

Научная статья

УДК 51-74, 553.98, 532.5

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.14404>

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОЛЛЕКТОРАХ С ЕСТЕСТВЕННЫМИ ФРАКТАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

А. В. Калюжнюк✉, **В. И. Антонов**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

✉ kalyuzhnyuk_av@spbstu.ru

Аннотация. В статье рассмотрена проблема моделирования естественно трещиноватых коллекторов, процессы протекания в которых обладают аномальной кинетикой (не подчиняются статистике Гаусса). Рассмотрен переход от классической модели интерпретации данных гидродинамических исследований скважин (ГДИС) к модели, учитывающей фрактальную структуру трещин. Полученные результаты указывают на правомерность применения последней модели для интерпретации результатов ГДИС, согласно которым наблюдается степенная зависимость забойного давления на скважине от времени. Сформулированы также признаки, с помощью которых можно выявить фрактальный режим притока к скважине по данным ГДИС. К основным вопросам для дальнейшего исследования авторы относят определение параметров фрактальности и валидацию модели на лабораторных экспериментах.

Ключевые слова: проницаемость, степенной закон, трещиноватый коллектор, аномальная проводимость, фрактальная размерность

Для цитирования: Калюжнюк А. В., Антонов В. И. Моделирование нестационарной фильтрации в коллекторах с естественными фрактальными трещинами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 4. С. 50–68. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.14404>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.14404>

MODELING OF NONSTATIONARY FILTRATION IN RESERVOIRS WITH NATURAL FRACTAL FRACTURES

A. V. Kalyuzhnyuk ✉, **V. I. Antonov**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

✉ kalyuzhnyuk_av@spbstu.ru

Abstract. The article discusses a problem of naturally fractured reservoir modeling because some reservoirs exhibit the flow processes characterized by anomalous kinetics that do not obey Gaussian statistics. For this reason, the classical approach to the well test interpretation,

its generalizations, and their transformation to a more complex model taking into account the fractal structure of fracture networks have been considered. The obtained results indicated the validity of the application of the fractal model to the interpretation of the well-test data where a power-law time dependence of the producing bottom-hole pressure was observed. Moreover, some symptoms were formulated whereby someone could identify the fractal well-stream behavior using the well-test data. Finally, the main issues for further studies the authors refer to the determination of the fractal parameters and the fractal model validation in laboratory experiments.

Keywords: permeability, power law, fractured reservoir, anomalous diffusion, fractal dimension

For citation: Kalyuzhnyuk A. V., Antonov V. I., Modeling of nonstationary filtration in reservoirs with natural fractal fractures, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (3) (2021) 50–68. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.14404>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

При моделировании процессов добычи углеводородов важную роль играет оценка параметров, отражающих фильтрационно-емкостные свойства пласта: пористость и проницаемость. Ошибки, которые иногда допускаются при оценке этих свойств, приводят к неверным решениям при разработке месторождения, управлении режимом добычи на скважинах, выборе дизайна геолого-технических мероприятий и, в конечном счете, к уменьшению объема добытого пластового флюида.

Наиболее распространенные способы определения параметров фильтрационно-емкостных свойств – это отбор керна (образец горной породы, добытый из скважины), проведение геофизических и гидродинамических исследований скважин (соответственно ГИС и ГДИС). Преимущество ГДИС перед остальными состоит в том, что оно затрагивает значительно большую область пласта: порядка сотен метров (вплоть до контура питания – области, давление в которой выравнивается до пластового), тогда как радиус исследования другими способами обычно не превышает десятков сантиметров от стенки скважины.

Моделирование фильтрационно-емкостных свойств ряда пластов-коллекторов, особенно карбонатных пород, в настоящее время усложнено наличием в них естественных трещин. Поведение таких трещиноватых систем может быть непредсказуемым, а моделирование все еще опирается на ряд классических моделей, не учитывающих некоторые значимые эффекты.

В настоящей работе представлены гидродинамические исследования скважин в подобных пластах-коллекторах.

Известно [1], что на стенке вертикальной скважины бесконечного пористого пласта (тип пустотности – межгранулярная) с фиксированным дебитом флюида зависимость давления от времени аппроксимируется логарифмической функцией, в том числе и для моделей двойной пустотности, используемых для моделирования пластов-коллекторов с естественными трещинами.

Однако такой подход не позволяет интерпретировать данные ГДИС в случае коллекторов с естественными трещинами, изменение давления на которых представляет собой степенную функцию от времени; кроме того, показатель степени может быть дробным числом [2].

В данной статье рассмотрен радиальный приток жидкости во фрактальной системе. Проведено сравнение классических моделей ГДИС с фрактальной моделью ГДИС для случая фильтрации (притока) жидкости к скважине через систему естественных трещин

[3], а также сформулирован ряд нерешенных проблем, относящихся к применению фрактальной модели.

Классические модели ГДИС

Согласно сведениям, представленным в монографии [1], основная концепция определения фильтрационно-емкостных свойств, установленная для обычного порового коллектора, применима и для коллекторов, содержащих естественные трещины. В частности, проведение комплекса ГДИС.

Моделирование притока жидкости в пористой среде. При проведении ГДИС базовой моделью, описывающей нестационарный процесс перераспределения давления в пласте, фильтрация (приток) жидкости в котором происходит в поровом пространстве (межгранулярная пустотность), является уравнение пьезопроводности [3].

Данное уравнение описывает процесс фильтрации жидкости к скважине; при этом принимается ряд допущений:

- направление притока жидкости – горизонтальная плоскость;
- в пласте выполняется закон Дарси и происходит фильтрация одной фазы с малой сжимаемостью (например, смесь нефти с водой);
- гравитационные эффекты незначительны;
- параметры пласта и жидкости не зависят от давления.

Уравнение является следствием комбинации основных законов фильтрации жидкости в поровом пространстве – закона Дарси (сохранения импульса), уравнения неразрывности (сохранения массы), и уравнений состояния (сжимаемости) жидкости и пласта:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(p), \\ -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{d(\varphi \rho)}{dt}, \\ c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \\ c_r = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости фильтрации жидкости; p , Па, – давление жидкости в порах; k , м², – коэффициент проницаемости пористой среды; φ , %, – пористость; ρ , кг/м³, – плотность породы пласта; μ , Па·с, – коэффициент динамической вязкости жидкости; c_f , 1/Па, – коэффициент сжимаемости жидкости; c_r , 1/Па, – коэффициент сжимаемости породы пласта.

Подстановка закона Дарси и уравнений сжимаемости в уравнение неразрывности жидкости с последующим пренебрежением членом второго порядка малости $(\partial p / \partial r)^2$ позволяет получить уравнение пьезопроводности (англ. Diffusivity Equation):

$$\Delta p = \frac{\mu \varphi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

и его частный случай для цилиндрической симметрии системы (плоскорадиальный приток жидкости):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\mu \varphi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3)$$

где c_t , 1/Па, – суммарная сжимаемость системы, $c_t = c_f + c_r$.

Для удобства уравнение пьезопроводности может быть записано с использованием безразмерных координат. Здесь и ниже индексом D (англ. Dimensionless) обозначены безразмерные переменные:

$$p_D = \frac{2\pi kh(p_i - p)}{q\mu}; \quad t_D = \frac{kt}{\mu\phi c_i r_w^2}; \quad r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (4)$$

где p_i , Па, – пластовое давление; q , м³/с, – расход жидкости через стенку скважины; h , м, – толщина пласта (высота цилиндра в плоскорадиальной задаче); r_w , м, – радиус скважины.

Безразмерное уравнение пьезопроводности имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5)$$

или

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t}. \quad (6)$$

Полученное уравнение используется при интерпретации данных ГДИС. Например, один из оцениваемых параметров при интерпретации – коэффициент гидропроводности $\varepsilon = kh/\mu$, м³/(Па·с). Имея оценки ε (интерпретация ГДИС), h (сейсморазведка и др.) и μ (данные отборов жидкости), можно оценить проницаемость пласта k .

Процедуру оценки ε можно проиллюстрировать задачей радиального притока в бесконечном пласте, невозмущенном в начальный момент времени:

$$p_D \Big|_{t_D=0} = 0; \quad (7)$$

при этом

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D = 0; \quad (8)$$

постоянный расход жидкости (дебит) на стенке скважины (рис. 1) выражается как

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -1. \quad (9)$$

Решение уравнения пьезопроводности с такими начальными и граничными условиями получено в работе [5] с помощью подстановки Больцмана:

$$y = \frac{r_D^2}{4t_D}. \quad (10)$$

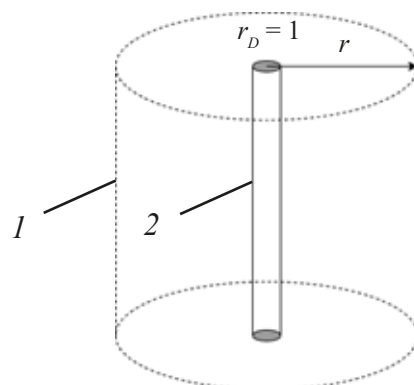


Рис. 1. Радиальный приток к вертикальной скважине:
 1 – поровое пространство (область притока жидкости), 2 – скважина.
 Поровое пространство для бесконечного пласта не ограничено

Это сводит задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно u и позволяет получить решение уравнения:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \int_y^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = -\frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right), \quad (11)$$

где Ei – интегральная показательная функция:

$$\text{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad (12)$$

аппроксимируемая при малых значениях параметра с помощью постоянной Эйлера γ и логарифмической функции:

$$-\text{Ei}(-x) \approx \ln \left(\frac{1}{x} \right) - \gamma. \quad (13)$$

Таким образом, приближенное решение безразмерного давления p_D в пласте принимает вид логарифмической функции, т. е.

$$p_D(r_D, t_D) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 t_D}{e^{\gamma} r_D^2} \right), \quad (14)$$

и для $t_D / r_D^2 > 5$ погрешность в приближенном значении уже не превышает 2 % [6].

Наибольший интерес представляет величина забойного давления p_{wf} . Эта величина, измеренная на той части стенки скважины, которая вскрывает пласт-коллектор и по которой происходит фильтрация флюида, имеет вид

$$p(r_w, t) = p_{wf}(t) \approx p_i - \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{4}{e^{\gamma} r_w^2} \frac{k}{\mu\phi c_i} t \right). \quad (15)$$

Таким образом, имея данные измерения забойного давления $p_{wf}(t)$ при дебите жидкости Q , можно графически оценить коэффициент пьезопроводности, если построить график производной $dp_{wf}(t) / d(\ln t)$.

Для удобства интерпретации данные ГДИС традиционно представляют в виде двух графиков: $p_{wf}(t)$ и $\tau = dp_{wf}(t) / d(\ln t)$ в двойных логарифмических координатах. Также для удобства данные могут приводиться к безразмерному виду (по аналогии с уравнением (4)) для аппроксимации, например решением (14) (рис. 2,а).

В действительности, полученные зависимости давления и его производной от времени имеют характерный «горб» (рис. 2,б) в начальные периоды времени за счет следующих эффектов:

изменение проницаемости призабойной зоны (окрестность пласта вблизи скважины) из-за ее загрязнения или, наоборот, в результате создания искусственных проницаемых трещин (определяется коэффициентом S – скин-фактором [6]);

влияние объема ствола скважины (*англ.* wellbore storage) вследствие сжатия и/или расширения жидкости в скважине (определяется безразмерным коэффициентом влияния ствола скважины C_D [6]).

Эти эффекты учитывают через корректировку граничных условий и решения уравнения численными методами или с помощью преобразования Лапласа. Эффекты моделируют заменой граничного условия на стенке скважины двумя граничными условиями третьего рода (см. далее равенства (16), (17)).

Влияние проницаемости бесконечно малой области вблизи призабойной зоны учитывают путем увеличения ($S > 0$) или уменьшения ($S < 0$) давления на стенке скважины (см. условие (16)) пропорционально произведению скин-фактора и дебита на стенке скважины:

$$p_{D_{wf}} = p_D \Big|_{r_D=1} - S \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}. \quad (16)$$

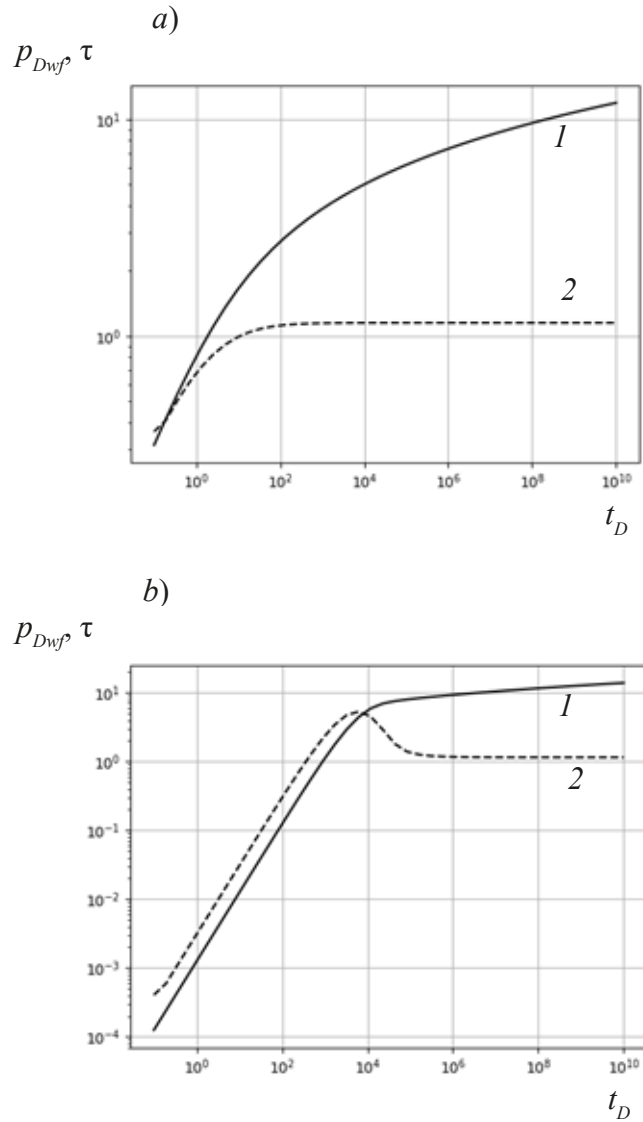


Рис. 2. Примеры зависимостей безразмерного забойного давления p_{Dwf} (1) и его производной $\tau = dp_{Dwf}(t_D) / d(\ln t_D)$ (2) от безразмерного времени t_D , удовлетворяющих уравнению пьезопроводности, без учета (a) и с учетом (b) скин-фактора и эффекта ствола скважины ($S = 2, C_D = 800$); использованы двойные логарифмические координаты

Влияние объема ствола скважины приводит к тому, что, когда скважина открывается для эксплуатации, первоначальный дебит на поверхности (на устье скважины) происходит ввиду расширения флюида, наполнявшего ранее ствол скважины. В результате дебит на забое (в месте непосредственного контакта скважины и пласта-коллектора) изменяется со временем медленнее, чем дебит на поверхности. Влияние объема ствола скважины учитывают с помощью граничного условия, связывающего изменение забойного давления со временем при постоянном дебите жидкости на стенке скважины (17):

$$C_D \frac{\partial p_{Dwf}}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1. \quad (17)$$

Оценка коэффициента пьезопроводности ϵ в таком случае производится также по значению функции $\tau = dp_{Dwf}(t_D) / d(\ln t_D)$ (по графику в двойных логарифмических координатах) в области, где кривая производной выходит на плато (см. рис. 2, b), т. е. где начинает реализовываться режим радиального притока.

Моделирование притока жидкости в трещиноватой среде. Уравнение пьезопроводности используется для описания процесса притока жидкости через поры (пласт с первичным межгранулярным типом пустотности). Однако для описания пластов, содержащих пустоты вторичного типа – трещины и каверны – требуется применять более сложные модели, большинство из которых имеет два вида пустотности [1]. Они моделируют фильтрацию жидкости сразу в двух пространствах, связанных уравнением перетока. Существуют разные типы таких моделей [7 – 9], в том числе модель двойной пористости («сахарных кубиков») Уоррена – Рута [10].

В модели Уоррена – Рута трещины образуют непрерывную и равномерную сеть, ориентированную параллельно основному направлению проницаемости (рис. 3), при этом раскрытость трещин постоянна.

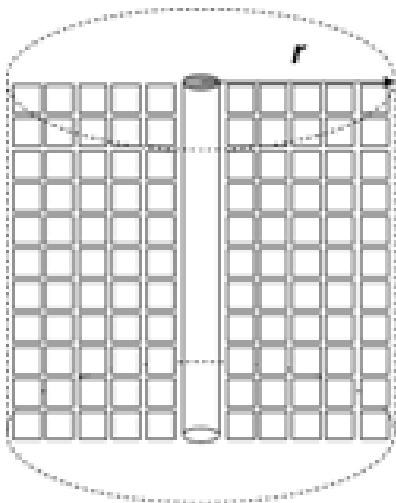


Рис. 3. Многоблочная модель одновременного симметричного радиального притока жидкости через поровое пространство (матрицу) и систему трещин (модель Уоррена – Рута)

В такой модели, как и в других моделях двух типов пустот, параметры уравнений (2) – (6) пласта и фильтрующей жидкости k , c_r , ϕ , а также переменные p и v рассматриваются отдельно для пространства матрицы и пространства трещин. Обозначение каждой величины сопровождается индексами ma и f , соответственно. Например, $P_{D_{ma}}$ – безразмерное давление в пространстве матрицы (поровое пространство), P_{D_f} – безразмерное давление в пространстве трещин.

Для пространства матрицы и пространства трещин, по аналогии с выводом обычного уравнения пьезопроводности, комбинируют законы Дарси, уравнения неразрывности, учитывающие переток жидкости из одного пространства в другое, уравнения сжимаемости твердой фазы пласта, а также единое для обоих пространств уравнение сжимаемости жидкости.

Для связи двух пространств в модель вводят два новых параметра:

ω (англ. storativity ratio) – параметр, характеризующий вмещающую способность трещинной системы;

λ (англ. matrix/fracture interaction parameter) – безразмерный параметр, характеризующий межпустотный переток жидкостей в безразмерной форме, т. е. интенсивность перетока жидкости из матрицы в трещины.

Согласно модели Уоррена – Рута, итоговая система уравнений для случая цилиндрической симметрии радиального притока к вертикальной скважине имеет вид:

$$\begin{cases} \omega \left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \right) + (1 - \omega) \left(\frac{\partial p_{Dma}}{\partial t_D} \right) = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right), \\ (1 - \omega) \left(\frac{\partial p_{Dma}}{\partial t_D} \right) = \lambda (p_{Df} - p_{Dma}). \end{cases} \quad (18)$$

В случае $\omega = 1$ пласт трещиноватый, с ничтожно малой пористостью матрицы. Первое уравнение в системе сводится к уравнению пьезопроводности относительно P_{Df} ; в случае $\omega = 0$ имеем пласт с пренебрежимо малым влиянием трещин, в случае $0 < \omega < 1$ – пласт с наличием двойной пористости.

По аналогии с уравнением (6), для задачи плоскорadiaльного притока к вертикальной скважине с фиксированным дебитом жидкости в бесконечном пласте, в качестве граничных условий принимаются следующие:

$$p_{D_f} \Big|_{t_D=0} = p_{D_{ma}} \Big|_{t_D=0} = 0, \quad (19)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D_f} = \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D_{ma}} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial p_{D_f}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1. \quad (21)$$

Выражение для забойного давления для системы уравнений (18) получено Дж. И. Уорреном и П. Дж. Рутон [1, 10]:

$$p_{D_f}(1, t) = p_{D_{fwf}}(t) = \frac{1}{2} \left(\text{const} + \ln(t_D) + \text{Ei} \left[-\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - \text{Ei} \left[-\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right). \quad (22)$$

При малых значениях безразмерного времени t_D выражение (22) аппроксимируется с помощью логарифмической функции:

$$p_{D_f}(t_D, t_D \rightarrow 0) \approx \frac{1}{2} \left(\text{const} + \ln(t_D) + \ln \left(\frac{1}{\omega} \right) \right). \quad (23)$$

Аналогично и при больших значениях безразмерного времени t_D (достигается квазистационарное течение, весь пласт работает как эквивалентный однородный), выражение (20) аппроксимируют с помощью логарифмической функции:

$$p_{D_f}(r_D = 1, t_D \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{2} (\text{const} + \ln(t_D)). \quad (24)$$

Зависимости давления и его производной $\psi = d(p_{D_{wf}}(t_D)) / d(\ln(t_D))$ от времени аналогичны выражению (15), с тем отличием, что выход на плато кривой, относящейся к производной давления по логарифму времени, имеет провал (рис. 4).

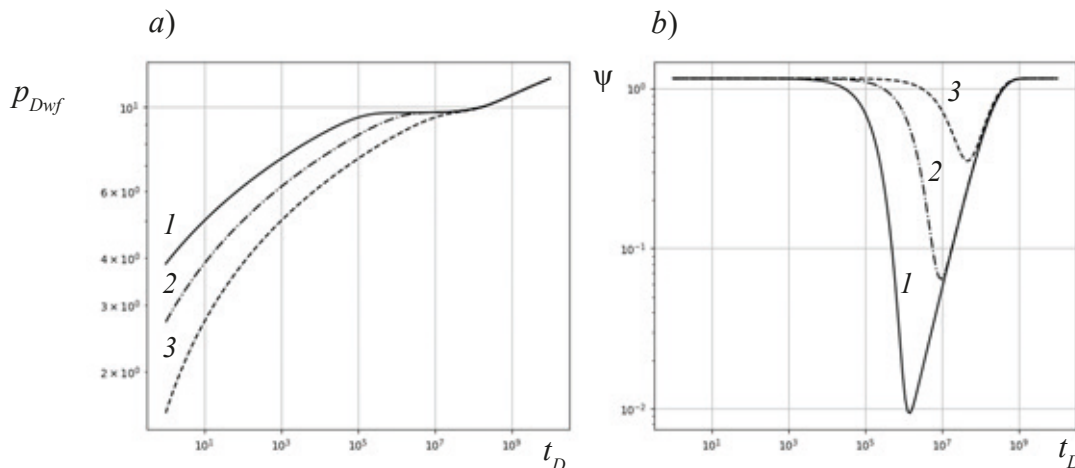


Рис. 4. Примеры зависимостей безразмерного давления (a) и его производной $\psi = d(p_{D_{wf}}(t_D))/d(\ln(t_D))$ (b) от безразмерного времени t_D , удовлетворяющих уравнению пьезопроводности, для различных значений вмещающей способности трещины ω : 0,001 (1); 0,01 (2); 0,1 (3)

Этот V -образный провал соответствует переходной стадии притока жидкости, на которой зависимость давления от времени в трещинах примерно постоянна на ранней стадии снабжения трещинной системы жидкостью из матричных блоков.

Таким образом, модели двойной пустотности, как и уравнение пьезопроводности (14), не учитывают возможности степенной зависимости давления от времени. Это связано с тем, что пространства трещин и пор в модели имеют целую размерность: они одно-, двух- и трехмерные.

Однако классическую модель пьезопроводности и модель Уоррена – Рута можно обобщить, если ввести понятие дробной (фрактальной) размерности.

Фрактальная модель ГДИС

Постановка задачи. Одним из возможных способов описания сложности и негладкости объектов выступает моделирование их фрактальных свойств. Фракталами называют множества, размерность Хаусдорфа – Безиковича которых строго больше топологической размерности (см. монографию [11]), т. е. привычной размерности Лебега, согласно которой отрезок – это одномерное тело, сфера – двухмерное и т. д.

Динамическим системам, обладающим свойствами фрактала, присуще «аномальное» поведение, связанное, в первую очередь, со свойством фрактала, согласно которому его интегральные свойства степенным образом зависят от масштаба, на котором рассматривается объект [12], а также с возникающим вследствие этого понятием дробной размерности пространства. Подобное поведение отмечается множеством авторов применительно к различным разделам математики и физики: дробному дифференцированию и интегрированию [13, 14], термодинамике и теплообмену [15], теории упругости [16], гидроаэродинамике [17], электродинамике [18], молекулярной динамике [19] и статистической физике [20], квантовой механике [21], теории протекания [22], механике [23] и геометрии [17, 24 – 26] пористых сред, теории случайной функции [27] и многим другим [17].

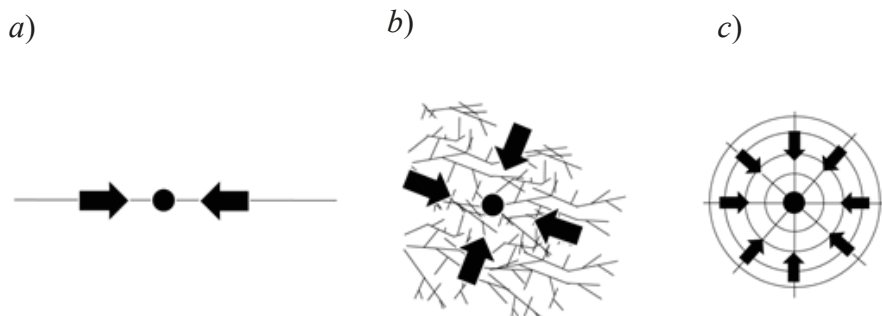


Рис. 5. Приток жидкости к скважине разными путями: по одномерной трещине (а), по фрактальной системе трещин (b), по двумерной сети трещин (с)

В частности, в статье [3] предложено рассмотреть подобный подход применительно к моделированию плоскорадиального притока жидкости к вертикальной скважине через систему естественных трещин, обладающую свойствами фрактала (рис. 5).

Как и ранее, будем рассматривать приток к скважине в системе, осредненные характеристики которой обладают цилиндрической симметрией (рис. 6).

Предположим, что приток жидкости в таком трещиноватом пространстве происходит по набору «сегментов» одинакового объема V_s , а $n(r)dr$ – число сегментов в кольцевом элементе $(r, r + dr)$ (см. рис. 6). В таком случае функция $n(r)$ есть плотность состояний, характеризующая близость «упаковки» сегментов трещин в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N . Понятие плотности состояний известно в статистической физике как величина, определяющая число энергетических уровней в единичном интервале энергий на единицу N -мерного объема [28].

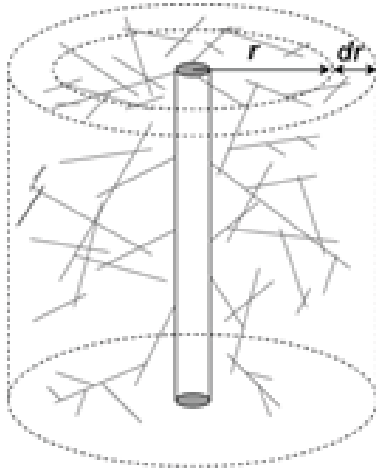


Рис. 6. Фрактальная система естественных трещин, окружающая вертикальную скважину и кольцевой элемент этого же цилиндра $(r, r + dr)$ толщиной dr

Математическое выражение фрактальности системы естественных трещин состоит в том, что массовая доля, которую занимают трещины в цилиндре радиуса R , степенным образом зависит от радиуса цилиндра. Показателем степени при этом является фрактальная размерность D_m (англ. mass dimension of fractal system), характеризующая способность фрактальной среды заполнять пространство. Размерность D_m аналогична хорошо известной размерности Хаусдорфа – Безиковича или размерности Минковского [12].

Поскольку объем V каждого сегмента трещин одинаков, функция $n(r)dr$ также задает массовую долю системы трещин в кольцевом элементе цилиндра [3]:

$$\text{Mass} = \int_0^R n(r) dr \propto R^{D_m}. \quad (25)$$

Таким образом, число трещин, содержащихся в окружности при увеличении ее радиуса r , с некоторого момента растет медленнее, чем массовая доля этих трещин:

$$n(r) \propto r^{D_m-1}. \quad (26)$$

Подобное проявление фрактальности отмечается для горных пород [30 – 33], некоторых пористых материалов, полимеров, коллоидных систем, аэрогелей, песчаников [11, 34 – 37].

Кроме того, в книге [17] отмечено, что многие пористые среды, проявляющие фрактальные свойства, гомогенны, т. е. осью цилиндра может являться вертикальная скважина.

Согласно сведениям, изложенным в статье [19], для проводимых систем величина потока через поверхность окружности пропорциональна ее радиусу в степени, равной $D_m - 1 - \theta$, что верно и для скорости фильтрации жидкости v через поверхность окружности:

$$v(r) \propto \frac{r^{D_m-1-\theta}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (27)$$

Из этих зависимостей в работах [3] и [39] получены выражения для проницаемости k и пористости φ фрактальной системы трещин, содержащейся в круговом сегменте радиуса r :

$$k(r) = k_w \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_m-\theta-d}, \quad (28)$$

$$\varphi(r) = \varphi_w \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_m-d}, \quad (29)$$

где d – евклидова размерность пространства (в текущей постановке $d = 2$); θ – спектральная экспонента фрактальной сети, или индекс аномальной проводимости (англ. conductivity index); r_w, k_w, φ_w – соответственно значения радиуса скважины, проницаемости и пористости, измеренные на стенке скважины.

Появление величины θ связано с тем, что приведенное ниже уравнение притока во

фрактальных трещинах получено по аналогии с уравнением диффузии на фрактальных объектах [19] (уравнение Фика совпадает с уравнением пьезопроводности), для которого θ имеет конкретный физический смысл. При этом коэффициент пьезопроводности (*англ. diffusivity*) χ в точке обратно пропорционален расстоянию до начала координат r в степени, равной индексу аномальной проводимости:

$$\chi \propto r^{-\theta}, \quad (30)$$

что аналогично явлению аномальной диффузии, когда не выполняются предположения, на которых основывается закон Эйнштейна и модель броуновского движения, т. е. квадрат пройденного частицей расстояния перестает быть пропорциональным времени пробега частицы [40].

Следует отметить, что $k(r)$ и $\varphi(r)$ в выражениях (28), (29) – не локальные значения проницаемости и пористости в точке, а средние проницаемость и пористость в цилиндре радиуса r [41]. Для них также выполняются пропорции

$$k \propto r^{D_m - \theta - d}, \quad (31)$$

$$\varphi \propto r^{D_m - d}. \quad (32)$$

Подобная зависимость проводимости фрактальной системы от координаты r отмечена ранее в работе советского ученого И. М. Соколова по теории протекания (перколяции), изучавшего случайные блуждания на фрактальных сетках [22].

Обобщенное уравнение пьезопроводности. Полученные степенные зависимости проницаемости $k(r)$ и пористости $\varphi(r)$ позволяют вывести обобщенное уравнение пьезопроводности (*англ. generalized diffusivity equation*) для фрактальных трещиноватых систем.

Уравнение радиального притока к скважине по фрактальным трещинам (приток по матрице отсутствует) получается путем введения безразмерных переменных, по аналогии с выражениями (4),

$$p_D = \frac{2\pi k_w h (p_i - p)}{q\mu}; \quad t_D = \frac{k_w t}{\mu\varphi_w c_i r_w^2}; \quad r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (33)$$

и подстановки $k(r)$ и $\varphi(r)$, по аналогии с выводом классического уравнения пьезопроводности [3]:

$$\frac{1}{r_D^{D_m - 1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_m - 1 - \theta} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (34)$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{D_m - 1 - \theta}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = r_D^\theta \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (35)$$

Итак, безразмерные переменные p_D , t_D , r_D получены по аналогии с выводом выражений (4).

Рассмотрим несколько случаев.

1. $\theta = 0$, $D_m = 2$; это означает, что отсутствует аномальная проводимость, а фрактальная размерность совпадает с евклидовой; тогда уравнение (33) сводится к уравнению пьезопроводности для плоскорадиального притока к скважине (см. формулы (5), (6)); это соответствует случаю, представленному на рис. 5,с.

2. $\theta = 0$, $D_m = 1$; уравнение (35) сводится к уравнению пьезопроводности для линейного (одномерного) притока к скважине (см. формулу (5)), см. рис. 5,а.

3. $1 < D_m < 2$; реализуется приток по плоской фрактальной системе трещин, он является промежуточным между линейным и плоскорадиальным, см. рис. 5,б.

4. $2 < D_m$; реализуется приток по фрактальной системе трещин, это промежуточный режим между плоскорадиальным и сферическим притоками.

Для решения уравнения пьезопроводности с начальными и граничными условиями (7) – (9) [3] использована замена, аналогичная подстановке Больцмана

$$y = \frac{r_D^{\theta+2}}{(\theta+2)^2 t_D}, \quad (36)$$

откуда получено выражение для безразмерного давления:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{r_D^{\theta+2-D_m}}{\Gamma\left(\frac{D}{\theta+2}\right)(\theta+2)^y} \int_0^\infty z^{\frac{D}{\theta+2}-2} e^{-z} dz, \quad (37)$$

что действительно сводится к решению (11) при $D_m = 2$ и $\theta = 0$.

Учет скин-фактора и эффекта ствола скважины в модели может производиться по аналогии с обычным уравнением пьезопроводности (6) с помощью введения иных граничных условий и решения уравнения численными методами либо с помощью преобразования Лапласа [3, 42, 43].

Численные решения обобщенного уравнения пьезопроводности (35) для разных значений пары параметров D_m и θ построены на рис. 7.

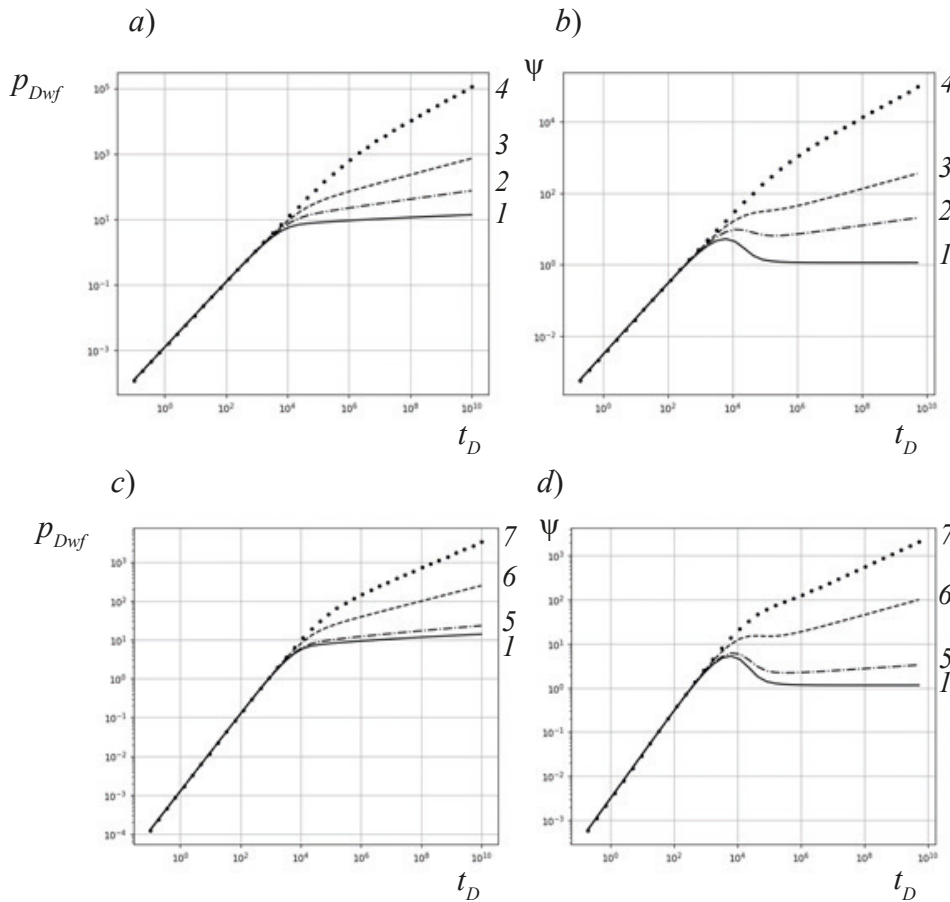


Рис. 7. Зависимости безразмерного давления (a, c) и его производной $\psi = d(p_{Dwf}(t_D)) / d(\ln(t_D))$ (b, d) от безразмерного времени t_D , удовлетворяющие уравнению пьезопроводности, для разных значений пары параметров D_m и θ : $D_m = 2,00$ (кривые 1, 5 – 7), 1,75 (2), 1,50 (3), 1,00 (4); $\theta = 0,0$ (1 – 4), 0,1 (5), 0,5 (6), 1,0 (7)

Аналогичные зависимости $p_{D_{wf}}(t_D)$ и $d(p_{D_{wf}}(t_D)) / d(\ln(t_D))$ получены также в работе [44], однако без учета влияния ствола скважины и скин-фактора. Верификация этих зависимостей проведена автором работы [44] с помощью численного моделирования притока жидкости к скважине по искусственной системе трещин с дробным значением D_m и θ , которая, однако, создается без учета физических аспектов роста трещин в породе.

Для больших значений времени t_D ($y \ll 1$) и фрактальной размерности $D_m \neq 2$ значения безразмерного забойного давления и производной могут быть получены в виде асимптоты [43]:

$$p_D(1, t_D) = p_{D_{wf}}(t_D) \approx \frac{(\theta + 2)^{2(1-\delta)}}{\Gamma(\delta)(\theta + 2 - D_m)} t_D^{(1-\delta)}, \quad (38)$$

откуда можно вывести формулу производной давления для этой асимптоты:

$$\frac{\partial p_D}{\partial(\ln(t_D))}(1, t_D) = \frac{dp_{D_{wf}}}{d(\ln(t_D))}(t_D) \approx (1 - \delta) p_{D_{wf}}(t_D). \quad (39)$$

где $\delta = D_m / (\theta + 2)$.

Анализ уравнений (38), (39) позволяет сделать несколько выводов.

Во-первых, учет фрактальной размерности системы естественных трещин D_m и коэффициента аномальной диффузии θ действительно позволяет описать наблюдаемую в работах [45 – 48] степенную зависимость давления от времени. Фрактальная (дробная) размерность и эффект аномального притока (аномальной диффузии) при этом слабо влияют на фильтрацию жидкости в период влияния ствола скважины (в начальные моменты времени), но вносят заметный вклад на более позднем этапе, т. е. когда в обычной модели наблюдался бы радиальный режим притока (см. рис. 2).

Во-вторых, фрактальный режим притока жидкости к скважине можно идентифицировать по двум признакам.

Первый признак: обе кривые ГДИС имеют в двойных логарифмических координатах одинаковый угол наклона, арктангенс которого равен $(1 - \delta)$ (см. рис. 7).

Второй признак: разность между значениями кривых ГДИС на поздних значениях времени (на которых уже не заметны эффекты влияния ствола скважины и скин-фактора) постоянна и равна $(1 - \delta)$.

В отличие от плоскорадиального притока, наличие полученных из ГДИС зависимостей (см. рис. 7) и оценок значений h и μ не позволяет однозначно оценить значение проницаемости на стенке скважины k_w . Действительно, в отличие от выражения (15), асимптота производной забойного давления в логарифмических координатах не имеет горизонтального участка, а угол ее наклона зависит от двух неизвестных параметров: D_m и θ . При этом зависимость между этими параметрами определена лишь для некоторого класса тел [1].

В связи с этим в оригинальной статье [1] предложено использовать модель (см. рис. 7) не для оценки проницаемости пласта-коллектора, а для определения типа его трещиноватости.

Наличие фрактальной трещиноватости может стать сигналом об аномальном режиме притока жидкости к скважине в таком пласте. В этом случае при гидродинамическом моделировании фильтрации жидкости следует использовать, например, подходы, описанные в книге [17], так как применение традиционных моделей механики сплошной среды и моделей двойной пустотности будет некорректным и может давать завышенный прогноз дебита жидкости на скважине.

В существующей инженерной практике наклон асимптоты $d(p_{D_{wf}}(t_D))/d(\ln(t_D))$ в логарифмических координатах обыкновенно интерпретируется как режим притока к магистральной одномерной трещине, в которую попала скважина. В случае, когда подобный наклон асимптоты наблюдается при проведении ГДИС на нескольких скважинах, специалист будет вынужден предположить, что в каждой из скважин находится магистральная трещина, что требует дополнительной проверки, так как может привести к неверному прогнозу давления или дебита жидкости на этих скважинах.

Модель притока жидкости к фрактальной трещине (см. уравнение (35)) основывается



на более разумном предположении: если в пласте присутствуют связанные трещины, то основной приток жидкости к скважинам, вскрывающим пласт, будет осуществляться по этой сложной (фрактальной) системе естественных трещин, что повлияет на динамику результатов ГДИС.

Также фрактальная модель позволяет интерпретировать результаты ГДИС, когда график $d(p_{Dwf}(t_D))/d(\ln(t_D))$ в логарифмических координатах имеет V -образную форму. Подобная форма интерпретируется в инженерной практике как режим двойной пористости [44], что может оказаться неверным, если в дальнейшем график не выходит на плато (см. рис. 4).

Подобная V -образная форма может быть обусловлена наличием фрактальности трещин или аномальной диффузией (см. рис. 7) совместно с влиянием эффекта ствола скважины. V -образный провал на кривой появится в момент времени, при котором ослабевает влияние ствола скважины, что придаст графику указанную особенность.

Кроме того, фрактальная модель может быть модифицирована для интерпретации данных ГДИС двух и более скважин. Например, в работах [45, 46] фрактальная модель позволила с меньшей ошибкой аппроксимировать данные, относящиеся к интерференции давления по межскважинному пространству на примере двух месторождений в Индонезии.

Заключение

В работе проведен обзор моделей притока нефти к вертикальной скважине в пластах с естественной трещиноватостью, а также ее обобщения на случай аномального притока жидкости к скважине по фрактальной системе трещин. При анализе этих моделей выявлены признаки в полученных результатах гидродинамического исследования скважин (ГДИС), указывающие на наступление режима аномального притока жидкости к скважине. Авторы настоящей работы предлагают при интерпретации таких данных ГДИС использовать модель притока жидкости по фрактальной системе трещин.

Такая модель основывается на законах масштабирования фрактальных тел, описывает механику притока жидкости во фрактальной среде с помощью обобщенного уравнения пьезопроводности и позволяет интерпретировать данные ГДИС, для которых наблюдается степенная зависимость забойного давления от времени. Применение модели позволит избежать неверной интерпретации данных ГДИС, когда в инженерной практике используют модели линейного режима притока по единичной трещине или двойной пористости.

Валидация фрактальной модели притока может быть проведена в перспективе как на натурном эксперименте с использованием реального образца керна, так и на численном эксперименте. Для этого можно использовать, например, метод сглаженных частиц (*англ.* Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)) или конечно-объемное моделирование уравнений Навье – Стокса на геометрии, приближенно моделирующей фрактальную систему трещин.

Дальнейшее развитие модели представляет интерес применительно к искусственным трещинам гидроразрыва пласта и к другим процессам, при которых вблизи скважины могут образовываться фрактальные каналы притока жидкости, а также к режимам фильтрации, в которых участвуют и трещины, и поры.

Интересно также рассмотреть аналогию модели с процессом аномальной диффузии; последняя традиционно описывается с помощью уравнений, содержащих производные дробного порядка. Такое описание позволяет моделировать состояние системы, которое зависит от ее предыстории.

Кроме того, остаются открытыми вопросы определения параметров D_m и θ , диагностирующих фрактальные свойства системы. Оценка этих параметров позволит получать из данных ГДИС ценную информацию о фильтрационно-емкостных свойствах пласта, не дожидаясь наступления радиального режима притока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голф-Рахт Т. Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. Пер. с англ. М.: Недра, 1986. 608 с.

2. **Thomas O. O., Raghavan R. S., Dixon T. N.** Effect of scale-up and aggregation on the use of well tests to identify geological properties // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. 2005. Vol. 8. No. 03. Pp. 248–254.
3. **Chang J., Yortsos Y. C.** Pressure transient analysis of fractal reservoirs // *SPE Formation Evaluation*. 1990. Vol. 5. No. 01. Pp. 31–38.
4. **Роберт Э.** Гидродинамические исследования скважин. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 467 с.
5. **Matthews C. S., Russell D. G.** Pressure build-up and flow tests in wells. Chapter 2. Monograph Series. Vol. 1. Dallas, USA: Society of Petroleum Engineers of AIME, 1967, 179 p.
6. **Эрлагер Р.** Гидродинамические методы исследования скважин // Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 476 с.
7. **Baker W.** Flow in fissured reservoir // *Proceedings of the Fourth World Petroleum Congress*, Rome, Italy. Section II/E. 1955. Pp. 379–393.
8. **Kazemi H.** Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution // *Society of Petroleum Engineers Journal*. 1969. Vol. 9. No. 04. Pp. 451–462.
9. **De Swaan O. A.** Analytic solutions for determining naturally fractured reservoir properties by well testing // *Society of Petroleum Engineers Journal*. 1976. Vol. 16. No. 03. Pp. 117–122.
10. **Warren J. E., Root P. J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers Journal*. 1963. Vol. 3. No. 03. Pp. 245–255.
11. **Mandelbrot B.** The fractal geometry of nature. USA: W. H. Freeman & Co., 1977. 468 p.
12. **Feder J.** Fractals. New York: Plenum Press, 1988. 283 p.
13. **Tarasov V. E., Tarasova S. S.** Fractional derivatives and integrals: What are they needed for? // *Mathematics*. 2020. Vol. 8. No. 2. Pp. 164-1–164-21.
14. **Tarasov V. E.** Fractional nonlinear dynamics of learning with memory // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 100. No. 2. Pp. 1231–1242.
15. **Debbouche A., Antonov V.** Finite-dimensional diffusion models of heat transfer in fractal mediums involving local fractional derivatives // *Nonlinear Studies*. 2017. Vol. 24. No. 3. Pp. 527–535.
16. **Sokolnikoff I. S.** Mathematical theory of elasticity. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1956. 476 p.
17. **Tarasov V.** Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Beijing: Higher Education Press, 2010. 505 p.
18. **Jaggard D. L.** On fractal electrodynamics // *Recent Advances in Electromagnetic Theory*, Ed. by Kritikos H. N., Jaggard D. L. New York: Springer –Verlag, 1990. Pp. 183–224.
19. **O'Shaughnessy B., Procaccia I.** Analytical solutions for diffusion on fractal objects // *Physical Review Letters*. 1985. Vol. 54. No. 5. Pp. 455–458.
20. **Gefen Y., Mandelbrot B., Aharony A.** Critical phenomena on fractal lattices // *Physical Review Letters*. 1980. Vol. 45. No. 11. Pp. 855–858.
21. **Guo X., Xu M.** Some physical applications of fractional Schrodinger equation // *Journal of Mathematical Physics*. 2006. Vol. 47. No. 8. Article ID 082104.
22. **Соколов И. М.** Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // *Успехи физических наук*. 1986, Т. 150. № 10. С. 221–255.
23. **Ostoja-Starzewski M.** Continuum mechanics models of fractal porous media: integral relations and extremum principles // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2009. Vol. 4. No. 5. Pp. 901–912.
24. **Yu B.** Analysis of flow in fractal porous media // *Applied Mechanics Reviews*. 2008. Vol. 61. No. 5. P. 050801 (19 p.)
25. **Mahamud M. M., Novo M. F.** The use of fractal analysis in the textural characterization of coals // *Fuel*. 2008. Vol. 87. No. 2. Pp. 222–231.
26. **Хлопин А. Н. Динариев О. Ю.** Фрактальный анализ трехмерной микроструктуры пористых материалов // *Журнал технической физики*. 2015. Т. 85. № 6. С. 17–22.
27. **Denisov S. I.** Fractal dimension of random processes // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9. No. 9. Pp. 1491–1496.
28. **Киттель Ч.** Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 791 с.
29. **Кроновер Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Пост-маркет, 2000. 352 с.
30. **Miao T., Yu B., Duan Y., Fang Q.** A fractal analysis of permeability for fractured rocks //



International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 81. February. Pp. 75–80.

31. **Miao T., Yang S., Long Z., Yu B.** Fractal analysis of permeability of dual-porosity media embedded with random fractures // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 88. September. Pp. 814–821.

32. **Bonnet E., Bour O., Odling N. E., Davy P., Main I., Cowie P., Berkowitz B.** Scaling of fracture systems in geological media // Reviews of Geophysics. 2001. Vol. 39. No. 3. Pp. 347–383.

33. **Sahimi M.** Flow and transport in porous media and fractured rock: From classical methods to modern approaches. 2nd edition. Wiley VCH, 2011. 733 p.

34. **Frame M., Mandelbrot B., Neger N.** Fractal Geometry. 2006. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/. Дата обращения: 10.02.2021.

35. **Кулак И.** Фрактальная механика материалов. Минск: Вышэйшая школа, 2002. 304 с.

36. **Потапов А.** Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

37. **Katz A. J., Thompson A. H.** Fractal sandstone pores: Implications for conductivity and pore formation // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54. No. 12. Pp. 1325–1328.

38. **O'Shaughnessy B., Procaccia I.** Diffusion on fractals // Physical Review A. 1985. Vol. 32. No. 5. Pp. 3073–3083.

39. **Acuna J. A., Ershaghi I., Yortsos Y. C.** Practical application of fractal pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs // SPE Formation Evaluation. 1995. Vol. 10. No. 03. Pp. 173–179.

40. **Ben-Avraham D., Havlin S.** Diffusion and reactions in fractals and disordered systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 332 p.

41. **Багманов В. Х., Байков В. А., Латыпов А. Р., Васильев И. Б.** Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в пористой среде с фрактальными свойствами // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2006. Т. 7. № 2. С. 146–149.

42. **Zhao Y., Zhang L.** Solution and type curve analysis of fluid flow model for fractal reservoir // World Journal of Mechanics. 2011. Vol. 1. No. 5. Pp. 209–216.

43. **Flamenco-Lopez F., Camacho-Velazquez R.** Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. 2003. Vol. 6. No. 01. Pp. 39–47.

44. **Acuna J.** Numerical construction and fluid flow simulation in networks of fractures using fractal geometry. A dissertation presented to the Faculty of the Graduate School University of Southern California in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy (Petroleum Engineering). December, 1993.

45. **Kristanto D., Abdassah D., Siregar S.** Practical application of fractal model to analysis interference test in the naturally fracture reservoir, Amoseas Indonesia Inc. // Proceedings of SPE Asia Pacific Conference on Integrated Modelling for Asset Management, Yokohama, Japan. April 25–26, 2000. Paper Number: SPE-59402-MS.

46. **Aprilian S., Abdassah D., Mucharam L, Sumantri R.** Application of fractal reservoir model for interference test analysis in Kamojang geothermal field (Indonesia) // Proceedings of SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, October 3–6, 1993. Paper Number: SPE-59402-MS.

47. **Acuna J. A., Ershaghi I., Yortsos Y. C.** Practical application of fractal pressure – Transient analysis in naturally fractured reservoirs // SPE Formation Evaluation. 1995. Vol. 10. No. 03. Pp. 173–179.

48. **Raghavan R.** Fractional derivatives: Application to transient flow // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2011. Vol. 80. No. 1. Pp. 7–13.

REFERENCES

1. **Van Golf-Racht T. D.,** Fundamentals of fractured reservoir engineering, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam – Oxford – New York, 1982.

2. **Thomas O. O., Raghavan R. S., Dixon T. N.,** Effect of scale-up and aggregation on the use of well tests to identify geological properties, SPE Res. Eval. Eng. 8 (03) (2005) 248–254.

3. **Chang J., Yortsos Y. C.,** Pressure transient analysis of fractal reservoirs, SPE Form. Eval. 5 (01)

(1990) 31–38.

4. **Earlougher R. C., Jr.**, Advances in well test analysis, Society of Petroleum Engineering of AIME (TX), USA, 1977.

5. **Matthews C. S., Russell D. G.**, Pressure build-up and flow tests in wells. Ch. 2. Monograph Series. Vol. 1. Dallas, Society of Petroleum Engineers of AIME, USA, 1967.

6. **Earlougher R. C., Jr.**, Advances in well test analysis, 11th printing, Society of Petroleum Engineering of AIME (TX), USA, 2003.

7. **Baker W.**, Flow in fissured reservoir, Proceedings of the Fourth World Petroleum Congress, Rome, Italy. Sect. II/E (1955) 379–393.

8. **Kazemi H.**, Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, Soc. Petr. Eng. J. 9 (04) (1969) 451–462.

9. **De Swaan O. A.**, Analytic solutions for determining naturally fractured reservoir properties by well testing, Soc. Petr. Eng. J. 16 (03) (1976) 117–122.

10. **Warren J. E., Root P. J.**, The behavior of naturally fractured reservoirs, Soc. Petr. Eng. J. 3 (03) (1963) 245–255.

11. **Mandelbrot B.**, The fractal geometry of nature, W. H. Freeman & Co., USA, 1977.

12. **Feder J.**, Fractals, Plenum Press, New York, 1988.

13. **Tarasov V. E., Tarasova S. S.**, Fractional derivatives and integrals: What are they needed for? Mathematics. 8 (2) (2020) 164-1–164-21.

14. **Tarasov V. E.**, Fractional nonlinear dynamics of learning with memory, Nonlinear Dyn. 100 (2) (2020) 1231–1242.

15. **Debbouche A., Antonov V.**, Finite-dimensional diffusion models of heat transfer in fractal mediums involving local fractional derivatives, Nonlinear Studies. 24 (3) (2017) 527–535.

16. **Sokolnikoff I. S.**, Mathematical theory of elasticity, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1956.

17. **Tarasov V.**, Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media, Higher Education Press, Beijing, 2010.

18. **Jaggard D. L.**, On fractal electrodynamics, Recent Advances in Electromagnetic Theory, Ed. by Kritikos H. N., Jaggard D. L. Springer –Verlag, New York (1990) 183–224.

19. **O'Shaughnessy B., Procaccia I.**, Analytical solutions for diffusion on fractal objects, Phys. Rev. Lett. 54 (5) (1985) 455–458.

20. **Gefen Y., Mandelbrot B., Aharony A.**, Critical phenomena on fractal lattices, Phys. Rev. Lett. 45 (11) (1980) 855–858.

21. **Guo X., Xu M.**, Some physical applications of fractional Schrodinger equation, J. Math. Phys. 47 (8) (2006) ID 082104.

22. **Sokolov I. M.**, Dimensionalities and other geometric critical exponents in percolation theory, Sov. Phys. Usp. 29 (10) (1986) 924–945.

23. **Ostoja-Starzewski M.**, Continuum mechanics models of fractal porous media: Integral relations and extremum principles, J. Mech. Mat. Struct. 4 (5) (2009) 901–912.

24. **Yu B.**, Analysis of flow in fractal porous media, Appl. Mech. Rev. 61 (5) (2008) 050801 (19 p.)

25. **Mahamud M. M., Novo M. F.**, The use of fractal analysis in the textural characterization of coals, Fuel. 87 (2) (2008) 222–231.

26. **Khlopun A. N., Dinariev O. Y.**, Fractal analysis of the 3D microstructure porous materials, Technical Physics. 60 (6) (2015) 805–810.

27. **Denisov S. I.** Fractal dimension of random processes, Chaos, Solitons & Fractals. 9 (9) (1998) 1491–1496.

28. **Kittel C.** Introduction to solid state physics, 8th Ed., Wiley, New York, 2004.

29. **Krownover R. M.**, Introduction to fractals and chaos, Jones and Bartlett Publishers, Boston, London, 1995.

30. **Miao T., Yu B., Duan Y., Fang Q.**, A fractal analysis of permeability for fractured rocks, Int. J. Heat Mass Transf. 81 (February) (2015) 75–80.

31. **Miao T., Yang S., Long Z., Yu B.**, Fractal analysis of permeability of dual-porosity media embedded with random fractures, Int. J. Heat Mass Transf. 88 (September) (2015) 814–821.

32. **Bonnet E., Bour O., Odling N. E., et al.**, Scaling of fracture systems in geological media, Rev. Geophys. 39 (3) (2001) 347–383.

33. **Sahimi M.**, Flow and transport in porous media and fractured rock, Wiley. Com. 2012.
34. **Frame M., Mandelbrot B., Neger N.**, Fractal Geometry. 2006. Access mode: https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/. Last accessed data: 10.02.2021.
35. **Kulak I.**, Fraktal'naya mekhanika materialov [Fractal mechanics of materials], Vysheishaya Shkola, Minsk, 2002. (in Russian).
36. **Potapov A. A.**, Fraktaly v radiofizike i radiolokatsii: Topologiya vyboriki [Fractals in radiophysics and radar: Sampling topology], Universitetskaya Kniga Publishing, Moscow, 2005 (in Russian).
37. **Katz A. J., Thompson A. H.**, Fractal sandstone pores: Implications for conductivity and pore formation, Phys. Rev. Lett. 54 (12) (1985) 1325–1328.
38. **O'Shaughnessy B., Procaccia I.**, Diffusion on fractals, Phys. Rev. A. 32 (5) (1985) 3073–3083.
39. **Acuna J. A., Ershaghi I., Yortsos Y. C.**, Practical application of fractal pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs, SPE Form. Eval. 10 (03) (1995) 173–179.
40. **Ben-Avraham D., Havlin S.**, Diffusion and reactions in fractals and disordered systems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
41. **Bagmanov V. H., Bajkov V. A., Latypov A. R., Vasil'ev I. B.**, Technique of interpretation and definitions of parameters of the equation of a filtration in the porous media with fractal properties, Bulletin of the Ufa State Aviation Technical University. 7 (2) (2006) 146–149 (in Russian).
42. **Zhao Y., Zhang L.**, Solution and type curve analysis of fluid flow model for fractal reservoir, World J. Mech. 1 (5) (2011) 209–216.
43. **Flamenco-Lopez F., Camacho-Velazquez R.**, Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data, SPE Res. Eval. & Eng. 6 (01) (2003) 39–47.
44. **Acuna J.**, Numerical construction and fluid flow simulation in networks of fractures using fractal geometry, the dissertation presented to the Faculty of the Graduate School University of Southern California in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy (Petroleum Engineering), December, 1993.
45. **Kristanto D., Abdassah D., Siregar S.**, Practical application of fractal model to analysis interference test in the naturally fracture reservoir, Amoseas Indonesia Inc., In: Proc. SPE Asia Pacific Conf. on Integr. Model. for Asset Management, Yokohama, Japan. April 25–26, 2000, SPE-59402-MS.
46. **Aprilian S., Abdassah D., Mucharam L, Sumantri R.**, Application of fractal reservoir model for interference test analysis in Kamojang geothermal field (Indonesia), In: Proc. SPE Annu. Techn. Conf. & Exhibit., Houston, Texas, October 3 – 6, 1993, SPE-59402-MS.
47. **Acuna J. A., Ershaghi I., Yortsos Y. C.**, Practical application of fractal pressure – Transient analysis in naturally fractured reservoirs, SPE Form. Eval. 10 (03) (1995) 173–179.
48. **Raghavan R.**, Fractional derivatives: Application to transient flow, J. Petrol. Sci. & Eng. 80 (1) (2011) 7–13.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КАЛЮЖНИЮК Александр Всеволодович – аспирант Института прикладной математики и механики, ассистент Высшей школы теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 kalyuzhnyuk_av@spbstu.ru
 ORCID: 0000-0002-0575-734X

АНТОНОВ Валерий Иванович – доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 antonovvi@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-4088-4707

THE AUTHORS

KALYUZHNYUK Alexander V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
kalyuzhnyuk_av@spbstu.ru
ORCID: 0000-0002-0575-734X

ANTONOV Valery I.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
antonovvi@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4088-4707

Статья поступила в редакцию 24.06.2021; одобрена после рецензирования 03.09.2021; принята к публикации 03.09.2021.

The article was submitted 24.06.2021; approved after reviewing 03.09.2021; accepted for publication 03.09.2021.