900–1900.

29. **Garth S.J.** Modes and propagation constants on bent depressed inner cladding optical fibers // Journal of Lightwave Technology. 1989. Vol. 7. No. 12. Pp. 1889–1894.

30. **Schermer R.T.** Mode scalability in bent optical fibers // Optics Express. 2007. Vol. 15. No. 24. Pp. 15674–15701.

31. **Garth S.J.** Modes on a bent optical waveguide // IEEE Proceedings Journal: Optoelectronics. 1987. Vol. 134. No. 4. Pp. 221–229.

32. **Kumar A., Goyal I.C., Ghatak A.K.** Effect of curvature on dispersion in multimode parabolic index fibres // Optica Acta: International Journal of Optics. 1975. Vol. 22. No. 11. Pp. 947–953.

33. **Malik D.P.S., Gupta A., Ghatak A.K.** Propagation of a Gaussian beam through a circularly curved selfoc fiber // Applied Optics. 1973. Vol. 12. No. 12. Pp. 2923–2926.

34. **Taylor H.** Bending effects in optical fibers // Journal of Lightwave Technology. 1984. Vol. 2. No. 5. Pp. 617–628.

35. **Yariv A., Yeh P.** Optical waves in crystals. New York: Willey, 1984. 589 p.

36. **Yariv A., Yeh P.** Photonics: optical electronics in modern communications. New York: Oxford University Press, 2007. 849 p.

37. **Unger H.-G.** Planar optical waveguides and fibres. Oxford: Clarendon Press Oxford, 1977. 751 p.

*Статья поступила в редакцию 14.05.2021, принята к публикации 18.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**МАРКВАРТ Александр Александрович** – *ассистент Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

markvart_aa@spbstu.ru

**ЛИОКУМОВИЧ Леонид Борисович** – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

leonid@spbstu.ru

**УШАКОВ Николай Александрович** – *научный сотрудник Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

n.ushakoff@spbstu.ru

## REFERENCES

1. **Bösch M., Liakatas I., Jäger M., et al.,** Polymer based electro-optic inline fiber modulator, Ferroelectrics. 223 (1) (1999) 405–412.

2. **Diemeer J., Spiekman L.H., Ramsamoedj R., Smit M.K.,** Polymeric phased array wavelength multiplexer operating around 1550 nm, Electron. Lett. 32 (12) (1996) 1132–1133.

3. **Li X.-Y., Sun B., Yu Y.-Y., He K.-P.,** Bending dual-core photonic crystal fiber coupler, Optik (Stuttg.). 125 (21) (2014) 6478–6482.

4. **Inaudi D., Vurpillot S., Casanova N., Kronenberg P.,** Structural monitoring by curvature analysis using interferometric fiber optic sensors, Smart Mater. Struct. 7 (2) (1998) 199–208.

5. **Liu M.Y., Zhou Sh.-G., Song H., et al.,** A novel fibre Bragg grating curvature sensor for structure deformation monitoring, Metrol. Meas. Syst. 25 (3) (2018) 577–587.

6. **Zhi G., Di H.,** Wind speed monitoring system based on optical fiber curvature sensor, Opt. Fiber Technol. 62 (March) (2021) 102467.

7. **Ushakov N., Markvart A., Kulik D., Liokumovich L.,** Comparison of pulse wave signal monitoring techniques with different fiber-optic interferometric sensing elements, Photonics. 8 (5) (2021) 142.

8. **Li X., Liu D., Kumar R., et al.,** A simple optical fiber interferometer based breathing sensor, Meas. Sci. Technol. 28 (3) (2017) 035105.

9. **Irawati N., Hatta A.M., Yhuwana Y.G.Y.,** Sekartedjo, Heart rate monitoring sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber, Photonic Sensors. 10 (2) (2020) 186–193.

10. **Novais S., Silva S.O., Frazão O.,** Curvature detection in a medical needle using a Fabry-Perot cavity as an intensity sensor, Measurement. 151 (February) (2020). 107160.

11. **He Y., Zhang X., Zhu L., et al.,** Curvature and force measurement of soft manipulator based on stretchable helical optic fibre, Opt. Fiber Technol. 53 (December) (2019) 102010.

12. **Savović S., Djordjevich A., Savović I.,** Theoretical investigation of bending loss in step-index plastic optical fibers, Opt. Commun. 475 (15 November) (2020) 126200.

13. **Marcuse D.,** Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers, J. Opt. Soc. Am. 66 (4) (1976) 311–320.

14. **Schermer R., Cole M.,** Improved bend loss formula verified for optical fiber by simulation and experiment, IEEE J. Quant. Electron. 43 (10) (2007) 899–909.

15. **Velamuri A.V., Patel K., Sharma I., et al.,** Investigation of planar and helical bend losses in single- and few-mode optical fibers, J. Light. Technol. 37 (14) (2019) 3544–3556.

16. **Silva S., Frazão O., Viegas J., et al.,** Temperature and strain-independent curvature sensor based on a singlemode/multimode fiber optic structure, Meas. Sci. Technol. 22 (8) (2011) 085201.

17. **Wu Q., Semenova Y., Wang P., et al.,** Experimental demonstration of a simple displacement sensor based on a bent single-mode-multimode-single-mode fiber structure, Meas. Sci. Technol. 22 (2) (2011) 025203.

18. **Yang B., Niu Y., Yang B., et al.,** High sensitivity curvature sensor with intensity demodulation based on single-mode-tapered multimode-single-mode fiber, IEEE Sens. J. 18 (3) (2018) 1094–1099.

19. **Su J., Dong X., Lu C.,** Property of bent few-mode fiber and its application in displacement sensor, IEEE Photonics Technol. Lett. 28 (13) (2016) 1387–1390.

20. **Ivanov O.V.,** Mode interaction in a structure based on optical fiber with depressed inner cladding, J. Commun. Technol. Electron. 63 (10) (2018) 1143–1151.

21. **Chen J., Lu P., Liu D., et al.,** Optical fiber curvature sensor based on few mode fiber, Optik (Stuttg.). 125 (17) (2014) 4776–4778.

22. **Dong S., Pu S., Huang J.,** Highly sensitive curvature sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber structures, J. Optoelectron. Adv. Mater. 16 (11–12) (2014) 1247–1251.

23. **Gong Y., Zhao T.,  Rao Y.-J. Wu Y.,** All-fiber curvature sensor based on multimode interference, IEEE Photonics Technol. Lett. 23 (11) (2011) 679–681.

24. **Tian K., Xin Y., Yang W., et al.,** A curvature sensor based on twisted single-mode-multimode-single-mode hybrid optical fiber structure, J. Light. Technol. 35 (9) (2017) 1725–1731.

25. **Petrov A.V., Chapalo I.E., Bisyarin M.A., Kotov O.I.,** Intermodal fiber interferometer with frequency scanning laser for sensor application, Applied Optics. 59 (33) (2020) 10422–10431.

26. **Kosareva L.I., Kotov O.I., Liokumovich L.B., et al.,** Two mechanisms of phase modulation in multimode fiber-optic interferometers, Tech. Phys. Lett. 26 (1) (2000) 70–74.

27. **Oksanen M.I.,** Perturbational analysis of curved anisotropic optical fibers, J. Opt. Soc. Am. A. 6 (2) (1989) 180–189.

28. **Shemirani M.B., Mao W., Panicker R.A., Kahn J.M.,** Errata to “Principal modes in graded-index multimode fiber in presence of spatial- and polarization-mode coupling”, J. Light. Technol. 29 (12) (2011) 1900–1900.

29. **Garth S.J.,** Modes and propagation constants on bent depressed inner cladding optical fibers, J. Light. Technol. 7 (12) (1989) 1889–1894.

30. **Schermer R.T.,** Mode scalability in bent optical fibers, Opt. Express. 15 (24) (2007) 15674–15701.

31. **Garth S.J.,** Modes on a bent optical waveguide, IEEE Proc. J.: Optoelectronics. 134 (4) (1987) 221–229.

32. **Kumar A., Goyal I.C., Ghatak A.K.,** Effect of curvature on dispersion in multimode parabolic index fibres, Opt. Acta: Internat. J. Opt. 22 (11) (1975) 947–953.

33. **Malik D.P.S., Gupta A., Ghatak A.K.,** Propagation of a Gaussian beam through a circularly curved selfoc fiber, Appl. Opt. 12 (12) (1973) 2923–2926.

34. **Taylor H.,** Bending effects in optical fibers, J. Light. Technol. 2 (5) (1984) 617–628.

35. **Yariv A., Yeh P.,** Optical waves in crystals. Willey, New York, 1984.

36. **Yariv A., Yeh P.,** Photonics: optical electronics in modern communications. Oxford University Press, New York, 2007.

37. **Unger H.-G.,** Planar optical waveguides and fibres. Clarendon Press, Oxford, 1977.

*Received 14.05.2021, accepted 18.05.2021.*

## THE AUTHORS

**MARKVART Aleksandr A.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
markvart_aa@spbstu.ru

**LIOKUMOVICH Leonid B.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
leonid@spbstu.ru

**USHAKOV Nikolai A.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
n.ushakoff@spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.14210
УДК 530.12:517.988.38(075.8)

# О СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ И МАССЕ ВСЕЛЕННОЙ

**Н.Н. Горобей**[1], **А.С. Лукьяненко**[1], **А.В. Гольцев**[2]

[1] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для случая замкнутой Вселенной предложена модификация квантовой теории гравитации, в которой динамика сводится к движению по орбите групп общей ковариантности. Чтобы связать с наблюдениями параметры этого движения, а именно собственное время и пространственные сдвиги, в качестве дополнительных условий в квантовую теорию вводятся классические уравнения движения указанных параметров. Эти уравнения отражают дифференциальные законы сохранения дополнительных динамических переменных, которые в представлении Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) образуют пространственную плотность распределения и движения собственной массы Вселенной. Определены средние значения параметров собственного времени и пространственных сдвигов в истории эволюции Вселенной. Инвариантное определение собственной массы (спектра масс) сформулировано в операторном каноническом представлении теории гравитации, которое также вводится вместо представления АДМ.

**Ключевые слова:** Вселенная, собственное время, собственная масса, квантование, Эрмитов оператор, спинор Дирака

**Ссылка при цитировании:** Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С., Гольцев А.В. О собственном времени и массе Вселенной // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 118–129. DOI: 10.18721/JPM.14210



# ABOUT THE PROPER TIME AND THE MASS OF THE UNIVERSE

**N.N. Gorobey**[1], **A.S. Lukyanenko**[1], **A.V. Goltsev**[2]

[1] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

[2] Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

For a closed universe, a modification of the quantum gravity where the dynamics is reduced to the motion in the orbit of a general covariance groups has been proposed. To connect these motion parameters, namely, proper time and spatial shifts, to observations, classical equations of motion were introduced into the quantum theory as additional conditions. The equations account for differential conservation laws for additional dynamical variables, which form the spatial density of distribution and motion of the universe's proper mass in the representation of Arnovitt, Deser and Misner (ADM). This made it possible to determine the average values of the parameters of proper time and spatial shifts in the evolutionary history of the universe. In order to preserve the homogeneity and isotropy of space, the proper mass of the universe should next be set equal to zero. Nonzero values of its proper mass (mass spectrum) were allowed in the operator canonical representation of the quantum gravity, which was also introduced instead of the ADM representation.

**Keywords:** universe, proper time, proper mass, quantization, Hermitian operator, Dirac spinor

**Citation:** Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V., About the proper time and the mass of the universe, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 118–129. DOI: 10.18721/JPM.14210



## Введение

Основой квантовой теории гравитации для случая замкнутой Вселенной является уравнение (система волновых уравнений) Уиллера – Де Витта (УДВ):

$$\hat{H}^{\mu}\Psi = 0. \tag{1}$$

Согласно этому уравнению, волновая функция вселенной $\Psi$ не зависит от какого-либо внешнего параметра времени. Принимая это, мы, тем не менее, полагаем, что время необходимо для интерпретации теории и описания результатов наблюдений, и оно должно быть введено также в квантовую космологию. Это требует модификации канонической процедуры квантования теории.

В данной работе предложен вариант такой модификации в случае замкнутой Вселенной, которая позволяет ввести параметр (параметры) времени. Модификация одновременно выступает вариантом квазиклассического приближения и не меняет динамического содержания теории на классическом уровне.

В качестве модели для наших построений рассмотрим механику релятивистской частицы. В релятивистской механике гамильтониан частицы массы $m$ пропорционален гамильтоновой связи, т. е.

$$h = NH,\, H \equiv p^2 - m^2c^2, \tag{2}$$

выражающей известное условие на 4-импульс частицы.

Мы используем упрощенное обозначение для квадрата 4-вектора $p^2 = p^{\mu}p_{\mu}$. Положим в основу наших построений формальную симметрию, имеющуюся в релятивистской механике, – репараметризационную инвариантность действия, имеющего геометрический смысл длины мировой линии частицы в пространстве Минковского. Произвольная функция $N$ параметра $\tau$ на мировой линии обеспечивает эту инвариантность. Данная симметрия является простейшим аналогом принципа общей ковариантности в теории гравитации Эйнштейна.

Наиболее универсальным инструментом квантования ковариантных теорий считается формализм Баталина – Фрадкина – Вилковысского (БФВ), который дает рецепт построения инвариантного пропагатора Бекки – Рюэ – Стора – Тютина (БРСТ-пропагатор) [1, 2]. В простейшем случае релятивистской частицы этот формализм дает также простой результат: функционально-интегральное представление функции Грина для уравнения Клейна – Гордона [3], которое содержит дополнительный интеграл по собственному времени частицы в интервале $[0, \infty)$. Данное представление функции Грина ранее было предложено В.А. Фоком [4] и Дж. Швингером [5]. Проблема интерпретации этой ковариантной квантовой теории заключается в том, что собственное время здесь не является параметром эволюции, а функция Грина сама по себе не имеет динамического смысла. Для однородных моделей Вселенной в квантовой теории получается в точности такой же результат.

Для того чтобы собственное время в квантовой теории приобрело смысл параметра эволюции, нужны дополнительные построения, позволяющие снять интегрирование по нему в пропагаторе. В работе [6] для однородной анизотропной модели Вселенной предложена модификация исходной теории, которая позволяет снять интеграл по собственному времени, не меняя его динамического содержания на классическом уровне.

Модификацию условно разделим на два этапа. На первом собственное время вводится в исходное действие классической теории в качестве новой динамической переменной с помощью соотношения

$$N = \dot{s}. \tag{3}$$

На втором этапе к исходному действию добавляется уравнение Эйлера – Лагранжа (ЭЛ) для новой динамической переменной в качестве дополнительного условия. Это эквивалентно добавлению к исходному действию его вариации, порожденной инфинитезимальным сдвигом собственного времени:

$$\delta s = -\varepsilon. \tag{4}$$

В простейшей однородной модели Вселенной [6] данное уравнение ЭЛ сводится к закону сохранения гамильтоновой связи, что в исходной теории было следствием уравнений движения физических динамических переменных. Такая модификация, очевидно, не меняет динамического содержания теории на классическом уровне, но уже здесь приводит к некоторым добавлениям.

Рассмотрим следствия рассматриваемой теории на примере релятивистской механики. В качестве исходной системы возьмем безмассовую частицу ($m = 0$ в соотношении (2)) с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{N}. \tag{5}$$

После двух этапов модификации приходим к функции Лагранжа:

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{\dot{s}}\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{s}}\right), \tag{6}$$

где инфинитезимальный сдвиг собственного времени ε также следует рассматривать в качестве независимой динамической переменной.

Перейдем к канонической форме модифицированной теории. Ее гамильтониан равен нулю, поскольку функция Лагранжа (6) есть однородная функция скоростей первой степени, а уравнение связи принимает вид

$$p_s = P_\varepsilon - \sqrt{2P_\varepsilon}\sqrt{p^2}, \tag{7}$$

где

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{\dot{s}^2} \tag{8}$$

– это канонический импульс, сопряженный ε.

Еще одним каноническим уравнением движения является закон сохранения добавочной динамической переменной $\dot{P} = 0$. С учетом уравнения (7) это означает закон сохранения связи исходной теории. Однако теперь масса частицы может быть не равной нулю, если положить

$$P_\varepsilon = 2m^2c^2. \tag{9}$$

Таким образом, предложенная модификация приводит к появлению в теории добавочного параметра $P_\varepsilon$, который в данном случае выступает как константа движения. Это можно понимать также как расширение допустимых начальных значений скорости частицы, обусловленное появлением у нее массы. Обратим внимание, что исходная связь (2) является инвариантом преобразований Лоренца, действующих в пространстве Минковского и фазовом пространстве релятивистской частицы. Инвариантом будет и собственная масса, возникшая в этом построении.

Есть еще один существенный результат модификации – появление квадратного корня из квадрата 4-импульса $p_\mu$ в уравнении (7). В квантовой теории это источник дополнительного условия в виде δ-функции в функциональном интеграле, которое определяет собственное время на мировой линии частицы как интеграл уравнения (8):

$$s = \int \frac{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}{\sqrt{2P_\varepsilon}}. \tag{10}$$

Именно это уравнение позволяет снять интегрирование по собственному времени в пропагаторе для релятивистской частицы. Обобщение этой модификации ковариантной квантовой теории на случай системы с двумя гамильтоновыми связями и двумя параметрами собственного времени рассмотрено в работе [7].

В данной работе предложена модификация теории гравитации в общем случае неоднородной Вселенной. В основу положено представление действия, полученное Арновиттом – Дезером – Мизнером (АДМ) [8, 9] с помощью (3 + 1)-расщепления 4D-метрики. Часть составляющих этой метрики ($N$, $N_i$), которые называются функциями следования и сдвига, играют роль множителей Лагранжа в каноническом представлении действия АДМ. Модификация теории в данном представлении приводит к появлению дополнительных динамических переменных, которые образуют скалярную и векторную плотности относительно преобразований пространственных координат. По аналогии с релятивистской частицей их можно назвать распределением плотности и плотности потока собственной массы Вселенной. Допущение ненулевых значений этих величин в представлении АДМ означает нарушение однородности и изотропности пространства. Обобщение теории за счет введения инвариантных ненулевых значений дополнительных динамических переменных возможно в операторном представлении гравитационных связей [10], которое также рассматривается в этой работе.

В операторном представлении дополнительные переменные являются инвариантами $3D$-диффеоморфизмов и образуют спектр собственных модовых масс Вселенной.

### Собственное время и масса Вселенной в представлении АДМ

Действие теории гравитации в представлении АДМ, полученное (3 + 1)-расщеплением $4D$-метрики, имеет вид [9]:

$$I_{\text{ADM}} = \int N dt \int_{\Sigma} \sqrt{g} d^3x \times \times \left[ R + \text{Tr}K^2 - (\text{Tr}K)^2 \right], \tag{11}$$

где

$$K_{ik} = \frac{1}{2N}\left[\nabla_i N_k + \nabla_k N_i - \dot{g}_{ik}\right] \tag{12}$$

есть тензор внешней кривизны гиперповерхности постоянного времени $\sum$.

Для простоты мы не включаем в действие (11) действие полей материи. Добавление материи не изменит основных выводов работы. Здесь $N$, $N_i$ – функции следования и сдвига, которые являются составляющими $4D$-метрики. Производные по времени этих функций в действии АДМ отсутствуют, так что они будут играть роль множителей Лагранжа в каноническом представлении действия. Уравнения ЭЛ для $N$, $N_i$ – суть классические уравнения связей, выраженные через производные по времени от $3D$-метрики:

$$\frac{\delta I_{\text{ADM}}}{\delta N} = H = = \sqrt{g}\left[ R + (\text{Tr}K)^2 - \text{Tr}K^2 \right] = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\delta I_{\text{ADM}}}{\delta N_i} = H^i = = -2\nabla_k \left[ \sqrt{g}\left( g^{ik}K - K^{ik} \right) \right] = 0. \tag{14}$$

Функция Гамильтона в случае замкнутой Вселенной имеет вид линейной комбинации

$$h_{\text{ADM}} = \int d^3x N_\mu \Pi^\mu, \tag{15}$$

где $\Pi^\mu$ – связи АДМ, выраженные через канонические импульсы

$$\pi^{ik} = \sqrt{g}\left( g^{ik}K - K^{ik} \right), \tag{16}$$

сопряженные составляющим $3D$-метрики.

Квадратичные по импульсам гамильтоновы связи являются каноническими генераторами сдвигов по нормали к пространственному сечению $\sum$, а линейные импульсные связи служат каноническими генераторами $3D$-пространственных диффеоморфизмов.

Явный вид этих связей в представлении АДМ нам здесь не понадобится. Заметим только, что они образуют скалярную и векторную плотности относительно преобразований пространственных координат на $\sum$. Далее мы будем следовать общим обозначениям [11], пригодным для любых ковариантных теорий. Суммирование по повторяющимся индексам подразумевает интегрирование, если область возможных значений индекса образует континуум.

В теории гравитации область изменения латинского индекса такова:

$$\alpha = (\mu, x);\ \mu = 0;\ i, x \in \sum.$$

В этих общих обозначениях инфинитезимальные сдвиги собственного (многострелочного) времени объединяются с инфинитезимальными пространственными сдвигами на гиперповерхности посредством единого символа $\varepsilon_\alpha$, так что порождаемые этими сдвигами инфинитезимальные вариации канонических переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta q_\alpha &= \varepsilon_b \{q_\alpha, \varphi_b\}, \\ \delta p_\alpha &= \varepsilon_b \{p_\alpha, \varphi_b\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Связи образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона, т. е.

$$\{\varphi_\alpha, \varphi_b\} = C_{abd}\varphi_d, \tag{18}$$

и ее структурные функции в явном виде нам здесь также не понадобятся.

Преобразования (17) выступают в данном случае преобразованиями симметрии теории лишь постольку, поскольку действие, записанное в канонической форме

$$\begin{aligned} I &= \int dt L(q_i, \dot{q}_i, \lambda_\alpha) = \\ &= \int dt\left[p_i \dot{q}_i - \lambda_\alpha \varphi_\alpha\right] \end{aligned} \tag{19}$$

является инвариантном этих преобразований при дополнительном преобразовании множителей Лагранжа:

$$\delta\lambda_\alpha = \dot{\varepsilon}_\alpha - C_{bd\alpha}\lambda_b\varepsilon_d. \tag{20}$$

Уравнения (20) положим в основу наших дальнейших построений. Будем их рассматривать как функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\lambda_\alpha(t)}{\delta s_b(t')} = \\ &= \delta_{\alpha b}\frac{d}{dt}\delta(t - t') - C_{db\alpha}\lambda_b(t)(t - t') \end{aligned} \tag{21}$$

относительно $\lambda_\alpha$, и здесь мы их считаем функционалами параметров собственного времени $s_\alpha$.

Решение этих уравнений при дополнительных начальных условиях $\lambda_\alpha[0] = 0$ имеет следующий вид:

$$\lambda_\alpha = \dot{s}_b\Lambda_{b\alpha}. \tag{22}$$

Его можно получить итерациями в виде функционального ряда Тейлора, в котором с точностью до второго порядка малости по $s_\alpha$

$$\begin{aligned} \Lambda_{b\alpha}. &= \delta_{b\alpha} - \frac{1}{2!}C_{bd\alpha}s_d + \\ &+ \frac{1}{3!}C_{b'd'\alpha'}C_{bdb'}s'_d s_d - \ldots . \end{aligned} \tag{23}$$

Нам также потребуется вариация множителей Лагранжа (22) при инфинитезимальном сдвиге параметров собственного времени $\varepsilon_\alpha$:

$$\delta\lambda_\alpha = \dot{\varepsilon}_b\Lambda_{b\alpha} + \dot{s}_b\frac{\partial\Lambda_{b\alpha}}{\partial s_d}\varepsilon_d. \tag{24}$$

Уравнения (22) и (24) представляют собой обобщение уравнений (3) и (4) для общего случая неоднородной Вселенной. Воспользовавшись аналогией с релятивистской механикой, запишем сразу функцию Лагранжа модифицированной теории гравитации в общем случае:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}(q, \dot{q}, s, \dot{s}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = L(q, \dot{q}, \lambda(s, \dot{s})) + \\ &+ \frac{\partial L(q, \dot{q}, \lambda(s, \dot{s}))}{\partial\lambda_d}\delta\lambda_d(s, \dot{s}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{25}$$

Особенности, связанные с проблемой времени, и возможные способы ее решения в модифицированной теории проявятся при переходе к канонической форме действия (25). Модифицированная функция Лагранжа (25) есть однородная функция первой степени всех обобщенных скоростей. Поэтому функция Гамильтона модифицированной теории равна нулю.

Принимая это во внимание, мы здесь отклонимся от стандартного формализма ковариантного квантования [1, 2] динамики в терминах внешнего параметра времени. Такое описание остается возможным для островной модели Вселенной, энергия которой не равна нулю, а время измеряется часами на бесконечности [12]. Вместо этого, в случае замкнутой Вселенной можно говорить о преобразованиях симметрии или движении по орбите группы общей ковариантности, которые генерируются связями, а параметры этого движения образуют собственное (многострелочное) время $s_\alpha$.

В модифицированной теории эта внутренняя динамика заключена в уравнениях, определяющих канонические импульсы, сопряженные собственному времени:

$$p_{s_\alpha} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{s}_\alpha} = -\tilde{h}_\alpha. \tag{26}$$

Эти уравнения будут играть роль связей в модифицированной теории после перехода к ее канонической форме. Для этого в правой части уравнений (26) следует исключить все скорости, выразив их через соответствующие канонические импульсы.

В квантовой теории связи уравнения (26) превращаются в систему самосогласованных волновых уравнений типа уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} = \hat{\tilde{h}} \Psi \tag{27}$$

для волновой функции Вселенной $\Psi$.

Принцип общей ковариантности требует исключить зависимость волновой функции Вселенной от дополнительных динамических переменных $s_\alpha$.

Инвариантный пропагатор получим дополнительным интегрированием решения системы (27) по всей орбите группы общей ковариантности с простой мерой:

$$\tilde{K} = \int \prod_\alpha ds_\alpha \Psi\left(s_\alpha, \ldots\right). \tag{28}$$

Здесь мы не будем развивать модифицированную квантовую теорию, а сосредоточим внимание на тех аспектах канонической формы классической теории, которые приведут к снятию интегралов в пропагаторе (28). Одним из таких аспектов будет исключение скоростей инфинитезимальных сдвигов собственного времени $\dot{\varepsilon}_\alpha$, в результате чего в уравнениях (26) возникнут квадратные корни, аналогичные входящим в уравнение связи (7). Для их исключения служат уравнения, определяющие соответствующие канонически сопряженные импульсы вида

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_\alpha} &= \frac{\partial L\left(q, \dot{q}, \lambda\left(s, \dot{s}\right)\right)}{\partial \lambda_d} \Lambda_{ad} = \\ &= \Lambda_{ad} \varphi_d, \end{aligned} \tag{29}$$

которые нам далее понадобятся в явном виде.

Уравнения (29) позволяют получить обобщение простейшего уравнения (10) для собственного времени релятивистской частицы в виде системы уравнений для собственного (многострелочного) времени Вселенной.

Выпишем эту систему в явном виде, учитывая наше соглашение о конденсированном латинском индексе:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{N^2\left(x\right)\left[\mathrm{Tr}K^2\left(x\right) - \left(\mathrm{Tr}K\left(x\right)\right)^2\right]}}{\sqrt{P_{\varepsilon_\alpha} \Lambda^{-1}_{\alpha 0}\left(x\right) + R\left(x\right)}} = \\ &= N\left(x\right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{g\left(x\right)} P_{\varepsilon_\alpha} \Lambda^{-1}_{\alpha i}\left(x\right) = \\ &= -2\nabla_k \left[\sqrt{g\left(x\right)}\left(g^{ik}\left(x\right) K\left(x\right) - K^{ik}\left(x\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь функции следования и сдвига определяются формулами (22). Обе части уравнений (30) и (31) являются однородными функциями первой и нулевой степеней скоростей, соответственно. Интегралы этих уравнений определяют собственное время Вселенной как функцию траектории в ее конфигурационном пространстве. Это время также выступает функционалом дополнительных динамических переменных $P_{\varepsilon\alpha}$, поэтому уравнения (30), (31) следует решать совместно с их уравнениями движения. Они получаются как уравнения ЭЛ для инфинитезимальных сдвигов собственного времени в модифицированном действии и имеют вид

$$\frac{d}{dt}P_{\varepsilon_\alpha}+P_q\Lambda_{qd}^{-1}\dot{s}_b\frac{\partial\Lambda_{bd}}{\partial s_\alpha}=0. \qquad (32)$$

Согласно выражениям (29), дополнительные динамические переменные $P_{\varepsilon\alpha}$, как и связи в представлении АДМ, образуют пространственные плотности. Допущение их ненулевых значений нарушает ковариантность модифицированной теории относительно 3$D$-диффеоморфизмов. Нарушения ковариантности не будет, если дополнительные переменные положить равными нулю тождественно. При этом результат модификации в виде системы уравнений (30), (31), определяющих собственное время Вселенной в представлении АДМ, сохранится. Инвариантное определение собственного времени и массы Вселенной может быть достигнуто с использованием 3$D$-инвариантного представления гравитационных связей.

**Операторное представление гравитационных связей**

3$D$-инвариантное представление гравитационных связей основано на операторном равенстве

$$H=D^2+\frac{1}{2}\Delta=0, \qquad (33)$$

которое эквивалентно полному набору гравитационных связей в представлении АДМ [9]. Здесь $D$ – это 3$D$-оператор Дирака, а $\Delta$ – 3$D$- оператор Бельтрами – Лапласа в пространстве биспиноров Дирака на компактном пространственном сечении $\sum$ с заданным скалярным произведением

$$\left(\psi_1,\psi_2\right)=\int\sqrt{g}\,d^3x\psi_1^+\psi_2. \qquad (34)$$

Оба оператора $\Delta$ и $D$ – Эрмитовы относительно произведения (34), их коэффициенты – суть функции канонических переменных гравитационного поля ($g_{ik}$, $\pi^{ik}$).

Чтобы ввести новое каноническое представление, примем во внимание, что собственные функции Эрмитова оператора $H$ образуют полный набор в пространстве биспиноров Дирака, а необходимым и достаточным условиями его равенства нулю является равенство нулю всех его собственных значений, определяемых секулярным уравнением

$$H\psi_\alpha=h_\alpha\psi_\alpha. \qquad (35)$$

В свою очередь это означает, что собственные значения $H$ образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона с прежними каноническими переменными:

$$\left\{h_\alpha,h_\beta\right\}=\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma. \qquad (36)$$

Операторное уравнение (33) позволяет преобразовать функцию Гамильтона теории гравитации из первоначального представления в виде интеграла (15) от распределения локальных связей АДМ на пространственном сечении $\sum$ в линейную комбинацию модовых функций Гамильтона:

$$h_H=\lambda_\alpha h_\alpha\left(g,\pi\right). \qquad (37)$$

Под модами мы здесь понимаем собственные состояния оператора $H$.

Секулярное уравнение (35) можно представить в матричном виде, основываясь на спектральных разложениях для каждого Эрмитова и эллиптического оператора в равенстве (33).

Запишем секулярное уравнение для квадрата оператора Дирака:

$$D^2\psi_n = d_n^2\psi_n. \tag{38}$$

Считая набор собственных функций $\psi_n$ ортонормированным, будем искать решение уравнения (35) в виде разложения

$$\psi_\alpha = \sum_n c_{\alpha n}\psi_n, \tag{39}$$

для коэффициентов которого получим систему уравнений

$$\sum_n \Delta_{mn}c_{\alpha n} = \left(h_\alpha - d_m^2\right)c_{\alpha m}\Delta_{mn} = \\ = \left(\psi_m, \Delta\psi_n\right). \tag{40}$$

Теперь запишем секулярное уравнение для Эрмитовой матрицы $\Delta_{mn}$ в виде

$$\sum_n \Delta_{mn}f_n^p = \delta_p f_m^p \tag{41}$$

и будем искать решение системы (40) как разложение

$$c_{\alpha n} = \sum_p a_{\alpha p}f_n^p. \tag{42}$$

Считая опять набор собственных векторов-последовательностей $f_n^p$ ортонормированным относительно обычного Эрмитова скалярного произведения в пространстве последовательностей, для коэффициентов этого разложения и искомых собственных значений оператора $H$ получим:

$$\sum_m d_m^2 f_m^{+p'} f_m^p a_{\alpha p} = \left(h_\alpha + \delta_{p'}\right)a_{\alpha p'}. \tag{43}$$

В таком виде система уравнений, определяющая модовые гамильтонианы Вселенной $h_\alpha$, может быть полезна, в частности, для формулировки конечномерных приближений. Так, для однородной модели Вселенной, очевидно, имеем единственную моду с гамильтонианом

$$h = d_1^2 - \delta_1, \tag{44}$$

который совпадает с гамильтонианом однородной анизотропной Вселенной, рассмотренной в статье [6].

Модовые гамильтонианы $h_\alpha$ являются инвариантами $3D$-преобразований координат на пространственном сечении. Следовательно, инвариантами будут и все величины, возникающие в построениях предыдущего раздела. Инвариантами будут, в частности, модовые параметры собственного времени и спектр собственных масс, по прямой аналогии с релятивистской механикой. Это позволяет рассматривать эволюцию Вселенной в модифицированной квантовой теории без нарушения принципа общей ковариантности даже при ненулевых значениях собственных масс. Для волновой функции начала Вселенной постулируем условный принцип минимума энергии пространства, определяемой функционалом

$$W = \frac{\left\langle \Psi_0 \middle| d_1^2 \middle| \Psi_0 \right\rangle}{\left\langle \Psi_0 \middle| \Psi_0 \right\rangle}. \tag{45}$$

Дополнительным условием здесь служит равенство нулю гамильтониана Вселенной (37), а вариационными параметрами – волновая функция $\Psi_0$ и множители Лагранжа $\lambda_n$. Для вычисления этой энергии, определяемой эллиптическим оператором $d_1^2$, мы берем его минимальное собственное значение. Далее решаем систему волновых уравнений (27) (записанных теперь в операторном представлении). Полученный таким образом пропагатор (28) имеет дополнительную зависимость от спектра инвариантных модовых масс. Это, в свою очередь, позволяет определить в качестве наблюдаемых модовые параметры собственного времени как средние значения соответствующих наблюдаемых:

$$\left\langle \hat{\varepsilon}_\alpha \right\rangle_\Psi = \left\langle \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta P_\alpha} \right\rangle_\Psi. \tag{46}$$

Эти параметры времени или соответствующие им пространственные масштабы, очевидно, могут быть ассоциированы с иерархией пространственных структур, возникающих в процессе эволюции Вселенной. После вычисления средних значений (46), в рамках исходной теории модовые массы следует положить равными нулю. Однако принцип общей ковариантности теперь не исключает и ненулевые значения этих параметров. Наличие или отсутствие собственной массы Вселенной – это вопрос наблюдений и их интерпретации, который мы здесь оставляем открытым.

Новое каноническое представление теории гравитации позволяет модифицировать и первоначальную форму УДВ (1). Систему локальных (для каждой точки пространства) волновых уравнений, накладываемых на физическое состояние Вселенной, теперь следует заменить нелокальными модовыми условиями. Если строго следовать общепринятой формулировке квантовых связей, то операторное представление ведет к следующей системе волновых уравнений для физических состояний вселенной Ψ:

$$\hat{h}_\alpha \Psi = 0. \tag{47}$$

Однако представляется более естественной прямая реализация операторного представления (33) в виде самосогласованного определения самих мод с волновым уравнением для волновой функции Вселенной в рамках единого функционально-дифференциального уравнения:

$$\hat{H}\psi_\alpha \Psi_\alpha = 0. \tag{48}$$

В такой формулировке квантовой космологии, решения следует группировать в последовательности с возрастающим модовым индексом α, который тем самым принимает смысл квантового параметра собственного времени для данной последовательности физических состояний Вселенной $\Psi_\alpha$.

**Заключение**

Отсутствие привычного представления о времени в квантовой космологии является одним из следствий принципа общей ковариантности, который исключает какую-либо внешнюю нумерацию структуры Вселенной. Это означает, что эволюция Вселенной должна быть определена во внутренних терминах. На самом деле структура самой группы ковариантности, после дополнительных построений, определяет внутреннюю динамику Вселенной. Построения, предложенные в данной работе, основаны на структуре группы общей ковариантности в каноническом представлении АДМ, которое получено (3 + 1)-расщеплением геометрии пространства-времени. Собственное время и пространственные сдвиги как естественные параметры преобразований симметрии вводятся в исходное действие в качестве независимых динамических переменных. В таком случае динамика замкнутой Вселенной сводится к движению по орбите группы общей ковариантности. В квантовой теории такое движение описывается системой волновых уравнений типа Шредингера. Однако принцип общей ковариантности требует независимости волновой функции от параметров этого движения – преобразования симметрии. Независимость достигается усреднением волновой функции по орбите группы симметрии. Задача второго этапа модификации состоит в снятии дополнительного усреднения по орбите посредством корреляции внутренней динамики с классическими интегралами движения. В исходной теории эти интегралы играют роль связей, т. е. обращаются в нуль вследствие принципа общей ковариантности. В модифицированной теории эти величины могут быть отличны от нуля и становятся дополнительными динамическими переменными. Их движение описывается уравнениями ЭЛ для параметров общековариантных преобразований. Введение в квантовую теорию дополнительных динамических переменных, связанных с интегралами движения, является вариантом квазиклассического приближения. В данном случае приближение не нуждается в каком-либо обосновании соответствующими оценками. Остается единственное требование – это соответствие наблюдениям. «Точная» квантовая теория, в отсутствие параметра времени, связи с наблюдениями не имеет.

Наблюдаемыми в модифицированной теории выступают дополнительные динамические переменные $P_\varepsilon$, которые в представлении АДМ образуют пространственное распределение собственной массы Вселенной, а также канонически сопряженные им пространственно-временные сдвиги. Для последних могут быть определены средние (по всей истории Вселенной) значения и в исходной теории, где собственную массу Вселенной следует полагать равной нулю. Ненулевая собственная масса Вселенной (спектр масс) допускается в операторном каноническом представлении теории гравитации для замкнутой Вселенной. В этом представлении спектр масс привязан к иерархии пространственных структур, возникающих в процессе эволюции Вселенной. Сама последовательность образования пространственных структур различных масштабов может служить материальной основой понятия собственного времени Вселенной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.** Quantization of relativistic systems with constraints // Physics Letters. B. 1975. Vol. 55. No. 2. Pp. 224–226.

2. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** Relativistic *S*-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints // Physics Letters. B. 1977. Vol. 69. No. 3. Pp. 309–312.

3. **Govaerts J.** A note on the Fradkin – Vilkovisky theorem // International Journal of Modern Physics. A. 1989. Vol. 4. No. 17. Pp. 4487–4504.

4. **Фок В.А.** Собственное время в классической и квантовой механике // Известия АН СССР. Серия физическая. 1937. № 4–5. С. 551–568.

5. **Schwinger J.** On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. No. 5. Pp. 664– 679.

6. **Gorobey N., Lukyanenko A., Drozdov P.** Energy conservation law in the closed universe and a concept of the proper time // Universe. 2020. Vol. 6. No. 10. P. universe6100174.

7. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V.** The proper mass of the universe // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2021. Vol. 14. No. 1. Pp. 147–154.

8. **Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.** Dynamical structure and definition of energy in general relativity // Phys. Rev. 1959. Vol. 116. No. 5. Pp. 1322–1330.

9. **Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.** Gravitation. New Jersey, USA: Princeton University Press, 2017. 1279 p.

10. **Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С.** Операторное представление гравитационных связей в случае замкнутой Вселенной // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 105. № 3. С. 503–507.

11. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 272 с.

12. **Фаддеев Л.Д., Попов В.Н.** Ковариантное квантование гравитационного поля // Успехи физических наук. 1973. Т. 111. Вып. 3. С. 427–450.

*Статья поступила в редакцию 09.04.2021, принята к публикации 11.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ГОРОБЕЙ Наталья Николаевна** – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

n.gorobey@mail.ru

**ЛУКЬЯНЕНКО Александр Сергеевич** – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

alex.lukyan@rambler.ru

**ГОЛЬЦЕВ Александр Викторович** – *доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.

golysev@ua.pt

## REFERENCES

1. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.,** Quantization of relativistic systems with constraints, Phys. Lett. B. 55 (2) (1975) 224–226.

2. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.,** Relativistic *S*-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints, Phys. Lett. B. 69 (3) (1977) 309–312.

3. **Govaerts J.,** A note on the Fradkin – Vilkovisky theorem, International Journal of Modern Physics. A. 4 (17) (1989) 4487–4504.

4. **Fock V.A.,** The eigen-time in classical and quantum mechanics, Phys. Zs. Sowjet. 12 (4) (1937) 404–425 (in German).

5. **Schwinger J.,** On gauge invariance and vacuum polarization, Phys. Rev. 82 (5) (1951) 664–679.

6. **Gorobey N., Lukyanenko A., Drozdov P.,** Energy conservation law in the closed universe and a concept of the proper time, Universe. 6 (10) (2020) universe6100174.

7. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V.,** The proper mass of the universe, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 147–154.

8. **Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.,** Dynamical structure and definition of energy in general relativity, Phys. Rev. 116 (5) (1959) 1322–1330.

9. **Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.,** Gravitation, Princeton University Press, New Jersey, USA, 2017.

10. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S.,** Operator representation of gravitational constraints for the case of the closed universe, Theoretical and Mathematical Physics. 105 (3) (1995) 1603–1606.

11. **Faddeev L.D., Slavnov A.A.,** Gauge fields: An introduction to quantum theory, 2nd edition, Westview Press, 1993.

12. **Faddeev L.D., Popov V.N.,** Covariant quantization of the gravitational field, Sov. Phys. Usp. 16 (6) (1974) 777–788.

*Received 09.04.2021, accepted 11.05.2021.*

## THE AUTHORS

**GOROBEY Natalia N.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

n.gorobey@mail.ru

**LUKYANENKO Alexander S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

alex.lukyan@rambler.ru

**GOLTSEV Alexander V.**
*Ioffe Institute of RAS*
26, Politekhnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation
gorobej_nn@spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.14211
УДК 539.3

# ОТКЛОНЕНИЕ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЫ ОТ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РОСТА ВСЛЕДСТВИЕ НЕПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

**В.В. Тихомиров**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассматривается задача о поведении антиплоской полубесконечной интерфейсной трещины, вершина которой совпадает с угловой точкой границы раздела материалов. С помощью интегрального преобразования Меллина получено точное решение рассмотренной задачи. Для напряжений вблизи указанной угловой точки построены асимптотические выражения, которые могут содержать одно или два сингулярных слагаемых. Для анализа роста трещины использован силовой критерий разрушения (критерий Новожилова). На основе полученного точного решения проведена оценка точности вычислений угла отклонения трещины и разрушающей нагрузки, определяемых с помощью асимптотик. Исследованы зависимости этих характеристик разрушения от параметров композиции материалов.

**Ключевые слова:** антиплоская интерфейсная трещина, угловая точка, угол отклонения трещины, разрушающая нагрузка

**Ссылка при цитировании:** Тихомиров В.В. Отклонение интерфейсной трещины от прямолинейного роста вследствие непрямолинейной границы раздела материалов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 130–140. DOI: 10.18721/JPM.14211



# DEFLECTION OF AN INTERFACE CRACK FROM THE STRAIGHT-LINE GROWTH DUE TO THE UNSTRAIGHTNESS OF THE MATERIAL INTERFACE

**V.V. Tikhomirov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

An antiplane semi-infinite interface crack propagation problem has been considered, the crack tip coinciding with the angular point of the materials interface. The exact solution of the problem was obtained using the Mellin integral transformation. Asymptotic formulas for stresses near the crack tip were constructed, and they could contain one or two singular terms. To analyze the crack growth, the Novozhilov force criterion of fracture was used. Based on the obtained exact solution, the calculation accuracy of the crack angle and the destructive load, determined using asymptotics, was estimated. The dependences of these fracture characteristics on the composition parameters were investigated.

**Keywords:** antiplane interface crack, corner point, crack deflection angle, breaking load

**Citation:** Tikhomirov V.V., Deflection of an interface crack from the straight-line growth due to the unstraightness of the material interface, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 130–140. DOI: 10.18721/JPM.14211

## Введение

В линейной механике разрушения, результаты которой базируются на решениях уравнений линейной теории упругости, важную роль играют особые точки (точки сингулярности) полей напряжений, которые инициируют процесс разрушения. В качестве таких точек могут выступать вершины трещин, вершины острых вырезов или включений в материале. В вершине трещины, находящейся в однородной среде, имеет место классическая корневая сингулярность, т. е. показатель сингулярности равен 0,5. В других случаях, вообще говоря, показатель сингулярности будет отличаться от указанного значения. Показатели сингулярности определяются корнями трансцендентных характеристических уравнений, расположенными в интервале (0, 1). Обзор результатов, относящихся к этому утверждению, приведен в работах [1 – 3].

Среди множества проблем механики разрушения выделяется класс задач о взаимодействии трещин с границей раздела материалов. В плоской и антиплоской постановках этот класс задач изучался, например, в работах [4 – 7]. При этом граница раздела предполагалась прямолинейной. Следует отметить, что в таких случаях классический критерий разрушения Гриффитса – Ирвина не применим, поскольку порядок особенности в вершине трещины отличен от 0,5 и должны использоваться иные критериальные подходы. Краткий обзор таких подходов приведен в статье [8].

Если граница раздела материалов имеет точку излома, то, как показано в работе [9], такая точка в антиплоской задаче является существенно особой. Другими словами, в этом случае характеристическое уравнение при некоторых значениях параметров композиции имеет уже два различных корня, меньших единицы и определяющих два сингулярных слагаемых в асимптотике поля напряжений в вершине трещины.

В данной работе исследуется отклонение первоначально прямолинейной интерфейсной трещины от прямолинейного роста, вызванное кусочно-прямолинейной границей раздела двух материалов.

В качестве критерия разрушения использован силовой критерий Новожилова [10]. На основе полученного точного решения основное внимание в работе уделяется оценке возможности использования асимптотик полей напряжений для определения угла отклонения трещины и разрушающей нагрузки, а также анализу зависимостей этих характеристик разрушения от параметров композиции материалов. Аналогичная задача в плоской постановке рассматривалась в статье [11]. Однако ее результаты базировались на применении асимптотических решений и численного метода конечных элементов.

## Постановка задачи и построение ее точного решения

Рассмотрим полубесконечную интерфейсную трещину продольного сдвига, вершина которой совпадает с угловой точкой двух связанных клиновидных областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ с углами раствора $\alpha$ и $(2\pi - \alpha)$ соответственно (рис. 1). Материалы областей считаются однородными и изотропными с модулями сдвига $\mu_1$ и $\mu_2$. К берегам трещины приложены на расстоянии $r_0$ от вершины самоуравновешенные сосредоточенные силы величиной $T$. Контакт на границе раздела материалов предполагается идеальным.

Поля перемещений и напряжений в каждой из областей строятся в виде интегралов Меллина:

$$
\begin{gathered}
w_k(r,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L W_k(p,\theta) r^{-p} dp, \\
\tau_{\theta z k}(r,\theta) = \\
= \frac{1}{2\pi i}\int_L T_{\theta z k}(p,\theta) r^{-p-1} dp \quad (k = 1, 2),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где трансформанты перемещений и напряжений определяются как

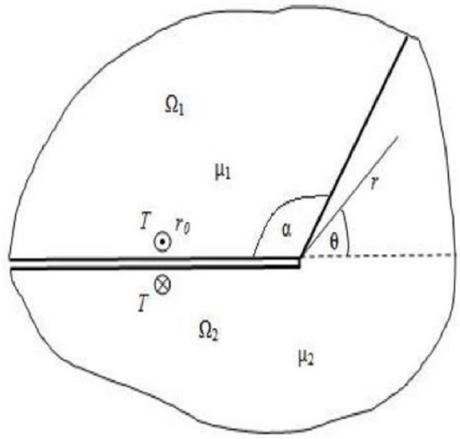



Рис. 1. Полубесконечная интерфейсная трещина,
вершина которой совпадает с угловой точкой границы раздела материалов:
$\mu_1$, $\mu_2$ – модули сдвига материалов областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$; $\alpha$ – угол раствора области $\Omega_1$; $T$ – самоуравновешенные сосредоточенные силы, приложенные на расстоянии $r_0$ от вершины; $r$, $\theta$ – полярные координаты

$$W_k(p,\theta) = A_k(p)\sin p\theta + B_k(p)\cos p\theta,$$
$$T_{\theta zk}(p,\theta) = \mu_k p\left[A_k(p)\cos p\theta - B_k(p)\sin p\theta\right]. \quad (2)$$

Здесь $r$, $\theta$ – полярные координаты.

Исходя из условий регулярности решения при $r \to 0$ и $r \to \infty$, контур интегрирования $L$ расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2 \quad (\delta_1, \delta_2 > 0).$$

Подчиняя функции (1) условиям идеального контакта при $\theta = \pi - \alpha$ и условиям нагружения берегов трещины при $\theta = \pm\pi$, находим величины $A_k(p)$ и $B_k(p)$, входящие в формулы (2). В результате представления для напряжений будут иметь вид

$$\tau_{\theta zk} = \frac{T}{\pi i r_0}\int_L \frac{\Phi_k(p,\theta,\alpha,m)}{\Delta(p,\alpha,m)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{p+1} dp \quad (k = 1, 2) \quad (3)$$

$$\Phi_k(p,\theta,\alpha,m) = \varphi_{k1}(p,\alpha,m)\sin p\theta + \varphi_{k2}(p,\alpha,m)\cos p\theta, \quad (4)$$

$$\varphi_{11}(p,\alpha,m) = \sin\pi p - m\sin(\pi-\alpha)p\cos(2\pi-\alpha)p,$$

$$\varphi_{12}(p,\alpha,m) = m\sin(\pi-\alpha)p\sin(2\pi-\alpha)p,$$

$$\varphi_{21}(p,\alpha,m) = \sin\pi p - m\cos\alpha p\sin(\pi-\alpha)p, \quad (5)$$

$$\varphi_{22}(p,\alpha,m) = -m\sin\alpha p\sin(\pi-\alpha)p,$$

$$\Delta(p,\alpha,m) = \sin 2\pi p - m\sin 2(\pi-\alpha)p.$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную

$$m = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2).$$

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству $|m| \le 1$. Если материал включения (области $\Omega_1$) является более жестким, по сравнению с материалом матрицы, то $0 < m < 1$; в противном случае (для мягкого включения) величина $m$ лежит в интервале $-1 < m < 0$. Значение $m = 0$ отвечает однородной среде, а значения $m \pm 1$ определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Полюсы подынтегральной функции в формуле (3) определяются корнями характеристического уравнения

$$\Delta\left(p,\alpha,\beta,m\right)=0. \qquad (6)$$

Функция (5) является целой нечетной функцией параметра интегрального преобразования $p$, не имеющей нулей на мнимой оси, кроме однократного нуля $p = 0$. Однако, согласно формулам (4), эта точка является устранимой особой точкой. Поэтому контур интегрирования $L$ в формуле (3) может быть совмещен с мнимой осью. Можно показать, что комплексных нулей, лежащих в полосе $|\mathrm{Re}\, p| \leq 1$, функция (5) не имеет.

В силу нечетности функции (5) каждому корню уравнения (6) $p_- < 0$ соответствует корень $p_+ > 0$, причем $p_- = -p_+$. Поскольку для исследования сингулярности напряжений (3) в вершине трещины интерес представляют корни, по величине не превосходящие единицы, для удобства будем изучать вещественные корни характеристического уравнения, расположенные в интервале (0, 1).

Функция (5) обладает следующим свойством:

$$\Delta\left(p,\alpha,m\right)=\Delta\left(p,2\pi-\alpha,-m\right).$$

Отсюда вытекает, что достаточно рассматривать конфигурацию системы, когда $0 < \alpha < \pi$ при положительных и отрицательных значениях биупругой постоянной $m$.

Детальный анализ показывает, что в случае относительно более жесткой среды 1, когда $\mu_1 > \mu_2$ и, следовательно $m > 0$, при $\pi/2 \leq \alpha < \pi$ характеристическое уравнение будет иметь один корень $p_1 \in (1/4,\ 1/2)$, а при $0 < \alpha < \pi/2$ – два корня: $p_1 \in (1/4,\ 1/2)$ и $p_2 \in (3/4,\ 1)$.

Если $m < 0$, т. е. $\mu_1 < \mu_2$, уравнение (6) при $0 < \alpha \leq \pi/2$ имеет один корень $p_1 \in (1/2,\ 3/4)$, порождающий слабую особенность $\lambda = 1 - p_1 < 1/2$ напряжений (3), а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ – два корня в интервале (1/2, 1).

Случай $\alpha = \pi/2$ является особым, поскольку при такой геометрии характеристическое уравнение имеет в интервале (0, 1) только один корень при любом $m \in (-1,\ 1)$. При этом корни уравнения (6) распадаются на два множества, так как

$$\Delta\left(p,\pi/2,m\right)= \\ =2\left(\cos\pi p-m/2\right)\sin\pi p.$$

Первый положительный нуль функции $\cos\pi p - m/2$ является монотонно убывающей величиной параметра $m$, принимающей значения, равные 2/3 при $m = -1$ и 1/3 при $m = 1$.

Аналогичное расщепление корней уравнения (6) также имеет место, например, при $\alpha = \pi/3$ и $\alpha = 2\pi/3$.

**Критерий разрушения**

Для вычисления напряжений в композитной среде при $r < r_0$ замкнем контур интегрирования $L$ в формуле (3) слева полуокружностью большого радиуса и воспользуемся теоремой Коши о вычетах в полюсах подынтегральной функции. В результате напряжения в каждой из областей будут иметь вид

$$\tau_{\theta zk}=\frac{2T}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_k\left(-p_n,\theta,\alpha,m\right)}{\Delta'\left(p_n,\alpha,m\right)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_n+1} \\ \left(k=1,2\right). \qquad (7)$$

В качестве критерия разрушения будем использовать силовой критерий, предложенный В.В. Новожиловым [10], согласно которому разрушение путем роста трещины происходит, когда среднее напряжение, вычисленное на некотором расстоянии $d$ от ее вершины, достигает критического значения, равного пределу прочности материала на сдвиг $\tau_c$:

$$\bar{\tau}_{\theta zk}=\frac{1}{d_k}\int_0^{d_k}\tau_{\theta zk}\left(r,\theta\right)dr=\tau_{ck}. \qquad (8)$$

Этот критерий в плоской и антиплоской задачах применялся, например, в работах [8, 11, 12].

Используя представление (7), для средних напряжений получаем:

$$\bar{\tau}_{\theta zk}(\theta) = \\ = \frac{2T}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_k(-p_n,\theta,\alpha,m)}{p_n\Delta'(p_n,\alpha,m)}\left(\frac{d_k}{r_0}\right)^{p_n-1}. \quad (9)$$

Углы $\theta_1$ ($\alpha$, $m$) и $\theta_2$ ($\alpha$, $m$), определяющие направления роста трещины, находятся из условий экстремума функций (9) в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$. Используя формулы (4), можно показать, что производная $\partial\Phi_1/\partial\theta < 0$ при $\pi - \alpha < \theta < \pi$ и любых допустимых значениях параметра $|m| \le 1$. Иными словами, функция в области $\Omega_1$ является монотонно убывающей и принимает наибольшее значение на границе $\theta = \pi - \alpha$. Поскольку распространение трещины в области $\Omega_1$ является невозможным, далее рассматривается только необходимое условие экстремума среднего напряжения $\bar{\tau}_{\theta z2}(\theta)$ в области $\Omega_2$:

$$\partial\bar{\tau}_{\theta z2}(\theta)\big/\partial\theta = 0 \\ \text{при} -\pi < \theta < \pi - \alpha, \quad (10)$$

которое в силу равенства (9) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial\Phi_2(-p_n,\theta,\alpha,m)/\partial\theta}{p_n\Delta'(p_n,\alpha,m)}\left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_n-1} = 0. \quad (11)$$

**Асимптотический подход**

Если уравнение (6) имеет только один положительный корень $p_1 \in (0, 1)$, то асимптотика напряжений (7) при $r \to 0$ будет одночленной:

$$\tau_{\theta z2} = \\ = \frac{2T}{r_0}\frac{\Phi_2(-p_1,\theta,\alpha,m)}{\Delta'(p_1,\alpha,m)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_1+1}, \quad (12)$$

а условие разрушения (8) на луче $\theta = \theta_2$ примет вид

$$\frac{2T}{r_0}\frac{\Phi_2(-p_1,\theta_2,\alpha,m)}{p_1\Delta'(p_1,\alpha,m)}\left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_1-1} = \\ = \tau_{c2}. \quad (13)$$

Эта формула справедлива при любых значениях параметров $\alpha$ и $m$. Рассматривая случай однородной среды, положим в равенстве (13) $m = 0$ и, следовательно, $p_1 = 1/2$, а $\theta_2 = 0$. Тогда, используя формулы (4) и (5), для относительного критического расстояния $d_2$ получим следующее представление:

$$\frac{d_2}{r_0} = \gamma^2,\ \gamma^2 = \frac{2}{\pi r_0}\left(\frac{K_{3c}^{(2)}}{\tau_{c2}}\right)^2,$$

где $\gamma$ — безразмерный геометрический параметр, $K_{3c}^{(2)}$ – вязкость разрушения материала области $\Omega_2$.

Заметим, что такое же представление для критического расстояния было получено для острого выреза в работах [8, 13].

Равенство (11), определяющее угол отклонения трещины $\theta_2$ ($\alpha$, $m$), в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{\partial\Phi_2(-p_1,\theta,\alpha,m)}{\partial\theta} = 0.$$

Тогда, используя формулы (4), для угла отклонения получаем представление

$$\theta_2 = \frac{1}{p_1}\operatorname{arctg}\left[-\frac{\varphi_{22}(p_1,\alpha,m)}{\varphi_{21}(p_1,\alpha,m)}\right]. \quad (14)$$

Отсюда заключаем, что при использовании одночленной асимптотики (12) критическое расстояние $d_2$ не влияет на величину угла отклонения трещины.

**Зависимость угла отклонения от параметров.** На основе свойств функций (4) можно показать, что при $m > 0$ ($\mu_1 > \mu_2$) и

$\pi/2 \le \alpha < \pi$ угол $\theta_2 > 0$ и является монотонно возрастающей функцией параметра $m$. Иными словами, трещина будет отклоняться в сторону границы раздела с более жестким материалом. В предельном случае, когда материал области $\Omega_1$ является абсолютно твердым, т. е. $m \to 1$, угол отклонения $\theta_2 = \pi - \alpha$. Иначе говоря, разрушение будет происходить вблизи границы раздела материалов. Кроме того, при рассматриваемых значениях параметров производная $\partial\theta_2/\partial\alpha < 0$ и, следовательно, угол $\theta_2$ является убывающей функцией параметра $\alpha$, которая стремится к нулю при $\alpha \to \pi$, что соответствует росту трещины по границе раздела двух разнородных полуплоскостей.

Если материал области $\Omega_2$ является относительно более жестким ($m < 0$) и $0 < \alpha \le \pi/2$, то из формул (4) и (14) вытекает, что $\theta_2 < 0$. В этом случае рост трещины будет происходить в направлении от границы раздела материалов. Наибольшее по величине отклонение трещины в отрицательном направлении отсчета полярного угла будет происходить при $m \to -1$. В силу монотонности функции $\theta_2$ по параметру $\alpha$, максимум отклонения достигается при $\alpha = \pi/2$, когда $\theta_2 \to -\pi/4$ для $m \to -1$.

Заметим, что особенно простой вид зависимость (14) принимает, когда $\alpha = \pi/2$:

$$\theta_2 = \frac{1}{p_1}\operatorname{arctg}\frac{m}{\sqrt{4-m^2}},$$

где $p_1$ – первый положительный нуль функции $\cos \pi p - m/2$.

Используя найденное значение угла отклонения (14), из равенства (13) получаем критическую (разрушающую) нагрузку, вызывающую рост трещины:

$$T = \frac{p_1\Delta'(p_1,\alpha,m)}{2\Phi_2(-p_1,\theta_2,\alpha,m)}\gamma^{2(1-p_1)}r_0\tau_{c2}.$$

Учитывая, что критическая нагрузка для полубесконечной трещины в однородной среде определяется формулой $T_0 = 0{,}5\pi\gamma r_0\tau_{c2}$, введем в рассмотрение приведенную критическую нагрузку $T^*$ для композиции:

$$T^* = \frac{T}{T_0} = \frac{p_1\Delta'(p_1,\alpha,m)}{\pi\Phi_2(-p_1,\theta_2,\alpha,m)}\gamma^{1-2p_1}. \qquad (15)$$

При других значениях параметров характеристическое уравнение имеет два корня: $p_1$ и $p_2$ на промежутке (0, 1), и асимптотика напряжений будет содержать два сингулярных слагаемых:

$$\tau_{\theta z2} = \frac{2T}{r_0}\left[\frac{\Phi_2(-p_1,\theta,\alpha,m)}{\Delta'(p_1,\alpha,m)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_1+1} + \frac{\Phi_2(-p_2,\theta,\alpha,m)}{\Delta'(p_2,\alpha,m)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_2+1}\right]. \qquad (16)$$

В таком случае условие разрушения имеет вид

$$\frac{2T}{r_0}\left[\frac{\Phi_2(-p_1,\theta_2,\alpha,m)}{p_1\Delta'(p_1,\alpha,m)}\left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_1-1} + \frac{\Phi_2(-p_2,\theta_2,\alpha,m)}{p_1\Delta'(p_2,\alpha,m)}\left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_2-1}\right] = \tau_{c2}. \qquad (17)$$

При этом относительное критическое расстояние определяется формулой

$$\frac{d_2}{r_0} = \frac{9}{4\gamma^2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}\gamma^2} - 1\right)^2.$$

Если $\gamma << 1$, то $d_2/r_0 \sim \gamma^2$ и, следовательно, при достаточно малых значениях $\gamma$ для критического расстояния можно использовать результат, полученный при одночленной асимптотике.

Угол отклонения трещины $\theta_2$ в данном случае будет корнем уравнения

$$\varphi_{21}(p_1)\sin p_1\theta + \varphi_{22}(p_1)\cos p_1\theta + \frac{\Delta'(p_1)}{\Delta'(p_2)}\left[\varphi_{21}(p_2)\sin p_2\theta + \varphi_{22}(p_2)\cos p_2\theta\right]\left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_2-p_1} = 0. \qquad (18)$$

В отличие от одночленной асимптотики, здесь угол $\theta_2$ будет зависеть от критического расстояния.

После нахождения угла отклонения из критерия разрушения (17) вычисляется критическая нагрузка, а далее на основе определения (15) вычисляется и ее приведенная величина.

**Численные результаты и их обсуждение**

На основе точного решения (7) и критерия разрушения (8), (9) тем же способом получаем, что относительное критическое расстояние удовлетворяет уравнению

$$\frac{d_2}{r_0} = \gamma \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d_2}{r_0}},$$

а приведенная разрушающая нагрузка находится по формуле

$$T^* = \\ = \frac{1}{\pi\gamma} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k\left(-p_n, \theta_2, \alpha, m\right)}{p_n \Delta'\left(p_n, \alpha, m\right)} \left(\frac{d_k}{r_0}\right)^{p_n - 1} \right]^{-1}. \qquad (19)$$

При этом направление роста трещины определяется углом $\theta_2$, который есть корень уравнения (11).

Для оценки точности асимптотического подхода проведены вычисления характеристик разрушения $\theta_2$ и $T^*$ на основе точного решения при различных значениях параметров $\alpha$, $m$ и $\gamma$. На рис. 2 приведена зависимость угла отклонения трещины $\theta_2$ от биупругой постоянной $m$, вычисленного на основе асимптотики (14) и точного решения при $\alpha = \pi/2$ и $\gamma = 0{,}25$. При этих значениях параметров асимптотика дает верхнюю оценку угла отклонения при $m > 0$ и нижнюю оценку при $m < 0$. Наибольшая погрешность асимптотической оценки составляет 25,7 % в случае мягкого материала области $\Omega_2$ и около 69 % в случае относительно более жесткого материала этой области. Когда материал в области $\Omega_1$ становится очень жестким ($m \to 1$) точность асимптотической формулы (14) повышается и рост трещины происходит вблизи интерфейса.

Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях параметров $\alpha$, $m$ и $\gamma$, в том числе и в случае двучленной асимтотики (16), когда угол отклонения трещины определяется как корень уравнения (18). Отличие от случая $\alpha = \pi/2$ состоит только в том, что погрешность асимптотического подхода существенно снижается при отрицательных значениях биупругой постоянной.

Расчеты показывают, что точность вычисления угла отклонения возрастает при уменьшении параметра $\gamma$ для всех возможных значений величин $\alpha$ и $m$. Следует также отметить, что учет только первого слагаемого в двучленной асимптотике (16) приводит к очень большим ошибкам (более 100%) при нахождении угла отклонения и, следовательно, является неприемлемым.

Таким образом, использование асимптотик поля напряжений вблизи вершины трещины при достаточно малых значениях параметра $\gamma$ качественно верно определяет угол отклонения трещины, однако в количественном плане может приводить к существенным неточностям.

На рис. 3 указана зависимость угла $\theta_2$, рассчитанного по точному решению, в случае относительно более жесткого материала области $\Omega_1$ при различных значениях ее угла раствора. В соответствии с выводами асимптотического подхода, в данном случае трещина будет отклоняться в сторону границы раздела материалов, и при $m \to 1$ ее рост будет происходить вблизи этой границы. При $m < 0$ разница в углах отклонения для различных значений угла $\alpha$ незначительна (меньше 6 %) и зависимость $\theta_2$ от $m$ близка к кривой *1* на рис. 2.

Точность расчета приведенной разрушающей нагрузки $T^*$, выполненного на основе асимптотик, весьма высока и находится в пределах 5 % при значениях $\gamma$, не превышающих 0,5, для любых возможных значений величин $\alpha$ и $m$. При этом учет только сингулярных членов полей напряжений опреде-

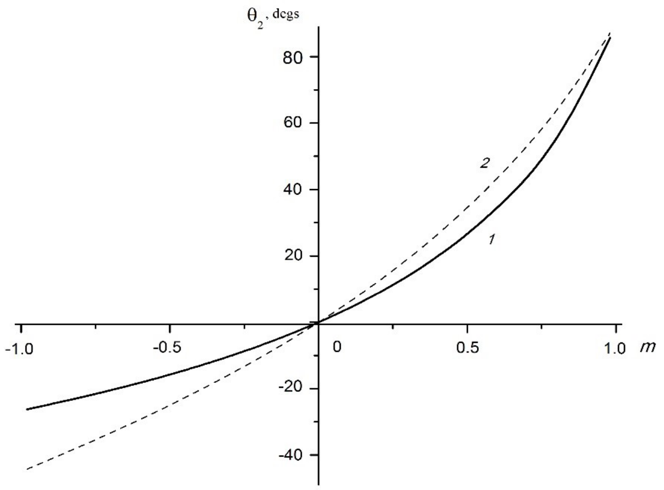



Рис. 2. Зависимости угла отклонения интерфейсной трещины $\theta_2$ от биупругой постоянной *m*, полученные на основе точного решения (*1*) и на основе одночленной асимптотики напряжений (*2*); $\alpha = \pi/2$, $\gamma = 0{,}25$

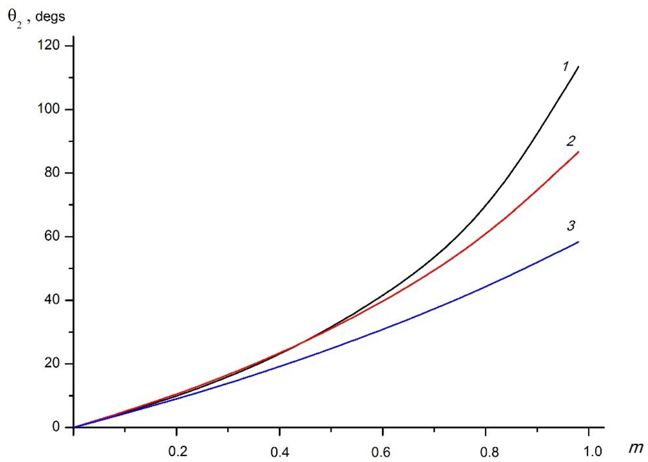



Рис. 3. Зависимости угла отклонения интерфейсной трещины $\theta_2$, вычисленного на основе точного решения, от биупругой постоянной $m > 0$ при $\gamma = 0{,}1$ и различных значениях угла $\alpha$: $\pi/3$ (*1*), $\pi/2$ (*2*), $2\pi/3$ (*3*)

ляет нижнюю оценку разрушающей нагрузки. Точность этой оценки повышается при уменьшении параметра $\gamma$. На рис. 4 приведена зависимость величины $T^*$, рассчитанной по точному решению (19), при $\alpha = \pi/2$ и различных значениях параметра $\gamma$. Аналогичные зависимости имеют место и для других значений угла $\alpha$. Приведенные кривые показывают, что при $m > 0$ величина приведенной нагрузки меньше единицы, а при $m < 0$ больше единицы. Это означает, что для продвижения трещины в случае относительно более жесткой среды 1 необходимо приложить к ее берегам меньшие силы, по сравнению со случаем однородной среды. В ситуации более мягкого материала области $\Omega_1$ наоборот: силы, прикладываемые к берегам трещины и вызывающие ее рост в композитной среде, будут превышать силы, прикладываемые в случае однородного материала.

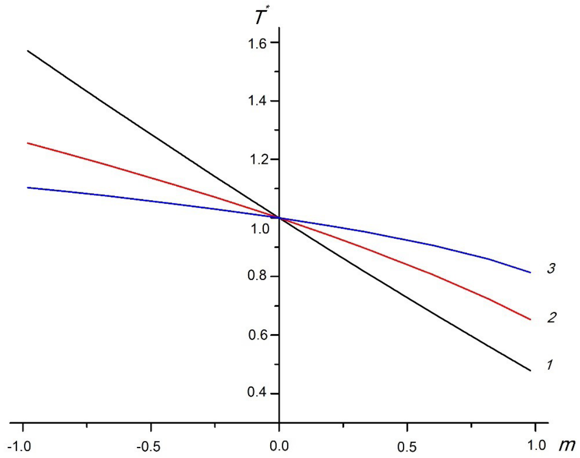



Рис. 4. Зависимости приведенной разрушающей нагрузки $T^*$, вычисленной на основе точного решения, от биупругой постоянной $m$ при $\alpha = \pi/2$ и различных значениях параметра $\gamma$: 0,10 (*1*), 0,25 (*2*), 0,50 (*3*)

**Заключение**

На основе силового критерия Новожилова (критерий разрушения), для характеристик разрушения интерфейсной трещины, вершина которой совпадает с угловой точкой раздела материалов, получены асимптотические и точные соотношения. Характеристики разрушения включают макроскопические параметры материала, такие как вязкость разрушения и предел прочности на сдвиг. Асимптотические формулы для достаточно малых значений безразмерного геометрического параметра γ качественно верно определяют верхнюю или нижнюю оценку угла отклонения первоначально прямолинейной интерфейсной трещины. Отклонение трещины будет происходить в сторону границы раздела с более жестким материалом и в противоположном направлении в случае, когда материал за этой границей является более мягким. Однако в количественном плане асимптотические формулы могут давать значительные погрешности. В то же время величины критических нагрузок, вычисленных по асимптотическим формулам, обладают достаточной точностью и могут применятся для оценки этих нагрузок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Eischen J.W.** Fracture of nonhomogeneous materials // International Journal of Fracture. 1987. Vol. 34. No. 1. Pp. 3–22.

2. **Carpinteri A., Paggi M.** On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // International Journal of Fracture. 2005. Vol. 135. No. 1-4. Pp. 267–283.

3. **Paggi M., Carpinteri A.** On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Applied Mechanical Review. 2008. Vol. 61. No. 2. P. 020801.

4. **Erdogan F., Gupta G.D.** Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // International Journal of Fracture. 1975. Vol. 11. No. 4. Pp. 583–593.

5. **Fenner D.N.** Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface // International Journal of Fracture. 1976. Vol. 12. No. 5. Pp. 705–721.

6. **He M-Y., Hutchinson J.W.** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // International Journal of Solids and Structures.

1989. Vol. 25. No. 9. Pp. 1053–1067.

7. **Misuris G., Kuhn G.** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // Archive of Applied Mechanics. 2001. Vol. 71. No. 11. Pp. 764–780.

8. **Тихомиров В.В.** Критерии разрушения острого выреза в условиях антиплоской деформации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 99–107.

9. **Тихомиров В.В.** Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 110–119.

10. **Новожилов В.В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 2. С. 212–222.

11. **Klusák J., Krepl O., Profant T.** Behaviour of a crack in a corner or at a tip of a polygon-like particle // Procedia Structural Integrity. 2016. Vol. 2. Pp. 1912–1919.

12. **Knesl Z.** A criterion of V-notch stability // International Journal of Fracture. 1991. Vol. 48. No. 4. Pp. R79–R83.

13. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.** On the most dangerous V-notch // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. No. 7–8. Pp. 887–893.

*Статья поступила в редакцию 17.01.2021, принята к публикации 06.05.2021.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич** – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы теоретической механики, заместитель директора по учебной работе Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

victikh@mail.ru

## REFERENCES

1. **Eischen J.W.,** Fracture of nonhomogeneous materials, International Journal of Fracture. 34 (1) (1987) 3–22.

2. **Carpinteri A., Paggi M.,** On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials, International Journal of Fracture. 135 (1-4) (2005) 267–283.

3. **Paggi M., Carpinteri A.,** On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion, Applied Mechanical Review. 61 (2) (2008) 020801.

4. **Erdogan F., Gupta G.D.,** Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading, International Journal of Fracture. 11 (4) (1975) 583–593.

5. **Fenner D.N.,** Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface, International Journal of Fracture. 12 (5) (1976) 705–721.

6. **He M-Y., Hutchinson J.W.,** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, International Journal of Solids and Structures. 25 (9) (1989) 1053–1067.

7. **Misuris G., Kuhn G.,** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models, Archive of Applied Mechanics. 71 (11) (2001) 764–780.

8. **Tikhomirov V.V.,** Sharp V-notch fracture criteria under antiplane deformation, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 99–107.

9. **Tikhomirov V.V.,** Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2 (194) (2014) 110–119.

10. **Novozhilov V.V.,** O neobkhodimom i dosta-

tochnom kriterii khrupkoy prochnosti [On the necessary and sufficient test of brittle strength], Prikladnaya Matematika & Mekhanika. 33 (2) (1969) 212–222 (in Russian).

11. **Klusák J., Krepl O., Profant T.,** Behaviour of a crack in a corner or at a tip of a polygon-like particle, Procedia Structural Integrity. 2 (2016) 1912–1919.

12. **Knesl Z.,** A criterion of V-notch stability, International Journal of Fracture. 48 (4) (1991) R79–R83.

13. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.,** On the most dangerous V-notch, International Journal of Solids and Structures. 47 (7–8) (2010) 887–893.

*Received 17.01.2021, accepted 06.05.2021.*

## THE AUTHOR

**TIKHOMIROV Victor V.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
victikh@mail.ru

# ВАДИМ КОНСТАНТИНОВИЧ ИВАНОВ (к 75-летию со дня рождения)

5 апреля 2021 года исполнилось 75 лет Вадиму Константиновичу Иванову, многолетнему редактору нашего журнала, потомственному политехнику, доктору физико-математических наук, профессору, обладателю многих почетных званий, члену различных научных обществ и редколлегий. Обаяние личности Вадима Константиновича и его доброжелательность отмечают все, кто хотя бы раз имел с ним дело.

Отец и дед Вадима Константиновича были преподавателями Ленинградского политехнического института. Вадим Константинович стал достойным продолжателем этой замечательной педагогической династии. В 1963 году, окончив школу с золотой медалью, он поступил на физический факультет Ленинградского государственного университета. В 1969 году В.К. Иванов окончил с отличием физфак ЛГУ по кафедре ядерных реакций и начал трудовой путь стажером-исследователем в теоретическом отделе ФТИ, где достойно зарекомендовал себя, еще будучи студентом. В 1978 году он переходит работать на кафедру экспериментальной физики Ленинградского политехнического института, и с тех пор вся его жизнь неразрывно связана с Политехом. В.К. Иванов создает на кафедре группу, занимающуюся исследованиями многоэлектронных эффектов в атомах, ионах и кластерах, — новым направлением изучения атомных процессов. За время существования этой группы ею проделан огромный объем успешных исследований, результаты которых опубликованы более чем в 400 научных работах (из них свыше 100 — в ведущих зарубежных журналах), обзорных статьях, научных монографиях. Вадим Константинович вдохновляет и направляет усилия членов группы. Высокий уровень исследований и личные качества ее руководителя способствовали избранию юбиляра в члены комитетов престижных международных конференций и редакционных коллегий научных журналов.

Преподавательскую деятельность В.К. Иванов начинает с должности ассистента (1978 — 1981), затем становится доцентом (1981 — 1989), а с 1989 года продолжает вести занятия уже в качестве профессора. Вадим Константинович много лет возглавлял кафедру экспериментальной физики и был деканом физико-механического факультета, не оставляя преподавательской деятельности. Он и блестящий лектор. Его изложение материала по физике отличается четкой последовательностью, строгой логикой и в то же время доступностью. Талант лектора позволяет Вадиму Константиновичу увлечь учеников физикой, сделать из них соратников и последователей. Так кандидатами наук стали более десяти его учеников, он также был консультантом по трем докторским диссертациям. Нельзя также не отметить, что Вадим Константинович удивительно гармонично сочетает понимание путей развития Университета и уважительно-бережное отношение к его вековой истории.

Профессор В.К. Иванов читает курс общей физики и спецкурсы, принимает участие в составлении новых учебных планов и разработке программ учебных дисциплин. Когда в 2001 году был создан Научно-методический совет по физике Министерства образования и науки России под руководством Нобелевского лауреата, академика Ж.И. Алферова, В.К. Иванов стал первым заместителем председателя этого совета.

В 2008 году в журнале «Научно-технические ведомости СПбГПУ» создается серия «Физико-математические науки», где В.К. Иванов становится председателем редколлегии. По мере развития издательской деятельности из серии выделяется отдельное издание – «Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки», – в котором В.К. Иванов становится главным редактором. Он проявляет способность собрать вокруг себя сильный коллектив единомышленников и создать в нем непринужденную, творческую рабочую атмосферу, преодолеть препоны, возникающие на пути развития этого издания. Вадима Константиновича отличают требовательное отношение к качеству публикуемых материалов и при этом бережное и доброе отношение к своим сотрудникам, коллегиальность в принятии решений. Авторитет журнала неизменно поддерживается публикациями как самого В.К. Иванова и его группы, так и многих других ведущих ученых, публикующихся и в других, самых престижных журналах. Именно благодаря В.К. Иванову наш журнал оказался единственным из группы научно-технических ведомостей СПбПУ, который вошел в международные базы цитирования “Scopus” и “Web of Science”.

Юбиляр при любых обстоятельствах интеллигентен, приветлив и внимателен к людям, коллегам, ученикам, студентам. Тысячи его бывших студентов, а ныне ученых-физиков, работающих во всех частях нашей планеты, с теплотой вспоминают его отзывчивость и готовность помочь. Вадим Константинович и сейчас энергичен, находится в хорошей научной и спортивной форме. В его обществе всегда приятно находиться, он доступен и прост, в его разговоре никогда не бывает менторских интонаций. Он человек очень разносторонний: увлекается фотографией, филателией, спортом. Любит путешествовать и отражать свои впечатления в фильмах. На корпоративных мероприятиях он может по-прежнему взять в руки гитару и спеть что-нибудь для своих друзей. 75-летний возраст для настоящего мудрого ученого – это расцвет его творческой деятельности.

***Редакционный совет, редакционная коллегия журнала с радостью присоединяются к многочисленным поздравлениям друзей, коллег и учеников с 75-летием. Эта знаменательная дата символизирует гармоничное сочетание мудрости и богатого разностороннего опыта. Мы выражаем нашу огромную признательность за Вашу приверженность журналу. От всей души желаем Вам, дорогой Вадим Константинович, дальнейших успехов в научной карьере и реализации всех творческих планов, сил, энергии, поддержки семьи и оптимизма! Крепкого Вам здоровья, радости, счастья и благополучия в личной жизни!***

# ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ УСПЕХА
## (к юбилею Юрия Яковлевича Болдырева)

**В.Е. Клавдиев, С.В. Лупуляк, Ю.К. Шиндер**

Пятьдесят лет назад, в 1971 году, Юрий Яковлевич Болдырев после успешного окончания кафедры гидроаэродинамики физико-механического факультета (ФМФ) Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина занял свою первую «взрослую» должность математика-программиста кафедры вычислительной математики ФМФ.

Самая молодая в то время кафедра факультета только преобразовывалась из общеобразовательной в выпускающую, еще формировала круг своих научных интересов. Все кафедры факультета щедро поделились с нею своими лучшими выпускниками. И Юрий Яковлевич прекрасно вписался в команду молодых амбициозных специалистов. А принесенный им с отеческой кафедры интерес к проблемам газовой смазки удачно вписался в тематику научных работ молодой кафедры.

В течение года квалификация Ю.Я. Болдырева выросла настолько, что позволила ему претендовать на должность преподавателя: в 1973 году он стал ассистентом кафедры вычислительной математики. А первыми дисциплинами, в преподавании которых он принял участие, были «Численные методы» и «Программирование».

Первые двадцать лет работы на кафедре были годами активного профессионального роста ученого и педагога. В 1976 году он защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вариационные задачи теории газовой смазки», а в 1993 – диссертацию на соискание степени доктора технических наук на тему «Математическое моделирование в вариационных задачах, связанных с уравнением Рейнольдса». В этот период Юрий Яковлевич решал сложнейшие задачи оптимизации профилей подшипников на газовой смазке, развивая подход, основанный на решении системы необходимых условий экстремума функционала, разработанный под руководством доктора физико-математических наук, профессора Владимира Александровича Троицкого, организатора кафедры и ее заведующего в течение двух десятилетий.

Юрием Яковлевичем были получены оптимальные пространственные профили опорных подшипников на основе сначала линеаризованного, а затем и нелинейного уравнения Рейнольдса теории газовой смазки. Также Юрий Яковлевич установил, что при периодических условиях в задаче оптимизации возникают так называемые «скользящие режимы», в связи с чем была проведена большая работа по обобщению математической модели, основанной на уравнении Рейнольдса и построению предельных уравнений.

Параллельно строилась и профессиональная карьера преподавателя: в 1979 году Юрий Яковлевич занял должность доцента, в 1984 году ему было присвоено звание доцента;

затем в 1994 году его избрали на должность профессора, а в 1995 году он получил ученое звание профессора.

С именем Юрия Яковлевича Болдырева тесно связано появление и развитие первых в России газовых уплотнений. Он осуществлял расчетную поддержку разработок, которые велись в этом направлении в Центральном научно-исследовательском и проектно-конструкторском котлотурбинном институте им. И.И. Ползунова (ЦКТИ, г. Ленинград) под руководством Г.А. Лучина, крупного специалиста, получившего заслуженное признание своих коллег.

В 1999 году успех педагога и ученого был отмечен Министерством образования Российской Федерации: указом президента РФ № 1417 от 22.10.1999 профессору Ю.Я. Болдыреву было присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации».

А вот начало 2000-х гг. подарило Юрию Яковлевичу возможность реализовать свой потенциал организатора. Он внес заметной вклад в развитие высокопроизводительных вычислений в Российской Федерации вообще и в Политехническом университете в частности.

В 2000 году он создал и возглавил кафедру математического и программного обеспечения высокопроизводительных вычислений, имевшую своей целью распространение технологий использования суперкомпьютеров. А через полгода, по поручению ректората Политехнического университета и при его активной поддержке, Юрий Яковлевич преобразовал вычислительный центр университета в Главный информационно-вычислительный комплекс.

Задачей, которую поставил ректорат перед новой структурой, была организация сетевой инфраструктуры Политехнического университета, создание центра высокопроизводительных вычислений и обеспечение привлекательности и доступности его ресурсов. Справедливо было бы оговориться, что суперкомпьютер в вычислительном центре к этому времени уже существовал, но считать его популярным в университетской среде было бы неверно. К безусловному успеху Ю.А. Болдырева на этой стезе следует считать команду специалистов-энтузиастов, которую ему удалось собрать для решения поставленной задачи. Никто из его сотрудников не ждал указаний, каждый знал, что и как надо сделать.

Именно за эти несколько лет Интернет появился практически на каждом рабочем месте университета. И далеко не все знают, что флагман прикладной механикии – «Центр компьютерного инжиниринга» Института передовых производственных технологий (ИППТ) Санкт-Петербургского политехнического университета (СПбПУ) начинался в эти годы в Главном информационно-вычислительном комплексе (ГИВКе).

Сотрудниками ГИВКа, а часто и самим профессором Болдыревым, были прочитаны краткие курсы лекций для ученых разных факультетов, знакомящих их с новыми предоставляемыми им возможностями и технологиями их использования. Преподавателями кафедры математического и программного обеспечения высокопроизводительных вычислений были подготовлены новые учебные курсы для студентов ФМФ, связанные с сопровождением и использованием новых вычислительных средств.

В 2013 году, при проведении в университете масштабных преобразований, кафедра, руководимая Юрием Яковлевичем, объединилась с кафедрой прикладной математики (что было вполне естественно и ожидаемо), а профессор Болдырев возвратился «к своим пенатам». В это же время он, видимо из желания уделить больше времени научной работе, отошел от административной деятельности – оставил пост директора ГИВКа, но сохранил за собой более привлекательную работу руководителя отделения информационно-вычислительных ресурсов того же департамента.

В настоящее время Юрий Яковлевич совмещает работу профессора Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики с должностями ведущего научного сотрудника научно-исследовательской лаборатории виртуально-имитационного моделирования Института прикладной математики и механики (ИПММ) СПбПУ и ведущего научного сотрудника Центра компьютерного инжиниринга ИППТ.

Список научных трудов профессора Болдырева включает более 80 наименований в отечественных и более 40 — в международных базах цитирования. У Юрия Яковлевича много успешных учеников, продолжающих дело своего руководителя.

В этом году Юрию Яковлевичу Болдыреву исполнилось 75 лет — возраст творческой зрелости и научного опыта.

***Коллеги Ю.Я. Болдырева, руководство Санкт-Петербургского политехнического университета и Института прикладной математики и механики поздравляют юбиляра и желают ему активного долголетия, новых научных успехов, талантливых благодарных учеников.***

Научное издание

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

**«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS»**
**ТОМ 14, № 2, 2021**

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-51457 от 19.10.2012 г.



Телефон редакции 294-22-85

Сайт http://ntv.spbstu.ru

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *А.А. Кононовой*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Адрес университета: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

## УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

### 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под сдвоенными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 01.02.04, 01.02.05, 01.04.01, 01.04.02, 01.04.03, 01.04.04, 01.04.05, 01.04.06, 01.04.07, 01.04.10, 01.04.15, 01.04.21.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНИТИ РАН, а также в международной системе по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

### 2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

#### 2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word**.

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Рисунки представляются только в черно-белом варианте. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без переносов. Абзацный отступ – 1 см.

#### 2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (http://journals.spbstu.ru). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

**2.3. Рассмотрение материалов**

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться ДОСРОЧНО.

**Более подробную информацию можно получить по телефону редакции:**
**(812) 294-22-85 с 10.00 до 18.00 – Бушманова Наталья Александровна**
**или по e-mail: physics@spbstu.ru**