

**АНАЛИЗ ПОПРАВОК К ПОСТОЯННЫМ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ИЗОГНУТОМ МНОГОМОДОВОМ
ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ****А.А. Маркварт, Л.Б. Лиокумович, Н.А. Ушаков**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Работа посвящена исследованию равномерно изогнутого слабонаправляющего оптического многомодового волокна с параболическим профилем показателя преломления. В рамках формализма малых возмущений записана формула для поправок второго порядка малости к постоянным распространения мод равномерно возмущенного диэлектрического волновода. На этой основе получено простое аналитическое выражение для поправок к постоянным распространения мод изогнутого параболического многомодового волокна. Показано, что поправки к квадратам постоянных распространения мод одинаковы для всех мод. При этом поправки к разности постоянных распространения мод в изогнутом волокне пропорциональны разности постоянных распространения мод прямолинейного волокна с коэффициентом, не зависящим от номеров мод. Результат особенно важен для анализа интерферометрических оптоволоконных датчиков на основе изгиба чувствительного волокна.

Ключевые слова: оптическое волокно, градиентный профиль, изогнутый волновод, метод возмущений, постоянная распространения

Ссылка при цитировании: Маркварт А.А., Лиокумович Л.Б., Ушаков Н.А. Анализ поправок к постоянным распространения в изогнутом многомодовом параболическом оптическом волокне // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 104–117. DOI: 10.18721/JPM.14209

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

**AN ANALYSIS OF CORRECTIONS
TO THE PROPAGATION CONSTANTS OF A MULTIMODE
PARABOLIC OPTICAL FIBER UNDER BENDING****A.A. Markvart, L.B. Liokumovich, N.A. Ushakov**Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

The goal of our work was to study a circularly bent, weakly guiding, multimode optical fiber with a parabolic refractive index profile. With this in mind, the second-order corrections to propagation constants of longitudinally perturbed arbitrary dielectric waveguide's modes were found using the perturbation theory. Based on that general result, a simple analytic equation describing the corrections to the propagation constants of the modes in the bent parabolic optical fiber was derived. It was shown that the increments of squares of mode propagation constants were the same for all modes. Moreover, the increments of mode propagation constants' differences in the bent fiber were proportional to those in the straight fiber. The proportionality coefficient was independent of the mode number. The obtained results are of high importance for development of optical fiber sensors, in which fiber bending is possible.

Keywords: fiber, curvature, graded index, bent waveguide, perturbation analysis, propagation constant

Citation: Markvart A.A., Liokumovich L.B., Ushakov N.A., An analysis of corrections to the propagation constants of a multimode parabolic optical fiber under bending, St. Petersburg Polytech-



Введение

В любых протяженных оптоволоконных трактах присутствуют изгибы волокна в той или иной степени. Для одних систем такие изгибы нежелательны, например в коммуникационных системах, так как они приводят к оптическим потерям. Для других, напротив, изгиб составляет основу их работы, например, в оптических модуляторах [1], мультиплексорах [2], разветвителях [3], а также может измеряться при помощи оптоволоконных датчиков. В частности, волоконно-оптические датчики позволяют на основе регистрации изгиба световода реализовывать контроль состояния зданий, сооружений и механических агрегатов [4 – 6], мониторинг состояния здоровья людей [7 – 9]; такие датчики служат для создания медицинских приборов [10], аппаратуры в робототехнике [11] и для других целей.

В связи с вышеизложенным, для проектирования подобных волоконно-оптических систем важно иметь удобный аналитический аппарат, позволяющий рассчитывать влияние изгиба волокна на параметры распространения в нем света. К настоящему времени исследователи достаточно много внимания уделяли аналитическим [12, 13] и численным [14, 15] расчетам оптических потерь в изогнутых волокнах. Однако не менее важным аспектом следует считать изменение фазовых набегов или постоянных распространения (ПР) волноводных мод оптического волокна при его изгибе. Например, это изменение играет решающую роль в интерферометрических волоконно-оптических датчиках, где интерференционный сигнал непосредственно зависит от разности постоянных распространения (РПР) интерферирующих мод [16 – 26]. Несмотря на актуальность данной проблемы для волоконно-оптических датчиков изгиба, в литературе уделено недоста-

точно внимания вопросу расчета добавок к ПР мод при изгибе волокна, в частности для наиболее распространенного волокна с параболическим профилем показателя преломления. В известных работах, посвященных расчетам изменений фазовых набегов или постоянных распространения волноводных мод при изгибе волокна [27 – 33], не получено простых выражений для добавок к ПР и РПР мод в параболическом волокне. В работе [34] введено общее выражение для изменений ПР мод волокна для случая равномерного возмущения волокна, полученное из системы дифференциальных уравнений связанных мод. Однако данное выражение не позволяет вывести явное аналитическое выражение для случая параболического волокна, которое было бы удобным для расчетных оценок. В Приложении 1 данной статьи приведено это выражение и его краткий анализ.

Настоящая работа нацелена на анализ постоянных распространения и их разности для случая слабонаправляющего многомодового оптического волокна с параболическим профилем показателя преломления, равномерно изогнутого по окружности.

В связи с поставленной целью работы нами была выведена сначала общая формула для расчета поправок к ПР мод диэлектрического волновода при его равномерном возмущении вдоль оси (использован метод малых возмущений), а затем на основе этой формулы был детально проанализирован случай параболического оптического волокна.

Расчет поправок к ПР m -ой моды возмущенного диэлектрического волновода

Для применения метода малых возмущений к решению задачи здесь мы базируемся на подходе, который в монографии [35] использован для получения поправки первого порядка малости к ПР мод возмущенного

волновода. Как будет показано ниже, поправка первого порядка малости обращается в нуль в случае равномерного изгиба волокна. Поэтому для учета влияния изгиба нами была определена поправка для ПР мод второго порядка малости.

Следуя указанному подходу, сформулируем постановку конкретной задачи. Пусть невозмущенный диэлектрический волновод имеет профиль относительной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_0(r, \varphi) = n_0^2(r, \varphi),$$

где n_0 – профиль показателя преломления; r, φ – координаты в цилиндрической системе координат, в которой ось z совпадает с осью волокна.

При введении возмущения, равномерного вдоль оси, профиль относительной диэлектрической проницаемости возмущенного волновода можно записать в виде

$$\varepsilon(r, \varphi) = \varepsilon_0(r, \varphi) + \Delta\varepsilon(r, \varphi). \quad (1)$$

Пусть невозмущенные моды имеют вид

$$\mathbf{E}'_m = \mathbf{E}_m(r, \varphi) \exp[i(\omega t - \beta_m z)], \quad (2)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

где поперечные модовые функции $E_m(r, \varphi)$ удовлетворяют невозмущенному волновому уравнению

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_0] \cdot \mathbf{E}_m(r, \varphi) = \beta_m^2 \mathbf{E}_m(r, \varphi). \quad (3)$$

Здесь мы пренебрегли членом $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}'_m)$, что оправдано для линейно поляризованных мод оптического волокна [36].

Эти моды являются взаимно ортогональными и удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int \mathbf{E}_m^* \cdot \mathbf{E}_l dS = N_m \delta_{ml}. \quad (4)$$

Рассмотрим влияние возмущения относительной диэлектрической проницаемости

$\Delta\varepsilon(r, \varphi)$, которое мало, по сравнению с величиной $\varepsilon(r, \varphi)$. Предположим, что столь малое возмущение будет вызывать лишь небольшие изменения модовых функций и постоянных распространения.

Пусть модовые функции изменяются на величину $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$, а квадраты постоянных распространения – на $\delta\beta_m^{2(1)}$. В таком случае волновое уравнение принимает вид

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_0 + k_0^2 \Delta\varepsilon] \cdot (\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)}) = (\beta_m^2 + \delta\beta_m^{2(1)}) \cdot (\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)}). \quad (5)$$

Если пренебречь членами второго порядка малости $\Delta\varepsilon \cdot \delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и $\delta\beta_m^{2(1)} \cdot \delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и воспользоваться соотношением (3), то уравнение (5) запишется в более простом виде:

$$[\nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_0] \cdot \delta\mathbf{E}_m^{(1)} + k_0^2 \Delta\varepsilon \cdot \mathbf{E}_m = \beta_m^2 \cdot \delta\mathbf{E}_m^{(1)} + \delta\beta_m^{2(1)} \cdot \mathbf{E}_m. \quad (6)$$

Чтобы решить это уравнение, разложим $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ в ряд по невозмущенным модовым функциям:

$$\delta\mathbf{E}_m^{(1)} = \sum a_{ml} \mathbf{E}_l, \quad (7)$$

где a_{ml} – постоянные коэффициенты.

Подставляя в уравнение (6) выражение (7) для $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и используя (3), получаем следующее соотношение:

$$\sum_l a_{ml} (\beta_l^2 - \beta_m^2) \cdot \mathbf{E}_l = (\delta\beta_m^{2(1)} - k_0^2 \Delta\varepsilon) \cdot \mathbf{E}_m. \quad (8)$$

Если соотношение (8) скалярно умножить на комплексно-сопряженную величину \mathbf{E}_m^* и интегрировать это произведение по всей поперечной плоскости, то выражение в левой части будет равно нулю в силу соотношения ортогональности (4). Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$\int \mathbf{E}_m^* \cdot (\delta\beta_m^{2(1)} - k_0^2 \Delta\varepsilon) \cdot \mathbf{E}_m dS = 0. \quad (9)$$

Поскольку $\delta\beta_m^{2(1)}$ – постоянная, из выражения (9) следует, что

$$\delta\beta_m^{2(1)} = \frac{k_0^2 \int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\epsilon \cdot \mathbf{E}_m dS}{N_m}. \quad (10)$$

Это выражение дает поправку первого порядка к квадрату постоянной распространения β_m^2 . Поскольку поправка к квадрату ПР мала, то можно записать поправку непосредственно к самим ПР [35]:

$$\delta\beta_m = \delta\beta_m^2 / 2\beta_m.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\delta\beta_m^{(1)} = \frac{k_0^2 \int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\epsilon \cdot \mathbf{E}_m dS}{2\beta_m N_m}. \quad (11)$$

Для расчета коэффициентов $a_{ml} (m \neq l)$ скалярно умножим левую и правую части уравнения (8) на \mathbf{E}_l^* , ($m \neq l$) и проинтегрируем по всей поперечной плоскости. Тогда можно записать следующее выражение:

$$a_{ml} = \frac{k_0^2}{(\beta_m^2 - \beta_l^2) N_l} \int \mathbf{E}_m \cdot \Delta\epsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS, \quad l \neq m. \quad (12)$$

Таким образом, с точностью до обозначений, мы получили выражения для поправки первого порядка к ПР и коэффициентов $a_{ml} (m \neq l)$, аналогичные приведенным в монографии [35], за исключением введенного параметра нормировки N_m .

Аналогичным образом выведем поправку уже второго порядка к ПР мод. Для этого рассмотрим волновое уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_t^2 + k_0^2 \epsilon_0 + k_0^2 \Delta\epsilon \right] \times \\ & \times \left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)} + \delta\mathbf{E}_m^{(2)} \right) = \\ & = \left(\beta_m^2 + \delta\beta_m^{2(1)} + \delta\beta_m^{2(2)} \right) \times \\ & \times \left(\mathbf{E}_m + \delta\mathbf{E}_m^{(1)} + \delta\mathbf{E}_m^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta\mathbf{E}_m^{(2)}$, $\delta\beta_m^{2(2)}$ – поправки второго порядка к модовой функции и квадрату ПР соответственно.

Если использовать соотношение (3) и дальнейшие допущения, такие как пренебрежение слагаемыми третьего и четвертого порядков малости, использование (6) в качестве начального приближения, то уравнение (13) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_t^2 + k_0^2 \epsilon_0 \right] \cdot \delta\mathbf{E}_m^{(2)} + k_0^2 \Delta\epsilon \delta\mathbf{E}_m^{(1)} = \\ & \beta_m^2 \delta\mathbf{E}_m^{(2)} + \delta\beta_m^{2(1)} \delta\mathbf{E}_m^{(1)} + \delta\beta_m^{2(2)} \mathbf{E}_m. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы решить это уравнение, разложим $\delta\mathbf{E}_m^{(2)}$ в ряд по невозмущенным модовым функциям:

$$\delta\mathbf{E}_m^{(2)} = \sum_l b_{ml} \mathbf{E}_l, \quad (15)$$

где b_{ml} – постоянные коэффициенты.

Подставляя в уравнение (14) выражения (7) для $\delta\mathbf{E}_m^{(1)}$ и (15) для $\delta\mathbf{E}_m^{(2)}$ и используя (3), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \sum_l b_{ml} (\beta_l^2 - \beta_m^2) \cdot \mathbf{E}_l + \\ & + k_0^2 \Delta\epsilon \sum_l a_{ml} \mathbf{E}_l = \\ & = \delta\beta_m^{2(1)} \sum_l a_{ml} \mathbf{E}_l + \delta\beta_m^{2(2)} \cdot \mathbf{E}_m. \end{aligned} \quad (16)$$

Если данное соотношение скалярно умножить на \mathbf{E}_m^* и интегрировать по всей поперечной плоскости, то первое слагаемое в левой части и все члены суммы, за исключением члена с $l = m$, будут равны нулю в силу соотношения ортогональности (4).

Если также использовать выражение (10), то можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & k_0^2 \sum_l a_{ml} \int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\epsilon \cdot \mathbf{E}_l dS = \\ & = k_0^2 a_{mm} \int \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\epsilon \cdot \mathbf{E}_m dS + \\ & + \delta\beta_m^{2(2)} N_m. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, если учитывать, что первое слагаемое в правой части данного выражения взаимно уничтожается с членом суммирования $l = m$ в левой его части, и использовать выражение (12), то поправку второго порядка к квадрату ПР m -ой моды при возмущении волновода, равномерном вдоль оси, можно записать в следующем виде:

$$\delta\beta_m^{2(2)} = \sum_{l \neq m} (\beta_l^2 - \beta_m^2) a_{ml} a_{lm}, \quad (18)$$

или

$$\delta\beta_m^{2(2)} = \sum_{l \neq m} \frac{k_0^4}{(\beta_m^2 - \beta_l^2) N_m N_l} \times \left| \int \mathbf{E}_m \cdot \Delta \varepsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS \right|^2. \quad (19)$$

С учетом того, что $\delta\beta_m^{2(2)}$ – это поправка к квадрату ПР, а поправка непосредственно к ПР – это

$$\delta\beta_m^{(2)} = \delta\beta_m^{2(2)} / 2\beta_m,$$

получаем следующее выражение:

$$\delta\beta_m^{(2)} = \sum_{l \neq m} \frac{k_0^4}{2\beta_m (\beta_m^2 - \beta_l^2) N_m N_l} \times \left| \int \mathbf{E}_m \cdot \Delta \varepsilon \cdot \mathbf{E}_l^* dS \right|^2. \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) представляют собой искомые выражения для поправки второго порядка к ПР моды оптического волокна.

Отметим, что выражения (19) и (20) верны для любых диэлектрических волноводов, для которых при выводе волнового уравнения можно пренебречь членом $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}'_m)$.

В Приложении 2 данной статьи проведено сравнение формулы (20) с формулой, полученной при помощи подхода, использованного в статье [34].

Случай равномерного изгиба оптического волокна с параболическим профилем показателя преломления

Выражения (11) и (20) описывают общий

вид поправок к ПР мод при возмущении диэлектрического волновода. Конкретизируем их для случая равномерно изогнутого параболического волокна.

Профиль относительной диэлектрической проницаемости параболического оптического волокна описывается следующим выражением:

$$\varepsilon(r) = n^2(r) = n_1^2 \begin{cases} 1 - 2\Delta \cdot (r^2 / a^2), & r < a, \\ 1 - 2\Delta, & r > a, \end{cases} \quad (21)$$

где a – радиус сердцевины; n_1 – максимальное значение показателя преломления в поперечном сечении; Δ – относительная разность показателей преломления,

$$\Delta = (n_1^2 - n_2^2) / 2n_1^2$$

(n_2 – показатель преломления в области оболочки).

В модели слабонаправляющего волокна с неограниченным параболическим профилем собственные моды описываются в виде линейно поляризованных LP_{lp} -мод [37]. Скалярная компонента моды имеет вид

$$E'_{lp} = E_{lp}(r, \varphi) \exp[j(\omega t - \beta_{lp} z)], \quad (22)$$

где $E_{lp}(r, \varphi)$ – скалярные поперечные модовые функции, l – азимутальный порядок моды, индекс p – радиальный порядок моды.

Поперечные модовые функции задаются следующими выражениями:

$$E_{lp}(r, \varphi) = \Psi(r) \cdot \begin{pmatrix} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\Psi(r) = \left(\sqrt{2} \frac{r}{w} \right)^l L_q^{(l)} \left(2 \frac{r^2}{w^2} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2} \right]. \quad (24)$$

Здесь $L_q^{(l)}$ представляют собой обобщенные полиномы Лагерра порядка l и степени q ($q = p - 1$); они имеют вид

$$L_q^{(l)}(u) = \sum_{v=0}^q \binom{q+l}{q-v} \frac{(-u)^v}{v!}. \quad (25)$$

Параметр w показывает границы существования поля в радиальном направлении и определяется следующим выражением:

$$w = \sqrt{\frac{2a}{n_1 k_0 \sqrt{2 \cdot \Delta}}}. \quad (26)$$

Постоянная β_{lp} распространения LP_{lp} -моды, с учетом выражения (26) и данных монографии [37], определяется выражением

$$\beta_{lp} = n_1 k_0 \sqrt{1 - \frac{4}{w^2} (2p+l-1)}. \quad (27)$$

Для расчета поправок к ПР LP_{lp} -моды воспользуемся нормализованными модовыми функциями:

$$E_{lpN} = \frac{E_{lp}}{\sqrt{\int E_{lp} E_{lp} dS}}. \quad (28)$$

В этом случае параметр нормировки N_{lp} , введенный в условие (4), равен единице. Тогда соотношения (10), (11), (19) и (20) можно переписать в следующем виде:

$$\delta\beta_{lp}^{2(1)} = k_0^2 \int E_{lpN} \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_{\eta\mu N} dS, \quad (29)$$

$$\delta\beta_{lp}^{(1)} = \frac{k_0^2}{2\beta_{lp}} \int E_{lpN} \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_{\eta\mu N} dS, \quad (30)$$

$$\delta\beta_{lp}^{2(2)} = \sum_{lp \neq \eta\mu} \frac{k_0^4}{(\beta_{lp}^2 - \beta_{\eta\mu}^2)} \times \left(\int E_{lpN} \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_{\eta\mu N} dS \right)^2, \quad (31)$$

$$\delta\beta_{lp}^{(2)} = \sum_{lp \neq \eta\mu} \frac{k_0^4}{2\beta_{lp} (\beta_{lp}^2 - \beta_{\eta\mu}^2)} \times \left(\int E_{lpN} \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_{\eta\mu N} dS \right)^2. \quad (32)$$

Для анализа изгиба волокна с радиусом R (см. рисунок) можно применить следующий распространенный подход [37]: введем вместо равномерно изогнутого по окружности волокна эквивалентное прямолинейное волокно, имеющее профиль относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r, \varphi)$ вида (1). В данном случае $\varepsilon_0(r, \varphi)$ – профиль относительной диэлектрической проницаемости неизогнутого прямолинейного волокна, а возмущение $\Delta\varepsilon(r, \varphi)$ описывается выражением

$$\Delta\varepsilon = \frac{2n_1^2 r \cos \varphi}{R}. \quad (33)$$

В этом случае распределения поперечных полей в изогнутом и эквивалентном прямолинейном волокнах будут одинаковыми [37].

В рамках модели эквивалентного прямолинейного волокна поправку первого порядка к ПР LP_{lp} -моды изогнутого волокна можно получить, подставив выражение (33) в выражение (30). Однако несложно убедиться, что она равна нулю ввиду антисимметричного характера возмущения. Поэтому для случая изгиба нельзя ограничиваться только первой поправкой.

Подставив выражение (33) в выражение (31), получим поправку второго порядка к квадрату ПР LP_{lp} -моды:

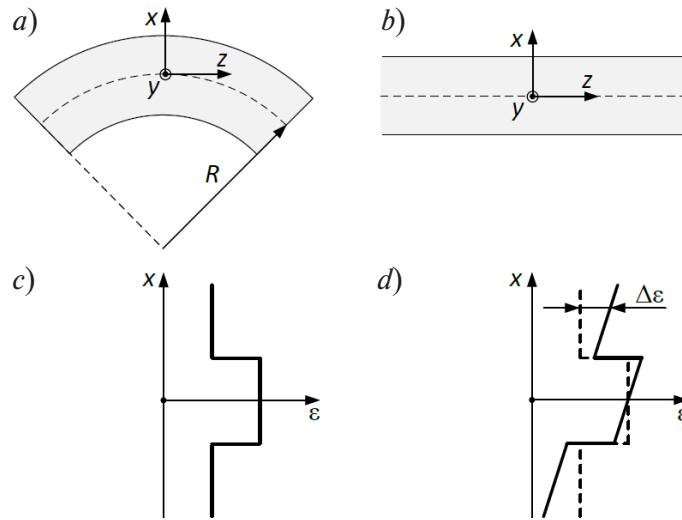
$$\delta\beta_{lp}^{2(2)} = \sum_{lp \neq \eta\mu} \frac{4k_0^4 n_1^4}{(\beta_{lp}^2 - \beta_{\eta\mu}^2) R^2} I_{lp, \eta\mu}^2; \quad (34)$$

здесь мы ввели следующее обозначение интеграла, характеризующего связь моды LP_{lp} с модой $LP_{\eta\mu}$:

$$I_{lp, \eta\mu} = \iint E_{lpN} \cdot r^2 \cos \varphi \cdot E_{\eta\mu N} dr d\varphi. \quad (35)$$

Данный интеграл можно вычислить в явном виде для всех комбинаций LP_{lp} -мод [37]. При этом ненулевыми будут следующие интегралы (35):

1. Интеграл, характеризующий связь LP_{lp} -моды с $LP_{l+1,p}$ -модой, т. е.



Схематические изображения для анализа изгиба с радиусом R волокна: a, b – искривленное волокно и эквивалентное ему прямолинейное; c, d – профили относительной диэлектрической проницаемости для волокон a и b соответственно

$$I_{lp,(l+1)p} = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{p+l}{\sigma_l}}; \quad (36)$$

2. Интеграл, характеризующий связь LP_{lp} -моды с $LP_{l-1,p+1}$ -модой, т. е.

$$I_{lp,(l-1)(p+1)} = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{p}{\sigma_{l-1}}}; \quad (37)$$

3. Интеграл, характеризующий связь LP_{lp} -моды с $LP_{l-1,p}$ -модой, т. е.

$$I_{lp,(l-1)p} = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{p+l-1}{\sigma_{l-1}}}; \quad (38)$$

4. Интеграл, характеризующий связь LP_{lp} -моды с $LP_{l+1,p-1}$ -модой, т. е.

$$I_{lp,(l+1)(p-1)} = \frac{w}{2} \sqrt{\frac{p-1}{\sigma_l}}; \quad (39)$$

при этом $\sigma_l = 1$, если $l = 0$, и $\sigma_l = 2$, если $l \neq 0$.

Остальные моды оказались не связанными с LP_{lp} -модой. Отметим, что все связанные моды отличаются на единицу по своему составному модовому числу $m = 2p + l - 1$.

Таким образом, модуль разности квадратов ПР связанных мод не зависит от значе-

ний l и p и следует выражению

$$|\beta_{lp}^2 - \beta_{\eta\mu}^2| = \frac{4}{w^2}. \quad (40)$$

Поэтому множитель перед интегралом в выражении (34) можно упростить и вынести за знак суммы (с учетом знаков плюс или минус). Тогда выражение (34) можно переписать в следующем виде:

$$\delta\beta_{lp}^{2(2)} = \frac{k_0^4 n_1^4 w^2}{R^2} \times \quad (41)$$

$$\times \left(I_{lp,(l+1)p}^2 + I_{lp,(l-1)(p+1)}^2 - I_{lp,(l-1)p}^2 - I_{lp,(l+1)(p-1)}^2 \right).$$

Путем перебора всех возможных комбинаций индексов l и p легко показать, что выражение в скобке соотношения (41) равно $w^2/4$ независимо от значений индексов и ориентации модовой функции LP_{lp} ($\cos(l\varphi)$ или $\sin(l\varphi)$).

Таким образом, искомое приращение квадрата постоянной распространения LP_{lp} -моды в параболическом оптическом волокне принимает относительно простой вид:

$$\delta\beta_{lp}^2 = \delta\beta_{lp}^{2(2)} = \frac{k_0^4 n_1^4 w^4}{4R^2} = \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{2\Delta \cdot R^2} \quad (42)$$

и, что важно, не зависит от номера моды.

Приращение непосредственно ПР $\delta\beta_{lp} = \delta\beta_{lp}^2 / 2\beta_{lp}$ запишется в виде

$$\delta\beta_{lp} = \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{4\beta_{lp} \cdot \Delta \cdot R^2}. \quad (43)$$

Теперь можно перейти к расчету разности

$$\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b = \beta_{lp}^b - \beta_{\eta\mu}^b$$

— разности постоянных распространения мод при изгибе волокна, которая важна при расчете интерферометрических датчиков:

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b &= \\ &= \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s - \frac{k_0^2 n_1^2 a^2}{4 \cdot \Delta \cdot \beta_{lp}^s \beta_{\eta\mu}^s R^2} \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b, \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s$ — РПР мод изогнутого и прямолинейного волокон, соответственно.

Полученное выражение можно упростить, принимая во внимание, что $\beta_{lp}^s \beta_{\eta\mu}^s \approx k_0^2 n_1^2$:

$$\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b = \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s \left(1 - \frac{a^2}{4\Delta \cdot R^2} \right). \quad (45)$$

Таким образом, изменение РПР мод в изогнутом параболическом оптическом волокне пропорционально РПР мод прямолинейного волокна $\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s$ с коэффициентом пропорциональности $a^2/(4\Delta)$, не зависящим от номеров мод. Чтобы оценивать эффективность работы оптоволоконных датчиков, регистрирующих изгиб, важно иметь оценку чувствительности изменения РПР мод к обратному квадрату радиуса изгиба, которая, согласно выражению (45), имеет вид

$$\frac{\partial(\Delta\beta_{lp,\eta\mu}^b)}{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)} = \frac{a^2}{4\Delta} \Delta\beta_{lp,\eta\mu}^s. \quad (46)$$

Следует иметь в виду, что как теоретические формулы для модовых функций и ПР мод параболического волокна (22) – (27), так

и выведенные нами формулы для поправок к ПР и РПР мод (42) – (46), были получены в приближении неограниченного параболического профиля показателя преломления волокна. Поэтому, строго говоря, их нельзя использовать для описания поведения мод, близких к отсечке, поле которых начинает существенно выходить за пределы сердцевины волокна.

При использовании полученных выражений для анализа реальных волокон необходимо учитывать упругооптический эффект при записи выражения (33) для возмущенного профиля относительной диэлектрической проницаемости. Для приближенного учета этого эффекта можно воспользоваться следующим подходом: заменить реальный радиус кривизны изгиба эффективным, например, для стеклянного волокна $R_{eff} = 1,27 R$ [30].

Заключение

В данной работе для анализа влияния изгиба параболического многомодового волокна на постоянные распространения мод и их разности получены аналитические выражения для поправок второго порядка малости с использованием метода малых возмущений. Показано, что приращения к квадратам постоянных распространения мод одинаковы для всех мод. Также показано, что изменение разности постоянных распространения мод в изогнутом волокне пропорционально разности постоянных распространения мод неизогнутого волокна с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от номеров мод. При этом величина изменений определяется соотношением между радиусом сердцевины волокна и относительной разностью показателей преломления сердцевины и оболочки. Полученный результат важен при разработке интерферометрических волоконно-оптических датчиков с регистрацией изгиба волокна, а также при анализе фазовых эффектов в волоконно-оптических системах с многомодовыми световодами. При этом выведенное обобщенное выражение для поправки второго порядка малости к постоянной распространения мод (20) может

представлять интерес не только для анализа оптических волокон, но и для анализа произвольных диэлектрических волноводов с равномерным возмущением.

Приложение 1

Известная оценка добавки к ПР m -ой моды оптического волокна с параболическим профилем при его равномерном возмущении

В работе [34] анализируется влияние изгиба волокна на ПР мод волокна, но, ввиду того факта, что в методе возмущений поправка первого порядка обращается в нуль, авторы предложили использовать не метод возмущений, а основываться на более специфическом подходе анализа системы дифференциальных уравнений связанных мод.

В результате авторы статьи [34] получили следующую оценку к приращению ПР:

$$\delta\beta_m = -\sum_l \frac{\kappa_{ml}\kappa_{lm}}{\beta_m - \beta_l}, \quad (\text{П1})$$

где $\delta\beta_m$ – добавка к ПР m -ой моды, вызванная возмущением волокна, приводящим к связи мод; β_m – ПР m -ой моды без возмущения; κ_{mn} – коэффициент связи m -ой и n -ой мод.

Выражение для коэффициентов связи можно найти, например, в книгах [36, 37]:

$$\kappa_{ml} = \frac{k_0^2}{2\beta_m} \iint E_{mN}(r, \varphi) \cdot \Delta\varepsilon(r, \varphi) \times E_{lN}(r, \varphi) \cdot r dr d\varphi, \quad (\text{П2})$$

где k_0 – волновое число; $\Delta\varepsilon(r, \varphi)$ – возмущение профиля относительной диэлектрической проницаемости волокна под действием, в частности, изгиба; $E_{mN}(r, \varphi)$ – нормализованная модовая функция; r, φ – координаты в цилиндрической системе координат, в которой ось z совпадает с осью волокна. При этом модовые функции удовлетворяют условию нормировки:

$$\iint E_{mN}^2 r dr d\varphi = 1. \quad (\text{П3})$$

Если подставить выражение (П2) в (П1), то можно получить оценку для приращения ПР мод:

$$\delta\beta_m = \sum_{l \neq m} \frac{k_0^4}{4\beta_m\beta_l(\beta_m - \beta_l)} \times \left(\iint E_{mN} \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_{lN} r dr d\varphi \right)^2. \quad (\text{П4})$$

В случае оптического параболического волокна в формализме LP_{lp} , ПР мод можно найти при помощи выражения (27). Для указанного волокна интегралы в оценке (П4) также известны (см. формулы (35) – (39)). Однако выражение, полученное на основе (П4), все равно остается громоздким, что затрудняет анализ физического смысла.

Приложение 2

Сравнение выражений для приращения ПР при изгибе волокна

Сравним полученное нами выражение (20) с выражением (П4). Обратим внимание, что оценка (20) отличается от оценки (П4) знаменателем множителя перед интегралом. Знаменатель в выражении (20) можно расписать в следующем виде:

$$2\beta_m(\beta_m^2 - \beta_l^2) = 2\beta_m(\beta_m + \beta_l)(\beta_m - \beta_l).$$

Для слабонаправляющего оптического волокна, при устремлении относительной разности показателей преломления к нулю, $\beta_m \approx \beta_l$, поэтому справедливо соотношение

$$2\beta_m(\beta_m + \beta_l)(\beta_m - \beta_l) \approx 4\beta_m\beta_l(\beta_m - \beta_l)$$

и формулы асимптотически сходятся.

Однако формула (20) представляется более целесообразной для использования по трем причинам:

во-первых, она получена на основе общепринятого для подобного анализа метода малых возмущений с простыми и понятными приближениями, в то время как ряд приближений, сделанных в работе [34], не позволяет четко судить о порядке малости поправки к



ПР и условиях применимости полученной оценки;

во-вторых, из формулы (20) мы получили простое и удобное выражение для приращений ПР при изгибе параболического волокна, в то время как выражение (П4) представляет собой сложную сумму с необходимостью записи ПР для всех мод, связанных с рассчитываемой;

в-третьих, полученное нами выражение

позволило сделать важные физические выводы о приращении ПР мод при изгибе (они указаны в заключении), а на основе выражения (П4) сделать подобные выводы затруднительно.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-27001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bösch M., Liakatas I., Jäger M., Bosshard Ch., Günter P.** Polymer based electro-optic inline fiber modulator // *Ferroelectrics*. 1999. Vol. 223. No. 1. Pp. 405–412.
2. **Diemeer J., Spiekman L.H., Ramsamoedj R., Smit M.K.** Polymeric phased array wavelength multiplexer operating around 1550 nm // *Electronics Letters*. 1996. Vol. 32. No. 12. Pp. 1132–1133.
3. **Li X.-Y., Sun B., Yu Y.-Y., He K.-P.** Bending dual-core photonic crystal fiber coupler // *Optik (Stuttgart)*. 2014. Vol. 125. No. 21. Pp. 6478–6482.
4. **Inaudi D., Vurpillot S., Casanova N., Kronenberg P.** Structural monitoring by curvature analysis using interferometric fiber optic sensors // *Smart Materials and Structures*. 1998. Vol. 7. No. 2. Pp. 199–208.
5. **Liu M.Y., Zhou Sh.-G., Song H., Zhou W.-J., Zhang X.** A novel fibre Bragg grating curvature sensor for structure deformation monitoring // *Metrology and Measurement Systems*. 2018. Vol. 25. No. 3. Pp. 577–587.
6. **Zhi G., Di H.** Wind speed monitoring system based on optical fiber curvature sensor // *Optical Fiber Technology*. 2021. Vol. 62. March. P. 102467.
7. **Ushakov N., Markvart A., Kulik D., Liokumovich L.** Comparison of pulse wave signal monitoring techniques with different fiber-optic interferometric sensing elements // *Photonics*. 2021. Vol. 8. No. 5. P. 142.
8. **Li X., Liu D., Kumar R., Ng W.P., Fu Y.-q., Yuan J., Yu Ch.** A simple optical fiber interferometer based breathing sensor // *Measurement Science and Technology*. 2017. Vol. 28. No. 3. P. 035105.
9. **Irawati N., Hatta A.M., Yhuwana Y.G.Y., Sekartedjo.** Heart rate monitoring sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber // *Photonic Sensors*. 2020. Vol. 10. No. 2. Pp. 186–193.
10. **Novais S., Silva S.O., Frazão O.** Curvature detection in a medical needle using a Fabry-Perot cavity as an intensity sensor // *Measurement*. 2020. Vol. 151. February. P. 107160.
11. **He Y., Zhang X., Zhu L., Sun G., Lou X., Dong M.** Curvature and force measurement of soft manipulator based on stretchable helical optic fibre // *Optical Fiber Technology*. 2019. Vol. 53. December. P. 102010.
12. **Savović S., Djordjevich A., Savović I.** Theoretical investigation of bending loss in step-index plastic optical fibers // *Optics Communications*. 2020. Vol. 475. 15 November. P. 126200.
13. **Marcuse D.** Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers // *Journal of the Optical Society of America*. 1976. Vol. 66. No. 4. Pp. 311–320.
14. **Schermer R., Cole M.** Improved bend loss formula verified for optical fiber by simulation and experiment // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 2007. Vol. 43. No. 10. Pp. 899–909.
15. **Velamuri A.V., Patel K., Sharma I., Gupta S.S., Gaikwad S., Krishnamurthy P.K.** Investigation of planar and helical bend losses in single- and few-mode optical fibers // *Journal of Lightwave Technology*. 2019. Vol. 37. No. 14. Pp. 3544–3556.
16. **Silva S., Frazão O., Viegas J., Ferreira L.A., Araújo F.M., Malcata F.X., Santos J.L.** Temperature and strain-independent curvature sensor based on a singlemode/multimode fiber optic structure // *Measurement Science and Technology*. 2011. Vol. 22. No. 8. P. 085201.
17. **Wu Q., Semenova Y., Wang P., Hatta A.M.,**

- Farrell G.** Experimental demonstration of a simple displacement sensor based on a bent single-mode-multimode-single-mode fiber structure // *Measurement Science and Technology*. 2011. Vol. 22. No. 2. P. 025203.
18. **Yang B., Niu Y., Yang B., Hu Y., Dai L., Yin Y., Ding M.** High sensitivity curvature sensor with intensity demodulation based on single-mode-tapered multimode-single-mode fiber // *IEEE Sensors Journal*. 2018. Vol. 18. No. 3. Pp. 1094–1099.
19. **Su J., Dong X., Lu C.** Property of bent few-mode fiber and its application in displacement sensor // *IEEE Photonics Technology Letters*. 2016. Vol. 28. No. 13. Pp. 1387–1390.
20. **Ivanov O.V.** Mode interaction in a structure based on optical fiber with depressed inner cladding // *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2018. Vol. 63. No. 10. Pp. 1143–1151.
21. **Chen J., Lu P., Liu D., Zhang J., Wang Sh., Chen D.** Optical fiber curvature sensor based on few mode fiber // *Optik (Stuttgart)*. 2014. Vol. 125. No. 17. Pp. 4776–4778.
22. **Dong S., Pu S., Huang J.** Highly sensitive curvature sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber structures // *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*. 2014. Vol. 16. No. 11–12. Pp. 1247–1251.
23. **Gong Y., Zhao T., Rao Y.-J., Wu Y.** All-fiber curvature sensor based on multimode interference // *IEEE Photonics Technology Letters*. 2011. Vol. 23. No. 11. Pp. 679–681.
24. **Tian K., Xin Y., Yang W., Geng T., Ren J., Fan Y.-X., Farrell G., Lewis E., Wang P.** A curvature sensor based on twisted single-mode-multimode-single-mode hybrid optical fiber structure // *Journal of Lightwave Technology*. 2017. Vol. 35. No. 9. Pp. 1725–1731.
25. **Petrov A.V., Chapalo I.E., Bisyarin M.A., Kotov O.I.** Intermodal fiber interferometer with frequency scanning laser for sensor application // *Applied Optics*. 2020. Vol. 59. No. 33. Pp. 10422–10431.
26. **Косарева Л.И., Котов О.И., Лиюкумович Л.Б., Марков С.И., Медведев А.В., Николаев В.М.** Два механизма модуляции фазы в многомодовых волоконных интерферометрах // *Письма в Журнал технической физики*. 2000. Т. 26. № 2. С. 53–58.
27. **Oksanen M.I.** Perturbational analysis of curved anisotropic optical fibers // *Journal of the Optical Society of America. A*. 1989. Vol. 6. No. 2. Pp. 180–189.
28. **Shemirani M.B., Mao W., Panicker R.A., Kahn J.M.** Errata to “Principal modes in graded-index multimode fiber in presence of spatial- and polarization-mode coupling” // *Journal of Lightwave Technology*. 2011. Vol. 29. No. 12. Pp. 1900–1900.
29. **Garth S.J.** Modes and propagation constants on bent depressed inner cladding optical fibers // *Journal of Lightwave Technology*. 1989. Vol. 7. No. 12. Pp. 1889–1894.
30. **Schermer R.T.** Mode scalability in bent optical fibers // *Optics Express*. 2007. Vol. 15. No. 24. Pp. 15674–15701.
31. **Garth S.J.** Modes on a bent optical waveguide // *IEEE Proceedings Journal: Optoelectronics*. 1987. Vol. 134. No. 4. Pp. 221–229.
32. **Kumar A., Goyal I.C., Ghatak A.K.** Effect of curvature on dispersion in multimode parabolic index fibres // *Optica Acta: International Journal of Optics*. 1975. Vol. 22. No. 11. Pp. 947–953.
33. **Malik D.P.S., Gupta A., Ghatak A.K.** Propagation of a Gaussian beam through a circularly curved selfoc fiber // *Applied Optics*. 1973. Vol. 12. No. 12. Pp. 2923–2926.
34. **Taylor H.** Bending effects in optical fibers // *Journal of Lightwave Technology*. 1984. Vol. 2. No. 5. Pp. 617–628.
35. **Yariv A., Yeh P.** *Optical waves in crystals*. New York: Wiley, 1984. 589 p.
36. **Yariv A., Yeh P.** *Photonics: optical electronics in modern communications*. New York: Oxford University Press, 2007. 849 p.
37. **Unger H.-G.** *Planar optical waveguides and fibres*. Oxford: Clarendon Press Oxford, 1977. 751 p.

Статья поступила в редакцию 14.05.2021, принята к публикации 18.05.2021.

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

МАРКВАРТ Александр Александрович – ассистент Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
markvart_aa@spbstu.ru

ЛИОКУМОВИЧ Леонид Борисович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
leonid@spbstu.ru

УШАКОВ Николай Александрович – научный сотрудник Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.ushakoff@spbstu.ru

REFERENCES

1. Bösch M., Liakatas I., Jäger M., et al., Polymer based electro-optic inline fiber modulator, *Ferroelectrics*. 223 (1) (1999) 405–412.
2. Diemeer J., Spiekman L.H., Ramsamoedj R., Smit M.K., Polymeric phased array wavelength multiplexer operating around 1550 nm, *Electron. Lett.* 32 (12) (1996) 1132–1133.
3. Li X.-Y., Sun B., Yu Y.-Y., He K.-P., Bending dual-core photonic crystal fiber coupler, *Optik (Stuttg.)*. 125 (21) (2014) 6478–6482.
4. Inaudi D., Vurpillot S., Casanova N., Kronenberg P., Structural monitoring by curvature analysis using interferometric fiber optic sensors, *Smart Mater. Struct.* 7 (2) (1998) 199–208.
5. Liu M.Y., Zhou Sh.-G., Song H., et al., A novel fibre Bragg grating curvature sensor for structure deformation monitoring, *Metrol. Meas. Syst.* 25 (3) (2018) 577–587.
6. Zhi G., Di H., Wind speed monitoring system based on optical fiber curvature sensor, *Opt. Fiber Technol.* 62 (March) (2021) 102467.
7. Ushakov N., Markvart A., Kulik D., Liokumovich L., Comparison of pulse wave signal monitoring techniques with different fiber-optic interferometric sensing elements, *Photonics*. 8 (5) (2021) 142.
8. Li X., Liu D., Kumar R., et al., A simple optical fiber interferometer based breathing sensor, *Meas. Sci. Technol.* 28 (3) (2017) 035105.
9. Irawati N., Hatta A.M., Yhuwana Y.G.Y., Sekartedjo, Heart rate monitoring sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber, *Photonic Sensors*. 10 (2) (2020) 186–193.
10. Novais S., Silva S.O., Frazão O., Curvature detection in a medical needle using a Fabry-Perot cavity as an intensity sensor, *Measurement*. 151 (February) (2020). 107160.
11. He Y., Zhang X., Zhu L., et al., Curvature and force measurement of soft manipulator based on stretchable helical optic fibre, *Opt. Fiber Technol.* 53 (December) (2019) 102010.
12. Savović S., Djordjevich A., Savović I., Theoretical investigation of bending loss in step-index plastic optical fibers, *Opt. Commun.* 475 (15 November) (2020) 126200.
13. Marcuse D., Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers, *J. Opt. Soc. Am.* 66 (4) (1976) 311–320.
14. Schermer R., Cole M., Improved bend loss formula verified for optical fiber by simulation and experiment, *IEEE J. Quant. Electron.* 43 (10) (2007) 899–909.

15. **Velamuri A.V., Patel K., Sharma I., et al.**, Investigation of planar and helical bend losses in single- and few-mode optical fibers, *J. Light. Technol.* 37 (14) (2019) 3544–3556.
16. **Silva S., Frazão O., Viegas J., et al.**, Temperature and strain-independent curvature sensor based on a singlemode/multimode fiber optic structure, *Meas. Sci. Technol.* 22 (8) (2011) 085201.
17. **Wu Q., Semenova Y., Wang P., et al.**, Experimental demonstration of a simple displacement sensor based on a bent single-mode-multimode-single-mode fiber structure, *Meas. Sci. Technol.* 22 (2) (2011) 025203.
18. **Yang B., Niu Y., Yang B., et al.**, High sensitivity curvature sensor with intensity demodulation based on single-mode-tapered multimode-single-mode fiber, *IEEE Sens. J.* 18 (3) (2018) 1094–1099.
19. **Su J., Dong X., Lu C.**, Property of bent few-mode fiber and its application in displacement sensor, *IEEE Photonics Technol. Lett.* 28 (13) (2016) 1387–1390.
20. **Ivanov O.V.**, Mode interaction in a structure based on optical fiber with depressed inner cladding, *J. Commun. Technol. Electron.* 63 (10) (2018) 1143–1151.
21. **Chen J., Lu P., Liu D., et al.**, Optical fiber curvature sensor based on few mode fiber, *Optik (Stuttg.)*. 125 (17) (2014) 4776–4778.
22. **Dong S., Pu S., Huang J.**, Highly sensitive curvature sensor based on singlemode-multimode-singlemode fiber structures, *J. Optoelectron. Adv. Mater.* 16 (11–12) (2014) 1247–1251.
23. **Gong Y., Zhao T., Rao Y.-J. Wu Y.**, All-fiber curvature sensor based on multimode interference, *IEEE Photonics Technol. Lett.* 23 (11) (2011) 679–681.
24. **Tian K., Xin Y., Yang W., et al.**, A curvature sensor based on twisted single-mode-multimode-single-mode hybrid optical fiber structure, *J. Light. Technol.* 35 (9) (2017) 1725–1731.
25. **Petrov A.V., Chapalo I.E., Bisyarin M.A., Kotov O.I.**, Intermodal fiber interferometer with frequency scanning laser for sensor application, *Applied Optics.* 59 (33) (2020) 10422–10431.
26. **Kosareva L.I., Kotov O.I., Liokumovich L.B., et al.**, Two mechanisms of phase modulation in multimode fiber-optic interferometers, *Tech. Phys. Lett.* 26 (1) (2000) 70–74.
27. **Oksanen M.I.**, Perturbational analysis of curved anisotropic optical fibers, *J. Opt. Soc. Am. A.* 6 (2) (1989) 180–189.
28. **Shemirani M.B., Mao W., Panicker R.A., Kahn J.M.**, Errata to “Principal modes in graded-index multimode fiber in presence of spatial- and polarization-mode coupling”, *J. Light. Technol.* 29 (12) (2011) 1900–1900.
29. **Garth S.J.**, Modes and propagation constants on bent depressed inner cladding optical fibers, *J. Light. Technol.* 7 (12) (1989) 1889–1894.
30. **Schermer R.T.**, Mode scalability in bent optical fibers, *Opt. Express.* 15 (24) (2007) 15674–15701.
31. **Garth S.J.**, Modes on a bent optical waveguide, *IEEE Proc. J.: Optoelectronics.* 134 (4) (1987) 221–229.
32. **Kumar A., Goyal I.C., Ghatak A.K.**, Effect of curvature on dispersion in multimode parabolic index fibres, *Opt. Acta: Internat. J. Opt.* 22 (11) (1975) 947–953.
33. **Malik D.P.S., Gupta A., Ghatak A.K.**, Propagation of a Gaussian beam through a circularly curved selfoc fiber, *Appl. Opt.* 12 (12) (1973) 2923–2926.
34. **Taylor H.**, Bending effects in optical fibers, *J. Light. Technol.* 2 (5) (1984) 617–628.
35. **Yariv A., Yeh P.**, *Optical waves in crystals.* Wiley, New York, 1984.
36. **Yariv A., Yeh P.**, *Photonics: optical electronics in modern communications.* Oxford University Press, New York, 2007.
37. **Unger H.-G.**, *Planar optical waveguides and fibres.* Clarendon Press, Oxford, 1977.

Received 14.05.2021, accepted 18.05.2021.

THE AUTHORS**MARKVART Aleksandr A.**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

markvart_aa@spbstu.ru

LIOKUMOVICH Leonid B.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

leonid@spbstu.ru

USHAKOV Nikolai A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

n.ushakoff@spbstu.ru