Математическая физика

Научная статья
УДК 517.958
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15104

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Д. С. Аниконов ✉, Е. Ю. Балакина, Д. С. Коновалова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

✉ anik@math.nsc.ru

Аннотация. В работе исследуется проблема обращения интегрального преобразования Радона, формула которого при традиционных ограничениях дает значения подынтегральной функции в любой точке. Для случая, когда подобная функция является разрывной и зависит не только от точек трехмерного пространства, но и от параметров, характеризующих плоскость интегрирования, эти интегралы названы обобщенным преобразованием Радона (ОПР). Для задачи обращения ОПР сопоставление количества переменных известных величин и подынтегрального выражения не позволяет полностью найти искомую функцию. В этой статье выбрана лишь часть такой функции, а именно поверхность разрывов подынтегральной функции для ОПР. Предложен алгоритм решения поставленной задачи, который подкреплен конкретным примером.

Ключевые слова: обобщенное преобразование Радона, интегральная геометрия, дифференциальное уравнение, разрывная функция

Для цитирования: Аниконов Д. С., Балакина Е. Ю., Коновалова Д. С. Обратная задача для обобщенного преобразования Радона // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 1. С 41–51. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15104

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15104

AN INVERSE PROBLEM FOR GENERALIZED RADON TRANSFORMATION

D. S. Anikonov ✉, E. Yu. Balakina, D. S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

✉ anik@math.nsc.ru

Abstract. The paper studies the problem of inverting the integral transformation of Radon, whose formula, under traditional restrictions, gives the integrand values at any point. For the case when such a function is discontinuous and depends not only on the points of 3D space, but also on the parameters characterizing the plane of integration, these integrals have been named the generalized Radon transform (GRT). For the GRT inversion problem, the matching between quantities of known variables and variables of the integrand did not allow us to fully find the desired function. In this paper, only a part of this function was selected, namely, the discontinuity surface of the integrand for the GRT. An algorithm for solving the problem was put forward, and it was supported by a concrete example.

Keywords: generalized Radon transformation, integral geometry, differential equation, discontinuous function

For citation: Anikonov D. S., Balakina E. Yu., Konovalova D. S., An inverse problem for generalized Radon transformation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 15 (1) (2022) 41–51. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15104

Введение

Проблема, которая рассматривается в настоящей работе, относится к теории интегральной геометрии и заключается в получении информации о подынтегральной функции по некоторому набору интегралов от нее. Такая общая постановка имеет много различных конкретных вариантов. Самыми известными из них можно считать задачи обращения лучевого преобразования и преобразования Радона. Результаты исследования подобных задач, помимо чисто научного интереса, имеют и важное прикладное значение. Наиболее известным примером такого применения может служить математическая часть теории рентгеновской томографии. Отметим в связи с этим, что многие задачи зондирования сводятся именно к проблемам интегральной геометрии.

Не претендуя на полный обзор темы, укажем на работы классиков этого направления, таких как Д. Радон [1], Р. Курант [2], Ф. Йон [3], И. М. Гельфанд [4]. Кроме того, значительный вклад в решение подобных задач внесли труды математической школы М. М. Лаврентьева в связи с исследованием обратных задач математической физики [5].

В настоящее время исследования в этом направлении продолжаются, хотя и с меньшей интенсивностью. К примерам такого развития можно отнести, в частности, публикации [6 – 14]. Основная часть достигнутых результатов на эту тему касается определения всего подынтегрального выражения, что требует довольно жестких ограничений, препятствующих широкому применению полученных результатов. Помимо этого, в немаловажных (с прикладной точки зрения) вопросах подынтегральное выражение может зависеть от большого количества переменных, что не позволяет найти полностью это выражение по имеющейся информации. Так, например, обстоит дело в рентгеновской томографии, если в полной мере учитывать эффект рассеяния частиц в зондируемой среде. Поэтому приходится менять постановку задачи, например объявлять искомым объектом только поверхности разрывов подынтегральной функции. Отметим, что в проблемах зондирования информация о такой поверхности дает неплохое представление о строении обследуемой среды. В частности, для рентгеновской томографии эти сведения служат основными характеристиками. Укажем, что такой подход к задачам рентгеновской томографии использовали и ранее, например, в статьях [15 – 17], где интегрирование осуществлялось вдоль одномерных многообразий, в то время как в нашей работе искомым объектом является поверхность разрыва для случая интегрирования по двумерным многообразиям. Нам неизвестны работы других авторов, которые бы исследовали подобные проблемы.

Определения и постановка задачи

Будем использовать следующие обозначения: E^3 – трехмерное евклидово пространство с системой координат $Ox_1x_2x_3$, соответствующей ортонормальному базису e_1, e_2, e_3; Ω – единичная сфера в E^3,

$$\Omega = \left\{\omega : \omega \in E^3, |\omega| = 1\right\},$$

$$\omega = \omega(\theta, \gamma) = (\sin\theta\cos\gamma, \sin\theta\sin\gamma, \cos\theta),$$

θ, γ – сферические углы; $L(x, \omega)$ - луч, исходящий из точки $x \in E^3$ в направлении ω, $L(x, \omega) = \{y\colon y = x + t\omega,\ t \geq 0\}$; const – некоторое положительное число; Δ_x – оператор Лапласа по переменной x.

Для любого открытого множества $T \subset E^3$, $C^k(T)$ – множество ограниченных функций, заданных в T и непрерывных вместе со всеми своими частными производными до k-го порядка включительно; ∂T означает границу множества T.

Рассмотрим ограниченную область G в пространстве E^3, в которой содержатся попарно непересекающиеся области G_i ($i = 1, 2, \ldots, p$), такие, что для их объединения G_0 соблюдается равенство $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Предполагаем, что каждое множество ∂G_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) является непрерывной двумерной поверхностью. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \cup \ldots \cup \partial G_p$. Будем считать систему множеств $\{G_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, p$) обобщенно выпуклой в следующем смысле: для любой точки $x \in E^3$ и для всех $\omega \in \Omega$ луч $L(x, \omega)$ пересекает границу ∂G_0 множества G_0 не более чем в конечном числе точек. Для удобства обозначений будем считать, что система множеств G_i, ($i = 1, 2, \ldots, p$) дополнена неограниченной областью $G_{p+1} = E^3 / \overline{G}$. Назовем точку $z \in \partial G_0$ контактной, если она является граничной для двух и только двух множеств G_j и G_l, причем $1 \leq j, l \leq p + 1$. Предполагается, что множество контактных точек плотно в ∂G_0.

Рассмотрим семейство функций $F(x, y)$ и $f(y)$, $x, y \in E^3$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\left|F(x,u) - F(x,v)\right| \leq \mathrm{const}\left|u - v\right|,\ \ x,u,v \in E^3;$$
$$\left|f(u) - f(v)\right| \leq \mathrm{const}\left|u - v\right|,\ u,v \in G_i.$$

При этом функция $F(x, y)$ принадлежит классу $C^2(E^3 \times E^3)$, а $f(y)$ равна нулю вне области G. Ясно, что такие функции $f(y)$ имеют конечные предельные значения в точках $y = z$, $z \in \partial G_i$, которые будем обозначать как $[f(z)]_i$, т. е. $f(y) \to [f(z)]_i$, $y \in G_i$, $y \to z$. Величиной разрыва (скачка) функции $f(y)$ в контактной точке $y = z$ назовем разность

$$\left[f(z)\right]_{j,l} = \left[f(z)\right]_j - \left[f(z)\right]_l,\ z \in \partial G_j, z \in \partial G_l, 1 \leq l < j \leq p+1.$$

Определение. *Функция $I(x, \omega)$, заданная равенством*

$$I(x,\omega)(f) = \int\limits_{(y-x,\omega)=0} F(x,y) f(y) d_y\sigma,\ x \in E^3, \omega \in \Omega, \tag{1}$$

называется обобщенным преобразованием Радона функции $f(y)$.

Поясним, что в формуле (1) поверхностный интеграл первого рода берется по плоскости, перпендикулярной вектору ω и проходящей через точку x.

В случае $F(x, y) = 1$ множество значений функции $I(x, \omega)$ и множество значений классического преобразования Радона совпадают. Вообще говоря, известно несколько различных определений обобщенных преобразований Радона. Наша специфика состоит в использовании разрывных подынтегральных функций и их зависимости не только от переменных интегрирования, но и от дополнительных переменных.

В литературе нам не удалось найти аналогов этого определения. Приведем обоснование его корректности. Рассмотрим ортогональное преобразование A в E^3, обладающее свойством

$$A\omega = \omega^*, \omega = (\sin\theta\cos\gamma, \sin\theta\sin\gamma, \cos\theta),\ \ \omega^* = e_3,\ \ \omega^* = \left(0,\ 0,1\right).$$

Это преобразование можно получить путем последовательного выполнения двух вращений: первое – поворот вокруг оси Ox_3 на угол γ, второе – вокруг оси Ox_2 на угол θ.

Нетрудно проверить, что матрица Λ преобразования A и матрица Λ^{-1} преобразования A^{-1} имеют следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\gamma & \cos\theta\sin\gamma & -\sin\theta \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\theta\cos\gamma & \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\gamma & -\sin\gamma & \sin\theta\cos\gamma \\ \cos\theta\sin\gamma & \cos\gamma & \sin\theta\sin\gamma \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Опишем множество векторов w из сферы Ω, ортогональных вектору ω. Для этого на горизонтальные векторы $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ подействуем преобразованием A^{-1}, обладающим свойством $\omega = A^{-1}\omega^*$. В результате получим:

$$w(\theta,\gamma,\alpha) = (\cos\theta\cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha, \cos\theta\sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha, -\sin\theta\cos\alpha). \quad (2)$$

В плоскости, проходящей через точку x и перпендикулярной вектору ω, введем полярную систему координат (r, α) с центром в точке x. Тогда, переходя к интегрированию через полярные координаты, равенство (1) перепишем в следующем виде:

$$I(x,\omega)(f) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} rF(x, x + rw(\theta,\gamma,\alpha)) f(x + rw(\theta,\gamma,\alpha))\, dr d\alpha. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$g(x,r,\theta,\gamma,\alpha) = rF(x, x + rw(\theta,\gamma,\alpha)) f(x + rw(\theta,\gamma,\alpha)),$$

которая при любых фиксированных значениях x, θ, γ имеет не более чем конечное число разрывов по переменной r при любом заданном значении α, что гарантируется условием обобщенной выпуклости. Таким образом, подынтегральное выражение в равенстве (3) оказывается непрерывным почти всюду в области интегрирования, что обеспечивает существование интеграла. Его ограниченность следует из ограниченности области G и функций F, f. Проводя изложенные рассуждения в обратном порядке, т. е. от равенства (3) к равенству (1), убеждаемся в корректности определения обобщенного преобразования Радона.

Теперь докажем непрерывность функции $I(x, \omega)(f)$. Фиксируем произвольную точку (x, ω), и пусть $\{x_k, \omega_k\}$, $\omega_k = \omega(\theta_k, \gamma_k)$ – это последовательность точек, сходящаяся к (x, ω).

Рассмотрим функции

$$\chi_k(r,\alpha) = rF(x_k, x_k + rw(\theta_k,\gamma_k,\alpha)) f(x_k + rw(\theta_k,\gamma_k,\alpha)),$$
$$\chi(r,\alpha) = rF(x, x + rw(\theta,\gamma,\alpha)) f(x + rw(\theta,\gamma,\alpha)).$$

Используя снова условие обобщенной выпуклости, убеждаемся в том, что $\chi_k(r, \alpha)$ стремится к функции $\chi(r, \alpha)$ для почти всех r, α. Следовательно, по теореме Лебега, допустим предельный переход под знаком интеграла, т. е.

$$I(x_k,\omega_k)(f) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \chi_k(r,\alpha)\, dr d\alpha \to \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \chi(r,\alpha)\, dr d\alpha = I(x,\omega)(f),$$

что и означает непрерывность функции $I(x, \omega)(f)$.

Сформулируем следующую проблему интегральной геометрии.

Задача о неизвестной границе. *Из уравнения (1) найти множество ∂G_0, если известны только значения функции*

$$I(x,\omega)(f),\ x \in E^3,\ \omega \in \Omega.$$

Как можно видеть, в этой задаче задано семейство интегралов, а требуется найти множество возможных точек разрывов неизвестной подынтегральной функции. Такая постановка задачи является развитием предыдущих исследований авторов настоящей статьи; отличие заключается в размерности множества интегрирования и в том, что в данном случае область G не предполагается известной. Отметим, что тематика поиска неизвестных границ довольно обширна и касается различных областей математики. Самой ранней постановкой, возможно, является известная задача Стефана.

Построение алгоритма решения задачи

Рассмотрим следующую функцию:

$$J(x,\omega,p)(f)=\int\limits_{(y,\omega)=p}F(x,y)f(y)d_y\sigma,\; x\in\mathrm{E}^3,\omega\in\Omega,-\infty<p<+\infty. \tag{4}$$

Здесь интеграл берется по плоскости, ортогональной вектору ω и имеющей отклонение p от начала координат. Если $F(x, y) = 1$, то $J(x, \omega, p)(f)$ не зависит от x и совпадает с традиционным преобразованием Радона, которое будем обозначать как $R(\omega, p)(f)$. Нетрудно видеть, что связь между функциями $I(x, \omega)(f)$ и $J(x, \omega, p)(f)$ осуществляется равенством

$$J(x,\omega,x\cdot\omega)(f)=I(x,\omega)(f),$$

т. е. они совпадают, если положить $p = x \cdot \omega$.

Отсюда следует, что функции $J(x, \omega, p)(f)$, $R(\omega, p)(f)$ непрерывны, поскольку непрерывна функция $I(x, \omega)(f)$. Также заметим, что непрерывным оказывается и любое преобразование $R(\omega, p)(h)$, если функция $h(y)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $f(y)$, т. е.

$$\left|h(u)-h(v)\right|\le\mathrm{const}\left|u-v\right|,\; u,v\in G_i,\; i=1,2,...,p, h(y)=0,\; y\in G_{p+1}.$$

Докажем одно полезное свойство для преобразования Радона от функции $h(y)$. При этом мы используем небольшой фрагмент доказательства некоторого утверждения из монографии [3], который мы обобщаем на случай разрывной подынтегральной функции $h(y)$.

Рассмотрим интеграл

$$H(x)=\int\limits_G\int\limits_\Omega h(y)\left|(y-x,\omega)\right|d\omega dy.$$

Нам понадобятся следующие известные, легко проверяемые равенства:

$$\begin{gathered}\Delta_x\left|y-x\right|=2\left|y-x\right|^{-1},\; \int\limits_\Omega\left|\xi\cdot\omega\right|d\omega=2\pi\left|\xi\right|, \xi\in\mathrm{E}^3,\\ \Delta_x\int\limits_G\frac{h(y)}{\left|y-x\right|}dy=-4\pi h(x).\end{gathered} \tag{5}$$

Используя первые две формулы в (5) для преобразования интеграла $H(x)$, получим:

$$\Delta_x H(x)=4\pi\int\limits_G\frac{h(y)}{\left|y-x\right|}dy. \tag{6}$$

Это же выражение можно выразить через преобразования Радона, если изменить порядок интегрирования и использовать теорему Фубини:

$$H(x)=\int\limits_\Omega\int\limits_G h(y)\left|(y-x)\cdot\omega\right|dyd\omega=\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|p\right|\int\limits_{(y-x)\cdot\omega=p}h(y)d_y\sigma dpd\omega=\int\limits_\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|p\right|R(\omega,p+x\cdot\omega)(h)dpd\omega.$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta_x H(x) = \int_{\Omega} \Delta_x \int_{-\infty}^{+\infty} |p| R(\omega, p + x\cdot\omega)(h) dp d\omega. \tag{7}$$

В равенстве (7) преобразуем внутренний интеграл, используя свойство $R(\omega, p)(h) = R(-\omega, -p)(h)$:

$$\Delta_x \int_{-\infty}^{+\infty} |p| R(\omega, p + x\cdot\omega)(h) dp =$$

$$= \Delta_x \left[\int_{x\cdot\omega}^{+\infty} (p - x\cdot\omega) R(\omega, p + x\cdot\omega)(h) dp - \int_{-\infty}^{x\cdot\omega} (p - x\cdot\omega) R(\omega, p + x\cdot\omega)(h) dp \right] = \tag{8}$$

$$= 2R(\omega, x\cdot\omega)(h).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_x H(x) = 2\int_{\Omega} R(\omega, x\cdot\omega)(h) d\omega.$$

Сопоставляя полученное равенство с равенством (6), выводим формулу

$$\int_{\Omega} R(\omega, x\cdot\omega)(h) d\omega = 2\pi \int_G \frac{h(y)}{|y-x|} dy. \tag{9}$$

Отметим, что в равенстве (9) интегрирование осуществляется по переменным y, ω, а переменная x при этом неизменна. Это позволяет считать здесь x параметром, что расширяет возможности применения формулы (9). А именно, при фиксированном значении x можно рассматривать произведение $F(x, y) f(h)$ как некоторую функцию $h(y)$ и считать, что

$$R(\omega, x\cdot\omega)(h) = I(x, \omega)(f).$$

Тогда из равенства (9) следует:

$$\int_{\Omega} I(x,\omega)(f) d\omega = 2\pi \int_G \frac{F(x,y) f(y)}{|y-x|} dy. \tag{10}$$

Применяя к равенству (10) оператор Лапласа, получим:

$$\Delta_x \int_{\Omega} I(x,\omega)(f) d\omega =$$

$$= 2\pi \Delta_x \int_G \frac{F(x,x) f(y)}{|y-x|} dy + 2\pi \Delta_x \int_G \frac{(F(x,y) - F(x,x)) f(y)}{|y-x|} dy. \tag{11}$$

Для преобразования первого слагаемого в правой части равенства (11) выделим интеграл, в котором дифференцируется только знаменатель $|y-x|^{-1}$ и, используя для него последнее равенство в соотношениях (5), получим представление:

$$2\pi \Delta_x \int_G \frac{F(x,x) f(y)}{|y-x|} dy = -8\pi^2 F(x,x) f(x) + \Phi_1(x).$$

Здесь функция $\Phi_1(x)$ является линейной комбинацией интегралов по переменной y от функций вида

$$\beta(x,y)\,f(y)\,|y-x|^{-\alpha},\ \ \alpha=1,\ 2,\ \ \beta(x,y)\in C^0\left(\mathrm{E}^3\times\mathrm{E}^3\right),$$

т. е. интегралов типа потенциала со слабой особенностью.

Из общих свойств таких интегралов следует непрерывность и ограниченность $\Phi_1(x)$. Легко видеть, что, благодаря неравенству

$$\left|F(x,u)-F(x,v)\right|\le \mathrm{const}\,|u-v|,\ \ x,\ u,\ v\in\mathrm{E}^3,$$

и второе слагаемое в правой части равенства (11), обозначаемое через $\Phi_2(x)$, тоже представляет собой комбинацию интегралов типа потенциала со слабой особенностью и также является непрерывной ограниченной функцией.

Итогом приведенных рассуждений является следующая формула:

$$\Delta_x\int_\Omega I(x,\omega)(f)\,d\omega=-8\pi^2F(x,x)\,f(x)+\Phi(x), \qquad (12)$$

где $\Phi(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$.

Равенство (12) служит основой для построения алгоритма решения поставленной задачи, который состоит в выполнении следующих действий.

Шаг 1. Интегрирование известной функции $I(x,\omega)$ по $\omega\in\Omega$.

Шаг 2. Применение оператора Лапласа Δ_x к полученному выражению.

Шаг 3. Анализ функции $\Delta_x\int_\Omega I(x,\omega)(f)\,d\omega$ и указание точек ее разрыва, которые совпадают с точками разрыва функции $f(x)$.

Комментарий к представленному алгоритму. Левая часть равенства (12) известна из постановки задачи, а правая имеет разрывы первого рода только в контактных точках $z\in\partial G_0$ при условии, что $F(x,x)\neq0$, $x\in\mathrm{E}^3$, $[f(z)]_{j,l}\neq0$, которое мы считаем выполненным. Таким образом находится множество всех контактных точек в ∂G_0 и, в силу его плотности в ∂G_0, определяется и все это множество.

Заметим, что для случая $F(x,y)=1$, $f(y)\in C^1(\mathrm{E}^3)$ формула (12) совпадает с известной формулой обращения классического преобразования Радона [3]. Поэтому полученный нами результат можно считать развитием указанного результата. Сравнивая полученный нами алгоритм с другими, отметим, что во всех известных нам формулах обращения преобразования Радона подынтегральные функции предполагаются гладкими для возможности их дифференцирования. Если попытаться применить подобные алгоритмы к разрывным функциям, подразумевая, например, дифференцирование в обобщенном смысле, то в результате появятся новые слагаемые типа δ-функции, которые сделают дальнейший анализ проблемы неопределенно трудным.

Конкретный пример иллюстративного характера

Рассмотрим случай, когда рассматриваемый объект – это шар единичного радиуса (1,0) с центром в начале координат, содержащий неоднородность, а именно – шар радиуса 0,5 также с центром в начале координат. Таким образом,

$$G=\{x\in\mathrm{E}^3:|x|<1\},\ \ G=\overline{G_1}\cup G_2,$$

$$G_1=\{x\in\mathrm{E}^3:|x|<0{,}5\},\ \ G_2=\{x\in\mathrm{E}^3:0{,}5<|x|<1\}.$$

Для упрощения будем предполагать, что $F(x,y)=1$, а функция f кусочно-постоянная:

$$f(x)=\begin{cases}f_1, & |x|<0{,}5,\\ f_2, & 0{,}5<|x|<1.\end{cases}$$

Видно, что выполнены все требования этой задачи, включая условие обобщенной выпуклости для поверхности разрывов.

Тогда интеграл по плоскости, т. е. $I(x,\omega)$, принимает следующий вид:

$$\int\limits_{(y-x,\omega)=0} f(y)d_y\sigma = \begin{cases} \pi f_1(0,25-(\omega\cdot x)^2)+0,75\pi f_2, \ |\omega\cdot x|<0,5, \\ \pi f_2(1-(\omega\cdot x)^2), \ 0,5<|\omega\cdot x|<1. \end{cases}$$

Далее проинтегрируем его по единичной сфере. Для этого перейдем к сферической системе координат и разобьем интегрирование на две части, в одной из которых плоскости пересекают области G_1 и G_2, а во второй – только множество G_2. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} I(x,\omega)d\omega = \begin{cases} 4\pi^2(0,25f_1+0,75f_2-\dfrac{f_1|x|^2}{3}), \ |x|<0,5, \\ 4\pi^2\left(f_2-\dfrac{f_2|x|^2}{3}+\dfrac{2(f_1-f_2)}{3|x|}\right), \ 0,5<|x|<1. \end{cases}$$

Вычислим лапласиан от этого интеграла:

$$\Delta_x\int\limits_{\Omega} I(x,\omega)d\omega = \begin{cases} -8\pi^2 f_1, \ |x|<0,5, \\ -8\pi^2 f_2, \ 0,5<|x|<1. \end{cases} \quad (13)$$

Видно, что последнее выражение представляет собой разрывную функцию, если $f_1 \neq f_2$, а искомая поверхность – это сфера радиусом 0,5 с центром в начале координат.

Полученный ответ соответствует выводам общей теории, что косвенно подтверждает правильность наших рассуждений.

Заключение

Проведенное исследование имеет теоретический характер, представляя собой принципиальную возможность нахождения неизвестной границы, что может быть полезным инструментом в теории зондирования сред физическими сигналами. Предполагается, что дальнейшие вопросы, связанные с численной реализацией алгоритма, будут рассмотрены авторами позже. При этом, если ориентироваться на возможные приложения, важно использовать как можно более слабые ограничения. Исходя из этого, мы допустили случай разрывной подынтегральной функции в обобщенном преобразовании Радона и ее зависимость от многих переменных. К сожалению, мы пока вынуждены ограничить наши утверждения условием обобщенной выпуклости для поверхностей разрывов. Возможным развитием полученных результатов будет дальнейшее ослабление ограничений и повышение эффективности разрабатываемого алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хелгасон С.** Преобразование Радона. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.
2. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 832 с.
3. **Йон Ф.** Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 160 с.
4. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
5. **Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.** Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2010. 912 с.
6. **Коганов А. В.** Задача интегральной геометрии с мероиндукцией // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 1. С. 31–37.
7. **Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V.** Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // Eurasian Soil Science. 2021. Vol. 54. No. 9. Pp. 1400–1409.
8. **Ляхов Л. Н., Лапшина М. Г., Рощупкин С. А.** Теорема о носителе для K_γ-преобразования Радона – Киприянова // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». 28 января – 2 февраля 2019 г. Ч. 2.

Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 171. С. 118–124.
9. **Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Ажгалиев Ш. У., Таугынбаева Г. Е.** Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази-Монте-Карло // Известия вузов. Математика. 2020. № 3. С. 98–104.
10. **Баев А. В.** Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 550–560.
11. **Симонов Е. Н., Прохоров А. В., Акинцева А. В.** Математическое моделирование реконструкции объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии с применением голографических методов // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 3. С. 102–114.
12. **Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.** Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields // Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D. E. (Eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2020. Vol. 11974. Pp. 97–111.
13. **Светов И. Е.** Метод приближенного обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в R^3 // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1073–1087.
14. **Polyakova A. P.** Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18. No. 2. Pp. 1572–1595.
15. **Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.** Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. Vol. 1. No. 4. Pp. 259–281.
16. **Вайнберг Э. И., Казак И. А., Файнгойз М. Л.** Рентгеновская вычислительная томография по методу обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием // Дефектоскопия. 1985. № 2. С. 31–39.
17. **Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Светов И. Е.** Определение разрывов функции, заданной в области с рефракцией, по ее экспоненциальному лучевому преобразованию // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21. № 4. С. 51–74.

REFERENCES

1. **Helgason S.,** The Radon transform, 2nd edition, (Progress in mathematics. Vol. 5), Springer Science, Cambridge, USA, 1927.
2. **Courant R.,** Partial differential equations, Interscience, France, 1962.
3. **John F.,** Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Springer, New York, 1981.
4. **Gelfand I. M., Grayev M. I., Vilenkin N. Ya.,** Integral geometry and representation theory (Generalized Functions, Vol. 5), Translated by Saletan E. J., Elsevier Inc. All, 1966.
5. **Lavrent'ev M. M., Savel'ev L. Ya.,** Operator theory and ill-posed problems: Posed problems (Inverse and ill-posed problems), Brill Academic Publishers, Leyden, Netherlands, 2006.
6. **Koganov A. V.,** The task of integral geometry with measure induction, Computer Research and Modeling. 3 (1) (2011) 31–37 (in Russian).
7. **Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., et al.,** Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods, Eurasian Soil Sci. 54 (9) (2021) 1400–1409.
8. **Lyakhov L. N., Lapshina M. G., Roshchupkin S. A.,** Support theorem for the Radon – Kipriyanov K_γ - transform, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 171 (2019) 118–124 (in Russian).
9. **Temirgaliyev N., Abikenova Sh. K., Azhgaliyev Sh. U., Taugynbayeva G. E.,** The Radon transform in the scheme C(N)D-inverstigations and the quasi-Monte Carlo theory, Russian Math. (Iz. VUZ). 64 (3) (2020) 87–92.
10. **Bayev A. V.,** Radon transform for solving an inverse scattering problem in a planar layered acoustic medium, Comput. Math. Math. Phys. 58 (4) (2018) 537–547.
11. **Simonov E. N., Prokhorov A. V., Akintseva A. V.,** Mathematical modelling of reconstruction of volumetric images in X-ray computed tomography using holographic methods, Vestnik YuUrGU. Ser.

Mat. Model. Progr. 12 (3) (2019) 102–114 (in Russian).
12. **Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.,** Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields, In book: Numerical computations: Theory and algorithms, Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D. E. (Eds.); Lecture Notes in Computer Science. 11974 (2020) 97–111.
13. **Svetov I. E.,** The method of approximate inverse for the Radon transform operator acting on vector and symmetric 2-tensor fields in R3, Siberian Electronic Mathematical Reports. 17 (2020) 1073–1087 (in Russian).
14. **Polyakova A. P.,** Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields, Siberian Electronic Mathematical Reports. 18 (2) (2021) 1572–1595.
15. **Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.,** Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography, J. Inv. Ill-Posed Probl. 1 (4) (1993) 259–281.
16. **Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L.,** X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features, Soviet J. Nondest. Test. 21 (2) (1985) 106–113.
17. **Derevtsov E. Y., Maltseva S. V., Svetov I. E.,** Determination of discontinuities of a function in a domain with refraction from its attenuated ray transform, J. Appl. Ind. Math. 12 (4) (2018) 619–641.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич – *доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией условно-корректных задач Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.*
630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
anik@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0003-4056-0988

БАЛАКИНА Екатерина Юрьевна – *кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.*
630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
balakina@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0002-5696-4525

КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.*
630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
dsk@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0003-1200-4116

THE AUTHORS

ANIKONOV Dmitry S.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russia
anik@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0003-4056-0988

BALAKINA Ekaterina Yu.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russia
balakina@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0002-5696-4525

KONOVALOVA Dina S.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russia
dsk@math.nsc.ru
ORCID: 0000-0003-1200-4116

Статья поступила в редакцию 04.03.2022. Одобрена после рецензирования 16.03.2022. Принята 16.03.2022.
Received 04.03.2022. Approved after reviewing 16.03.2022. Accepted 16.03.2022.