

DOI: 10.18721/JPM.14211

УДК 539.3

ОТКЛОНЕНИЕ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЫ ОТ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РОСТА ВСЛЕДСТВИЕ НЕПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

В.В. Тихомиров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассматривается задача о поведении антиплоской полубесконечной интерфейсной трещины, вершина которой совпадает с угловой точкой границы раздела материалов. С помощью интегрального преобразования Меллина получено точное решение рассмотренной задачи. Для напряжений вблизи указанной угловой точки построены асимптотические выражения, которые могут содержать одно или два сингулярных слагаемых. Для анализа роста трещины использован силовой критерий разрушения (критерий Новожилова). На основе полученного точного решения проведена оценка точности вычислений угла отклонения трещины и разрушающей нагрузки, определяемых с помощью асимптотик. Исследованы зависимости этих характеристик разрушения от параметров композиции материалов.

Ключевые слова: антиплоская интерфейсная трещина, угловая точка, угол отклонения трещины, разрушающая нагрузка

Ссылка при цитировании: Тихомиров В.В. Отклонение интерфейсной трещины от прямолинейного роста вследствие непрямолинейной границы раздела материалов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 130–140. DOI: 10.18721/JPM.14211

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

DEFLECTION OF AN INTERFACE CRACK FROM THE STRAIGHT-LINE GROWTH DUE TO THE UNSTRAIGHTNESS OF THE MATERIAL INTERFACE

V.V. Tikhomirov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

An antiplane semi-infinite interface crack propagation problem has been considered, the crack tip coinciding with the angular point of the materials interface. The exact solution of the problem was obtained using the Mellin integral transformation. Asymptotic formulas for stresses near the crack tip were constructed, and they could contain one or two singular terms. To analyze the crack growth, the Novozhilov force criterion of fracture was used. Based on the obtained exact solution, the calculation accuracy of the crack angle and the destructive load, determined using asymptotics, was estimated. The dependences of these fracture characteristics on the composition parameters were investigated.

Keywords: antiplane interface crack, corner point, crack deflection angle, breaking load

Citation: Tikhomirov V.V., Deflection of an interface crack from the straight-line growth due to the unstraightness of the material interface, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 130–140. DOI: 10.18721/JPM.14211

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В линейной механике разрушения, результаты которой базируются на решениях уравнений линейной теории упругости, важную роль играют особые точки (точки сингулярности) полей напряжений, которые инициируют процесс разрушения. В качестве таких точек могут выступать вершины трещин, вершины острых вырезов или включений в материале. В вершине трещины, находящейся в однородной среде, имеет место классическая корневая сингулярность, т. е. показатель сингулярности равен 0,5. В других случаях, вообще говоря, показатель сингулярности будет отличаться от указанного значения. Показатели сингулярности определяются корнями трансцендентных характеристических уравнений, расположенными в интервале (0, 1). Обзор результатов, относящихся к этому утверждению, приведен в работах [1 – 3].

Среди множества проблем механики разрушения выделяется класс задач о взаимодействии трещин с границей раздела материалов. В плоской и антиплоской постановках этот класс задач изучался, например, в работах [4 – 7]. При этом граница раздела предполагалась прямолинейной. Следует отметить, что в таких случаях классический критерий разрушения Гриффитса – Ирвина не применим, поскольку порядок особенности в вершине трещины отличен от 0,5 и должны использоваться иные критериальные подходы. Краткий обзор таких подходов приведен в статье [8].

Если граница раздела материалов имеет точку излома, то, как показано в работе [9], такая точка в антиплоской задаче является существенно особой. Другими словами, в этом случае характеристическое уравнение при некоторых значениях параметров композиции имеет уже два различных корня, меньших единицы и определяющих два сингулярных слагаемых в асимптотике поля напряжений в вершине трещины.

В данной работе исследуется отклонение первоначально прямолинейной интерфей-

сной трещины от прямолинейного роста, вызванное кусочно-прямолинейной границей раздела двух материалов.

В качестве критерия разрушения использован силовой критерий Новожилова [10]. На основе полученного точного решения основное внимание в работе уделяется оценке возможности использования асимптотик полей напряжений для определения угла отклонения трещины и разрушающей нагрузки, а также анализу зависимостей этих характеристик разрушения от параметров композиции материалов. Аналогичная задача в плоской постановке рассматривалась в статье [11]. Однако ее результаты базировались на применении асимптотических решений и численного метода конечных элементов.

Постановка задачи и построение ее точного решения

Рассмотрим полубесконечную интерфейсную трещину продольного сдвига, вершина которой совпадает с угловой точкой двух связанных клиновидных областей Ω_1 и Ω_2 с углами раствора α и $(2\pi - \alpha)$ соответственно (рис. 1). Материалы областей считаются однородными и изотропными с модулями сдвига μ_1 и μ_2 . К берегам трещины приложены на расстоянии r_0 от вершины самоуравновешенные сосредоточенные силы величиной T . Контакт на границе раздела материалов предполагается идеальным.

Поля перемещений и напряжений в каждой из областей строятся в виде интегралов Меллина:

$$\begin{aligned}
 w_k(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp, \\
 \tau_{\theta zk}(r, \theta) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta zk}(p, \theta) r^{-p-1} dp \quad (k=1, 2),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где трансформанты перемещений и напряжений определяются как

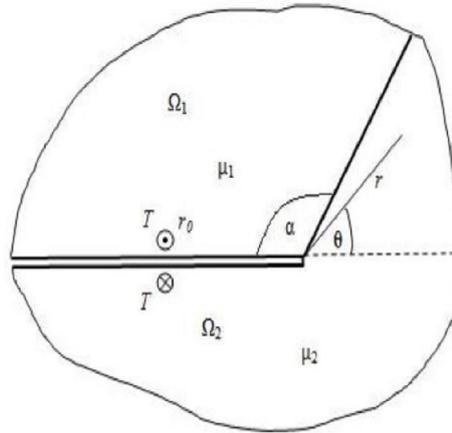


Рис. 1. Полубесконечная интерфейсная трещина, вершина которой совпадает с угловой точкой границы раздела материалов: μ_1, μ_2 – модули сдвига материалов областей Ω_1 и Ω_2 ; α – угол раствора области Ω_1 ; T – самоуравновешенные сосредоточенные силы, приложенные на расстоянии r_0 от вершины; r, θ – полярные координаты

$$W_k(p, \theta) = A_k(p) \sin p\theta + \varphi_{k2}(p, \alpha, m) \cos p\theta, \quad (4)$$

$$+ B_k(p) \cos p\theta, \quad (2)$$

$$T_{\theta zk}(p, \theta) = \mu_k p [A_k(p) \cos p\theta - B_k(p) \sin p\theta].$$

$$\varphi_{11}(p, \alpha, m) = \sin \pi p - m \sin(\pi - \alpha) p \cos(2\pi - \alpha) p,$$

$$\varphi_{12}(p, \alpha, m) = m \sin(\pi - \alpha) p \sin(2\pi - \alpha) p,$$

$$\varphi_{21}(p, \alpha, m) = \sin \pi p - m \cos \alpha p \sin(\pi - \alpha) p, \quad (5)$$

Здесь r, θ – полярные координаты.

Исходя из условий регулярности решения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, контур интегрирования L расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2 \quad (\delta_1, \delta_2 > 0).$$

Подчиняя функции (1) условиям идеального контакта при $\theta = \pi - \alpha$ и условиям нагружения берегов трещины при $\theta = \pm\pi$, находим величины $A_k(p)$ и $B_k(p)$, входящие в формулы (2). В результате представления для напряжений будут иметь вид

$$\tau_{\theta zk} = \frac{T}{\pi i r_0} \int_L \frac{\Phi_k(p, \theta, \alpha, m)}{\Delta(p, \alpha, m)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{p+1} dp \quad (3)$$

$$(k = 1, 2)$$

$$\Phi_k(p, \theta, \alpha, m) = \varphi_{k1}(p, \alpha, m) \sin p\theta + \quad (4)$$

$$\varphi_{22}(p, \alpha, m) = -m \sin \alpha p \sin(\pi - \alpha) p,$$

$$\Delta(p, \alpha, m) = \sin 2\pi p - m \sin 2(\pi - \alpha) p.$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную

$$m = (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2).$$

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству $|m| \leq 1$. Если материал включения (области Ω_1) является более жестким, по сравнению с материалом матрицы, то $0 < m < 1$; в



противном случае (для мягкого включения) величина m лежит в интервале $-1 < m < 0$. Значение $m = 0$ отвечает однородной среде, а значения $m \pm 1$ определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Полюсы подынтегральной функции в формуле (3) определяются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(p, \alpha, \beta, m) = 0. \quad (6)$$

Функция (5) является целой нечетной функцией параметра интегрального преобразования p , не имеющей нулей на мнимой оси, кроме однократного нуля $p = 0$. Однако, согласно формулам (4), эта точка является устранимой особой точкой. Поэтому контур интегрирования L в формуле (3) может быть совмещен с мнимой осью. Можно показать, что комплексных нулей, лежащих в полосе $|\operatorname{Re} p| \leq 1$, функция (5) не имеет.

В силу нечетности функции (5) каждому корню уравнения (6) $p_- < 0$ соответствует корень $p_+ > 0$, причем $p_- = -p_+$. Поскольку для исследования сингулярности напряжений (3) в вершине трещины интерес представляют корни, по величине не превосходящие единицы, для удобства будем изучать вещественные корни характеристического уравнения, расположенные в интервале $(0, 1)$.

Функция (5) обладает следующим свойством:

$$\Delta(p, \alpha, m) = \Delta(p, 2\pi - \alpha, -m).$$

Отсюда вытекает, что достаточно рассматривать конфигурацию системы, когда $0 < \alpha < \pi$ при положительных и отрицательных значениях биупругой постоянной m .

Детальный анализ показывает, что в случае относительно более жесткой среды 1, когда $\mu_1 > \mu_2$ и, следовательно $m > 0$, при $\pi/2 \leq \alpha < \pi$ характеристическое уравнение будет иметь один корень $p_1 \in (1/4, 1/2)$, а при $0 < \alpha < \pi/2$ — два корня: $p_1 \in (1/4, 1/2)$ и $p_2 \in (3/4, 1)$.

Если $m < 0$, т. е. $\mu_1 < \mu_2$, уравнение (6) при $0 < \alpha \leq \pi/2$ имеет один корень $p_1 \in (1/2, 3/4)$,

порождающий слабую особенность $\lambda = 1 - p_1 < 1/2$ напряжений (3), а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ — два корня в интервале $(1/2, 1)$.

Случай $\alpha = \pi/2$ является особым, поскольку при такой геометрии характеристическое уравнение имеет в интервале $(0, 1)$ только один корень при любом $m \in (-1, 1)$. При этом корни уравнения (6) распадаются на два множества, так как

$$\begin{aligned} \Delta(p, \pi/2, m) &= \\ &= 2(\cos \pi p - m/2) \sin \pi p. \end{aligned}$$

Первый положительный нуль функции $\cos \pi p - m/2$ является монотонно убывающей величиной параметра m , принимающей значения, равные $2/3$ при $m = -1$ и $1/3$ при $m = 1$.

Аналогичное расщепление корней уравнения (6) также имеет место, например, при $\alpha = \pi/3$ и $\alpha = 2\pi/3$.

Критерий разрушения

Для вычисления напряжений в композитной среде при $r < r_0$ замкнем контур интегрирования L в формуле (3) слева полуокружностью большого радиуса и воспользуемся теоремой Коши о вычетах в полюсах подынтегральной функции. В результате напряжения в каждой из областей будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tau_{\theta zk} &= \frac{2T}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(-p_n, \theta, \alpha, m)}{\Delta'(p_n, \alpha, m)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_n+1} \\ &(k = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве критерия разрушения будем использовать силовой критерий, предложенный В.В. Новожиловым [10], согласно которому разрушение путем роста трещины происходит, когда среднее напряжение, вычисленное на некотором расстоянии d от ее вершины, достигает критического значения, равного пределу прочности материала на сдвиг τ_c :

$$\bar{\tau}_{\theta zk} = \frac{1}{d} \int_0^d \tau_{\theta zk}(r, \theta) dr = \tau_{ck}. \quad (8)$$

Этот критерий в плоской и антиплоской задачах применялся, например, в работах [8, 11, 12].

Используя представление (7), для средних напряжений получаем:

$$\bar{\tau}_{\theta zk}(\theta) = \frac{2T}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(-p_n, \theta, \alpha, m)}{p_n \Delta'(p_n, \alpha, m)} \left(\frac{d_k}{r_0}\right)^{p_n-1} \quad (9)$$

Углы $\theta_1(\alpha, m)$ и $\theta_2(\alpha, m)$, определяющие направления роста трещины, находятся из условий экстремума функций (9) в областях Ω_1 и Ω_2 . Используя формулы (4), можно показать, что производная $\partial\Phi_1/\partial\theta < 0$ при $\pi - \alpha < \theta < \pi$ и любых допустимых значениях параметра $|m| \leq 1$. Иными словами, функция в области Ω_1 является монотонно убывающей и принимает наибольшее значение на границе $\theta = \pi - \alpha$. Поскольку распространение трещины в области Ω_1 является невозможным, далее рассматривается только необходимое условие экстремума среднего напряжения $\tau_{\theta z2}(\theta)$ в области Ω_2 :

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{\theta z2}(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (10)$$

при $-\pi < \theta < \pi - \alpha$,

которое в силу равенства (9) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \Phi_2(-p_n, \theta, \alpha, m)/\partial \theta}{p_n \Delta'(p_n, \alpha, m)} \left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_n-1} = 0. \quad (11)$$

Асимптотический подход

Если уравнение (6) имеет только один положительный корень $p_1 \in (0, 1)$, то асимптотика напряжений (7) при $r \rightarrow 0$ будет одночленной:

$$\tau_{\theta z2} = \frac{2T}{r_0} \frac{\Phi_2(-p_1, \theta, \alpha, m)}{\Delta'(p_1, \alpha, m)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_1+1}, \quad (12)$$

а условие разрушения (8) на луче $\theta = \theta_2$ примет вид

$$\frac{2T}{r_0} \frac{\Phi_2(-p_1, \theta_2, \alpha, m)}{p_1 \Delta'(p_1, \alpha, m)} \left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_1-1} = \tau_{c2}. \quad (13)$$

Эта формула справедлива при любых значениях параметров α и m . Рассматривая случай однородной среды, положим в равенстве (13) $m = 0$ и, следовательно, $p_1 = 1/2$, а $\theta_2 = 0$. Тогда, используя формулы (4) и (5), для относительного критического расстояния d_2 получим следующее представление:

$$\frac{d_2}{r_0} = \gamma^2, \quad \gamma^2 = \frac{2}{\pi r_0} \left(\frac{K_{3c}^{(2)}}{\tau_{c2}}\right)^2,$$

где γ – безразмерный геометрический параметр, $K_{3c}^{(2)}$ – вязкость разрушения материала области Ω_2 .

Заметим, что такое же представление для критического расстояния было получено для острого выреза в работах [8, 13].

Равенство (11), определяющее угол отклонения трещины $\theta_2(\alpha, m)$, в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{\partial \Phi_2(-p_1, \theta, \alpha, m)}{\partial \theta} = 0.$$

Тогда, используя формулы (4), для угла отклонения получаем представление

$$\theta_2 = \frac{1}{p_1} \arctg \left[-\frac{\Phi_{22}(p_1, \alpha, m)}{\Phi_{21}(p_1, \alpha, m)} \right]. \quad (14)$$

Отсюда заключаем, что при использовании одночленной асимптотики (12) критическое расстояние d_2 не влияет на величину угла отклонения трещины.

Зависимость угла отклонения от параметров. На основе свойств функций (4) можно показать, что при $m > 0$ ($\mu_1 > \mu_2$) и



$\pi/2 \leq \alpha < \pi$ угол $\theta_2 > 0$ и является монотонно возрастающей функцией параметра m . Иными словами, трещина будет отклоняться в сторону границы раздела с более жестким материалом. В предельном случае, когда материал области Ω_1 является абсолютно твердым, т. е. $m \rightarrow 1$, угол отклонения $\theta_2 = \pi - \alpha$. Иначе говоря, разрушение будет происходить вблизи границы раздела материалов. Кроме того, при рассматриваемых значениях параметров производная $\partial\theta_2/\partial\alpha < 0$ и, следовательно, угол θ_2 является убывающей функцией параметра α , которая стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \pi$, что соответствует росту трещины по границе раздела двух разнородных полуплоскостей.

Если материал области Ω_2 является относительно более жестким ($m < 0$) и $0 < \alpha \leq \pi/2$, то из формул (4) и (14) вытекает, что $\theta_2 < 0$. В этом случае рост трещины будет происходить в направлении от границы раздела материалов. Наибольшее по величине отклонение трещины в отрицательном направлении отсчета полярного угла будет происходить при $m \rightarrow -1$. В силу монотонности функции θ_2 по параметру α , максимум отклонения достигается при $\alpha = \pi/2$, когда $\theta_2 \rightarrow -\pi/4$ для $m \rightarrow -1$.

Заметим, что особенно простой вид зависимость (14) принимает, когда $\alpha = \pi/2$:

$$\theta_2 = \frac{1}{p_1} \operatorname{arctg} \frac{m}{\sqrt{4-m^2}},$$

где p_1 – первый положительный нуль функции $\cos p_1 r - m/2$.

Используя найденное значение угла отклонения (14), из равенства (13) получаем критическую (разрушающую) нагрузку, вызывающую рост трещины:

$$T = \frac{p_1 \Delta'(p_1, \alpha, m)}{2\Phi_2(-p_1, \theta_2, \alpha, m)} \gamma^{2(1-p_1)} r_0 \tau_{c2}.$$

Учитывая, что критическая нагрузка для полубесконечной трещины в однородной среде определяется формулой $T_0 = 0,5\pi\gamma r_0 \tau_{c2}$, введем в рассмотрение приведенную критическую нагрузку T^* для композиции:

$$T^* = \frac{T}{T_0} = \frac{p_1 \Delta'(p_1, \alpha, m)}{\pi \Phi_2(-p_1, \theta_2, \alpha, m)} \gamma^{1-2p_1}. \quad (15)$$

При других значениях параметров характеристическое уравнение имеет два корня: p_1 и p_2 на промежутке $(0, 1)$, и асимптотика напряжений будет содержать два сингулярных слагаемых:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z 2} = & \\ = \frac{2T}{r_0} & \left[\frac{\Phi_2(-p_1, \theta, \alpha, m)}{\Delta'(p_1, \alpha, m)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_1+1} + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_2(-p_2, \theta, \alpha, m)}{\Delta'(p_2, \alpha, m)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-p_2+1} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В таком случае условие разрушения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2T}{r_0} & \left[\frac{\Phi_2(-p_1, \theta_2, \alpha, m)}{p_1 \Delta'(p_1, \alpha, m)} \left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_1-1} + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_2(-p_2, \theta_2, \alpha, m)}{p_1 \Delta'(p_2, \alpha, m)} \left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_2-1} \right] = \tau_{c2}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом относительное критическое расстояние определяется формулой

$$\frac{d_2}{r_0} = \frac{9}{4\gamma^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{3}\gamma^2} - 1 \right)^2.$$

Если $\gamma \ll 1$, то $d_2/r_0 \sim \gamma^2$ и, следовательно, при достаточно малых значениях γ для критического расстояния можно использовать результат, полученный при одночленной асимптотике.

Угол отклонения трещины θ_2 в данном случае будет корнем уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(p_1) \sin p_1 \theta + \varphi_{22}(p_1) \cos p_1 \theta + \\ + \frac{\Delta'(p_1)}{\Delta'(p_2)} \left[\varphi_{21}(p_2) \sin p_2 \theta + \right. \\ \left. + \varphi_{22}(p_2) \cos p_2 \theta \right] \left(\frac{d_2}{r_0}\right)^{p_2-p_1} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В отличие от одночленной асимптотики, здесь угол θ_2 будет зависеть от критического расстояния.

После нахождения угла отклонения из критерия разрушения (17) вычисляется критическая нагрузка, а далее на основе определения (15) вычисляется и ее приведенная величина.

Численные результаты и их обсуждение

На основе точного решения (7) и критерия разрушения (8), (9) тем же способом получаем, что относительное критическое расстояние удовлетворяет уравнению

$$\frac{d_2}{r_0} = \gamma \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d_2}{r_0}},$$

а приведенная разрушающая нагрузка находится по формуле

$$T^* = \frac{1}{\pi \gamma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(-p_n, \theta_2, \alpha, m)}{p_n \Delta'(p_n, \alpha, m)} \left(\frac{d_k}{r_0} \right)^{p_n-1} \right]^{-1}. \quad (19)$$

При этом направление роста трещины определяется углом θ_2 , который есть корень уравнения (11).

Для оценки точности асимптотического подхода проведены вычисления характеристик разрушения θ_2 и T^* на основе точного решения при различных значениях параметров α , m и γ . На рис. 2 приведена зависимость угла отклонения трещины θ_2 от биупругой постоянной m , вычисленного на основе асимптотики (14) и точного решения при $\alpha = \pi/2$ и $\gamma = 0,25$. При этих значениях параметров асимптотика дает верхнюю оценку угла отклонения при $m > 0$ и нижнюю оценку при $m < 0$. Наибольшая погрешность асимптотической оценки составляет 25,7 % в случае мягкого материала области Ω_2 и около 69 % в случае относительно более жесткого материала этой области. Когда материал в области Ω_1 становится очень жестким ($m \rightarrow 1$) точ-

ность асимптотической формулы (14) повышается и рост трещины происходит вблизи интерфейса.

Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях параметров α , m и γ , в том числе и в случае двучленной асимптотики (16), когда угол отклонения трещины определяется как корень уравнения (18). Отличие от случая $\alpha = \pi/2$ состоит только в том, что погрешность асимптотического подхода существенно снижается при отрицательных значениях биупругой постоянной.

Расчеты показывают, что точность вычисления угла отклонения возрастает при уменьшении параметра γ для всех возможных значений величин α и m . Следует также отметить, что учет только первого слагаемого в двучленной асимптотике (16) приводит к очень большим ошибкам (более 100%) при нахождении угла отклонения и, следовательно, является неприемлемым.

Таким образом, использование асимптотик поля напряжений вблизи вершины трещины при достаточно малых значениях параметра γ качественно верно определяет угол отклонения трещины, однако в количественном плане может приводить к существенным неточностям.

На рис. 3 указана зависимость угла θ_2 , рассчитанного по точному решению, в случае относительно более жесткого материала области Ω_1 при различных значениях ее угла раствора. В соответствии с выводами асимптотического подхода, в данном случае трещина будет отклоняться в сторону границы раздела материалов, и при $m \rightarrow 1$ ее рост будет происходить вблизи этой границы. При $m < 0$ разница в углах отклонения для различных значений угла α незначительна (меньше 6 %) и зависимость θ_2 от m близка к кривой 1 на рис. 2.

Точность расчета приведенной разрушающей нагрузки T^* , выполненного на основе асимптотик, весьма высока и находится в пределах 5 % при значениях γ , не превышающих 0,5, для любых возможных значений величин α и m . При этом учет только сингулярных членов полей напряжений опреде-

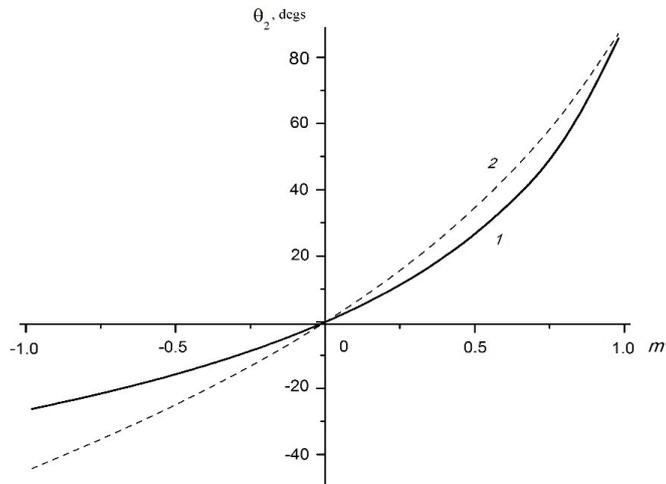


Рис. 2. Зависимости угла отклонения интерфейсной трещины θ_2 от биупругой постоянной m , полученные на основе точного решения (1) и на основе одночленной асимптотики напряжений (2); $\alpha = \pi/2, \gamma = 0,25$

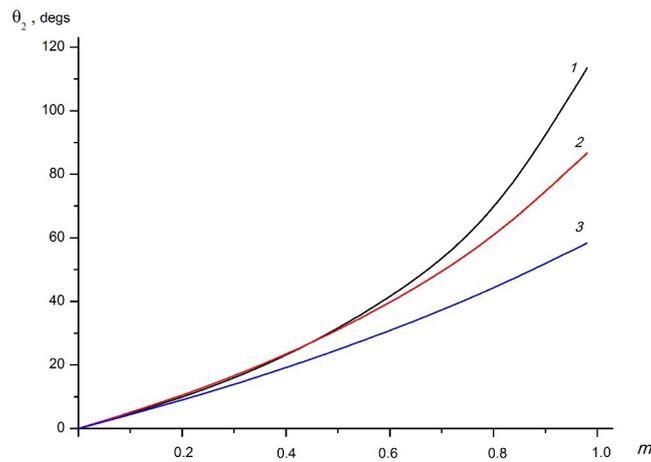


Рис. 3. Зависимости угла отклонения интерфейсной трещины θ_2 , вычисленного на основе точного решения, от биупругой постоянной $m > 0$ при $\gamma = 0,1$ и различных значениях угла α : $\pi/3$ (1), $\pi/2$ (2), $2\pi/3$ (3)

ляет нижнюю оценку разрушающей нагрузки. Точность этой оценки повышается при уменьшении параметра γ . На рис. 4 приведена зависимость величины T^* , рассчитанной по точному решению (19), при $\alpha = \pi/2$ и различных значениях параметра γ . Аналогичные зависимости имеют место и для других значений угла α . Приведенные кривые показывают, что при $m > 0$ величина приведенной нагрузки меньше единицы, а при $m < 0$ боль-

ше единицы. Это означает, что для продвижения трещины в случае относительно более жесткой среды 1 необходимо приложить к ее берегам меньшие силы, по сравнению со случаем однородной среды. В ситуации более мягкого материала области Ω_1 наоборот: силы, прикладываемые к берегам трещины и вызывающие ее рост в композитной среде, будут превышать силы, прикладываемые в случае однородного материала.

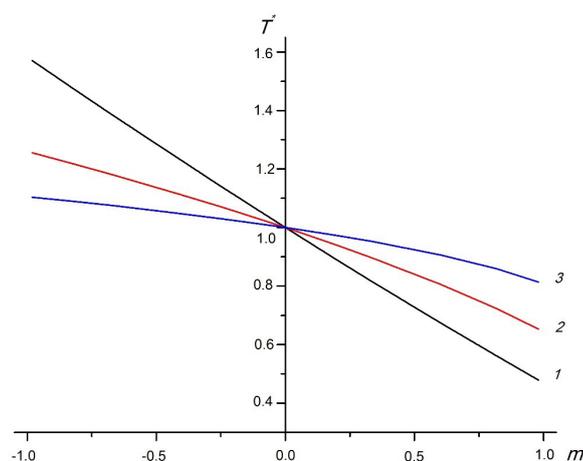


Рис. 4. Зависимости приведенной разрушающей нагрузки T^* , вычисленной на основе точного решения, от биупругой постоянной m при $\alpha = \pi/2$ и различных значениях параметра γ : 0,10 (1), 0,25 (2), 0,50 (3)

Заключение

На основе силового критерия Новожилова (критерий разрушения), для характеристик разрушения интерфейсной трещины, вершина которой совпадает с угловой точкой раздела материалов, получены асимптотические и точные соотношения. Характеристики разрушения включают макроскопические параметры материала, такие как вязкость разрушения и предел прочности на сдвиг. Асимптотические формулы для достаточно малых значений безразмерного геометрического параметра γ качественно верно определяют верхнюю или нижнюю

оценку угла отклонения первоначально прямолинейной интерфейсной трещины. Отклонение трещины будет происходить в сторону границы раздела с более жестким материалом и в противоположном направлении в случае, когда материал за этой границей является более мягким. Однако в количественном плане асимптотические формулы могут давать значительные погрешности. В то же время величины критических нагрузок, вычисленных по асимптотическим формулам, обладают достаточной точностью и могут применяться для оценки этих нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eischen J.W. Fracture of nonhomogeneous materials // International Journal of Fracture. 1987. Vol. 34. No. 1. Pp. 3–22.
2. Carpinteri A., Paggi M. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // International Journal of Fracture. 2005. Vol. 135. No. 1-4. Pp. 267–283.
3. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Applied Mechanical Review. 2008. Vol. 61. No. 2. P. 020801.
4. Erdogan F., Gupta G.D. Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // International Journal of Fracture. 1975. Vol. 11. No. 4. Pp. 583–593.
5. Fenner D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface // International Journal of Fracture. 1976. Vol. 12. No. 5. Pp. 705–721.
6. He M.-Y., Hutchinson J.W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // International Journal of Solids and Structures.



1989. Vol. 25. No. 9. Pp. 1053–1067.

7. **Misuris G., Kuhn G.** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // Archive of Applied Mechanics. 2001. Vol. 71. No. 11. Pp. 764–780.

8. **Тихомиров В.В.** Критерии разрушения острого выреза в условиях антиплоской деформации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 99–107.

9. **Тихомиров В.В.** Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 110–119.

10. **Новожилов В.В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 2. С. 212–222.

11. **Klusák J., Krepl O., Profant T.** Behaviour of a crack in a corner or at a tip of a polygon-like particle // Procedia Structural Integrity. 2016. Vol. 2. Pp. 1912–1919.

12. **Knesl Z.** A criterion of V-notch stability // International Journal of Fracture. 1991. Vol. 48. No. 4. Pp. R79–R83.

13. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.** On the most dangerous V-notch // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. No. 7–8. Pp. 887–893.

Статья поступила в редакцию 17.01.2021, принята к публикации 06.05.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы теоретической механики, заместитель директора по учебной работе Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru

REFERENCES

1. **Eischen J.W.**, Fracture of nonhomogeneous materials, International Journal of Fracture. 34 (1) (1987) 3–22.

2. **Carpinteri A., Paggi M.**, On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials, International Journal of Fracture. 135 (1-4) (2005) 267–283.

3. **Paggi M., Carpinteri A.**, On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion, Applied Mechanical Review. 61 (2) (2008) 020801.

4. **Erdogan F., Gupta G.D.**, Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading, International Journal of Fracture. 11 (4) (1975) 583–593.

5. **Fenner D.N.**, Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface, International Journal of Fracture. 12

(5) (1976) 705–721.

6. **He M-Y., Hutchinson J.W.**, Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, International Journal of Solids and Structures. 25 (9) (1989) 1053–1067.

7. **Misuris G., Kuhn G.**, Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models, Archive of Applied Mechanics. 71 (11) (2001) 764–780.

8. **Tikhomirov V.V.**, Sharp V-notch fracture criteria under antiplane deformation, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 99–107.

9. **Tikhomirov V.V.**, Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2 (194) (2014) 110–119.

10. **Novozhilov V.V.**, О необходимом и доста-

tochnom kriterii khrupkoy prochnosti [On the necessary and sufficient test of brittle strength], *Prikladnaya Matematika & Mekhanika*. 33 (2) (1969) 212–222 (in Russian).

11. **Klusák J., Krepl O., Profant T.**, Behaviour of a crack in a corner or at a tip of a polygon-like particle, *Procedia Structural Integrity*. 2 (2016) 1912–1919.

12. **Knesl Z.**, A criterion of V-notch stability, *International Journal of Fracture*. 48 (4) (1991) R79–R83.

13. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.**, On the most dangerous V-notch, *International Journal of Solids and Structures*. 47 (7–8) (2010) 887–893.

Received 17.01.2021, accepted 06.05.2021.

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

victikh@mail.ru