

Научная статья

УДК 539.12:537.63:537.868

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15109>

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ МНОГОТОНАЛЬНОЙ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОЙ ВОЛНЫ И ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. Ф. Копытов¹, Д. И. Кудрявцев² ✉

¹ Московский государственный университет технологий и управления
имени К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), г. Москва, Россия;

² Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия

✉ dmitriy-kudryavtsev-2016@mail.ru

Аннотация. Представлено решение уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле циркулярно- и линейно-поляризованной многотональной амплитудно-модулированной волны, в присутствии постоянного однородного магнитного поля. Проанализировано движение заряженной частицы в этих полях и выражено в виде зависимостей ее средней кинетической энергии от интенсивности электромагнитных волн, глубины их модуляции, отношения частоты модуляции к несущей частоте, а также от напряженности постоянного магнитного поля. Решение уравнения движения заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны открывает возможности различных приложений, связанных, в частности, с современными разработками многочастотных лазеров и технологии лазерной модуляции. Предлагаемое исследование было проведено в связи с широким практическим применением высокотемпературной плазмы.

Ключевые слова: многотональная амплитудно-модулированная волна, заряженная частица, средняя кинетическая энергия, уравнение движения

Для цитирования: Копытов Г. Ф., Кудрявцев Д. И. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле многотональной амплитудно-модулированной волны и постоянном магнитном поле // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 1. С 98–112. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15109>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)



Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15109>

THE MOTION OF A CHARGED PARTICLE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF A MULTITONAL AMPLITUDE-MODULATED WAVE AND IN THE CONSTANT MAGNETIC FIELD

G. F. Kopytov¹, D. I. Kudryavtsev² ✉¹ Moscow State University of Technology and Management

(The First Cossack University), Moscow, Russia;

² Kuban State University, Krasnodar, Russia✉ dmitriy-kudryavtsev-2016@mail.ru

Abstract. This article presents the exact solution of the equation of motion for a charged particle in the electromagnetic field of circularly and linear polarized multitonal amplitude-modulated waves, as well in the presence of a constant uniform magnetic field. The motion of a charged particle in the both fields was analyzed and was expressed as dependences of its average kinetic energy on the electromagnetic waves' intensity, on their modulation percentage, on the modulation frequency-to carrier one ratio and on the constant magnetic field strength. The solution of the equation of the charged particle's motion in the electromagnetic field of the plane wave opens up opportunities for different applications related, in particular, to various developments of multifrequency lasers and laser modulation technology. This study was undertaken in connection with the wide practical use of high-temperature plasma.

Keywords: multitoned amplitude-modulated wave, charged particle, average kinetic energy, equation of motion

For citation: Kopytov G. F., Kudryavtsev D. I., The motion of a charged particle in the electromagnetic field of a multitonal amplitude-modulated wave and in the constant magnetic field, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 15 (1) (2022) 98–112. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15109>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В такой области знания, как ускорение заряженных частиц через взаимодействие с плазмой лазерных импульсов короткой продолжительности и высоких интенсивностей порядка 10^{22} Вт/см², проведены широкомасштабные исследования [1, 2]. Так, вопрос о динамике заряженной частицы в поле монохроматической волны был поставлен еще в первой половине прошлого века. Решение с квантовых позиций было предложено Д. М. Волковым [3], в классической же формулировке оно позднее было получено Я. И. Френкелем [4], а также (независимо от него) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [5]. Таким образом с течением времени задача претерпевала модификацию. Решение уравнения движения элементарной частицы в поле плоской монохроматической волны было получено в работе [6]. Более сложные частные случаи, когда лазер излучает электромагнитную волну, модулированную по частоте или амплитуде, были разобраны в дальнейших статьях [7 – 9]. Большой интерес представляет также влияние на подобные системы постоянного магнитного поля, заданного внешне. Наши работы [10 – 12] как раз посвящены этому вопросу.

Ценность указанных статей и настоящей определяется математической интерпретацией данного взаимодействия, описания управления кинетической энергией элементарной частицы с помощью параметров электромагнитного излучения. Частицы со сравнительно низкими энергетическими характеристиками используются в таких сферах, как получение изображения на экране электронного микроскопа, ликвидация злокачественных (раковых) клеток и бактерий, генерация рентгеновского излучения. Частицы же с высокими энергетическими характеристиками, превышающими уровень в 1 МэВ, представляют научный интерес для исследователей структуры микрообъектов (кластеры, атомные ядра), природы фундаментальных сил и других проблем. Именно этим и определяется практическая значимость данной области знания.

Необходимо обратить внимание на простой спектральный состав электромагнитной волны (ЭМ), предполагаемый в работах [8, 9, 12], где ее называют однотоновой амплитудно-модулированной электромагнитной волной.

Настоящая работа отличается от этих трудов тем, что в ней рассматривается случай, когда амплитудно-модулированная ЭМ обладает сложным спектральным составом, т. е. анализируется многотоновая амплитудно-модулированная ЭМ, которая чаще других встречается в прикладных задачах, что также подчеркивает практическую ценность предлагаемого исследования [13].

Цель настоящей работы – выявить влияние постоянного магнитного поля на динамику и энергетические характеристики заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле многотоновой амплитудно-модулированной волны.

Постановка задачи

Задача будет ставиться подобно тому, как это было сделано в статье [12], где учитывался мультитоновый характер ЭМ.

Амплитудная модуляция состоит в изменении во времени такого параметра ЭМ, как ее амплитуда. Предполагается, что амплитуда $\mathbf{b}$ электромагнитной волны изменяется по следующему гармоническому закону:

$$b(\xi) = b_{0\perp} \left(\sigma + \sum_{i=1}^I \delta_{AM} \cos \tilde{\Phi}_i \right), \quad (1)$$

где ξ – пространственно-временная переменная, $\xi = t - z/c$ (c – скорость света); $b_{0\perp} = \sqrt{b_{0x}^2 + b_{0y}^2}$; σ – параметр несущей частоты ЭМ; δ_{AM} – глубина амплитудной модуляции; i, I – номер монохроматической волны и их количество; Φ – полная фаза модулированной ЭМ, $\tilde{\Phi}_i = \omega_i \xi + i \zeta_0$ ($\omega_i, \text{с}^{-1}$, – частота модуляции, ζ_0 – начальная фаза амплитудно-модулированной ЭМ).

Величина δ_{AM} характеризует степень изменения амплитуды электромагнитной волны при условии отсутствия перемодуляции, $\delta_{AM} \in [0, 1]$.

При условии, что ось z направлена вдоль распространения волны, математическое представление составляющих волны можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x = H_y = b_{0x} \left(\sigma + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \delta_{AM} \cos \tilde{\Phi}_i \right) \cos \Phi, \\ E_y = -H_x = f b_{0y} \left(\sigma + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \delta_{AM} \cos \tilde{\Phi}_i \right) \sin \Phi, \\ E_z = H_z = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где b_{0x}, b_{0y} – полуоси эллипса поляризации волны, которые совпадают с осями x и y , причем $b_{0x} \geq b_{0y} \geq 0$; ω – частота несущей ЭМ волны; f – параметр поляризации, $f = \pm 1$; верхний знак соответствует величине E_y правой поляризации, нижний – левой.

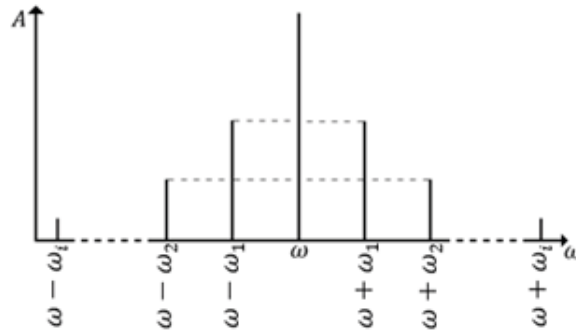


Рис. 1. Спектральная диаграмма многотональной амплитудно-модулированной электромагнитной волны:

A , ω — ее амплитуда и несущая частота, ω_i — частота модуляции

Теперь, в соответствии с формулой (2) и рис. 1, можно определить главное отличие многотональной АМ волны от однотоновой. Структура такой волны представляет собой суперпозицию $2I+1$ монохроматических волн, которая состоит из волн с несущей частотой ω и боковых частот $\omega - \omega_i$ и $\omega + \omega_i$, расположенных симметрично от нее. Амплитуды боковых частот равны и составляют $b_{0\perp} / 2$ от амплитуды несущей электромагнитной волны. При отсутствии перемодуляции ($\delta_{AM} \leq 1$), амплитуда колебаний изменяется в промежутке $b = b_{0\perp} (1 \pm \delta_{AM})$.

Импульс и координаты заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле многотональной АМ-волны и постоянном однородном магнитном поле

Для того чтобы найти два важнейших параметра заряженной частицы, необходимо решить уравнение движения частицы с массой m и зарядом q , которое имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_\Sigma] \right), \quad (3)$$

где $\mathbf{p}$ — импульс частицы, $\mathbf{v}$ — ее скорость; $\mathbf{E}$ — напряженность электрической компоненты ЭМ поля, $\mathbf{H}_\Sigma = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0$ ($\mathbf{H}$ — напряженность магнитной компоненты ЭМ поля, $\mathbf{H}_0$ — напряженность постоянного магнитного поля).

Решение уравнения (3) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{qb_{0x}}{\omega} \left(\sigma \sin \Phi + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i \sin \dot{\Phi}_i \right) + \frac{qH_0}{c} y + \chi_x, \\ p_y &= \mp \frac{qb_{0y}}{\omega} \left(\sigma \cos \Phi + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i \cos \dot{\Phi}_i \right) - \frac{qH_0}{c} x + \chi_y, \\ p_z &= \gamma g, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\dot{\Phi}_i = (1 + \alpha_i) \omega \xi + \Phi_0 + i\zeta_0$; Φ_0 — начальная фаза несущей волны; $\eta_i = \frac{\delta_{AM}}{2(1 + \alpha_i)}$; $\alpha_i = \omega / \omega_i$, χ_x , χ_y — константы интегрирования.

Обратим внимание на то, что в выражении для компоненты p_z была сделана замена, которая будет использоваться в дальнейших вычислениях.

Таким образом, величина g будет иметь следующий вид:

$$g = h - \frac{q^2 \sigma^2 (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{4\gamma^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \cos 2\Phi - \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q^2(b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{4\gamma^2\omega^2} \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{(\omega + \omega_i)^4}{[(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2]^2} \eta_i^2 \cos 2\dot{\Phi}_i + \\
 & + R \frac{q\omega_c\sigma}{2\gamma c(\omega^2 - \omega_c^2)} \left[(\omega + \omega_c)(b_{0x} \mp b_{0y}) \cos(\Phi + \Phi_c) - \right. \\
 & \quad \left. - (\omega - \omega_c)(b_{0x} \pm b_{0y}) \cos(\Phi + \Phi_c) \right] + \\
 & \quad + R \frac{q\omega_c}{2\gamma c\omega} \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \times \\
 & \quad \times \left\{ [(\omega + \omega_i) + \omega_c](b_{0x} \mp b_{0y}) \cos(\dot{\Phi}_i + \Phi_c) - \right. \\
 & \quad \left. - [(\omega + \omega_i) - \omega_c](b_{0x} \pm b_{0y}) \cos(\dot{\Phi}_i + \Phi_c) \right\} + \\
 & \quad + \frac{q^2\sigma}{2\gamma^2\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \times \\
 & \quad \times \left\{ \left[\omega(\omega + \omega_i) + \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 2b_{0x}b_{0y}\omega_c(2\omega + \omega_i) \right\} \cos(\Phi - \dot{\Phi}_i) - \\
 & \quad - \left[\omega(\omega + \omega_i) - \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 - b_{0y}^2) \cos(\Phi + \dot{\Phi}_i) \Bigg\rangle,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где h следует выражению

$$\begin{aligned}
 h = & \frac{1}{2} \left\langle \frac{m^2 c^2}{\gamma^2} - 1 + \frac{q^2 \sigma^2}{2\gamma^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_c^2)^2} \times \right. \\
 & \times \left[(\omega^2 + \omega_c^2)(b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 4b_{0x}b_{0y}\omega\omega_c \right] + \\
 & + \frac{q^2}{2\gamma^2\omega^2} \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{(\omega + \omega_i)^2}{[(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2]^2} \eta_i^2 \times \\
 & \times \left\{ \left[(\omega + \omega_i)^2 + \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 4b_{0x}b_{0y}(\omega + \omega_i)\omega_c \right\} + \frac{R^2\omega_c^2}{c^2} \Bigg\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

(ω_c – циклотронная частота, $\omega_c = qH_0 / \gamma$, $\gamma = mc(1 - v_{0z}/c) / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$, R – некоторая постоянная, определяемая начальными условиями).

Теперь, когда необходимые выражения для импульса частицы найдены, можно перейти к выводу выражений для ее координат.

С этой целью перейдем к дифференцированию по переменной ξ :

$$\dot{x} = \frac{qb_{0x}}{\gamma k} (\sigma \sin \Phi + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i \sin \dot{\Phi}_i) + \omega_c y + \frac{\omega}{\gamma k} \chi_x, \tag{7}$$

$$\dot{y} = \mp \frac{qb_{0y}}{\gamma k} (\sigma \cos \Phi + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i \cos \dot{\Phi}_i) - \omega_c x + \frac{\omega}{\gamma k} \chi_y, \tag{8}$$



где k – модуль волнового вектора, $k = \omega/c$.

Определим константы интегрирования χ_x, χ_y следующими выражениями:

$$\chi_x = -\frac{qb_{0x}}{\omega}(\sigma \sin \Phi_0 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i \sin \dot{\Phi}_{0i}) - \frac{cH_0}{\gamma} y_0 + \frac{mv_{0x}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad (9)$$

$$\chi_y = \pm \frac{qb_{0y}}{\omega}(\sigma \cos \Phi_0 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i \cos \dot{\Phi}_{0i}) + \frac{cH_0}{\gamma} x_0 + \frac{mv_{0y}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Используя формулы (5), (7), (8), получим выражения для координат x, y, z :

$$x = R \cos \Phi_c - \frac{q}{\gamma k} \frac{b_{0x} \omega \mp b_{0y} \omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} \sigma \cos \Phi - \frac{q}{\gamma k} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{b_{0x}(\omega + \omega_i) \mp b_{0y} \omega_c}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \cos \dot{\Phi}_i + \frac{\omega}{\omega_c \gamma k} \chi_y + x_0, \quad (11)$$

$$y = R \sin \Phi_c + \frac{q}{\gamma k} \frac{b_{0x} \omega_c \mp b_{0y} \omega}{\omega^2 - \omega_c^2} \sigma \sin \Phi + \frac{q}{\gamma k} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{b_{0x} \omega_c \mp b_{0y}(\omega + \omega_i)}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \sin \dot{\Phi}_i - \frac{\omega}{\omega_c \gamma k} \chi_x + y_0, \quad (12)$$

$$z = z_0 + ch(\xi - \xi_0) - \frac{q^2 \sigma^2 (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{8\gamma^2 k (\omega^2 - \omega_c^2)} \sin 2\Phi - \frac{q^2 c (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{8\gamma^2 \omega^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{[(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2]^2} \eta_i^2 \sin 2\dot{\Phi}_i + + R \frac{q \sigma \omega_c}{2\gamma (\omega^2 - \omega_c^2)} \left[(b_{0x} \mp b_{0y}) \sin(\Phi + \Phi_c) - (b_{0x} \mp b_{0y}) \sin(\Phi - \Phi_c) \right] + + R \frac{q \omega_c}{2\gamma \omega^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i^2 \times \times \left[(b_{0x} \mp b_{0y}) \sin(\dot{\Phi}_i + \Phi_c) - (b_{0x} \pm b_{0y}) \sin(\dot{\Phi}_i - \Phi_c) \right] + + \frac{q^2 \sigma_c}{2\gamma^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \times \times \left\langle \left[\omega(\omega + \omega_i) + \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 2b_{0x} b_{0y} \omega_c (2\omega + \omega_i) \right\rangle \sin(\Phi - \dot{\Phi}_i) - - \left\{ \left[\omega(\omega + \omega_i) - \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 - b_{0y}^2) / (2 + \omega_i / \omega) \right\} \sin(\Phi + \dot{\Phi}_i) \Big\rangle, \quad (13)$$

где выражение для z_0 , которое зависит от начальных условий, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 z_0 = & \frac{q^2 \sigma^2 (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{8\gamma^2 k (\omega^2 - \omega_c^2)} \sin 2\Phi_0 + \frac{q^2 c (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)}{8\gamma^2 \omega^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{[(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2]^2} \eta_i^2 \sin 2\dot{\Phi}_{0i} - \\
 & - R \frac{q \sigma \omega_c}{2\gamma (\omega^2 - \omega_c^2)} \left[(b_{0x} \mp b_{0y}) \sin (\Phi_0 + \Phi_{0c}) - (b_{0x} \pm b_{0y}) \sin (\Phi_0 - \Phi_{0c}) \right] - \\
 & - R \frac{q \omega_c}{2\gamma \omega^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i^2 \times \\
 & \times \left[(b_{0x} \mp b_{0y}) \sin (\dot{\Phi}_{0i} + \Phi_{0c}) - (b_{0x} \pm b_{0y}) \sin (\dot{\Phi}_{0i} - \Phi_{0c}) \right] - \\
 & - \frac{q^2 \sigma_c}{2\gamma^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{\omega + \omega_i}{(\omega + \omega_i)^2 - \omega_c^2} \eta_i \times \\
 & \times \left\langle \left[\omega (\omega + \omega_i) + \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 2b_{0x} b_{0y} \omega_c (2\omega + \omega_i) \right\rangle \sin (\Phi_0 - \dot{\Phi}_{0i}) + \\
 & + \left\langle \left[\omega (\omega + \omega_i) - \omega_c^2 \right] (b_{0x}^2 - b_{0y}^2) / (2 + \omega_i / \omega) \right\rangle \sin (\Phi + \dot{\Phi}_i) \Bigg\rangle.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Энергетические характеристики заряженной частицы в электромагнитном поле многотональной АМ-волны и постоянном однородном магнитном поле

Получив выражения для импульса и координат движущейся в поле частицы, приступим к вычислению энергетических характеристик элементарной частицы в поле многотональной АМ-волны и постоянном магнитном поле; при этом необходимо произвести усреднение по начальной фазе, как это было проделано в работе [7]. Соответствующие математические выкладки даются ниже:

$$\begin{aligned}
 \Psi = mc^2 \Bigg\langle h + \frac{1}{32(1+h)} \frac{q^4}{\gamma^4 \omega^4} (b_{0x}^2 - b_{0y}^2) \left\{ \frac{1}{(1-\eta^2)^2} \sigma^4 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^4}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^4 \right\} + \\
 + \frac{q^2 \sigma^2}{4(1+h) \gamma^2 \omega^2 (1-\eta^2)^2} \frac{R^2 \omega_c^2}{c^2} \left[(1+\eta)^2 (b_{0x} \mp b_{0y})^2 + (1-\eta)^2 (b_{0x} \pm b_{0y})^2 \right] + \\
 + \frac{q^2 \sigma^2}{4(1+h) \gamma^2 \omega^2} \frac{R^2 \omega_c^2}{c^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \times \\
 \times \left\{ \left[(1+\alpha_i) + \eta \right]^2 (b_{0x} \mp b_{0y})^2 + \left[(1+\alpha_i) - \eta \right]^2 (b_{0x} \pm b_{0y})^2 \right\} + \\
 + \frac{q^4 \sigma^2}{8(1+h) \gamma^4 \omega^4 (1-\eta^2)^2} \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \times \\
 \times \left\{ \left[(1+\alpha_i + \eta^2) (b_{0x}^2 + b_{0y}^2) \mp 2b_{0x} b_{0y} \eta (2 + \alpha_i) \right]^2 + (1+\alpha_i - \eta^2)^2 (b_{0x}^2 - b_{0y}^2)^2 \right\} \Bigg\rangle,
 \end{aligned} \tag{15}$$



где $\Psi = \bar{\epsilon} - mc^2$ – энергия частицы без учета ее энергии покоя; $\eta = \omega_c / \omega$ – отношение циклотронной частоты к частоте несущей волны.

Полученное таким образом выражение демонстрирует кинетическую энергию частицы в поле многотональной АМ-волны и постоянном магнитном поле.

Влияние постоянного магнитного поля на энергетические характеристики частицы, движущейся в электромагнитном поле многотональной АМ-волны круговой и линейной поляризации, при отсутствии у нее начальной скорости

После вывода выражения для средней кинетической энергии частицы следует оценить влияние постоянного магнитного поля на энергетические характеристики частицы, движущейся в поле многотональной АМ-волны и не имеющей при этом начальной скорости. Рассмотрим два частных случая поляризации волны: круговой и линейной. Итак, имеем:

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 = -\frac{\omega}{c} z_0, \quad \dot{\Phi}_i(0) = \dot{\Phi}_{0i} = -\frac{\omega}{c} (1 + \alpha_i) z_0.$$

Если подставить выражения (9) – (10) в формулу (5), то получим:

$$h = \frac{R^2 \omega_c^2}{c^2} + \frac{\mu}{4} \left\{ \left(\frac{1 \mp \eta}{1 - \eta^2} \right)^2 \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1 + \alpha_i)^2 [(1 + \alpha_i) \mp \eta]^2}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\}, \quad (16)$$

где $\mu = \frac{q^2 b^2}{\gamma^2 \omega^2} = \frac{2q^2}{\pi m^2 c^5} I \lambda^2$;

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \omega_c^2}{c^2} = \frac{\mu}{4} & \left\langle \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i^2 \right) + \eta^2 \left\{ \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1 + \alpha_i)^2 + \eta^2}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm 4\eta^3 \frac{b_{0y} b_{0y}}{b_{0x}^2 + b_{0y}^2} \left\{ \frac{1}{(1 - \eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{1 + \alpha_i}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее предположим, что многотональная АМ-волна обладает круговой поляризацией; тогда сформулируем следующие условия:

для круговой поляризации $b_{0x} = b_{0y} = b/\sqrt{2}$;

для правой поляризации –

$$\begin{aligned} \Psi = mc^2 \frac{\mu}{2} & \left\langle \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \eta_i^2 \right) + \frac{\eta^2}{2} \left\{ \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1 + \alpha_i)^2 + \eta^2}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} - \right. \\ & - \eta^3 \left\{ \frac{1}{(1 - \eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{1 + \alpha_i}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1 - \eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-I \\ i \neq 0}}^I \frac{(1 + \alpha_i)^2}{[(1 + \alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} + \right. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu}{4(1+h)} \left\langle \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \eta_i^2 \right) + \eta^2 \left\{ \frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2 + \eta^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} - \right. \\
 & - 2\eta^3 \left\{ \frac{\sigma^2}{(1-\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{1+\alpha_i}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \left. \right\rangle \left\{ \frac{\sigma^2}{(1-\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i) - \eta]^2} \eta_i^2 \right\} + \quad (18) \\
 & + \frac{\mu}{4(1+h)} \left(\frac{\sigma}{1-\eta} \right)^2 \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 [(1+\alpha_i) + \eta]^2 \left. \right\rangle;
 \end{aligned}$$

для левой поляризации –

$$\begin{aligned}
 \Psi = mc^2 \frac{\mu}{2} & \left\langle \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \eta_i^2 \right) + \frac{\eta^2}{2} \left\{ \frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2 + \eta^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} - \right. \\
 & - \eta^3 \left\{ \frac{\sigma^2}{(1-\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{1+\alpha_i}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^2}{(1+\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i)^2 + \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} + \quad (19) \\
 & + \frac{\mu}{4(1+h)} \left\langle \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \eta_i^2 \right) + \eta^2 \left\{ \frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2 + \eta^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} + \right. \\
 & + 2\eta^3 \left\{ \frac{\sigma^2}{(1-\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{1+\alpha_i}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \left. \right\rangle \left\{ \frac{\sigma^2}{(1+\eta)^2} + \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i) + \eta]^2} \eta_i^2 \right\} + \\
 & + \frac{\mu}{4(1+h)} \left(\frac{\sigma}{1+\eta} \right)^2 \sum_{\substack{i=-i \\ i \neq 0}}^I \frac{(1+\alpha_i)^2}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 [(1+\alpha_i) - \eta]^2 \left. \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Анализ полученных выражений позволяет заключить, что имеется существенная разница между величинами кинетической энергии частицы, движущейся в электромагнитном поле многотональной АМ-волны правой круговой поляризации и соответствующей энергии для волны левой поляризации. Согласно результатам, представленным в работе [8], в отсутствие постоянного магнитного поля ($\eta = 0$) такой разницы не наблюдается.

Теперь предположим, что частица движется в электромагнитном поле многотональной АМ-волны линейной поляризации при условии, что начальная скорость частицы



равна нулю. Тогда сформулируем следующие условия:
для линейной поляризации $b_{0x} = b$; $b_{0y} = 0$;

$$\Psi = mc^2 \frac{\mu}{4} \left\langle \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i^2 \right) + \theta + \frac{\mu}{2\sqrt{\theta\mu+4} \sqrt{\left[2 \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i^2 \right) + \theta \right] \mu + 4}} \left\{ \frac{\sigma^4}{(1-\eta^2)^2} + \right. \right. \\ + \left(\frac{2\sigma}{1-\eta^2} \right)^2 \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{(1+\alpha_i)^2 [(1+\alpha_i)^2 + \eta^4]}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{(1+\alpha_i)^4}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^4 \Bigg\} + \\ + \left. \left\{ \frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2} \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{(1+\alpha_i)^2 [(1+\alpha_i)^2 + \eta^2]}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \times \right. \quad (20) \\ \times \left\langle \frac{4\mu}{\sqrt{\theta\mu+4} \sqrt{\left[2 \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i^2 \right) + \theta \right] \mu + 4}} \left\{ \frac{\eta^2 (1+\eta^2) \sigma^2}{(1-\eta^2)^2} + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \frac{\eta^2 [(1+\alpha_i)^2 + \eta^2]}{[(1+\alpha_i)^2 - \eta^2]^2} \eta_i^2 \right\} \right\rangle + 4 - \\ - \frac{4\theta\mu+16}{\sqrt{\theta\mu+4} \sqrt{\left[2 \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \eta_i^2 \right) + \theta \right] \mu + 4}} \Bigg\rangle,$$

$$\text{где } \theta = \left(\frac{1+\eta^2}{1-\eta^2} \right)^2 \sigma^2 + \sum_{\substack{i=-l \\ i \neq 0}}^l \left[\frac{(1+\alpha_i)^2 + \eta^2}{(1+\alpha_i)^2 - \eta^2} \right]^2 \eta_i^2.$$

Получив выражения (18) – (20), приступим к оценке влияния однородного постоянного магнитного поля на энергетические характеристики частицы. Построим график зависимости Ψ от η (рис. 2).

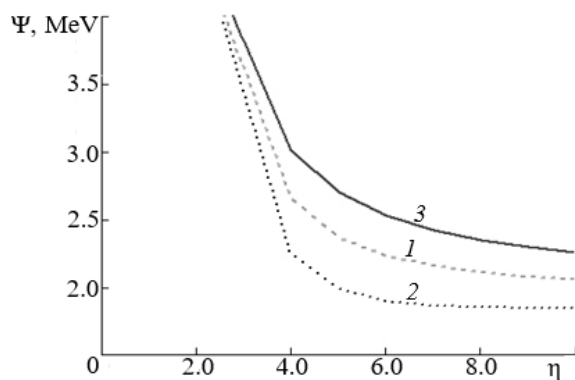


Рис. 2. Зависимости разности Ψ от величины магнитного поля многотональной АМ-электромагнитной волны линейной (1), а также правой (2) и левой (3) круговой поляризации;
 $I\lambda^2 = 10^{19} \text{ Вт} \cdot \text{мкм}^2/\text{см}^2$; $\alpha_i = 1$; $\delta_{\text{AM}} = 1$

Приведем также зависимости Ψ от величин α_i , $I\lambda^2 \delta_{\text{AM}}$ (рис. 3 – 5).

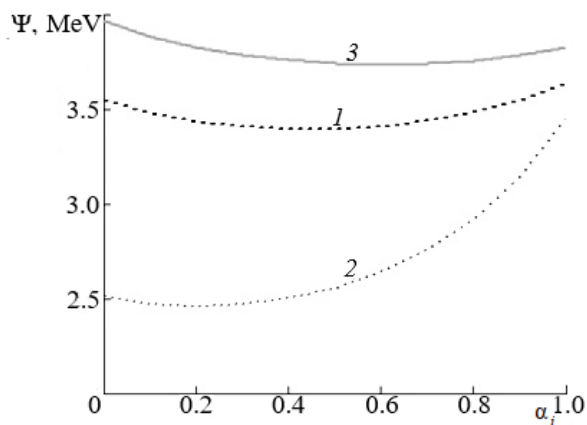


Рис. 3. Зависимости разности Ψ от отношения частоты несущей к частоте модуляции волны многотональной АМ-электромагнитной волны (нумерация кривых идентична приведенной на рис. 2);
 $I\lambda^2 = 10^{19} \text{ Вт} \cdot \text{мкм}^2/\text{см}^2$; $\alpha_i \gg 1$; $\delta_{\text{AM}} = 1$.

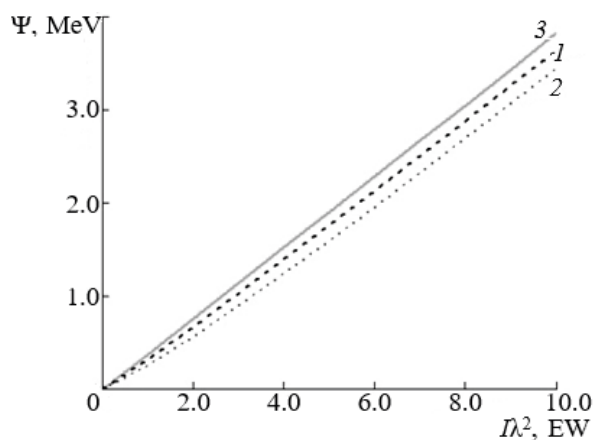


Рис. 4. Зависимости разности Ψ от интенсивности многотональной АМ-электромагнитной волны (нумерация кривых идентична приведенной на рис. 2 и 3);
 $\alpha_i = 1$; $\eta \gg 1$; $\delta_{\text{AM}} = 1$.

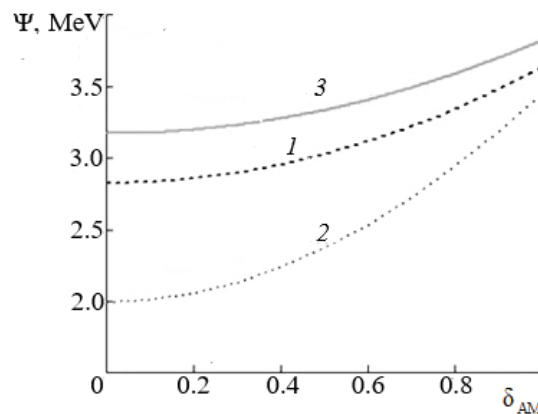


Рис. 5. Зависимости разности Ψ от глубины модуляции многотональной АМ-электромагнитной волны (нумерация кривых идентична приведенной на рис. 2 – 4);

$$I\lambda^2 = 10^{19} \text{ Вт} \cdot \text{мкм}^2/\text{см}^2; \alpha_i = 1; \eta \gg 1$$

Анализ всех этих зависимостей позволяет сделать вывод, что наибольшая энергия соответствует случаю движения частицы в поле волны с круговой правой поляризацией (Ψ_{right}), а наименьшая – с круговой левой поляризацией (Ψ_{left}). Энергия частицы, движущейся в поле волны с линейной поляризацией (Ψ_{lin}), расположена в следующем диапазоне:

$$\Psi_{left} < \Psi_{lin} < \Psi_{right}.$$

Заключение

В завершение настоящей работы необходимо отметить полученные результаты:

дана оценка влияния постоянного магнитного поля с помощью построения зависимости разностной энергии частицы (без учета ее энергии покоя) от величины магнитного поля;

получены графики зависимостей энергии Ψ от таких параметров, как α_i , $I\lambda^2$, δ_{AM} в присутствии магнитного поля ($\eta \gg 1$).

Заметим, что при условии, когда магнитное поле слабое или нулевое ($\eta \ll 1$, $\delta_{AM} = 0$), все формулы принимают вид выражений для плоских монохроматических электромагнитных волн, приведенный в статье [6]. А при приближении циклотронной частоты к несущей наблюдается явление циклотронного авторезонанса, которое впервые получили и описали А. А. Коломенский и А. Н. Лебедев в работе [14], а также (независимо от них) В. Я. Давыдовский в работе [15]. В настоящей статье авторезонанс выходит за рамки данного исследования, однако описание этого явления можно найти, например, в работах [16 – 18].

Таким образом, в настоящей работе, которая продолжает исследования, представленные в нашей статье [12], подробно проанализирована задача о влиянии постоянного магнитного поля на динамику и энергетические характеристики заряженной частицы во внешнем заданном поле многотональной амплитудно-моделированной электромагнитной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин А. Л., Галстян А. М., Коробкин В. В., Романовский М. Ю., Ширяев О. Б. Движение заряженной частицы в поле короткого лазерного импульса релятивистской интенсивности // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2007. № 3. С. 31–40.
2. Галкин А. Л., Калашников М. П., Трофимов В. А. Угловое распределение электронов в поле короткого лазерного импульса релятивистской интенсивности // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2012. № 8. С. 35–42.
3. Волков Д. М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точ-

ки зрения уравнения Дирака // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1937. Т. 7. № 11. С. 1286–1289.

4. Френкель Я. И. Собрание избранных трудов. В 3 тт. Т. 1. Электродинамика (Общая теория электричества). Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. 373 с.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 2012. 536 с.

6. Андреев С. Н., Макаров В. П., Рухадзе А. А. О движении заряженной частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. № 1. С. 68–72.

7. Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S. The motion of a charged particle in the field by a frequency-modulated electromagnetic wave // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2015. Vol. 6. No. 5. Pp. 661–671.

8. Копытов Г. Ф., Акопян Г. М., Глазков А. А., Фотиев Л. В. Исследование характеристик движения заряженной частицы в поле циркулярно-поляризационной амплитудно-модулированной электромагнитной волны // Современные проблемы физики, биофизики и инфокоммуникационных технологий: Коллективная монография. Краснодар: ЦНТИ, 2016. № 5. С. 95–104.

9. Копытов Г. Ф., Мартынов А. А., Акинцов Н. С. Движение заряженной частицы в поле циркулярно-поляризованной амплитудно-модулированной электромагнитной волны // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 2. С. 39–43.

10. Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S. The motion of a charged particle in the field of an electromagnetic wave and in the constant magnetic field // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2014. No. 4 (206). Pp. 55–63.

11. Акинцов Н. С., Исаев В. А., Копытов Г. Ф., Мартынов А. А. Движение заряженной частицы в поле частотно-модулированной электромагнитной волны и постоянном магнитном поле // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2015. № 4 (230). С. 164–174.

12. Копытов Г. Ф., Мартынов А. А., Акинцов Н. С. Движение заряженной частицы в поле циркулярно-поляризованной амплитудно-модулированной электромагнитной волны и постоянном магнитном поле // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58. № 4. С. 72–78.

13. Батура М. П., Кузнецов А. П., Курулёв А. П. Теория электрических цепей. Минск: Высшая школа, 2015. 606 с.

14. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Авторезонансное движение частицы в плоской электромагнитной волне // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1259–1261.

15. Давыдовский В. Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1962. Т. 43. № 3. С. 886–888.

16. Милантьев В. П. Явление циклотронного авторезонанса и его применения // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. № 1. С. 3–16.

17. Милантьев В. П., Степина С. П. Ускорение электронов в режиме циклотронного авторезонанса // Динамика сложных систем – XXI век. 2009. № 4. С. 39–51.

18. Абдулов Н. А., Милантьев В. П. Особенности ускорения ультрарелятивистских электронов мощным лазерным излучением в режиме циклотронного авторезонанса // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2016. № 3. С. 66–78.

REFERENCES

1. Galkin A. L., Galstyan A. M., Korobkin V. V., et al., Charged particle motion in the field of a short laser pulse of relativistic intensity, Bull. Lebedev Phys. Inst. 34 (3) (2007) 84–89.

2. Galkin A. L., Kalashnikov M. P., Trofimov V. A., Angular distribution of electrons in the field of a short laser pulse of relativistic intensity, Bull. Lebedev Phys. Inst. 39 (8) (2012) 84–89.

3. Wolkow D. M., Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung, Z. Phys. 94 (3–4) (1935) 250–260.

4. Frenkel Ya. I., Sbraniye izbrannykh trudov v 3 tt., T. 1. Elektrodinamika (Obshchaya teoriya

elektrichestva) [Collection of selected works in 3 Vols., Vol. 1. Electrodynamics (General theory of electricity), Acad. Nauk SSSR Publishing, Moscow-Leningrad, 1956 (in Russian).

5. **Landau L. D., Lifshitz E. M.**, The classical theory of fields, Course of theoretical physics, Vol. 2, 4-th ed., Elsevier, USA, 1980.

6. **Andreyev S. N., Makarov V. P., Rukhadze A. A.**, On the motion of a charged particle in a plane monochromatic electromagnetic wave, Quantum Electronics. 39 (1) (2009) 68–72.

7. **Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S.**, The motion of a charged particle in the field by a frequency-modulated electromagnetic wave, Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 6 (5) (2015) 661–671.

8. **Kopytov G. F., Akopyan G. M., Glazkov A. A., Fotiev L. B.**, Investigation of the motion characteristics of a charged particle in the field of a circularly polarized amplitude-modulated electromagnetic wave, In: “Modern Problems of Physics, Biophysics and Infocommunication Technologies” (Multi-author book), CSTP, Krasnodar (5) (2016) 95–104 (in Russian).

9. **Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S.**, A charged particle moves in the field by a circularly amplitude-modulated electromagnetic wave, Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation. (2) (2014) 39–43 (in Russian).

10. **Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S.**, The motion of a charged particle in the field of an electromagnetic wave and in the constant magnetic field, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (4 (206)) (2014) 55–63.

11. **Akintsov N. S., Isaev V. A., Kopytov G. F., Martynov A. A.**, The motion of a charged particle in the field by a frequency-modulated electromagnetic wave and in the constant magnetic field, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (4 (230)) (2015) 164–174 (in Russian).

12. **Kopytov G. F., Martynov A. A., Akintsov N. S.**, Motion of a charged particle in the field of a circularly polarized amplitude-modulated electromagnetic wave in the presence of a constant magnetic field, Russian Physics Journal. 58 (4) (2015) 508–516.

13. **Batura M. P., Kuznetsov A. P., Kurulev A. P.**, Teoriya elektricheskikh tsepey [Theory of electrical circuits], Vysheyshaya Shkola Publishing, Minsk, 2015 (in Russian).

14. **Kolomenskii A. A., Lebedev A. N.**, Self-resonant particle motion in a plane electromagnetic wave, Dokl. Acad. Nauk SSSR. 145 (6) (1962) 1259–1261 (in Russian).

15. **Davydovskii V. Ya.**, Possibility of resonance acceleration of charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field, Sov. Phys. JETP. 16 (1) (1963) 629–630.

16. **Milant'ev V. P.**, Cyclotron autoresonance and its applications, Phys. Usp. 40 (1) (1997) 1–14.

17. **Milant'ev V. P., Stepina S. P.**, Electron acceleration in the cyclotron autoresonance mode, Journal Dynamics of Complex Systems – XXI century. (4) (2009) 39–51 (in Russian).

18. **Abdulov N. A., Milant'ev V. P.**, The peculiarities of acceleration of ultra-relativistic electrons by the powerful laser radiation at the regime of cyclotron autoresonance, Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. (3) (2016) 66–78.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОПЫТОВ Геннадий Филиппович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики Московского государственного университета технологий и управления имени К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), Москва, Россия.

109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной вал, 73.

rektorat@mgut.ru

ORCID: 0000-0003-1378-576X

КУДРЯВЦЕВ Дмитрий Игоревич — магистрант физико-технического факультета Кубанского государственного университета, г. Краснодар, Россия.

350040, Россия, г. Краснодар, Ставропольская ул., 149.

dmitriy-kudryavtsev-2016@mail.ru

ORCID: 0000-0003-3975-9025

THE AUTHORS

KOPYTOV Gennadiy F.

Moscow State University of Technology and Management

(The First Cossack University)

73, Zemlyanoy Val St., Moscow, 109004, Russia

rektorat@mgutm.ru

ORCID: 0000-0003-1378-576X

KUDRYAVTSEV Dmitriy I.

Kuban State University

149 Stavropolskaya St., Krasnodar, 350040, Russia.

dmitriy-kudryavtsev-2016@mail.ru

ORCID: 0000-0003-3975-9025

*Статья поступила в редакцию 30.08.2021. Одобрена после рецензирования 28.01.2022.
Принята 28.01.2022.*

Received 30.08.2021. Approved after reviewing 28.01.2022. Accepted 28.01.2022.