DOI: 10.18721/JPM.14210
УДК 530.12:517.988.38(075.8)

О СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ И МАССЕ ВСЕЛЕННОЙ

Н.Н. Горобей[1], **А.С. Лукьяненко**[1], **А.В. Гольцев**[2]

[1] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для случая замкнутой Вселенной предложена модификация квантовой теории гравитации, в которой динамика сводится к движению по орбите групп общей ковариантности. Чтобы связать с наблюдениями параметры этого движения, а именно собственное время и пространственные сдвиги, в качестве дополнительных условий в квантовую теорию вводятся классические уравнения движения указанных параметров. Эти уравнения отражают дифференциальные законы сохранения дополнительных динамических переменных, которые в представлении Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) образуют пространственную плотность распределения и движения собственной массы Вселенной. Определены средние значения параметров собственного времени и пространственных сдвигов в истории эволюции Вселенной. Инвариантное определение собственной массы (спектра масс) сформулировано в операторном каноническом представлении теории гравитации, которое также вводится вместо представления АДМ.

Ключевые слова: Вселенная, собственное время, собственная масса, квантование, Эрмитов оператор, спинор Дирака

Ссылка при цитировании: Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С., Гольцев А.В. О собственном времени и массе Вселенной // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 118–129. DOI: 10.18721/JPM.14210

ABOUT THE PROPER TIME AND THE MASS OF THE UNIVERSE

N.N. Gorobey[1], **A.S. Lukyanenko**[1], **A.V. Goltsev**[2]

[1] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

[2] Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

For a closed universe, a modification of the quantum gravity where the dynamics is reduced to the motion in the orbit of a general covariance groups has been proposed. To connect these motion parameters, namely, proper time and spatial shifts, to observations, classical equations of motion were introduced into the quantum theory as additional conditions. The equations account for differential conservation laws for additional dynamical variables, which form the spatial density of distribution and motion of the universe's proper mass in the representation of Arnovitt, Deser and Misner (ADM). This made it possible to determine the average values of the parameters of proper time and spatial shifts in the evolutionary history of the universe. In order to preserve the homogeneity and isotropy of space, the proper mass of the universe should next be set equal to zero. Nonzero values of its proper mass (mass spectrum) were allowed in the operator canonical representation of the quantum gravity, which was also introduced instead of the ADM representation.

Keywords: universe, proper time, proper mass, quantization, Hermitian operator, Dirac spinor

Citation: Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V., About the proper time and the mass of the universe, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 118–129. DOI: 10.18721/JPM.14210

Введение

Основой квантовой теории гравитации для случая замкнутой Вселенной является уравнение (система волновых уравнений) Уиллера – Де Витта (УДВ):

$$\hat{H}^{\mu}\Psi = 0. \quad (1)$$

Согласно этому уравнению, волновая функция вселенной Ψ не зависит от какого-либо внешнего параметра времени. Принимая это, мы, тем не менее, полагаем, что время необходимо для интерпретации теории и описания результатов наблюдений, и оно должно быть введено также в квантовую космологию. Это требует модификации канонической процедуры квантования теории.

В данной работе предложен вариант такой модификации в случае замкнутой Вселенной, которая позволяет ввести параметр (параметры) времени. Модификация одновременно выступает вариантом квазиклассического приближения и не меняет динамического содержания теории на классическом уровне.

В качестве модели для наших построений рассмотрим механику релятивистской частицы. В релятивистской механике гамильтониан частицы массы m пропорционален гамильтоновой связи, т. е.

$$h = NH,\, H \equiv p^2 - m^2c^2, \quad (2)$$

выражающей известное условие на 4-импульс частицы.

Мы используем упрощенное обозначение для квадрата 4-вектора $p^2 = p^{\mu}p_{\mu}$. Положим в основу наших построений формальную симметрию, имеющуюся в релятивистской механике, – репараметризационную инвариантность действия, имеющего геометрический смысл длины мировой линии частицы в пространстве Минковского. Произвольная функция N параметра τ на мировой линии обеспечивает эту инвариантность. Данная симметрия является простейшим аналогом принципа общей ковариантности в теории гравитации Эйнштейна.

Наиболее универсальным инструментом квантования ковариантных теорий считается формализм Баталина – Фрадкина – Вилковысского (БФВ), который дает рецепт построения инвариантного пропагатора Бекки – Рюэ – Стора – Тютина (БРСТ-пропагатор) [1, 2]. В простейшем случае релятивистской частицы этот формализм дает также простой результат: функционально-интегральное представление функции Грина для уравнения Клейна – Гордона [3], которое содержит дополнительный интеграл по собственному времени частицы в интервале $[0, \infty)$. Данное представление функции Грина ранее было предложено В.А. Фоком [4] и Дж. Швингером [5]. Проблема интерпретации этой ковариантной квантовой теории заключается в том, что собственное время здесь не является параметром эволюции, а функция Грина сама по себе не имеет динамического смысла. Для однородных моделей Вселенной в квантовой теории получается в точности такой же результат.

Для того чтобы собственное время в квантовой теории приобрело смысл параметра эволюции, нужны дополнительные построения, позволяющие снять интегрирование по нему в пропагаторе. В работе [6] для однородной анизотропной модели Вселенной предложена модификация исходной теории, которая позволяет снять интеграл по собственному времени, не меняя его динамического содержания на классическом уровне.

Модификацию условно разделим на два этапа. На первом собственное время вводится в исходное действие классической теории в качестве новой динамической переменной с помощью соотношения

$$N = \dot{s}. \tag{3}$$

На втором этапе к исходному действию добавляется уравнение Эйлера – Лагранжа (ЭЛ) для новой динамической переменной в качестве дополнительного условия. Это эквивалентно добавлению к исходному действию его вариации, порожденной инфинитезимальным сдвигом собственного времени:

$$\delta s = -\varepsilon. \tag{4}$$

В простейшей однородной модели Вселенной [6] данное уравнение ЭЛ сводится к закону сохранения гамильтоновой связи, что в исходной теории было следствием уравнений движения физических динамических переменных. Такая модификация, очевидно, не меняет динамического содержания теории на классическом уровне, но уже здесь приводит к некоторым добавлениям.

Рассмотрим следствия рассматриваемой теории на примере релятивистской механики. В качестве исходной системы возьмем безмассовую частицу ($m = 0$ в соотношении (2)) с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{N}. \tag{5}$$

После двух этапов модификации приходим к функции Лагранжа:

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{\dot{s}}\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{s}}\right), \tag{6}$$

где инфинитезимальный сдвиг собственного времени ε также следует рассматривать в качестве независимой динамической переменной.

Перейдем к канонической форме модифицированной теории. Ее гамильтониан равен нулю, поскольку функция Лагранжа (6) есть однородная функция скоростей первой степени, а уравнение связи принимает вид

$$p_s = P_\varepsilon - \sqrt{2P_\varepsilon}\sqrt{p^2}, \tag{7}$$

где

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2}{\dot{s}^2} \tag{8}$$

– это канонический импульс, сопряженный ε.

Еще одним каноническим уравнением движения является закон сохранения добавочной динамической переменной $\dot{P} = 0$. С учетом уравнения (7) это означает закон сохранения связи исходной теории. Однако теперь масса частицы может быть не равной нулю, если положить

$$P_\varepsilon = 2m^2c^2. \tag{9}$$

Таким образом, предложенная модификация приводит к появлению в теории добавочного параметра P_ε, который в данном случае выступает как константа движения. Это можно понимать также как расширение допустимых начальных значений скорости частицы, обусловленное появлением у нее массы. Обратим внимание, что исходная связь (2) является инвариантом преобразований Лоренца, действующих в пространстве Минковского и фазовом пространстве релятивистской частицы. Инвариантом будет и собственная масса, возникшая в этом построении.

Есть еще один существенный результат модификации – появление квадратного корня из квадрата 4-импульса p_μ в уравнении (7). В квантовой теории это источник дополнительного условия в виде δ-функции в функциональном интеграле, которое определяет собственное время на мировой линии частицы как интеграл уравнения (8):

$$s = \int \frac{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}{\sqrt{2P_\varepsilon}}. \tag{10}$$

Именно это уравнение позволяет снять интегрирование по собственному времени в пропагаторе для релятивистской частицы. Обобщение этой модификации ковариантной квантовой теории на случай системы с двумя гамильтоновыми связями и двумя параметрами собственного времени рассмотрено в работе [7].

В данной работе предложена модификация теории гравитации в общем случае неоднородной Вселенной. В основу положено представление действия, полученное Арновиттом – Дезером – Мизнером (АДМ) [8, 9] с помощью (3 + 1)-расщепления 4D-метрики. Часть составляющих этой метрики (N, N_i), которые называются функциями следования и сдвига, играют роль множителей Лагранжа в каноническом представлении действия АДМ. Модификация теории в данном представлении приводит к появлению дополнительных динамических переменных, которые образуют скалярную и векторную плотности относительно преобразований пространственных координат. По аналогии с релятивистской частицей их можно назвать распределением плотности и плотности потока собственной массы Вселенной. Допущение ненулевых значений этих величин в представлении АДМ означает нарушение однородности и изотропности пространства. Обобщение теории за счет введения инвариантных ненулевых значений дополнительных динамических переменных возможно в операторном представлении гравитационных связей [10], которое также рассматривается в этой работе.

В операторном представлении дополнительные переменные являются инвариантами 3D-диффеоморфизмов и образуют спектр собственных модовых масс Вселенной.

Собственное время и масса Вселенной в представлении АДМ

Действие теории гравитации в представлении АДМ, полученное (3 + 1)-расщеплением 4D-метрики, имеет вид [9]:

$$I_{\text{ADM}} = \int N dt \int_{\Sigma} \sqrt{g}\, d^3x \times \times \left[R + \mathrm{Tr}K^2 - \left(\mathrm{Tr}K\right)^2 \right], \tag{11}$$

где

$$K_{ik} = \frac{1}{2N}\left[\nabla_i N_k + \nabla_k N_i - \dot{g}_{ik}\right] \tag{12}$$

есть тензор внешней кривизны гиперповерхности постоянного времени $\sum$.

Для простоты мы не включаем в действие (11) действие полей материи. Добавление материи не изменит основных выводов работы. Здесь N, N_i – функции следования и сдвига, которые являются составляющими 4D-метрики. Производные по времени этих функций в действии АДМ отсутствуют, так что они будут играть роль множителей Лагранжа в каноническом представлении действия. Уравнения ЭЛ для N, N_i – суть классические уравнения связей, выраженные через производные по времени от 3D-метрики:

$$\frac{\delta I_{\text{ADM}}}{\delta N} = H = = \sqrt{g}\left[R + \left(\mathrm{Tr}K\right)^2 - \mathrm{Tr}K^2 \right] = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\delta I_{\text{ADM}}}{\delta N_i} = H^i = = -2\nabla_k \left[\sqrt{g}\left(g^{ik} K - K^{ik} \right) \right] = 0. \tag{14}$$

Функция Гамильтона в случае замкнутой Вселенной имеет вид линейной комбинации

$$h_{\text{ADM}} = \int d^3x N_{\mu} \Pi^{\mu}, \tag{15}$$

где Π^{μ} – связи АДМ, выраженные через канонические импульсы

$$\pi^{ik} = \sqrt{g}\left(g^{ik} K - K^{ik} \right), \tag{16}$$

сопряженные составляющим 3D-метрики.

Квадратичные по импульсам гамильтоновы связи являются каноническими генераторами сдвигов по нормали к пространственному сечению $\sum$, а линейные импульсные связи служат каноническими генераторами 3D-пространственных диффеоморфизмов.

Явный вид этих связей в представлении АДМ нам здесь не понадобится. Заметим только, что они образуют скалярную и векторную плотности относительно преобразований пространственных координат на $\sum$. Далее мы будем следовать общим обозначениям [11], пригодным для любых ковариантных теорий. Суммирование по повторяющимся индексам подразумевает интегрирование, если область возможных значений индекса образует континуум.

В теории гравитации область изменения латинского индекса такова:

$$\alpha = (\mu, x); \ \mu = 0; \ i, x \in \sum.$$

В этих общих обозначениях инфинитезимальные сдвиги собственного (многострелочного) времени объединяются с инфинитезимальными пространственными сдвигами на гиперповерхности посредством единого символа ε_α, так что порождаемые этими сдвигами инфинитезимальные вариации канонических переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta q_\alpha &= \varepsilon_b \{q_\alpha, \varphi_b\}, \\ \delta p_\alpha &= \varepsilon_b \{p_\alpha, \varphi_b\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Связи образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона, т. е.

$$\{\varphi_\alpha, \varphi_b\} = C_{abd}\varphi_d, \tag{18}$$

и ее структурные функции в явном виде нам здесь также не понадобятся.

Преобразования (17) выступают в данном случае преобразованиями симметрии теории лишь постольку, поскольку действие, записанное в канонической форме

$$\begin{aligned} I &= \int dt L(q_i, \dot{q}_i, \lambda_\alpha) = \\ &= \int dt \left[p_i \dot{q}_i - \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right] \end{aligned} \tag{19}$$

является инвариантном этих преобразований при дополнительном преобразовании множителей Лагранжа:

$$\delta\lambda_\alpha = \dot{\varepsilon}_\alpha - C_{bd\alpha}\lambda_b \varepsilon_d. \tag{20}$$

Уравнения (20) положим в основу наших дальнейших построений. Будем их рассматривать как функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\lambda_\alpha(t)}{\delta s_b(t')} = \\ &= \delta_{\alpha b}\frac{d}{dt}\delta(t-t') - C_{db\alpha}\lambda_b(t)(t-t') \end{aligned} \tag{21}$$

относительно λ_α, и здесь мы их считаем функционалами параметров собственного времени s_α.

Решение этих уравнений при дополнительных начальных условиях $\lambda_\alpha[0] = 0$ имеет следующий вид:

$$\lambda_\alpha = \dot{s}_b \Lambda_{b\alpha}. \tag{22}$$

Его можно получить итерациями в виде функционального ряда Тейлора, в котором с точностью до второго порядка малости по s_α

$$\begin{aligned} \Lambda_{b\alpha}. &= \delta_{b\alpha} - \frac{1}{2!}C_{bd\alpha}s_d + \\ &+ \frac{1}{3!}C_{b'd'\alpha'}C_{bdb'}s'_d s_d - \ldots. \end{aligned} \tag{23}$$

Нам также потребуется вариация множителей Лагранжа (22) при инфинитезимальном сдвиге параметров собственного времени ε_α:

$$\delta\lambda_\alpha = \dot{\varepsilon}_b \Lambda_{b\alpha} + \dot{s}_b \frac{\partial \Lambda_{b\alpha}}{\partial s_d}\varepsilon_d. \tag{24}$$

Уравнения (22) и (24) представляют собой обобщение уравнений (3) и (4) для общего случая неоднородной Вселенной. Воспользовавшись аналогией с релятивистской механикой, запишем сразу функцию Лагранжа модифицированной теории гравитации в общем случае:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}(q, \dot{q}, s, \dot{s}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = L(q, \dot{q}, \lambda(s, \dot{s})) + \\ &+ \frac{\partial L(q, \dot{q}, \lambda(s, \dot{s}))}{\partial \lambda_d}\delta\lambda_d(s, \dot{s}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{25}$$

Особенности, связанные с проблемой времени, и возможные способы ее решения в модифицированной теории проявятся при переходе к канонической форме действия (25). Модифицированная функция Лагранжа (25) есть однородная функция первой степени всех обобщенных скоростей. Поэтому функция Гамильтона модифицированной теории равна нулю.

Принимая это во внимание, мы здесь отклонимся от стандартного формализма ковариантного квантования [1, 2] динамики в терминах внешнего параметра времени. Такое описание остается возможным для островной модели Вселенной, энергия которой не равна нулю, а время измеряется часами на бесконечности [12]. Вместо этого, в случае замкнутой Вселенной можно говорить о преобразованиях симметрии или движении по орбите группы общей ковариантности, которые генерируются связями, а параметры этого движения образуют собственное (многострелочное) время s_α.

В модифицированной теории эта внутренняя динамика заключена в уравнениях, определяющих канонические импульсы, сопряженные собственному времени:

$$p_{s_\alpha} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{s}_\alpha} = -\tilde{h}_\alpha. \qquad (26)$$

Эти уравнения будут играть роль связей в модифицированной теории после перехода к ее канонической форме. Для этого в правой части уравнений (26) следует исключить все скорости, выразив их через соответствующие канонические импульсы.

В квантовой теории связи уравнения (26) превращаются в систему самосогласованных волновых уравнений типа уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} = \hat{\tilde{h}}\Psi \qquad (27)$$

для волновой функции Вселенной Ψ.

Принцип общей ковариантности требует исключить зависимость волновой функции Вселенной от дополнительных динамических переменных s_α.

Инвариантный пропагатор получим дополнительным интегрированием решения системы (27) по всей орбите группы общей ковариантности с простой мерой:

$$\tilde{K} = \int \prod_\alpha ds_\alpha \Psi\left(s_\alpha, \ldots\right). \qquad (28)$$

Здесь мы не будем развивать модифицированную квантовую теорию, а сосредоточим внимание на тех аспектах канонической формы классической теории, которые приведут к снятию интегралов в пропагаторе (28). Одним из таких аспектов будет исключение скоростей инфинитезимальных сдвигов собственного времени $\dot{\varepsilon}_\alpha$, в результате чего в уравнениях (26) возникнут квадратные корни, аналогичные входящим в уравнение связи (7). Для их исключения служат уравнения, определяющие соответствующие канонически сопряженные импульсы вида

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_\alpha} &= \frac{\partial L\left(q, \dot{q}, \lambda\left(s, \dot{s}\right)\right)}{\partial \lambda_d} \Lambda_{ad} = \\ &= \Lambda_{ad} \varphi_d, \end{aligned} \qquad (29)$$

которые нам далее понадобятся в явном виде.

Уравнения (29) позволяют получить обобщение простейшего уравнения (10) для собственного времени релятивистской частицы в виде системы уравнений для собственного (многострелочного) времени Вселенной.

Выпишем эту систему в явном виде, учитывая наше соглашение о конденсированном латинском индексе:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{N^2\left(x\right)\left[\mathrm{Tr}K^2\left(x\right) - \left(\mathrm{Tr}K\left(x\right)\right)^2\right]}}{\sqrt{P_{\varepsilon_\alpha}\Lambda^{-1}_{\alpha 0}\left(x\right) + R\left(x\right)}} = \\ &= N\left(x\right), \end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{g\left(x\right)} P_{\varepsilon_\alpha} \Lambda^{-1}_{\alpha i}\left(x\right) = \\ &= -2\nabla_k \left[\sqrt{g\left(x\right)}\left(g^{ik}\left(x\right) K\left(x\right) - K^{ik}\left(x\right)\right)\right]. \end{aligned} \qquad (31)$$

Здесь функции следования и сдвига определяются формулами (22). Обе части уравнений (30) и (31) являются однородными функциями первой и нулевой степеней скоростей, соответственно. Интегралы этих уравнений определяют собственное время Вселенной как функцию траектории в ее конфигурационном пространстве. Это время также выступает функционалом дополнительных динамических переменных $P_{\varepsilon\alpha}$, поэтому уравнения (30), (31) следует решать совместно с их уравнениями движения. Они получаются как уравнения ЭЛ для инфинитезимальных сдвигов собственного времени в модифицированном действии и имеют вид

$$\frac{d}{dt}P_{\varepsilon_\alpha}+P_q\Lambda^{-1}_{qd}\dot{s}_b\frac{\partial\Lambda_{bd}}{\partial s_\alpha}=0. \qquad (32)$$

Согласно выражениям (29), дополнительные динамические переменные $P_{\varepsilon\alpha}$, как и связи в представлении АДМ, образуют пространственные плотности. Допущение их ненулевых значений нарушает ковариантность модифицированной теории относительно $3D$-диффеоморфизмов. Нарушения ковариантности не будет, если дополнительные переменные положить равными нулю тождественно. При этом результат модификации в виде системы уравнений (30), (31), определяющих собственное время Вселенной в представлении АДМ, сохранится. Инвариантное определение собственного времени и массы Вселенной может быть достигнуто с использованием $3D$-инвариантного представления гравитационных связей.

Операторное представление гравитационных связей

$3D$-инвариантное представление гравитационных связей основано на операторном равенстве

$$H=D^2+\frac{1}{2}\Delta=0, \qquad (33)$$

которое эквивалентно полному набору гравитационных связей в представлении АДМ [9]. Здесь D – это $3D$-оператор Дирака, а Δ – $3D$- оператор Бельтрами – Лапласа в пространстве биспиноров Дирака на компактном пространственном сечении $\sum$ с заданным скалярным произведением

$$\left(\psi_1,\psi_2\right)=\int\sqrt{g}\,d^3x\,\psi_1^+\psi_2. \qquad (34)$$

Оба оператора Δ и D – Эрмитовы относительно произведения (34), их коэффициенты – суть функции канонических переменных гравитационного поля (g_{ik}, π^{ik}).

Чтобы ввести новое каноническое представление, примем во внимание, что собственные функции Эрмитова оператора H образуют полный набор в пространстве биспиноров Дирака, а необходимым и достаточным условиями его равенства нулю является равенство нулю всех его собственных значений, определяемых секулярным уравнением

$$H\psi_\alpha=h_\alpha\psi_\alpha. \qquad (35)$$

В свою очередь это означает, что собственные значения H образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона с прежними каноническими переменными:

$$\left\{h_\alpha,h_\beta\right\}=\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma. \qquad (36)$$

Операторное уравнение (33) позволяет преобразовать функцию Гамильтона теории гравитации из первоначального представления в виде интеграла (15) от распределения локальных связей АДМ на пространственном сечении $\sum$ в линейную комбинацию модовых функций Гамильтона:

$$h_H=\lambda_\alpha h_\alpha\left(g,\pi\right). \qquad (37)$$

Под модами мы здесь понимаем собственные состояния оператора H.

Секулярное уравнение (35) можно представить в матричном виде, основываясь на спектральных разложениях для каждого Эрмитова и эллиптического оператора в равенстве (33).

Запишем секулярное уравнение для квадрата оператора Дирака:

$$D^2\psi_n = d_n^2\psi_n. \quad (38)$$

Считая набор собственных функций ψ_n ортонормированным, будем искать решение уравнения (35) в виде разложения

$$\psi_\alpha = \sum_n c_{\alpha n}\psi_n, \quad (39)$$

для коэффициентов которого получим систему уравнений

$$\sum_n \Delta_{mn}c_{\alpha n} = \left(h_\alpha - d_m^2\right)c_{\alpha m}\Delta_{mn} = \\ = \left(\psi_m, \Delta\psi_n\right). \quad (40)$$

Теперь запишем секулярное уравнение для Эрмитовой матрицы Δ_{mn} в виде

$$\sum_n \Delta_{mn} f_n^p = \delta_p f_m^p \quad (41)$$

и будем искать решение системы (40) как разложение

$$c_{\alpha n} = \sum_p a_{\alpha p} f_n^p. \quad (42)$$

Считая опять набор собственных векторов-последовательностей f_n^p ортонормированным относительно обычного Эрмитова скалярного произведения в пространстве последовательностей, для коэффициентов этого разложения и искомых собственных значений оператора H получим:

$$\sum_m d_m^2 f_m^{+p'} f_m^p a_{\alpha p} = \left(h_\alpha + \delta_{p'}\right)a_{\alpha p'}. \quad (43)$$

В таком виде система уравнений, определяющая модовые гамильтонианы Вселенной h_α, может быть полезна, в частности, для формулировки конечномерных приближений. Так, для однородной модели Вселенной, очевидно, имеем единственную моду с гамильтонианом

$$h = d_1^2 - \delta_1, \quad (44)$$

который совпадает с гамильтонианом однородной анизотропной Вселенной, рассмотренной в статье [6].

Модовые гамильтонианы h_α являются инвариантами $3D$-преобразований координат на пространственном сечении. Следовательно, инвариантами будут и все величины, возникающие в построениях предыдущего раздела. Инвариантами будут, в частности, модовые параметры собственного времени и спектр собственных масс, по прямой аналогии с релятивистской механикой. Это позволяет рассматривать эволюцию Вселенной в модифицированной квантовой теории без нарушения принципа общей ковариантности даже при ненулевых значениях собственных масс. Для волновой функции начала Вселенной постулируем условный принцип минимума энергии пространства, определяемой функционалом

$$W = \frac{\left\langle \Psi_0 \middle| d_1^2 \middle| \Psi_0 \right\rangle}{\left\langle \Psi_0 \middle| \Psi_0 \right\rangle}. \quad (45)$$

Дополнительным условием здесь служит равенство нулю гамильтониана Вселенной (37), а вариационными параметрами – волновая функция Ψ_0 и множители Лагранжа λ_n. Для вычисления этой энергии, определяемой эллиптическим оператором d_1^2, мы берем его минимальное собственное значение. Далее решаем систему волновых уравнений (27) (записанных теперь в операторном представлении). Полученный таким образом пропагатор (28) имеет дополнительную зависимость от спектра инвариантных модовых масс. Это, в свою очередь, позволяет определить в качестве наблюдаемых модовые параметры собственного времени как средние значения соответствующих наблюдаемых:

$$\left\langle \hat{\varepsilon}_\alpha \right\rangle_\Psi = \left\langle \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta P_\alpha} \right\rangle_\Psi. \quad (46)$$

Эти параметры времени или соответствующие им пространственные масштабы, очевидно, могут быть ассоциированы с иерархией пространственных структур, возникающих в процессе эволюции Вселенной. После вычисления средних значений (46), в рамках исходной теории модовые массы следует положить равными нулю. Однако принцип общей ковариантности теперь не исключает и ненулевые значения этих параметров. Наличие или отсутствие собственной массы Вселенной – это вопрос наблюдений и их интерпретации, который мы здесь оставляем открытым.

Новое каноническое представление теории гравитации позволяет модифицировать и первоначальную форму УДВ (1). Систему локальных (для каждой точки пространства) волновых уравнений, накладываемых на физическое состояние Вселенной, теперь следует заменить нелокальными модовыми условиями. Если строго следовать общепринятой формулировке квантовых связей, то операторное представление ведет к следующей системе волновых уравнений для физических состояний вселенной Ψ:

$$\hat{h}_\alpha \Psi = 0. \tag{47}$$

Однако представляется более естественной прямая реализация операторного представления (33) в виде самосогласованного определения самих мод с волновым уравнением для волновой функции Вселенной в рамках единого функционально-дифференциального уравнения:

$$\hat{H}\psi_\alpha \Psi_\alpha = 0. \tag{48}$$

В такой формулировке квантовой космологии, решения следует группировать в последовательности с возрастающим модовым индексом α, который тем самым принимает смысл квантового параметра собственного времени для данной последовательности физических состояний Вселенной Ψ_α.

Заключение

Отсутствие привычного представления о времени в квантовой космологии является одним из следствий принципа общей ковариантности, который исключает какую-либо внешнюю нумерацию структуры Вселенной. Это означает, что эволюция Вселенной должна быть определена во внутренних терминах. На самом деле структура самой группы ковариантности, после дополнительных построений, определяет внутреннюю динамику Вселенной. Построения, предложенные в данной работе, основаны на структуре группы общей ковариантности в каноническом представлении АДМ, которое получено (3 + 1)-расщеплением геометрии пространства-времени. Собственное время и пространственные сдвиги как естественные параметры преобразований симметрии вводятся в исходное действие в качестве независимых динамических переменных. В таком случае динамика замкнутой Вселенной сводится к движению по орбите группы общей ковариантности. В квантовой теории такое движение описывается системой волновых уравнений типа Шредингера. Однако принцип общей ковариантности требует независимости волновой функции от параметров этого движения – преобразования симметрии. Независимость достигается усреднением волновой функции по орбите группы симметрии. Задача второго этапа модификации состоит в снятии дополнительного усреднения по орбите посредством корреляции внутренней динамики с классическими интегралами движения. В исходной теории эти интегралы играют роль связей, т. е. обращаются в нуль вследствие принципа общей ковариантности. В модифицированной теории эти величины могут быть отличны от нуля и становятся дополнительными динамическими переменными. Их движение описывается уравнениями ЭЛ для параметров общековариантных преобразований. Введение в квантовую теорию дополнительных динамических переменных, связанных с интегралами движения, является вариантом квазиклассического приближения. В данном случае приближение не нуждается в каком-либо обосновании соответствующими оценками. Остается единственное требование – это соответствие наблюдениям. «Точная» квантовая теория, в отсутствие параметра времени, связи с наблюдениями не имеет.

Наблюдаемыми в модифицированной теории выступают дополнительные динамические переменные P_ε, которые в представлении АДМ образуют пространственное распределение собственной массы Вселенной, а также канонически сопряженные им пространственно-временные сдвиги. Для последних могут быть определены средние (по всей истории Вселенной) значения и в исходной теории, где собственную массу Вселенной следует полагать равной нулю. Ненулевая собственная масса Вселенной (спектр масс) допускается в операторном каноническом представлении теории гравитации для замкнутой Вселенной. В этом представлении спектр масс привязан к иерархии пространственных структур, возникающих в процессе эволюции Вселенной. Сама последовательность образования пространственных структур различных масштабов может служить материальной основой понятия собственного времени Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.** Quantization of relativistic systems with constraints // Physics Letters. B. 1975. Vol. 55. No. 2. Pp. 224–226.

2. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** Relativistic *S*-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints // Physics Letters. B. 1977. Vol. 69. No. 3. Pp. 309–312.

3. **Govaerts J.** A note on the Fradkin – Vilkovisky theorem // International Journal of Modern Physics. A. 1989. Vol. 4. No. 17. Pp. 4487–4504.

4. **Фок В.А.** Собственное время в классической и квантовой механике // Известия АН СССР. Серия физическая. 1937. № 4–5. С. 551–568.

5. **Schwinger J.** On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. No. 5. Pp. 664– 679.

6. **Gorobey N., Lukyanenko A., Drozdov P.** Energy conservation law in the closed universe and a concept of the proper time // Universe. 2020. Vol. 6. No. 10. P. universe6100174.

7. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V.** The proper mass of the universe // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2021. Vol. 14. No. 1. Pp. 147–154.

8. **Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.** Dynamical structure and definition of energy in general relativity // Phys. Rev. 1959. Vol. 116. No. 5. Pp. 1322–1330.

9. **Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.** Gravitation. New Jersey, USA: Princeton University Press, 2017. 1279 p.

10. **Горобей Н.Н., Лукьяненко А.С.** Операторное представление гравитационных связей в случае замкнутой Вселенной // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 105. № 3. С. 503–507.

11. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 272 с.

12. **Фаддеев Л.Д., Попов В.Н.** Ковариантное квантование гравитационного поля // Успехи физических наук. 1973. Т. 111. Вып. 3. С. 427–450.

Статья поступила в редакцию 09.04.2021, принята к публикации 11.05.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОРОБЕЙ Наталья Николаевна – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

n.gorobey@mail.ru

ЛУКЬЯНЕНКО Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

alex.lukyan@rambler.ru

ГОЛЬЦЕВ Александр Викторович – *доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.

golysev@ua.pt

REFERENCES

1. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.,** Quantization of relativistic systems with constraints, Phys. Lett. B. 55 (2) (1975) 224–226.

2. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.,** Relativistic *S*-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints, Phys. Lett. B. 69 (3) (1977) 309–312.

3. **Govaerts J.,** A note on the Fradkin – Vilkovisky theorem, International Journal of Modern Physics. A. 4 (17) (1989) 4487–4504.

4. **Fock V.A.,** The eigen-time in classical and quantum mechanics, Phys. Zs. Sowjet. 12 (4) (1937) 404–425 (in German).

5. **Schwinger J.,** On gauge invariance and vacuum polarization, Phys. Rev. 82 (5) (1951) 664–679.

6. **Gorobey N., Lukyanenko A., Drozdov P.,** Energy conservation law in the closed universe and a concept of the proper time, Universe. 6 (10) (2020) universe6100174.

7. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S., Goltsev A.V.,** The proper mass of the universe, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 147–154.

8. **Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.,** Dynamical structure and definition of energy in general relativity, Phys. Rev. 116 (5) (1959) 1322–1330.

9. **Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.,** Gravitation, Princeton University Press, New Jersey, USA, 2017.

10. **Gorobey N.N., Lukyanenko A.S.,** Operator representation of gravitational constraints for the case of the closed universe, Theoretical and Mathematical Physics. 105 (3) (1995) 1603–1606.

11. **Faddeev L.D., Slavnov A.A.,** Gauge fields: An introduction to quantum theory, 2nd edition, Westview Press, 1993.

12. **Faddeev L.D., Popov V.N.,** Covariant quantization of the gravitational field, Sov. Phys. Usp. 16 (6) (1974) 777–788.

Received 09.04.2021, accepted 11.05.2021.

THE AUTHORS

GOROBEY Natalia N.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

n.gorobey@mail.ru

LUKYANENKO Alexander S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

alex.lukyan@rambler.ru

GOLTSEV Alexander V.
Ioffe Institute of RAS
26, Politekhnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation
gorobej_nn@spbstu.ru