

DOI: 10.18721/JPM.14206
 УДК 531.383

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАТОРА ТВГ

С.А. Шевченко, О.И. Конотопов

АО «НИИ командных приборов»,
 Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье методом конечных элементов (МКЭ) исследованы собственные частоты полусферического резонатора твердотельного волнового гироскопа (ТВГ) с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical. Рассмотрена применимость различных КЭ, использующихся в ANSYS, для решения задачи определения собственных частот. Установлены особенности работы с оболочечными и твердотельными элементами. Проведено сравнение результатов аналитического и численного решений задачи по определению собственных частот резонатора. Отмечено наличие «математического» расщепления частоты, вызванного применяемым МКЭ и несимметричностью КЭ-сетки, а также необходимость учета данного расщепления при внесении в модель функции распределения дефекта. Представлен способ нахождения величины расщепления от внесенного дефекта при наличии составляющей «математического» расщепления.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, полусферический резонатор, расщепление частоты, метод конечных элементов

Ссылка при цитировании: Шевченко С.А., Конотопов О.И. Применение конечно-элементного моделирования для исследования динамических характеристик резонатора ТВГ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 65–80. DOI: 10.18721/JPM.14206

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A RESONATOR OF THE GIROSCOPE BASED ON ELASTIC WAVES IN SOLIDS: FINITE-ELEMENT MODELING

S.A. Shevchenko, O.I. Konotopov

JSC "Command Devices Research Institute",
 St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the eigenfrequencies of a hemispherical resonator of the Coriolis vibratory gyroscope have been studied by the finite element method (FEM) using ANSYS Mechanical. Consideration was given to the feasibility of various FE used in the ANSYS to solve the problem of determining the eigenfrequencies. The specifics of working with shell and solid-state elements were established. The results of analytical and numerical solutions of the mentioned problem were compared. The presence of "mathematical" frequency split caused by the used FEM and the unsymmetrical mesh of the FEM was noted, and the need to take this split into account when introducing the defect distribution function into the model was pointed out. The technique for finding the frequency split value resulted by added defect in the presence of "mathematical" frequency split component was demonstrated.

Keywords: Coriolis vibratory gyroscopes, hemispherical resonator, eigenfrequency split, finite element method

Citation: Shevchenko S.A., Konotopov O.I., The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 65–80. DOI: 10.18721/JPM.14206

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Разнообразные типы гироскопических приборов находят применение в современных системах наведения, ориентации и стабилизации. Гироскопы применяются в судостроении, авиации, а также ракетной и космической технике. Одним из перспективных направлений развития гироскопических приборов является создание твердотельных волновых гироскопов (ТВГ). Традиционная гироскопия постепенно уступает место новым поколениям оптических, вибрационных, волновых твердотельных и других гироскопов [1, 2]. Создание и применение новых типов гироскопических приборов связано с необходимостью миниатюризации при обеспечении заданных требований по точности, надежности и длительности срока службы.

В основе работы современных ТВГ лежит явление инертности упругих волн [3]. При повороте объекта, на котором установлен ТВГ, прибор считывает прецессию стоячей волны, возникающую при постоянных колебаниях чувствительного элемента – резонатора. Измерение углового перемещения волны дает возможность вычислять угловую скорость ТВГ в инерциальном пространстве, что и используется для построения датчиков

угловой скорости и углового перемещения [4]. В конструкции ТВГ часто применяются тонкостенные цилиндрические и полусферические резонаторы, представляющие собой классические оболочки с формами колебаний, удобными для практического использования.

Далее рассматриваются конструкция полусферического резонатора (рис. 1), его основные геометрические параметры, а также свойства его материала (табл. 1).

Добротность резонатора – это одна из главных характеристик, определяющих работу прибора. Поэтому при изготовлении резонаторов применяют материалы с низким внутренним трением. Материалом, обладающим одним из наиболее низких уровней внутреннего трения, является кварцевое стекло. Например, металлы имеют соответствующие показатели на 2 – 3 порядка выше, поэтому изготовленные из них приборы обладают худшими техническими характеристиками [4], а значит, не обеспечивают высокой точности. Стоит отметить, что кварцевому стеклу свойственна также изотропия упругих характеристик, что необходимо для материала чувствительных элементов ТВГ. Значения физико-механических характеристик кварцевого стекла, принятые для расчетов,

Таблица 1

Основные характеристики полусферического резонатора

| Материал | Кварцевое стекло КУ-1 |
|------------------------------|-----------------------|
| Модуль упругости, ГПа | 73,6 |
| Коэффициент Пуассона | 0,17 |
| Плотность, кг/м ³ | 2210 |
| Внешний радиус полусферы, мм | 15,25 |
| Толщина стенки полусферы, мм | 0,90 |

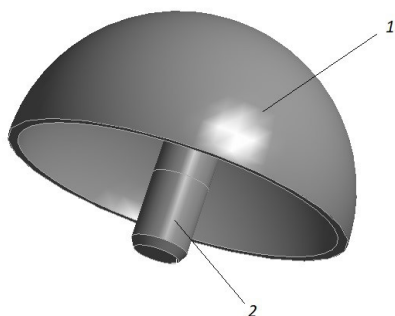


Рис. 1. Геометрическая модель полусферического резонатора:
1 – тонкостенная полусферическая оболочка,
2 – ножка

представленных в статье, выбраны согласно ГОСТ 15130-86.

К точности гироскопических систем вообще и к ТВГ в частности, предъявляются высокие требования. В настоящее время, в связи с достаточно высоким уровнем развития радиоэлектронной аппаратуры, к определяющим факторам, влияющим на точность ТВГ, относятся геометрические и физические параметры его упругого элемента – резонатора, получаемые в процессе изготовления. Другими словами, на уровень точностных параметров ТВГ влияют в первую очередь различные погрешности, возникающие при изготовлении упругого элемента (разнотолщинность, некруглость, шероховатость поверхности, разнотолщинность напыленной металлической пленки и др.), а также несовершенство физических характеристик используемого материала (неоднородность упругих характеристик, разнодобротность, разнотолщинность, внутренние дефекты и др.). Указанные несовершенства вызывают эффект расщепления собственных частот и форм колебаний резонатора за счет возмущения его осевой симметрии. Это выражается в том, что в спектре неидеального резонатора вместо одной возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, приводящие к изменению режима работы прибора. При возникновении расщепления рабочей частоты резона-

тора снижается его добротность, что приводит к уходу гироскопа, и, следовательно, к снижению точностных характеристик ТВГ.

Для оценки степени влияния погрешностей и несовершенства изготовления ТВГ на величину расщепления его рабочей частоты, в процессе разработки применяются различные математические методы, одним из которых служит метод конечных элементов (МКЭ).

Способам расчета собственных значений тонкостенных оболочек различной формы, а также изучению расщепления собственной частоты оболочек посвящено большое количество работ (см., например, статьи [5 – 8] и диссертацию [11]). В указанных источниках наряду с распространенными аналитическими вычислениями авторами используется и МКЭ. Например, в работе [8] отмечается хорошая, по сравнению с аналитическими методами, сходимость результатов, полученных с использованием МКЭ. Стоит отметить, что в указанных работах, за исключением [11], не упоминается расщепление собственной частоты резонатора, вызываемое непосредственно применением самого МКЭ и обусловленное, по-видимому, погрешностью метода определения собственных частот (в настоящей работе это блочный метод Ланцоша [9, 10]) и неидеальностью конечно-элементной сетки. Далее такое расщепление называется «математическим».

Наиболее подробное (среди рассмотренных работ) исследование расщепления частоты резонатора с использованием МКЭ приводится в диссертации [11]. Автор отмечает невозможность отделения величины «математического» (в работе [11] оно именуется «паразитным») расщепления от такового, вызванного дефектами производства, и предлагает минимизировать величину «математического» расщепления путем построения конечно-элементной сетки в соответствии с авторской методикой. При этом в указанной диссертации, как и в других отмеченных работах, не уделяется должного внимания влиянию фазового угла между гармониками различных дефектов при

исследовании их совместного действия на расщепление частоты резонатора. Примечательно, что часто изменение толщины стенки резонатора авторы описывают гармонической функцией относительно срединной поверхности, хотя технологически, в процессе изготовления, наружная поверхность резонатора обычно имеет лучшее качество, по сравнению с внутренней. Поэтому описание изменения указанной толщины через гармоническую функцию по окружности относительно координатной поверхности резонатора, образованной внешним радиусом полушферы, представляет не меньший интерес.

Целью настоящей работы является построение конечно-элементной модели (КЭМ) резонатора ТВГ, предназначенной для определения значения рабочей собственной частоты резонатора с достаточной точностью, и определение возможности учета разнотолщинности стенки резонатора при определении расщепления частот.

Для построения КЭМ использовался программный комплекс ANSYS Mechanical [12]. В рамках настоящей работы рассматривались две обособленные задачи создания модели:

расчета точного значения рабочей собственной частоты резонатора;

оценки влияния различных факторов на эффект расщепления рабочей собственной частоты резонатора, например разнотолщинности.

Постановка задачи

В основе проведенного исследования лежала задача определения собственных частот колебаний тонкостенной полусферической оболочки. При этом целесообразно применить вариационный принцип Гамильтона [13]:

$$\delta I = \delta \int_0^t L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0,$$

где δI – вариация искомого функционала, $L = T - W$ (T, W – кинетическая энергия рас-

сматриваемого элементарного объема оболочки и потенциальная энергия деформаций соответственно).

Выражения для кинетической и потенциальной энергии в общем виде можно записать как

$$T = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho V^2 d\sigma,$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{23}\epsilon_{23}) d\sigma,$$

где ρ , кг/см³, – плотность материала; V , м/с, – вектор абсолютной скорости произвольной точки упругого тела; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, Па, – нормальные напряжения выделенного элемента упругого тела; $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$, – соответствующие им деформации удлинения; $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$, Па, – касательные напряжения выделенного элемента упругого тела; $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$, – соответствующие им деформации сдвига; σ , м³, – объем выделенного элемента упругого тела.

Выражения для T и W применительно к расчету собственной частоты резонатора можно найти в ряде работ; при этом выражения могут различаться тем, что в них отсутствует учет каких-либо компонент тензора напряжений (деформаций). Так, в данной работе, для сравнения расчетных значений частот, полученных методом конечных элементов, использовались выражения в постановке теории тонких оболочек, приведенные, в частности, в книге [14]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho h V^2 A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\epsilon_1 \epsilon_2 - \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right) \right] A_1 A_2 d\theta d\varphi + \rightarrow$$

$$\rightarrow + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_1\kappa_2 - \tau^2) \right] A_1 A_2 d\theta d\varphi,$$

где h , м, – толщина полусферической оболочки; A_1, A_2 – параметры Ляме; ν – коэффициент Пуассона материала; E , МПа, – модуль упругости материала; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности; κ_1, κ_2 – параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности; ω, τ – параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно; θ, φ , град, – зенитный и азимутальный углы, соответственно.

Если использовать метод Ритца [15], то задача по нахождению собственных частот сводится к алгебраической задаче на собственные значения:

$$(A - \lambda^2 B)C = 0,$$

где A, B – матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями, а также координатными функциями; C – вектор-столбец неизвестных коэффициентов; λ – вектор-столбец значений собственных частот.

Важно отметить, что приведенные выше соотношения в постановке теории оболочек соответствуют основным допущениям оболочки Кирхгофа – Лява [16]:

плоское сечение, перпендикулярное срединной поверхности до деформации, перпендикулярно к ней и после нее;

нормальное напряжение по оси, перпендикулярной срединной поверхности, не рассматривается ввиду его малости;

толщина оболочки в процессе деформирования не изменяется.

Также расчет подразумевает допущение о малости деформаций и, соответственно, об отсутствии учета геометрической нелинейности.

Далее изложение задачи создания КЭМ будет включать не только объемные элемен-

ты типа Solid, но и оболочечные элементы типа Shell. В используемом программном комплексе ANSYS моделирование с использованием элементов типа Shell также подразумевает представленные выше допущения, за исключением первого, для оболочки Кирхгофа – Лява. В данном случае допускается изменение угла между плоским сечением и срединной поверхностью в результате деформации оболочки. Эта постановка соответствует варианту оболочки Миндлина – Рейсснера [17], который в отечественной литературе более известен как оболочка Тимошенко [18].

Выбор оптимальных КЭМ резонатора

Работа резонатора характеризуется численным значением рабочей собственной частоты и соответствующей ей формой колебаний. Значение собственной частоты и форма колебаний определяются следующими факторами:

геометрическими размерами резонатора (радиус полусферы, ее толщина);

размерами ножки и способом ее закрепления;

физико-механическими характеристиками выбранного материала.

Традиционно работа ТВГ строится на совместных колебаниях резонатора по двум гироскопически связанным эллиптическим формам, соответствующим его рабочей частоте [4, 19] (рис. 2).

Неидеальность геометрических параметров резонатора влечет за собой возмущение осевой симметрии, вызывающее эффект расщепления его собственных частот колебаний. Этот эффект выражается в том, что вместо одной частоты в спектре неидеального резонатора возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, приводящие к изменению режима работы прибора и недопустимому снижению точности [7]. Таким образом, разрабатываемая КЭМ должна обладать достаточной степенью чувствительности, чтобы зафиксировать расщепление частоты, соответствующее его допустимому значению для исследуемого из-

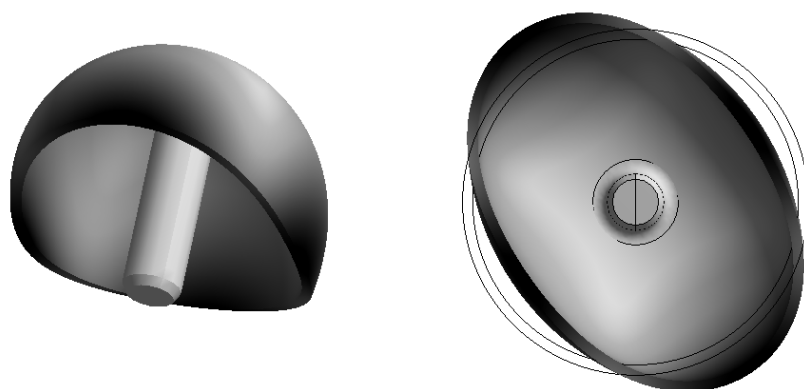


Рис. 2. Эллиптическая форма колебаний резонатора, соответствующая его рабочей частоте (показаны две проекции, на правой показано для наглядности отклонение от идеальной круговой формы в плоскости колебаний)

деля. Другими словами, для оценки характеристик резонатора, влияющих на точностные параметры ТВГ, интерес представляет не столько определение точного значения собственной частоты колебаний выбранного конструктива, сколько зависимость ее изменения от величины рассматриваемых отклонений от идеальной системы.

В связи с этим предлагается использовать различные модели для решения двух отдельных задач: точное определение рабочей собственной частоты колебаний резонатора и определение влияния разнотолщинности на величину расщепления частоты.

Критерием, определяющим качество разработанных моделей, может служить требуемая точность расчетного значения собственной частоты (для первой задачи) и величина расщепления частоты в зависимости от размера дефекта (для второй задачи). Отметим, что для первичного анализа определение значения собственной частоты с точностью до 1 Гц является достаточным. За максимально допустимую погрешность вычисления расщепления (для второй задачи) принималось значение $1 \cdot 10^{-4}$ Гц, что на порядок выше допускаемого значения расщепления частоты кварцевых полусферических резонаторов после балансировки.

Поскольку для построения КЭМ можно использовать различные типы элементов, в процессе исследования было проведено

сравнение моделей, построенных с применением некоторых видов оболочечных и твердотельных элементов. При этом ставилась цель найти оптимальный баланс между трудоемкостью расчета и его точностью. Для сравнения были построены четыре КЭМ.

Первая модель (КЭМ I). Полусфера разбивалась на элементы типа SHELL181, т. е. на оболочечные элементы 1-го порядка, имеющие 4 узла с шестью степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей и повороты вокруг этих осей);

Вторая модель (КЭМ II). Разбиение полусферы осуществлялось на элементы типа SHELL281, т. е. на оболочечные элементы 2-го порядка, имеющие 8 узлов с шестью степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей и повороты вокруг них);

Третья модель (КЭМ III). Полусфера разбивалась на элементы типа SOLID186, т. е. на твердотельные элементы 2-го порядка, имеющие 20 узлов с тремя степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей);

Четвертая модель (КЭМ IV). Построение сетки на полусфере осуществлялось элементами типа SOLID187, т. е. твердотельными элементами 2-го порядка, имеющими 10 узлов с тремя степенями свободы в каждом (линейные перемещения вдоль трех осей).

Для повышения точности получаемых результатов было необходимо обеспечить

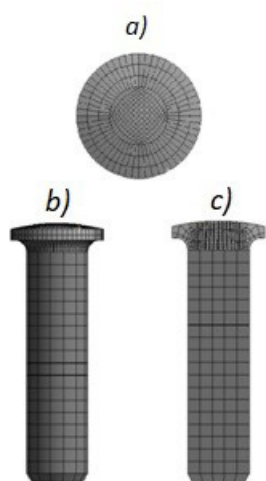


Рис. 3. Сетки конечных элементов участка скругления (a) и ножки резонатора (b, c).
Разбиение выполнено на элементы SOLID186 и SOLID185 соответственно; b, c – ножка и ее продольное сечение

разбиение исходной геометрии объекта на регулярную конечно-элементную сетку. Отличительной особенностью такой сетки является структурированность и упорядоченность расположения используемых элементов, преимущественно правильной формы.

Во всех четырех КЭМ разбиение ножки осуществлялось твердотельными элементами 1-го порядка SOLID185. Это было сделано с целью уменьшения расчетного времени, так как степень разбиения ножки резонатора не влияет на значение собственной частоты его колебаний, соответствующей второй (эллиптической) форме колебаний. Разбиение участка скругления от ножки к полусфере осуществлялось элементами SOLID186 (рис. 3). Необходимо отметить, что отсутствие указанного влияния определяется конструкцией самой ножки, а именно ее диаметром и длиной. Выбранные конструктивные параметры обеспечивают достаточную отстройку частот колебаний резонатора, обусловленных изгибом ножки, от рабочей эллиптической частоты. В случае близких значений указанных частот возможно возникновение негативных эффектов, рассмотренных в статье [20].

В ходе расчетов, нацеленных на получение модели требуемой точности при минимизации расчетного времени, устанавливалось минимально необходимое число элементов и узлов полусферы. В случае оболочечных моделей размер элементов полусферы варьировался от 0,9000 до 0,1125 мм. Сетка конечных элементов SHELL281 показана на рис. 4, a, b.

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов типа оболочка или пластина с использованием конечных элементов типа SOLID, для получения приемлемого результата необходимо обеспечить при построении КЭМ достаточное количество элементов по толщине. Поэтому в работе рассматривались различные варианты моделей с количеством элементов по толщине стенки полусферы от одного до восьми. На рис. 4, c, d показан пример разбиения полусферы на элементы SOLID186.

На рис. 5, 6 показаны зависимости значений собственной частоты колебаний резонатора от количества узлов, использованных в моделях. По полученным графикам можно определить оптимальное количество узлов, при котором величина Δ – изменение значения полученного решения при увеличении количества узлов – будет менее 0,01 %.

Анализ графиков на рис. 5, соответствующих моделям с оболочечными элементами, позволяет заключить, что значение собственной частоты устанавливается на уровне 4808 – 4809 Гц. Графики приводятся для модели с использованием срединной поверхности в качестве поверхности приведения. В КЭМ I величина $\Delta = 0,005$ %, а в КЭМ II $\Delta = 0,006$ %. Различие полученных значений частоты между двумя моделями составляет не более 0,6 Гц. Здесь же видно, что применение элементов 2-го порядка (SHELL281) предпочтительнее, так как для достижения установившегося решения достаточно 50 тыс. узлов, тогда как при использовании элементов 1-го порядка необходимо не менее 83 тыс. узлов.

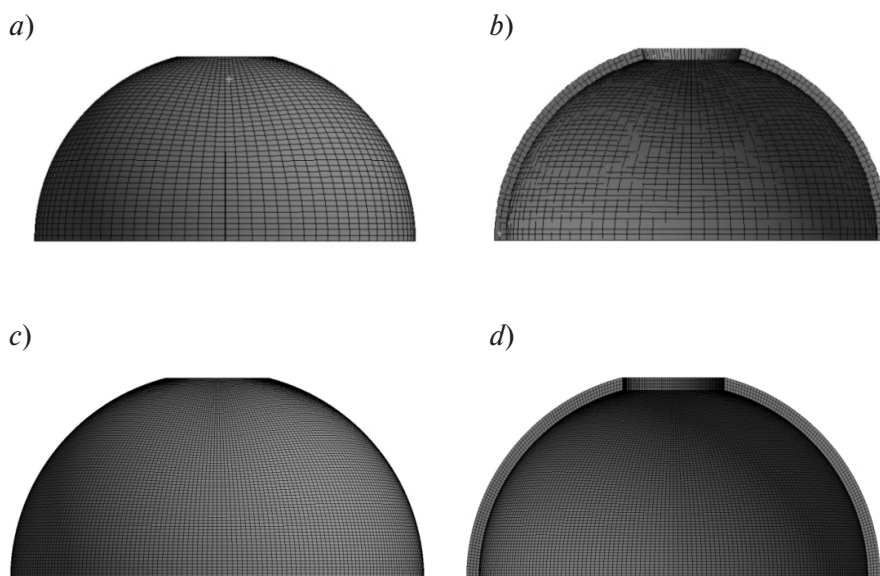


Рис. 4. Разбиение полусферы (*a, c*) и ее поперечного сечения (*b, d*) на элементы SHELL281 (*a, b*) и SOLID186 (*c, d*)

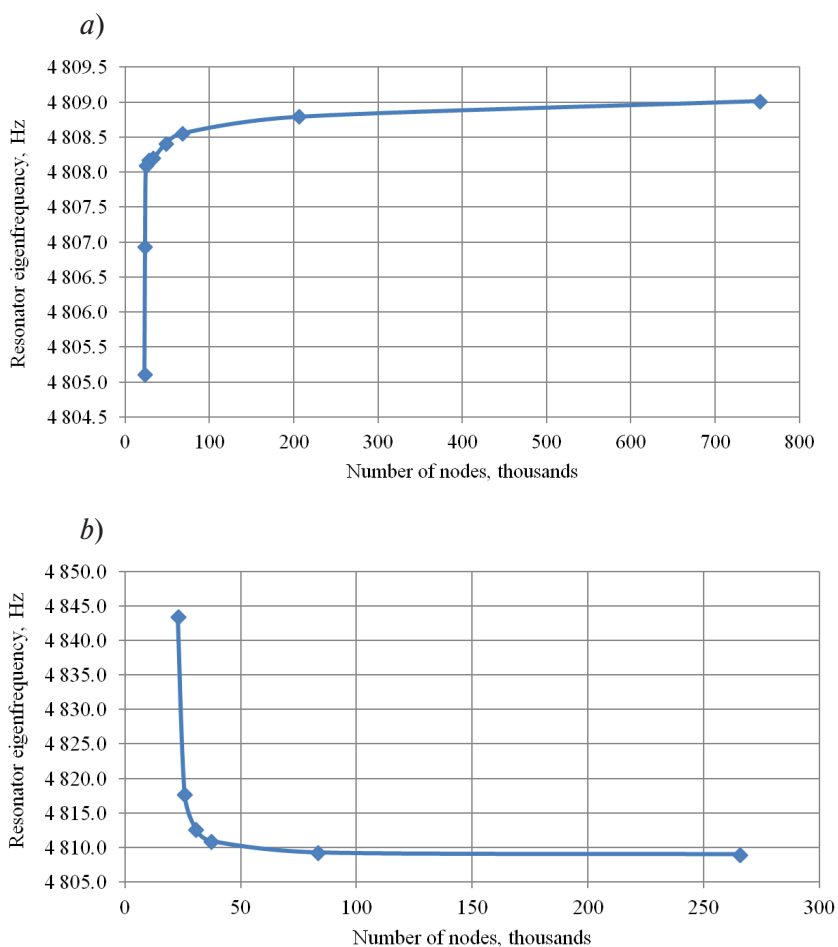


Рис. 5. Расчетные графики зависимостей частоты колебаний резонатора от количества узлов, использованных в КЭМ I (SHELL281) (*a*) и КЭМ II (SHELL181) (*b*)

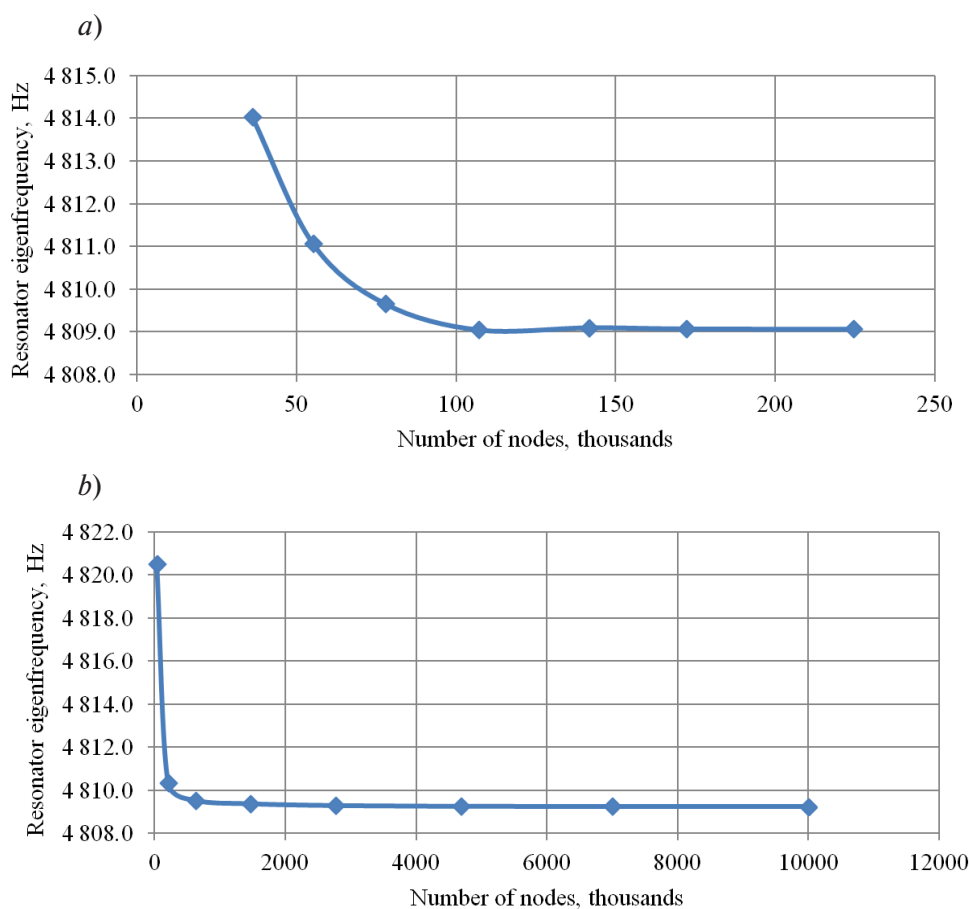


Рис. 6. Расчетные графики зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 5, но для КЭМ III (SOLID186) (a) и КЭМ IV (SOLID187) (b)

Необходимо отметить, что сходимость результатов в моделях с использованием оболочечных элементов происходит с разных сторон. Задача с элементами типа SHELL181 сходится к устойчивому решению от больших значений, что соответствует классическому поведению графиков сходимости численной задачи. Однако использование элементов SHELL281 показывает обратную картину. Это, возможно, связано с используемым типом контактного взаимодействия (SHELL-SOLID) полусферы и ножки. Контакт между телами осуществляется по линии, что приводит к локальному нагружению по граням твердотельных элементов. При этом в случае исключения ножки из модели и реализации жесткой заделки по соответствующей грани полусферы «жесткая» характеристика графика сходимости наблюдается и для элемента SHELL281.

Анализ графиков твердотельных моделей (рис. 6) показывает, что искомое значение собственной частоты остается постоянным, начиная с определенной дискретизации модели. Различие значений частоты между твердотельными элементами SOLID186 и SOLID187 составляет не более 0,06 Гц. Значение Δ , полученное по результатам проведения сеточной сходимости, для КЭМ III и КЭМ IV составили 0,0002 % в обоих случаях. Однако для получения близких по точности результатов, в случае применения элементов SOLID187 потребовалось в полтора раза большее количество узлов КЭМ. В связи с этим, для проведения расчетов целесообразно применять элементы SOLID186. В целом можно заключить, что четыре элемента по толщине стенки полусферы является оптимальным вариантом разбиения для анализа собственных частот с точностью до 0,1 Гц.

Отметим, что для первичной оценки значения собственной частоты (с точностью до 1 Гц) оказывается достаточным разбиение полусферы по толщине на два элемента. Отличие при таком разбиении от установившегося решения составляет 0,44 Гц.

Результаты расчета рабочей собственной частоты резонатора

Одновременно с конечно-элементным моделированием для сравнения проводился аналитический расчет по упрощенным выражениям для полусферической оболочки, полученным Рэлеем [21], и по теории оболочек Гольденвейзера [22], с уточнением в части учета растяжимости срединной поверхности. Результаты всех найденных значений собственной частоты для второй формы колебаний приведены в табл. 2.

Необходимо отметить, что в настоящей работе при сравнении полученных данных за точное решение принимается результат установившегося расчета с использованием твердотельных элементов. Это объясняется тем, что модели с твердотельными элементами подразумевают решение задачи теории упругости без каких-либо упрощений. При этом точность результата определяется степенью дискретизации модели и математической погрешностью самого метода решения задачи на собственные значения.

Как видно из данных табл. 2, результат определения собственной частоты резонатора, полученный с помощью рассмотренных КЭМ с оболочечными и твердотельными элементами, показывает сопоставимые значения. При этом среди расчетных результа-

тов, полученных с использованием аналитических методов, наиболее точным оказывается значение по Гольденвейзеру.

При решении второй из поставленных выше задач, а именно – определении расщепления собственных частот резонатора, использовались элементы типа SHELL281 (КЭМ I) для анализа влияния разнотолщинности на динамические характеристики резонатора. Применение оболочечных элементов позволяет довольно просто задавать изменение толщины полусферы без фактического изменения ее геометрии, а также значительно снижает расчетное время с сохранением достаточной точности вычислений.

Влияние дефектов на величину расщепления рабочей частоты резонатора

Особенности внесения в КЭМ резонатора различных дефектов. Для определения расщепления рабочей частоты резонатора при наличии какого-либо дефекта необходимо внести в КЭМ функцию распределения этого дефекта. В реальном резонаторе распределение таких дефектов, как разнотолщинность и разнотолтность по азимутальному или меридиональному углу имеет случайный характер. Однако при моделировании часто используется гармоническая зависимость распределения дефекта как наиболее простая в отношении вычислений:

$$x(\alpha) = x_0 + X \cdot \sin(m\alpha + \beta),$$

где x_0 , m , – номинальная величина параметра (толщина полусферы, плотность материала); X , β , – амплитуда; m – номер гармоники де-

Таблица 2
Значения рабочей собственной частоты колебаний резонатора (вторая форма), рассчитанные различными методами

| Метод расчета | Частота, Гц |
|--------------------------------|-------------|
| Рэлея | 5277,60 |
| Теории оболочек Гольденвейзера | 4814,20 |
| Конечных элементов | 4809,02 |
| | 4809,08 |

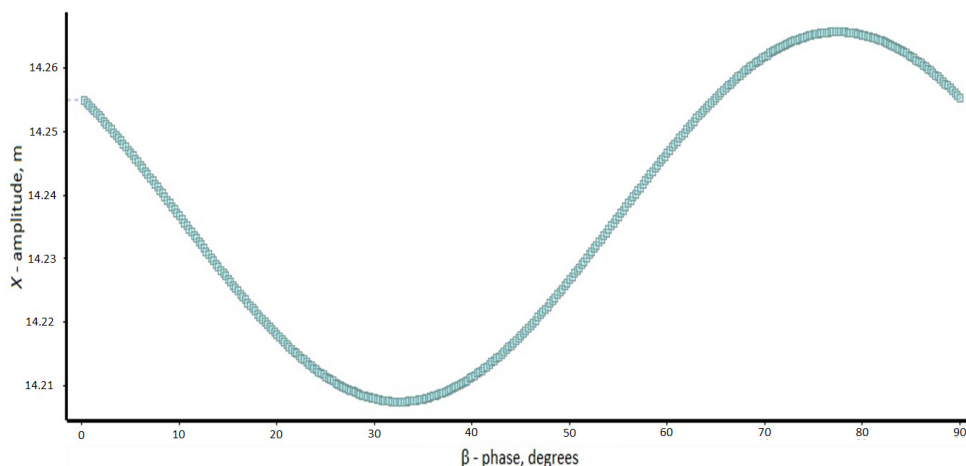


Рис. 7. Расчетная зависимость суммарного расщепления рабочей частоты резонатора от фазового угла функции дефекта

фекта; α , β , град, — начальные угол и фаза соответственно.

Номер гармоники выбирается произвольно, в зависимости от моделируемой функции дефекта; отметим лишь, что четвертая гармоника имеет наибольшее влияние на расщепление частоты резонатора, соответствующей эллиптической форме колебаний. Причины указанного влияния подробно описаны в литературе [3, 19]. При этом гармоники, отличные от четвертой, имеют влияние, меньшее на порядок. Таким образом, для моделирования наихудшего случая влияния дефекта на расщепление частоты целесообразно использовать четвертую гармонику распределения дефекта.

Как упоминалось ранее, при использовании МКЭ возникает «математическое» расщепление даже при использовании идеальной геометрии. При этом важно отметить, что величина «математического» расщепления является измеримой (расчетной) величиной. Основной причиной возникновения «математического» расщепления является неидеальность сетки конечных элементов. Таким образом, при решении задачи на собственные частоты в модели резонатора с внесенным дефектом $x(\alpha)$ в результате получается некоторое суммарное расщепление, одним из составляющих которого является

величина «математического» расщепления.

Исходя из того, что рассматриваемая рабочая собственная частота является эллиптической, а, следовательно, соответствует второй гармонике, «математическое» расщепление представляется в виде второй гармоники в качестве составляющей суммарного расщепления. С учетом вышеизложенного, для того чтобы определить значения составляющих расщепления, необходимо знать фазовый сдвиг гармоник друг относительно друга. При этом необходимо отметить, что при совпадении фаз гармоник, представляющих «математическое» расщепление и распределение дефекта, итоговое расщепление будет составлять сумму значений расщепления обоих дефектов, а в случае противофазы — разность значений. Отмеченное свойство наглядно прослеживается, например, при внесении в модель четвертой гармоники дефекта с изменением угла начальной фазы от 0° до 90° (рис. 7).

На этом рисунке по оси ординат отложена суммарная величина расщепления $\sum \Delta f$, по оси абсцисс — фазовый угол β . Фазовый угол максимумов и минимумов зависит от построенной сетки и сохраняется при изменении амплитуды или природы дефекта (дефект вызван погрешностями изготовления или неоднородностью материала).

Вычисление величины расщепления при внесении дефектов в КЭМ резонатора. Одним из факторов, определяющих возникновение эффекта расщепления собственной частоты резонатора, выступает массовый дисбаланс чувствительного элемента. В реальном полусферическом резонаторе неуравновешенная масса непрерывно распределена по всей оболочке, что при возбуждении вызывает колебания его центра масс и приводит к расщеплению частоты и снижению добротности за счет рассеяния энергии колебаний в опорах. Сам массовый дисбаланс вызван отмеченными выше геометрическими и физическими погрешностями, в том числе разнотолщиной и разнотолщиной. В связи с тем, что применение МКЭ приводит к возникновению «математического» расщепления, для вычисления составляющей внесенного дефекта разнотолщинности необходимо также найти значение данного расщепления. Это возможно, если в качестве функции распределения дефекта – разнотолщинности – используется гармоническая функция:

$$h(\alpha) = h_0 + X_h \cdot \sin(m\alpha + \beta),$$

где h_0 , м, – номинальная толщина стенки резонатора; X_h , м, – половина величины разнотолщинности; α , град, – угловая координата, соответствующая азимутальному углу.

В данной работе при решении задачи по нахождению собственных частот резонатора с помощью ANSYS, расщепление рабочей частоты может определяться через разность двух близких частот, соответствующих эллиптической форме колебаний. При этом результатом данного расчета будет некоторое суммарное расщепление от различных дефектов, если они внесены в КЭМ резонатора. В случае «идеальной» геометрии (отсутствие дефектов), суммарное расщепление будет равняться «математическому»:

$$\sum \Delta f = \Delta f_m = f_{II}^{(2)} - f_{II}^{(1)},$$

где Δf_m , Гц, – математическое расщепление; $f_{II}^{(2)}$, $f_{II}^{(1)}$, Гц, – большая и меньшая по значе-

нию собственные частоты, определяющие расщепление.

Если же в модель внесен для рассмотрения дополнительный дефект, например разнотолщинность, то суммарное расщепление будет определяться как

$$\begin{aligned} \sum \Delta f &= f_{II}^{(2)} - f_{II}^{(1)} = \\ &= \Delta f_m \cdot \sin(2\alpha_1 + \beta_1) + \Delta f_h \cdot \sin(m\alpha_2 + \beta_2), \end{aligned}$$

где Δf_h , Гц, – расщепление, вызванное разнотолщиной; α_i , β_i , град, – углы и фазы, определяющие распределение дефектов по азимутальному углу.

Из приведенных выше соотношений видно, что для однозначного определения Δf_h необходимо знать начальные углы и фазы гармоник, соответствующих дефектам. Если это учесть и использовать два экстремальных значения суммарного расщепления (при нахождении гармоник в фазе и в противофазе), то можно составить простую систему из двух уравнений, позволяющую определить значение расщеплений от каждого дефекта:

$$\begin{cases} \sum \Delta f_{\max} = \Delta f_h + \Delta f_m, \\ \sum \Delta f_{\min} = \Delta f_h - \Delta f_m. \end{cases}$$

Для автоматизации расчета по нахождению двух экстремальных значений суммарного расщепления в ANSYS, можно определить β и $\sum \Delta f$ как параметры, построив тем самым график, аналогичный приведенному на рис. 7. Следует отметить, что найденные угол и фаза, соответствующие «математическому» расщеплению, сохраняются в модели и после изменения характеристик, описывающих иные дефекты, что исключает необходимость проведения дополнительных расчетов для обеспечения поиска экстремальных значений суммарного расщепления. Таким образом, при использовании блочного метода Ланцоша в программном комплексе ANSYS можно определить величину расщепления, вызванного разнотолщиной, путем учета «математического» расщепления.

В качестве примера использования пред-

Таблица 3

Результаты определения расщепления рабочей частоты резонатора

| Заданная функция дефекта | Расщепление, Гц |
|--|-----------------|
| $\rho(\alpha) = 2210 + 10 \cdot \sin 4\alpha$ | 7,7193 |
| $h(\alpha) = 9 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 4\alpha$ | 6,4881 |

ставленной методики вычислений, для полусферического резонатора заданной конструкции были получены численные значения расщеплений, вызванных разнотолщинностью и разнотолщинностью (табл. 3). Каждый дефект рассматривался отдельно. Величина разнотолщинности составляла 6 мкм, плотность кварцевого стекла изменяли в пределах 2200 – 2220 кг/см³. Функции дефектов представлены в виде четвертой гармоники.

В результате полученные значения ограничиваются применяемым методом численного расчета и упрощениями, принятыми в математической модели оболочки для конечных элементов типа SHELL281.

В процессе исследования также был отмечен ряд особенностей, например при внесении в КЭМ дефекта плотности установлено, что величина «математического» расщепления изменяется пропорционально среднему арифметическому значению частот $f_{II}^{(1)}$ и $f_{II}^{(2)}$, что позволяет вычислить величину «математического» расщепления не только при проведении расчета, когда гармоники находятся в фазе/противофазе. Это также не отменяет необходимости нахождения экстремальных значений суммарного расщепления вновь разработанной КЭМ. Одновременно с этим, аналогичная зависимость не наблюдается при изменении, например, толщины полусферы или модуля упругости материала. Таким образом, при нахождении зависимости расщепления от дефектов, изменяющих сформированную матрицу жесткости КЭМ, необходимо при каждом изменении определять и новое значение «математического» расщепления.

Заключение

В представленном исследовании разработаны конечно-элементные модели (КЭМ) с применением различных типов элементов, которые могут использоваться для изучения динамики работы резонатора. Было установлено, что для определения собственной частоты полусферического резонатора с эллиптической формой колебаний следует использовать элементы SHELL281 как оптимальные по соотношению времени расчета и точности. Также КЭМ с использованием указанных элементов и методики, описанной и апробированной в данной работе, удобно применять для изучения влияния различных дефектов на работу резонатора.

Чувствительность оболочечных элементов к величине разнотолщинности, по-видимому, ограничивается погрешностью численного метода расчета, оценка которой выходит за рамки данной работы. Показанная методика позволяет исследовать расщепление частоты, вызванное неравномерным распределением свойств материала (плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона), а также разнотолщинностью внутренней, внешней или срединной поверхностей полусферы с использованием стандартных функций программного комплекса ANSYS Mechanical.

В работе также отмечена важность учета фазы функций, описывающих распределение дефектов, ввиду присутствия в любой КЭМ «математического» расщепления, вызванного погрешностью расчетного метода и несовершенством конечно-элементной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пешехонов В.Г.** Перспективы гироскопии // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: Изд. Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 36–38.
2. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Голиков А.В.** Общая и прикладная теория гироскопов с применением компьютерных технологий. Под ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: Изд. ЦНИИ «Электроприбор», 2010. 154 с.
3. **Журавлев В.Ф., Климов Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. **Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А.** Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
5. **Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А.** Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. Спец. выпуск № 6 «Современные проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин». С. 176–185.
6. **Heidari A., Chan M., Yang H., Jaramillo G., Taheri-Tehrani P., Fonda P., Najar H., Yamazaki K., Lin L., Horsley D.** Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2013. Vol. 23. No. 12. Pp. 125016–125023.
7. **Козубняк С.А.** Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3 (102). С. 39–49.
8. **Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А.** Численное исследование резонаторов ВТГ различной формы при наличии дефектов различного типа // Наука и образование. Электронное научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 10. С. 1–22.
9. Ansys®Mechanical™, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Structural Analysis guide, Modal Analysis, ANSYS, Inc.
10. **Друскин В.Л., Книжнерман Л.А.** Оценки ошибок в простом процессе Ланцоша при вычислении функции от симметричных матриц и собственных значений // Журнал вычислительной математики и математической физики 1991. Т. 31. № 7. С. 970–983.
11. **Вахлярский Д.С.** Оптимизация формы резонатора волнового твердотельного гироскопа по критерию минимума расщепления собственных частот. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Специальность 01.02.06: Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры. М.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2019. 197 с.
12. Ansys®Mechanical™, Release 14.5.
13. **Голдстейн Г.** Классическая механика. Пер. с англ. М.: Наука. Гл. редакция физико-математической литературы, 1975. 413 с.
14. **Новожилов В.В.** Теория тонких оболочек. Ленинград: Судпромгиз, 1962. 431 с.
15. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. М.: Гостехиздат, 1958. 628 с.
16. **Кирхгоф Г.** Механика. Лекции по математической физике. Пер. с нем. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 392 с.
17. Ansys®Mechanical™, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Element Reference, ANSYS, Inc.
18. **Тимошенко С.П., Войновский-Криггер С.** Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
19. **Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 168 с.
20. **Киреенков А.А.** Расчет спектра полусферы на ножке // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 23–29.
21. **Дж.В. Стретт (Лорд Рэлей).** Теория звука. Т. 2. Пер. с англ. М.: ГТТЛ, 1955. 474 с.
22. **Гольденвейзер А.Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Статья поступила в редакцию 25.02.2021, принята к публикации 05.04.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШЕВЧЕНКО Сергей Александрович — начальник сектора АО «НИИ командных приборов», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

198216, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Трамвайный пр-т, 16
 shevchenko.sergei.a@yandex.ru

КОНОТОПОВ Олег Игоревич — инженер-конструктор АО «НИИ командных приборов», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

198216, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Трамвайный пр-т, 16
 konotopov96@gmail.com

REFERENCES

1. **Peshehonov V.G.**, Perspektivy giroskopii [The prospects for gyroscopy], In the book: Proceedings of the 13th All-Russian Conference on the Management Problems “VSPU-2019”, Publication of Institute of Control Sciences RAS, Moscow (2019) 36–38 (in Russian).
2. **Dzhashitov V.E., Pankratov V.M., Golikov A.V.**, Obshaya i prikladnaya teoriya giroskopov s primeneniem komputernih tehnologii [The general and applied theories of gyroscopes using computer technology], Edited by Peshehonov V.G., Publication of State Research Center of the Russian Concern CSRI “Electropribor”, St. Petersburg, 2010 (in Russian).
3. **Zhuravlev V.F., Klimov D.M.**, Volnovoi tverdotel'nyy giroskop [The solid-state wave gyro], Moscow, “Nauka” Publ., 1985 (in Russian).
4. **Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A.**, Volnovoi tverdotel'nyy giroskop. Teoriya i tekhnologiya [The solid-state wave gyro. The theory and technology], “Radiotekhnika” Publ., Moscow, 2014 (in Russian).
5. **Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A.**, Rashepleniye sobstvennykh chastot kolcevoogo rezonatora tverdotelnogo volnovogo gyroscopa, vizvannoe vozmushcheniem formy [Splitting of natural frequencies of a ring resonator of the solid-state gyro due to form perturbation], Herald of the Bauman Moscow State University, Machinery. (6) (2012) 176–185 (in Russian).
6. **Heidari A., Chan M., Yang H., et al.**, Hemispherical wineglass resonators fabricated from the microcrystalline diamond, Journal of Micromechanics and Microengineering. 23 (12) (2013) 125016–125023.
7. **Kozubnyak S.A.**, Splitting of natural frequencies of cylindrical resonator gyro due to non-ideal shape, Herald of the Bauman Moscow State University, Machinery. (3 (102)) (2015) 176–185 (in Russian).
8. **Vahlyarskiy D.S., Guskov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A.**, Numerical study of differently shaped HRG resonators with various defects, Science & Education of the Bauman MGTU. Electronic Journal. (10) (2016) 1–22 (in Russian).
9. Ansys®Mechanical™, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Structural Analysis guide, Modal Analysis, ANSYS, Inc.
10. **Druskin V.L., Knizhnerman L.A.**, Error bounds in the simple Lanczos procedure for computing functions of symmetric matrices and eigenvalues, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 31 (7) (1991) 20–30.
11. **Vahlyarskiy D.S.**, Optimizatsiya formy rezonatora volnovogo tvoyrdotel'nogo giroskopa po kriteriyu minimuma rasshchepleniya sobstvennykh chastot [Optimizing the resonator shape of solid-state wave gyro according to the criterion of minimum splitting of eigenfrequency], PhD Thesis, Bauman State Technical University, Moscow, 2019 (in Russian).
12. Ansys®Mechanical™, Release 14.5.
13. **Goldstein H.**, Classical mechanics, Addison-Wesley, USA, 1951.
14. **Novozhilov V.V., Radok J.M.R.** (Eds.), Thin shell theory, Springer Netherlands, 1964.

15. **Babakov I.M.**, Teoriya kolebaniy [The theory of vibrations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
16. **Kirchhoff G.**, Vorlesungen über mechanic, Publisher B.G. Teubner, Leipzig, 1824.
17. Ansys®Mechanical™, Release 14.5, Help System, Mechanical APDL, Element Reference, ANSYS, Inc.
18. **Timoshenko S., Woinowky-Krieger S.**, Theory of plates and shells, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, inc., New York, Toronto, London, 1959.
19. **Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V.**, Proektirovanie volnovogo tverdotelnogo gyroskopa [Design of a solid-state gyroscope], Bauman MS-TU Publ., Moscow, 1997 (in Russian).
20. **Kireenkov A.A.**, Calculation of the spectrum of a hemisphere on a leg, Mechanics of Solids. A Journal of RAS. 33 (4) (1998) 19–24.
21. **Strutt J.W. (3rd Baron Rayleigh)**, The theory of sound, Vol. II, Macmillan, London, 1896.
22. **Goldenweiser A.L.**, Theory of thin elastic shells, Int. Ser. of Monograph in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, New York, 1961.

Received 25.02.2021, accepted 05.04.2021.

THE AUTHORS

SHEVCHENKO Sergei A.

JSC "Command Devices Research Institute"

16, Tramvaynyy Ave., St. Petersburg, 198216, Russian Federation

shevchenko.sergei.a@yandex.ru

KONOTOPOV Oleg I.

JSC "Command Devices Research Institute"

16, Tramvaynyy Ave., St. Petersburg, 198216, Russian Federation

konotopov96@gmail.com