



DOI: 10.18721/JPM.14310  
УДК 621.373.8

## **НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА С РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА**

**В.А. Кожевников, В.Е. Привалов, А.Э. Фотиади**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Предлагаемое исследование продолжает цикл статей, посвященных методам расчета ключевых энергетических параметров гелий-неонового (He-Ne) газоразрядного лазера. Рассмотрено применение предложенного ранее метода расчета мощности излучения к лазерам, обладающим поперечными сечениями активного элемента в виде прямоугольника и эллипса. Использовано представление об эффективном модовом объеме лазера, указан расчетный алгоритм и предложена процедура, снижающая громоздкость расчетов. Варьирование значений лазерных параметров позволило получить развернутую картину зависимости выходной мощности лазерного излучения от геометрических параметров объектов. Сравнение полученных результатов дало возможность выявить оптимальные значения параметров лазеров для достижения максимальной выходной мощности. Установлено, что результаты расчетов мощности излучения хорошо согласуются как с соответствующими результатами по коэффициентам усиления лазера для заданных сечений, так и с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** гелий-неоновый лазер, мощность лазерного излучения, геометрия сечения трубки

**Ссылка при цитировании:** Кожевников В.А., Привалов В.Е., Фотиади А.Э. Новый подход к оценке мощности излучения гелий-неонового лазера с различной геометрией поперечного сечения активного элемента // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 3. С. 133–145. DOI: 10.18721/JPM.14310

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## **A NEW APPROACH TO THE ASSESSMENT OF THE OUTPUT POWER FOR A HELIUM-NEON GAS LASER WITH DIFFERENT CROSS-SECTIONAL GEOMETRY OF THE ACTIVE ELEMENT**

**V.A. Kozhevnikov, V.E. Privalov, A.E. Fotiadi**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
St. Petersburg, Russian Federation

The proposed study continues a series of articles devoted to design methods for the key energy parameters of a helium-neon (He-Ne) gas laser. An application of the previously proposed method for designing the emission power to lasers with the rectangle- and ellipse-shaped cross sections of active elements has been considered. An idea of effective mode volume was used, a calculation algorithm was presented, and a procedure reducing unwieldy calculations was put forward. Varying the parameter values made it possible to get a detailed picture of dependencies of the output laser energy on the geometrical parameters of objects under study. A comparison of the obtained results permitted to find optimal laser parameters for maximum output power. The calculation results of the radiation energy were established to agree well both with those of the laser gain for the given cross sections and those of the experimental data.

**Keywords:** helium-neon laser, laser power, tube geometry, rectangular and elliptical cross sections

**Citation:** Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Fotiadi A.E., A new approach to the assessment of the output power for a helium-neon gas laser with different cross-sectional geometry of the active element, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (3) (2021) 133–145. DOI: 10.18721/JPM.14310

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

В последнее время активно изучаются эллиптические пучки (*англ.* Mathieu beams или Mathie-Gauss beams), которые представляют собой одно из четырех (наряду с обычными Гауссовыми, Бессель-Гауссовыми и параболическими пучками) фундаментальных семейств недифрагирующих решений волнового уравнения. Это связано с их экспериментальным обнаружением и теоретическим рассмотрением [1 – 5].

В работе [6] нами был предложен метод оценки мощности излучения газоразрядного лазера с произвольной формой поперечного сечения активного элемента. Напомним кратко суть этого метода.

Для оптического резонатора с радиусом кривизны соответствующего эквивалентного конфокального резонатора  $R_e$  модуль электрического поля  $E$  основной Гауссовой моды  $TEM_{00}$  в цилиндрических координатах  $(r, z, \varphi)$  имеет следующий вид:

$$E = E_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \xi^2}} \exp\left[-\frac{kr^2}{R_e(1 + \xi^2)}\right], \quad (1)$$

где  $\xi = 2z/R_e$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  (координата  $z$  отсчитывается от перемычки Гауссового пучка,  $\lambda$  – длина волны лазерного излучения);  $E_0$  – значение  $E$  при  $\xi = 1$  и  $r = 0$ .

В первом приближении теории возмущений мощность индуцированного излучения можно считать пропорциональной произведению  $E^2 \delta N$ , где  $\delta N$  – инверсия населенностей активной среды. В первом приближении величина  $\delta N$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta(\delta N) + \lambda^2 \delta N = 0 \quad (2)$$

с однородным граничным условием

$$\delta N|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  – граница поперечного сечения активного элемента.

В предложенном методе было введено понятие эффективного модового объема  $NMV$  как тела, ограниченного поверхностью, где величина  $|E|^2 \delta N$  спадает в  $e^2$  раз, по сравнению с величиной  $E_0^2 \delta N_0$  ( $\delta N_0$  – инверсия населенностей на оси). Введение этой величины учитывает как инверсию населенностей, так и распределение поля в резонаторе при произвольной геометрии активного элемента.

В работе [6] было предложено оценивать выходную мощность излучения лазера с помощью модового объема  $NMV$  по следующей формуле:

$$P = \iiint_{NMV} \varepsilon |E|^2 \delta N dV, \quad (4)$$



где  $\varepsilon$  – соответствующий коэффициент пропорциональности.

Там же был указан алгоритм нахождения мощности излучения лазера при произвольной форме сечения активного элемента, состоящий из трех этапов.

*Шаг 1.* Расчет инверсии населенностей активной среды  $\delta N$  путем решения уравнений (2), (3) для данного значения границы  $\Gamma$  (например, методом нахождения приближенного решения этих уравнений (см. нашу работу [7]), позволяющим получать решения с высокой точностью при относительно небольшой вычислительной сложности).

*Шаг 2.* Нахождение границы эффективного модового объема NMV.

*Шаг 3.* Непосредственное интегрирование по формуле (4).

Метод оценки мощности излучения был проверен (см. работу [6]) для случая цилиндрической геометрии, и результаты расчетов по нему дали отличное согласие с экспериментальными данными.

В данной работе рассматриваются поперечные сечения активного элемента в виде прямоугольника и эллипса.

### Прямоугольное сечение активного элемента

Пусть стороны прямоугольника равны  $a$  и  $b$ , причем  $b \leq a$ . Если использовать предложенный в статье [7] метод решения уравнения Гельмгольца при произвольной форме границы поперечного сечения активного элемента, то в цилиндрической системе координат (начало отсчета которой находится в центре прямоугольника, а полярная ось, от которой отсчитывается полярный угол  $\varphi$ , направлена параллельно большей стороне), вследствие симметрии, решение  $\delta N$  уравнений (2), (3) представимо в следующем виде:

$$\delta N(r, \varphi) = \delta N_0 \left\{ J_0(\lambda r) + \sum_{m=1}^s a_{2m} J_{2m}(\lambda r) \cdot \cos(2m\varphi) \right\},$$

где  $J_m(\lambda_r)$  – функции Бесселя порядка  $m$ .

С другой стороны, решение уравнений (2), (3) для прямоугольника можно найти точно: легко проверить, что функция

$$\delta N(r, \varphi) = \delta N_0 \cos(\pi n r \cos \varphi / a) \cos(\pi m r \sin \varphi / b)$$

удовлетворяет однородному уравнению (2) при

$$\lambda_{n,m}^2 = (n^2 \pi^2 / a^2) + (m^2 \pi^2 / b^2), \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Если рассмотреть основной вклад с  $n = m = 1$ , то можно получить следующее уравнение для определения границы NMV в полярных координатах:

$$\ln \left| \cos \left( \frac{\pi}{a} r \cos \varphi \right) \right| + \ln \left| \cos \left( \frac{\pi}{b} r \sin \varphi \right) \right| + \ln \left( \frac{2R_e}{k w^2(z)} \right) + 2 - \frac{2r^2}{w^2(z)} = 0, \quad (5)$$

где  $w(z) = \sqrt{(R_e + 4z^2/R_e)/k}$ .

Для каждого значения пары  $(z, \varphi)$  уравнение (5) можно решить численно относительно  $r$  и получить уравнение поверхности  $r(z, \varphi)$ , ограничивающей эффективный модовый объем NMV.

Ограничимся для определенности резонатором плоскость-сфера; в этом случае

$$R_e = 2 \{d(R-d)\}^{1/2},$$

где  $R$  – радиус кривизны сферического зеркала,  $d$  – расстояние между зеркалами.

Тогда мощность излучения лазера с прямоугольным сечением трубки находится по формуле:

$$P = \frac{4E_0^2 \delta N_0 \varepsilon}{k} \sqrt{d(R-d)} \iiint_{NMV} \cos\left(\frac{\pi}{a} r \cos \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} r \sin \varphi\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2(z)}\right) \frac{1}{w^2(z)} dz d\varphi r dr. \quad (6)$$

Расчеты по формулам (5), (6) мы проводили с различными параметрами лазеров. На рис. 1 приведена зависимость приведенной мощности лазера  $P/\alpha$  (где коэффициент  $\alpha$  выражается как  $\alpha = \varepsilon E_0^2 \delta N_0 / k$ ) от отношения сторон прямоугольника ( $a/b$ ) при следующих значениях параметров:

$$d = 2,2 \text{ м}; R = 10 \text{ м}; b = 5 \text{ мм}; \\ a \text{ меняется от } 5 \text{ до } 150 \text{ мм}; \text{ длина трубки } l = 1,2 \text{ м}; \\ \text{активный элемент расположен в центре резонатора.}$$

При указанных выше параметрах лазера, поверхность  $r(z, \varphi)$ , ограничивающая объем  $NMV$ , представляет собой эллипс с малым эксцентриситетом. Результаты расчета показывают, что при фиксированном  $z$  эксцентриситет этого эллипса растет с увеличением отношения  $a/b$ , а при фиксированном значении этого отношения размеры эллипса растут с увеличением  $z$ .

Представляло интерес сравнить мощности излучения лазеров, имеющих одинаковую площадь сечения активного элемента, но сечения разной формы: круглой и прямоугольной (и, соответственно, имеющих одинаковый объем при одинаковой длине трубки). Для круглого сечения использовался метод расчета мощности, предложенный в работе [6], причем для данных сторон  $a$  и  $b$  прямоугольника брался радиус круглого сечения  $r_0 = (ab/\pi)^{1/2}$  и те же значения  $d$ ,  $R$  и  $l$ ; величина  $E_0^2 \delta N_0$  считалась одинаковой для обоих лазеров. Результаты расчетов показали, что мощность лазера с прямоугольным сечением активного элемента примерно на 4 – 6 % меньше мощности лазера с цилиндрическим сечением (той же площади).

Следует отметить, что полученные нами результаты по оценке мощности излучения лазера прямоугольного сечения хорошо согласуются как с нашими расчетными данными по усилению лазера [8], так и с экспериментальными. Из результатов, представленных в нашей работе [8], следует, что средний по сечению коэффициент усиления прямоугольного лазера, во-первых, не зависит от отношения сторон прямоугольника, а во-вторых, примерно на 6 % меньше соответствующего коэффициента лазера цилиндрического сечения.

Из анализа графика на рис. 1 следует, что при увеличении отношения  $a/b$  в 30 раз мощность увеличивается примерно всего на 6,5 %, а начиная со значения  $a/b \approx 6$  можно считать, что мощность практически не меняется. Тот факт, что мощность лазера прямоугольного сечения примерно на 4 – 6 % меньше таковой для цилиндрического сечения, соответствует экспериментальным данным работы [9]. Поэтому мы можем считать, что предложенный нами метод расчета мощности лазера вполне корректен.

Несколько непривычное соотношение между значениями длины резонатора и длины активного элемента определяется тем, что такими они были в экспериментальной установке работы [9]. Может возникнуть вопрос, почему в расчетах не фигурируют значения темпера-

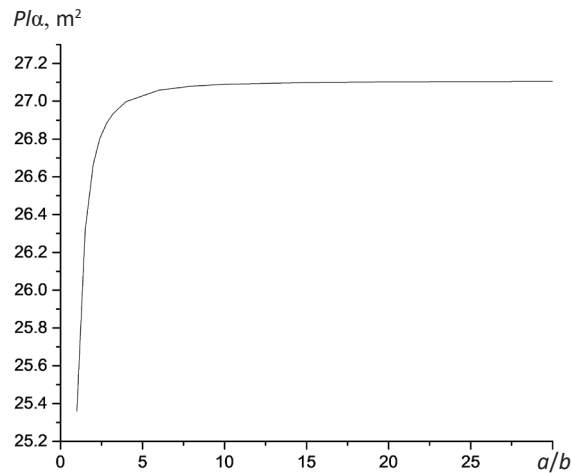


Рис. 1. Зависимость мощности излучения лазера  $P/\alpha$  ( $\alpha = \alpha = \epsilon E_0^2 \delta N_0 / k$ ) от отношения сторон прямоугольника при  $d = 2,2$  м,  $R = 10$  м,  $b = 5$  мм,  $l = 1,2$  м

туры электронов и газа. Они, конечно, влияют на инверсию населенностей. Но в эксперименте это автоматически учитывается, так как в работе [9] измерялась мощность излучения лазера, которая включает в себя инверсию населенностей

#### Эллиптическое сечение активного элемента

Пусть полуоси эллипса равны  $a$  и  $b$  ( $b < a$ ). Для нахождения точного решения однородного уравнения (2) для эллипса рассмотрим его в эллиптических координатах  $(u, v, z)$ . Их связь с декартовыми координатами такая:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \operatorname{ch}(u) \cdot \cos v, & y &= \rho \cdot \operatorname{sh}(u) \cdot \sin v, & z &= z, \\ \rho &= \operatorname{const} > 0, & u &\geq 0, & 0 &\leq v < 2\pi. \end{aligned}$$

Представим  $\delta N$  как  $\delta N = \delta N_0 f(u, v, z)$  и найдем функцию  $f(u, v, z)$ , воспользовавшись методом разделения переменных:

$$f(u, v, z) = \varphi(z) \cdot w(u) \cdot g(v).$$

Отсюда получаем набор трех уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} d^2 \varphi / dz^2 &= -c, \\ w^{-1} d^2 w / du^2 + (\lambda^2 - c) \rho^2 \operatorname{ch}(2u) / 2 &= d, \\ -g^{-1} d^2 g / dv^2 + (\lambda^2 - c) \rho^2 \cos(2v) / 2 &= d, \end{aligned}$$

где  $c, d$  – постоянные разделения.

Обозначая  $q = (\lambda^2 - c) \rho^2 / 4$ , получаем из третьего уравнения каноническую форму уравнения Матье (здесь и далее, при вводе функций Матье и связанных с ними величин, мы придерживаемся обозначений из книг [10, 11], у разных авторов они различаются):

$$\frac{d^2 g(v)}{dv^2} + (d - 2q \cos(2v)) g(v) = 0, \quad (7)$$

а из второго уравнения – модифицированное уравнение Матье:

$$\frac{d^2 w(u)}{du^2} - (d - 2q \operatorname{ch}(2u)) w(u) = 0. \quad (8)$$

Выберем за начало отсчета значение  $u = 0$ , т. е. центр эллиптического сечения. При независимости от  $z$  постоянная разделения  $c = 0$  (отсюда  $q = \lambda^2 \rho^2 / 4$ ). Ввиду симметрии задачи, нас интересует четное по  $v$  периодическое решение, и из теории следует, что будет существовать бесконечная счетная последовательность собственных значений  $d = d_r(q)$ , отвечающих четным периодическим решениям (7), причем для вещественного  $q > 0$  эти собственные значения вещественны, различны и  $d_0 < d_1 < d_2 \dots$ . Как и для сечений в виде круга и прямоугольника, мы рассматриваем основную моду с минимальным значением параметра  $\lambda$ , поэтому интересующее нас решение (7) – функция Матье вида  $ce_0(v, q)$ . Уравнение (8) получается из (7) заменой  $v = iu$ , и интересующее нас решение – это функция Матье  $Ce_0(u, q)$ . Итак,

$$f(u, v) = \alpha \cdot Ce_0(u, q) \cdot ce_0(v, q),$$

где  $\alpha$  – нормировочный множитель (поскольку по определению  $\delta N = \delta N_0 f$ , функция  $f$  должна быть нормирована на единицу в центре сечения).

Пусть эллипс имеет полуоси  $a$  и  $b$ , тогда его уравнение в декартовых координатах имеет вид

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1,$$

и для его уравнения  $u = u_0$  в эллиптических координатах выполняются выражения

$$a = \rho \cdot \operatorname{ch}(u_0), \quad b = \rho \cdot \operatorname{sh}(u_0),$$

откуда  $\rho = (a^2 - b^2)^{1/2}$  (т. е.  $\rho$  – фокальное расстояние),

$$u_0 = \operatorname{Arsh}(b/\rho) = \ln[(a+b)/(a-b)]/2.$$

В качестве  $\alpha$  тогда нужно взять значение

$$\alpha = 1 / (Ce_0(0, q) \cdot ce_0(\pi/2, q)).$$

Итак, решение однородного уравнения Гельмгольца (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta N = & \delta N_0 Ce_0(u, \lambda^2(a^2 - b^2)/4) \times \\ & \times ce_0(v, \lambda^2(a^2 - b^2)/4) / (Ce_0(0, \lambda^2(a^2 - b^2)/4)) \times \\ & \times ce_0(\pi/2, \lambda^2(a^2 - b^2)/4). \end{aligned} \quad (9)$$

Из однородного граничного условия (3) следует, что  $\lambda$  должно быть такое, что

$$Ce_0\left(\frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}, \frac{\lambda^2(a^2 - b^2)}{4}\right) = 0. \quad (10)$$

Отсюда можно получить уравнение для определения границы объема NMV в эллиптических координатах:

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{2R_e}{kw^2(z)}\right) + 2 - \frac{2(a^2 - b^2)}{w^2(z)} (\operatorname{ch}^2 u \cdot \cos^2 v + \\ & + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v) - \ln\left[\left| Ce_0\left(0, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] + \\ & + \ln\left[\left| Ce_0\left(u, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] - \ln\left[\left| ce_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] + \\ & + \ln\left[\left| ce_0\left(v, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] = 0. \end{aligned}$$

Для упрощения анализа формы NMV, последнее уравнение лучше переписать в цилиндрических координатах. Как известно [12], для установления взаимно-однозначного соответствия между точками плоскости  $0xu$  (за исключением полуоси  $(-1, \infty)$ ) и областью плоскости  $0uv$  ( $u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi$ ), частям гиперболы

$$\left[ x^2 / (\rho^2 \cos^2 v) \right] - \left[ y^2 / (\rho^2 \sin^2 v) \right] = 1,$$

принадлежащих I, II, III и IV квадрантам, приписываются соответственно значения

$$v, \pi - v, \pi + v, 2\pi - v \quad (0 \leq v \leq \pi/2).$$

Тогда уравнение для определения границы NMV в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{2R_e}{kw^2(z)}\right) + 2 - \frac{2r^2}{w^2(z)} - \ln\left[\left| Ce_0\left(0, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] + \\ & + \ln\left[\left| Ce_0\left(u(r, \varphi), \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] + \\ & + \ln\left[\left| ce_0\left(v(r, \varphi), \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] - \\ & - \ln\left[\left| ce_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2)\right) \right|\right] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = \operatorname{Arsh} \left\{ \left[ \left( r^2 - (a^2 - b^2) + \left( (r^2 - (a^2 - b^2))^2 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 4r^2(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi \right)^{1/2} \right] / (2(a^2 - b^2)) \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

$$v(r, \varphi) = \arccos \left\{ \left[ \left( r^2 + (a^2 - b^2) - \left( r^2 + (a^2 - b^2) \right)^2 - 4r^2(a^2 - b^2)\cos^2 \varphi \right)^{1/2} \right] / (2(a^2 - b^2)) \right\}^{1/2}.$$

Для каждого значения  $(z, \varphi)$  уравнение (11) можно решить численно относительно  $r$  и получить уравнение поверхности  $r(z, \varphi)$ , ограничивающей объем NMV.

Далее, учитывая, что

$$dV = (a^2 - b^2)(\text{sh}^2 u + \sin^2 v) du dv dz,$$

получаем выражение для оценки мощности излучения лазера с эллиптическим поперечным сечением активного элемента:

$$\begin{aligned} P &= \gamma \iiint_{\text{NMV}(u,v,z)} dz dv du (a^2 - b^2) \frac{\text{sh}^2 u + \sin^2 v}{w^2(z)} \times \\ &\times Ce_0 \left( u, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right) ce_0 \left( v, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right) \times \\ &\times \exp \left[ \frac{-2(a^2 - b^2)}{w^2(z)} (\text{sh}^2 u + \cos^2 v) \right] = \tag{12} \\ &= \gamma \iiint_{\text{NMV}(r,\varphi,z)} dz d\varphi r dr \frac{1}{w^2(z)} Ce_0 \left( u(r, \varphi), \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right) \times \\ &\times ce_0 \left( v(r, \varphi), \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right) \cdot \exp \left( \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right), \end{aligned}$$

где  $\gamma = \frac{2E_0^2 \delta N_0 \epsilon R_e}{k \cdot Ce_0 \left( 0, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right) \cdot ce_0 \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\lambda^2}{4}(a^2 - b^2) \right)}$ .

Громоздкость расчетов возникает при вычислении функций Матье, и методы вычисления функций Матье до сих пор являются предметом многих исследований (см., например, работы [13, 14]). Для их вычисления обычно используется следующий ряд:

$$ce_0(v, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^0(q) \cos(2kv) \tag{13}$$

(формула для  $Ce_0(u, q)$  получается заменой  $v = iu$ , т. е. заменой тригонометрического косинуса гиперболическим), но получение коэффициентов  $A_{2k}^0(q)$  не тривиально. Для нахождения функций Матье мы использовали следующий алгоритм.

В таблицах [15] есть табулированный набор коэффициентов для 145 значений  $q$  (следует отметить связь обозначений, приведенных там и у нас:





$$be_0 = d_0 + 2q; \quad s = 4q; \quad A \cdot Se_0(s, v) = ce_0(v, q); \quad A \cdot De_{2k}(s) = A_{2k}(q).$$

Для данных  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  мы рассчитывали  $q$  и  $s$  с помощью значений из работ [10, 11, 15] находили  $d_0(q)$  (для недостающих значений мы проводили интерполяцию). Далее мы находили коэффициенты  $A_{2k}$ , придерживаясь правила: если  $q$  достаточно близко к одному из значений в работах [10, 11, 15], то проводили интерполяцию коэффициентов, в противном случае использовали следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов  $A_{2k}$ :

$$\begin{aligned} dA_0 - qA_2 = 0, \quad (d - 4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0, \quad \dots, \\ (d - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2}) = 0, \quad m \geq 3. \end{aligned} \quad (14)$$

При найденных значениях  $d$  и  $q$  выражали с помощью формул (14) все коэффициенты  $A_{2k}$  через  $A_0$ . Далее использовали условие нормировки функций Матье (следует учесть, что нормировки у разных авторов тоже различаются):

$$2A_0^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_6^2 + \dots = 1. \quad (15)$$

Взяв достаточное количество коэффициентов  $A_{2k}$  в равенстве (15) и подставив их выражения через  $A_0$ , получали формулу для нахождения  $A_0$ . Затем обратно из формул (14) получали коэффициенты  $A_{2k}$  и по выражению для ряда (13) строили функцию  $ce_0(v, q)$  (аналогично строили  $Se_0(u, q)$ ). При этом мы значительно упростили первый шаг алгоритма: находили  $\lambda$  при данных  $a$ ,  $b$  с помощью метода, использованного в работе [7], что частично избавляло нас от весьма громоздких вычислений. Мы контролировали это значение  $\lambda$  с помощью формулы (10), и тот факт, что это уравнение удовлетворялось с хорошей точностью, служит еще одним признаком правильности нахождения  $\lambda$  по методу [7]. После построения функций  $ce_0(v, q)$  и  $Se_0(u, q)$  появилась возможность решить уравнение (11) и затем рассчитать мощность излучения лазера с эллиптическим поперечным сечением активного элемента по формуле (12).

Расчеты производились с варьированием параметров лазеров. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты для следующих параметров (они близки к использованным в расчетах для лазера с прямоугольным поперечным сечением, описанных выше):

$$d = 2,2 \text{ м}; \quad R = 10 \text{ м}; \quad b = 2,5 \text{ мм}; \quad a = 2,75 - 15,0 \text{ мм}; \quad l = 1,2 \text{ м};$$

трубка расположена в центре резонатора;  
резонатор полуконфокальный.

При данных параметрах лазера, функция  $r(z, \varphi)$ , которая является решением уравнения (11), также представляет собой эллипс с малым эксцентриситетом, причем поведение зависимостей аналогично прямоугольному случаю: эксцентриситет при фиксированном  $z$  растет с увеличением отношения  $a/b$ , а при фиксированном значении отношения  $a/b$  размеры эллипса растут с увеличением значения  $z$ .

Мы также сравнивали мощности излучения лазеров с эллиптическим и круглым поперечными сечениями активного элемента одинаковой площади (и при одинаковой длине трубки – одинакового объема): при заданных значениях  $a$  и  $b$  мы брали радиус круглого сечения как  $r_0 = (ab)^{1/2}$  с теми же значениями  $d$ ,  $R$  и  $l$  и рассчитывали мощности излучения по методу, представленному в работе [6], считая величину  $E_0^2 \delta N_0$  одинаковой для обоих лазеров.

Результаты расчетов мощности лазера с эллиптическим сечением согласуются с таковыми для наших расчетов коэффициента усиления лазера. В работе [7] был получен средний по сечению коэффициент усиления эллиптического лазера для отношения полуосей  $a/b$ . Было

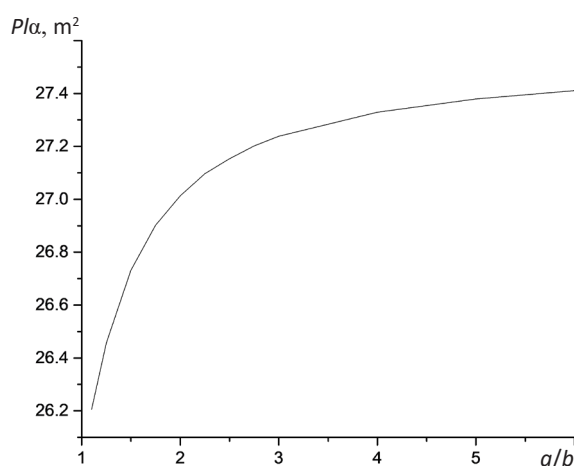


Рис. 2. Зависимость мощности излучения лазера  $P/\alpha$  ( $\alpha = \alpha = \varepsilon E_0^2 \delta N_0 / k$ ) от отношения полуосей эллипса при значениях  $d = 2,2$  м,  $R = 10$  м,  $b = 2,5$  мм,  $l = 1,2$  м

установлено, что усиление лазера эллиптического поперечного сечения несколько ниже, чем цилиндрического, и их разность растет с увеличением отношения  $a/b$  (напомним, что при этом в работе [7] использовалось приближенное решение). Несмотря на то, что эллиптические пучки (*англ.* Mathieu beams или Mathie-Gauss beams), которые представляют одно из четырех (наряду с обычными Гауссовыми, Бессель-Гауссовыми и параболическими пучками) фундаментальных семейств недифрагирующих решений волнового уравнения, в последнее время активно изучаются после их экспериментального обнаружения и теоретического рассмотрения [1 – 5], а также считаются перспективными для лазерной обработки материалов [16], нам не удалось найти в литературе описания экспериментов по измерениям мощности газоразрядных лазеров с эллиптическим сечением активного элемента.

### Заключение

Таким образом, нами предложена новая методика расчета выходной мощности излучения газоразрядного лазера, имеющего произвольное поперечное сечение активного элемента. Были проведены расчеты мощности излучения лазера с круговым (см. работу [6]), прямоугольным и эллиптическим поперечными сечениями активного элемента. Результаты расчетов мощности излучения хорошо согласуются с результатами проведенных ранее расчетов коэффициента усиления лазеров и экспериментальными данными. В настоящее время проводится поиск формы сечения активного элемента, оптимальной по признаку мощности излучения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutiérrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Ramírez G.A., Tepichín E., Rodríguez-Dagnino R.M., Cháves-Cerda S., New G.H.C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams // Optics Communications. 2001. Vol. 195. No. 1–4. Pp. 35–40.
2. Ren Z., Hu H., Peng B. Generation of Mathieu beams using the method of 'combined axicon and amplitude modulation' // Optics Communications. 2018. Vol. 426. 1 November. Pp. 226–230.
3. Ren Z., He J., Shi Y. Generation of Mathieu beams using angular pupil modulation // Chinese Physics B. 2018. Vol. 27. No. 12. P. 124201.



4. Julián-Macias I., Rickenstorff-Parrao C., Cabrera-Rosas O.J., Espíndola-Ramos E., Juárez-Reyes S.A., Ortega-Vidals P., Silva-Ortigoza G., Sosa-Sánchez C.T. Wavefronts and caustics associated with Mathieu beams // Journal of the Optical Society of America A. 2018. Vol. 35. No. 2. Pp. 267–274.
5. Zeylikovich I., Nikitin A. The formation and propagation of Mathieu–Gauss type spatial structures on diffraction of a multi segment-shaped laser beam // The European Physical Journal D. 2020. Vol. 74. No. 9. P. 182.
6. Кожевников В.А., Привалов В.Е., Фотиади А.Э. Эффективный модовый объем и оценка мощности выходного излучения гелий-неонового лазера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 4. С. 119–132.
7. Кожевников В.А., Привалов В.Е. Усиление в лазерах при неоднородных граничных условиях // Известия высших учебных заведений. Физика. 2020. Т. 63. № 9 (730), С. 165–171.
8. Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Shemanin V.G. Upgrade the evaluation of the contribution of the active element cross section geometry to the He-Ne laser energy characteristics // Optical Memory and Neural Networks. 2019. Vol. 28. No. 3. Pp. 215–221.
9. Привалов В.Е., Ходовой В.А. Экспериментальное исследование He-Ne лазера с разрядным промежутком прямоугольного сечения // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 37. № 4. С. 797–799.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 832 с.
11. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. Пер. с англ. В.А. Братановского под ред. И.Н. Денисюка. М.: Изд-во ИЛ, 1953. 476 с.
12. Бермант А.Ф. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. М.: Физматгиз, 1958, 308 с.
13. Frenkel D., Portugal R. Algebraic methods to compute Mathieu functions // Journal of Physics A. 2001. Vol. 34. No. 17. Pp. 3541–3551.
14. Bibby M.M., Peterson A.F. Accurate computation of Mathieu functions. Synthesis lectures on computational electromagnetics #32. USA: Morgan & Claypool Publishers, 2014. 124 p.
15. Таблицы для вычисления функций Матье; собственные значения, коэффициенты и множители связи. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1967. 279 с.
16. Orlov S., Vosylius V., Gotovski P., Grabusovas A., Baltrukonis J., Gertus T. Vector beams with parabolic and elliptic cross-sections for laser material processing applications // Journal of Laser Micro/Nanoengineering. 2018. Vol. 13. No. 3. Pp. 280–286.

*Статья поступила в редакцию 02.07.2021, принята к публикации 02.08.2021.*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**КОЖЕВНИКОВ Вадим Андреевич** — старший преподаватель кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
vadim.kozhevnikov@gmail.com

**ПРИВАЛОВ Вадим Евгеньевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
vaevpriv@yandex.ru

**ФОТИАДИ Александр Эпяминонович** — доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
fotiadi@rphf.spbstu.ru

## REFERENCES

1. **Gutiérrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Ramírez G.A., et al.**, Experimental demonstration of optical Mathieu beams, *Opt. Commun.* 195 (1–4) (2001) 35–40.
2. **Ren Z., Hu H., Peng B.**, Generation of Mathieu beams using the method of 'combined axicon and amplitude modulation', *Optics Communications*. 426 (1 November) (2018) 226–230.
3. **Ren Z., He J., Shi Y.**, Generation of Mathieu beams using angular pupil modulation, *Chin. Phys. B.* 27 (12) (2018) 124201.
4. **Julián-Macías I., Rickenstorff-Parrao C., Cabrera-Rosas O.J., et al.**, Wavefronts and caustics associated with Mathieu beams, *J. Opt. Soc. Am. A.* 35 (2) (2018) 267–274.
5. **Zeylikovich I., Nikitin A.**, The formation and propagation of Mathieu–Gauss type spatial structures on diffraction of a multi segment-shaped laser beam, *Eur. Phys. J. D.* 74 (9) (2020) 182.
6. **Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Fotiadi A.E.**, The effective mode volume and estimation of helium–neon laser output power, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 13 (4) (2020) 119–132 (in Russian).
7. **Kozhevnikov V.A., Privalov V.E.**, Laser gain for inhomogeneous boundary conditions, *Russian Physics Journal*. 63 (9) (2021) 1631–1638.
8. **Kozhevnikov V.A., Privalov V.E., Shemanin V.G.**, Upgrade the evaluation of the contribution of the active element cross section geometry to the He-Ne laser energy characteristics, *Opt. Mem. Neural Networks*. 28 (3) (2019) 215–221.
9. **Privalov V.E., Khodovoy V.A.**, Eksperimentalnoye issledovaniye He-Ne lazera s razryadnym promezhutkom pryamougolnogo secheniya [An experimental investigation of a He-Ne laser with a rectangular cross-section discharge gap], *Optics and Spectroscopy*. 37 (4) (1974) 797–799 (in Russian).
10. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables, Edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun. National Bureau of Standards, Tenth Printing, 1972.
11. **McLachlan N.W.**, Theory and application of Mathieu functions, Oxford University Press, Oxford, 1951.
12. **Bermant A.F.**, Otobrazheniya. Krivolinyeynye koordinaty. Preobrazovaniya. Formuly Grina [Mapping. Curvilinear coordinates. Transformations. Green's formulae], Fizmatgiz Publishing, Moscow, 1958 (in Russian).
13. **Frenkel D., Portugal R.**, Algebraic methods to compute Mathieu functions, *J. Phys. A.* 34 (17) (2001) 3541–3551.
14. **Bibby M.M., Peterson A.F.**, Accurate computation of Mathieu functions, Synthesis lectures on computational electromagnetics #32, Morgan & Claypool Publishers, USA, 2014.
15. Tables relating to Mathieu functions. Characteristic values, coefficients, and joining factors. National Bureau of Standards, Computation Laboratory, Columbia University Press, New York, 1951.
16. **Orlov S., Vosylius V., Gotovski P., et al.**, Vector beams with parabolic and elliptic cross-sections for laser material processing applications, *J. Laser Micro/Nanoeng.* 13 (3) (2018) 280–286.

*Received 02.07.2021, accepted 02.08.2021.*



## THE AUTHORS

**KOZHEVNIKOV Vadim A.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vadim.kozhevnikov@gmail.com

**PRIVALOV Vadim E.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vaevpriv@yandex.ru

**FOTIADI Alexandr E.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

fotiadi@rphf.spbstu.ru