Математика

Научная статья
УДК 512
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15209

О КЛАССАХ СОПРЯЖЕННОСТИ В ГРУППЕ F_4 НАД РОЛЕМ q С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ 2

Н. В. Юрова ✉

Нижегородский государственный технический университет
им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Россия

✉ yurova1980@yandex.ru

Аннотация. Данная статья продолжает цикл работ, посвященных решению проблемы, согласно которой неединичный класс сопряженности в конечной простой неабелевой группе содержит коммутирующие элементы. Ранее это утверждение было проверено для спорадических, проективных, знакопеременных групп и ряда исключительных групп. В этой работе проверяется справедливость вышеупомянутого утверждения для серии исключительных конечных простых групп ${}^2F_4(q)$. После основных определений доказываются две теоремы: о содержании в группе коммутирующих элементов и о наличии сопряжения полупростого элемента со своим обратным. Затем рассмотрены классы унипотентных и смешанных элементов. Использованные в статье методы исследования рекомендовано применять для проверки общей гипотезы при рассмотрении других групп.

Ключевые слова: группа Шевалле, классы сопряженности, конечная простая группа, коммутирующий элемент

Для цитирования: Юрова Н. В. О классах сопряженности в группе F_4 над ролем q с характеристикой 2 // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 2. С. 93–101. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.15209

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15209

ON CONJUGACY CLASSES OF THE F_4 GROUP OVER A FIELD q WITH CHARACTERISTIC 2

N. V. Yurova ✉

Nizhni Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev,

Nizhni Novgorod, Russia

✉ yurova1980@yandex.ru

Abstract. This article continues a series of papers devoted to solving the problem by which a non-identity conjugacy class in a finite simple non-Abelian group contains commuting elements. Previously, this statement was tested for sporadic, projective, alternating groups and some exceptional groups. In this article, the validity of the above-mentioned statement for the series exceptional groups ${}^2F_4(q)$ has been verified. After some basic definitions two theorems were proved. The former said about the content of commuting elements in the group, the latter did about the presence of conjugation of a semisimple element with its inverse. Then classes of unipotent and mixed elements were considered. The investigative techniques used were recommended for testing the general hypothesis when dealing with other groups.

Keywords: Chevalley group, conjugacy classes, finite simple group, commuting element

For citation: Yurova N. V., On conjugacy classes of the F_4 group over a field q with characteristic 2, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (2) (2022) 93–101. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.15209

Введение

Проблема, для решения которой необходимо провести вычисления в теории конечных групп, возникла при изучении леводистрибутивных квазигрупп, т. е. при исследовании бинарных систем $G(\circ)$ с тождеством левой дистрибутивности

$$x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ(x\circ z) \text{ для } x, y, z \in G(\circ).$$

Привлекательность тождества левой дистрибутивности состоит в том, что в бинарной системе $G(\circ)$ с ним отображение

$$L_a = (x \to a\circ x)$$

есть, очевидно, эндоморфизм, а если $G(\circ)$ – квазигруппа, то даже и автоморфизм.

Данное направление основательно изучено в работе [1]. Исследование леводистрибутивных квазигрупп эквивалентно рассмотрению однородных пространств, т. е. множество смежных классов групп П по некоторой ее подгруппе T. Если перейти к группоидам, ослабляя аксиому правой делимости $x\circ a = a \Rightarrow x = a$, то, вообще говоря, представить группоид однородным пространством нельзя.

Леводистрибутивные группоиды в приложениях встречаются довольно часто, и обнаруживаются их глубокие связи с группами. Можно указать симметрические пространства в дифференциальной геометрии, характеристику узлов из топологии [2, 3]. Для конечных групп возможность их представления однородным пространством были высказаны Л. Н. Ерофеевой в ряде работ [4 – 6]. Это утверждение оказывается эквивалентным чисто теоретико-групповой гипотезе, согласно которой при объединении двух классов сопряженности конечных групп всегда найдутся коммутирующие элементы. В статье [7] высказано более сильное утверждение, согласно которому в неабелевой конечной группе неединичный класс должен содержать коммутирующие элементы.

Настоящая статья продолжает проверку гипотезы, высказанной в работе [7], согласно которой неединичный класс сопряженных элементов в конечной простой группе содержит коммутирующие элементы. В статьях [8 – 11] с моим соавторством были проверены некоторые исключительные группы лиевского типа и простые группы $SP_4(q)$. Эта работа посвящена проверке серии исключительных групп ${}^2F_4(q)$.

Основные определения

Общие сведения о группах Шевалле предполагаются известными. Они достаточно подробно представлены в монографии Р. Стейнберга [12]. Специфические результаты о строении групп $F_4(q)$ и ${}^2F_4(q)$ можно найти, в первую очередь, в статьях К. Шиноды [13, 14], а также в работе группы авторов [15].

В обозначениях будем в основном следовать таковым, принятым в статьях К. Шиноды [13, 14]. Отметим некоторые отличия. Основное поле в группе $F_4(q)$ – это поле из q-элементов, $q = 2^{2n+1}$; Шинода же в своей работе вместо q использует букву l, а $q = \sqrt{l}$. Далее, вместо $x_\alpha(t)$ для $\alpha = e_i \pm e_j$ он использует обозначение $x_{i\pm j}$, а для $\alpha = \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ использует запись $x_{1\pm 2\pm 3\pm 4}$.

Приведем основные определения о группах $F_4(q)$ и ${}^2F_4(q)$. Диаграмма Дынкина типа F_4 имеет вид, представленный на рис. 1. В ней вершины графа 1, 2, 3, 4 соответствуют корням

$$e_2 - e_3;\ \ e_3 - e_4;\ \ e_4;\ \ \frac{1}{2}\left(e_1 - e_2 - e_3 - e_4\right),$$

где $e_i\,(i = 1 - 4)$ – система ортогональных единичных векторов в R^4.

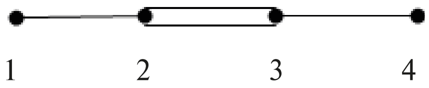


Рис.1. Диаграмма Дынкина:
вершины графа 1 – 4 соответствуют корням $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$, e_4, $(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)/2$

Полная система корней состоит из векторов

$$\pm e_i; \pm e_i \pm e_j\ (i \neq j)\ \text{ и }\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4).$$

Группа $F_4(q)$ строится на образующих $x_\alpha(t)$, где α – корень, $t \in F_q$ – конечное поле из q элементов с определенными соотношениями (см. [12, С. 32]), из которых отметим коммутаторную форму:

$$\left(x_\alpha(t), x_\beta(t)\right) = \prod x_{i\alpha + J\beta}\left(c_{ij}t^i u^j\right)\ (\alpha + \beta \neq 0),$$

где c_{ij} – некоторые константы из основного поля.

«Скрученная» группа ${}^2F_4(q)$ строится следующим образом. В диаграмме Дынкина (см. рис. 1) выделяется так называемый автоморфизм σ: $1\leftrightarrow 4$; $2\leftrightarrow 3$. Оказывается, его можно продолжить до некоторой перестановки всех корней, причем длинный переводится в короткий, и, наоборот, короткий в длинный. В поле F_{q^2} выделяется автоморфизм $\Theta: x \to x^{2^n}$, называемый полевым. Теперь автоморфизм σ на группе $F_4(q)$ действует на образующих $x_\alpha(t)$ – корневых подгруппах таким образом:

$$\sigma: x_\alpha(t) \to \begin{cases} x_{\sigma(\alpha)}(t^{\Theta}), \text{ если } \alpha - \text{длинный корень}, \\ x_{\sigma(\alpha)}(t^{2\Theta}), \text{ если } \alpha - \text{короткий корень}. \end{cases}$$

Подгруппа σ-неподвижных элементов в группе $F_4(q)$ и есть нужная группа ${}^2F_4(q)$. Последняя при $n \geq 1$ является простой. Несколько особняком стоит группа ${}^2F_4(2)$, для которой в случае $n = 0$ полевой автоморфизм Θ тождествен. Эта группа не есть простая, но простым является ее коммутант $({}^2F_4(2))'$ индекса 2 в ${}^2F_4(2)$.

Анализ особенностей группы ${}^2F_4(q)$

В последующем исследовании группы ${}^2F_4(q)$ существенную роль играют следующее утверждения.

Утверждение 1. *В простой конечной группе класс инволюций содержит коммутирующие элементы.*

В его доказательстве нет надобности; оно вытекает из теоретико-групповой теоремы Глаубермана, подробную информацию об этом можно найти в работе [7].

Утверждение 2. *Если число классов элементов данного порядка n с централизаторами одного и того же порядка меньше* φ(*n*), *то в классе найдутся коммутирующие элементы.*

Здесь $\varphi(n)$ – функция Эйлера.

Это утверждение можно считать элементарным, оно также доказывается в публикации [7].

Перейдем к исследованию соответствующей группы.

Теорема 1. В группе $^2F_4(q)$ неединичный класс сопряженности содержит коммутирующие элементы.

Доказательство. Обратимся к данным табл. 1, где приведены классы элементов и их централизаторы для группы $(^2F_4(2))'$ (таблица взята из атласа [16]). В данной таблице, например, имеется представитель класса сопряженности $8A$, $8B^{**}$; это означает, что имеется два класса $8A$ и $8B^{**}$ элементов 8-го порядка с централизаторами соответствующих элементов порядка 32. Наличие коммутирующих элементов в классе инволюций обеспечивается Утверждением 1, по которому этот факт верен для любой конечной простой группы. Для остальных классов применяется Утверждение 2.

Теорема доказана.

Таблица 1

Представители классов сопряженности для группы $(^2F_4(2))'$

Класс элементов	Централизатор
$2A$	10240
$2B$	1536
$3A$	102
$4A$	192
$4B$	128
$4C$	64
$5A$	50
$6A$	12
$8A$, $8B^{**}$	32×2
$8C$, $8D$	16×2
$10A$	10
$12A$,$12B$	12×2
$13A$,$13B^{*}$	13×2
$16A$,$16B^{**}$, $16C^{*5}$,$16D^{**5}$	16×4

Перейдем теперь к исследованию классов полупростых элементов.

Теорема 2. *Полупростой элемент в группе* $^2F_4(q)$ *сопряжен со своим обратным.*

Доказательство. Следует отметить, что полупростой элемент имеет нечетный порядок, т.е. среди полупростых элементов нет инволюций. В алгебраической группе $\overline{G}$, получающейся из группы G, алгебраическим замыканием поля F_q полупростой элемент сопряжен с картановским элементом, т.е. элементом вида

$$h_{\alpha_1}(t_1)h_{\alpha_2}(t_2)...,$$

где α_1, α_2, α_3, ... – простые корни.

Обозначим через ω элемент группы Вейля, который можно получить, если взять произведение отражений относительно четырех ортогональных корней, например, относительно векторов e_1, e_2, e_3, e_4. Сопряжение картановского элемента с помощью ω переводит его в равенство

$$h_{w(\alpha_1)}(t_1)h_{w(\alpha_2)}(t_2)... = h_{-\alpha_1}(t_1)h_{-\alpha_2}(t_2)... .$$

Но элемент $h_{-\alpha}(t)h_{-\alpha}(t^{-1})$ коммутирует с элементами любой корневой подгруппы $x_\beta(u)$, а центр в универсальной и присоединенной группе типа F_4 тривиален [17]. Поэтому $h_{-\alpha}(t) = (h_\alpha(t))^{-1}$ сопряжен с $h_\alpha(t)$. Таким образом, полупростой элемент сопряжен с обратным в алгебраической группе. Сопряженность в подгруппе $^2F_4(q)$ алгебраической группы следует из указанного выше замечания о тривиальности центра [17, 18].

Дальнейшая логика здесь такова. Алгебраическая группа F_4 односвязна, централизатор полупростого элемента связан (см. [17, С. 192, предл. 3.9]). При переходе от алгебраической группы G к G_σ, расщепления класса полупростых элементов не происходит, т. е. элемент из группы G_σ, сопряженный в G, сопряжен и в G_σ (см. [17, С. 171, предл. 3.4 (c)]). А сопряженность полупростого элемента с обратным в алгебраической группе отмечена выше.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим класс унипотентных элементов.

В $^2F_4(q)$ насчитывается 18 классов унипотентов, перечисленных в статье [13] вместе с порядками централизаторов соответствующих элементов. Приведем фрагмент этой таблицы (табл. 2).

Таблица 2
Отобранные классы унипотентных элементов

u	$\|Z(u)\|$	$u \sim x$
u_1	$q^{12}(q-1)(q^2+1)$	x_3
u_2	$q^{10}(q^2-1)$	x_4
u_3	$2q^7(q-1)(q^2+1)$	x_{10}
u_4	$2q^7(q-1)(q^2+1)$	x_{10}
u_{11}	$4q^4$	x_{28}
u_{12}	$4q^4$	x_{28}
u_{13}	$2q^3$	x_{29}
u_{14}	$2q^3$	x_{29}
u_{15}	$4q^4$	x_{34}
u_{16}	$4q^2$	x_{32}
u_{17}	$4q^2$	x_{34}
u_{18}	$4q^2$	x_{32}

Обозначения: u_i, x_i – представители класса в подгруппах ${}^2F_4(q)$ и в $F_4(q)$ соответственно, $|Z(u)|$ – порядок централизатора $Z(u)$ соответствующего элемента.

В статье К. Шиноды [13] в таблицу не выписаны классы $x_5 - x_{10}$, поскольку соответствующие представители сопряжены с обратными из-за единственности значения порядка централизатора.

В статье [15] указаны порядки представителей классов x_i. Так, в частности, представители классов u_1 и u_2 будут инволюциями (x_3, x_4 имеют порядок, равный 2). Следовательно, в них имеются коммутирующие элементы, в силу Утверждения 1. Порядки элементов u_{11} и u_{12}, равные порядкам элементов x_{28}, равны 8, поэтому, согласно Утверждению 1, в обоих классах есть коммутирующие элементы. Те же рассуждения применяются как для классов u_{13}, u_{14}, порядки элементов которых равны 8, так и для классов $u_{15} - u_{18}$, порядки элементов которых равны 16.

Остается рассмотреть классы с представителями

$$u_3 = x_2(1)x_{1-2}(1)x_4(1)x_1(1)x_{1+2}(1)$$

$$\text{и } u_4 = x_2(1)x_{1-2}(1)x_4(1).$$

Оба класса обратны друг другу, что нетрудно проверить с помощью коммутаторной формулы или принять во внимание, что оба класса сливаются в $F_4(q)$. Таким образом, достаточно рассмотреть один из них, например x_4.

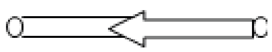
Имеем следующее равенство:

$$u_4 = \alpha_5(1) = x_2(1)x_{1-2}(1)x_4(1).$$

Этот элемент лежит в подгруппе, порожденной корневыми подгруппами

$$x_{\pm 2}(t),\ x_{\pm(1-2)}(t),\ x_{\pm 1}(t).$$

Этой подгруппе соответствует следующая диаграмма Дынкина на рис. 2.



e_2 $e_1 - e_2$

Рис. 2. Диаграмма Дынкина:
e_2, $(e_1 - e_2)$ – корни вершин графа

Диаграмма Дынкина строится известным образом, исходя из скалярного произведения корней вершин. Графовый автоморфизм представляет вершины, полевой остается прежним, таким же, как в группе $F_4(q)$.

Скрученный вариант приводит к группе Сузуки ${}^2B_2(q)$, для которой гипотеза, высказанная в статье [7], уже проверена авторами работы [9]. Таким образом, в классе сопряженных элементов u_3 коммутирующие элементы обязательно найдутся даже в подгруппе ${}^2B_2(q) \subset {}^2F_4(q)$.

Перейдем к исследованию классов смешанных элементов.

Сведения о смешанных элементах сведены в таблицу в статье К. Шиноды [13], которая воспроизводится ниже (табл. 3).

Таблица 3 [13]

Классы смешанных элементов

N	Представитель класса	Порядок централизатора
1	$t_1x_1(1)x_{1+2}(1)$	$q^2(q-1)$
2	$t_1x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_1(1)$	$2q(q-1)$
3	$t_1x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_{1+2}(1)$	$2q(q-1)$
4	$t_2x_{1+2-3+4}(1)x_{1-4}(1)$	$q(q-1)$
5	$t_4x_{1+2+3-4}(1)x_{1+4}(1)$	$q^3(q+1)$
6	$t_4x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{1+2+3-4}(\tau_0)x_{\beta_1}(1)x_{\beta_2}(1)x_{1+4}(\tau_0^{2\Theta})$	$3q^2$
7	$t_4x_{\alpha_1}(\eta)x_{\alpha_2}(\eta^l)x_{1+2+3-4}(\tau_1)x_{\beta_1}(\eta^{2\Theta})x_{\beta_2}(\eta^{2\Theta l})x_{1+4}(\tau_1^{2\Theta})$	$3q^2$
8	$t_4x_{\alpha_1}(\eta^2)x_{\alpha_2}(\eta^{3l})x_{1+2+3-4}(\tau_2)x_{\beta_1}(\eta^{4\Theta})x_{\beta_2}(\eta^{4\Theta l})x_{1+4}(\tau_2^{2\Theta})$	$3q^2$
9	$t_5x_{1+2+3-4}(1)x_{1+4}(1)$	$q(q+1)$
10	$t_7x_1(1)x_{1+2}(1)$	$q^2(q-\sqrt{2q}+1)$
11	$t_7x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_1(1)$	$2q(q-\sqrt{2q}+1)$
12	$t_7x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_{1+2}(1)$	$2q(q-\sqrt{2q}+1)$
13	$t_9x_1(1)x_{1+2}(1)$	$q^2(q+\sqrt{2q}+1)$
14	$t_9x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_1(1)$	$2q(q+\sqrt{2q}+1)$
15	$t_9x_{1-2}(1)x_2(1)\,x_{1+2}(1)$	$2q(q+\sqrt{2q}+1)$

Здесь представители классов записаны в виде произведения полупростого и унипотентного множителей, т. е. $x = x_u \cdot u_s$ – разложение смешанного элемента в произведение полупростого множителя x_s и унипотента u_s. Множители коммутируют, если разложение Жорданово, но в табл. 3 для представителей классов смешанных элементов это требование не всегда выполнено. Из существования жорданова разложения смешанного элемента следует, что он лежит в централизаторе полупростого множителя. Структура же централизаторов полупростых множителей легко определяется. Каждый такой централизатор Z(t) содержит степени t и, будучи редуктивной группой, имеет полупростой фактор. Рассматривать элементы t_3, t_6, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{12} нет надобности, так как их централизаторы не содержат унипотентов полупростых элементов. Просмотр централизаторов t_1, t_2, t_4, t_5, t_7, t_9 показывает, что как редуктивная группа они имеют полупростые части порядков. Структура централизаторов рассматриваемых полупростых элементов представлена в табл. 4. В ней множитель типа Z_m является циклической группой, состоящей из степеней t и входящей в центр централизатора t. Вторые множители ${}^2B_2(q)$, $SL_2(q)$, $U_3(q)$ представляют собой группу Сузуки, линейную группу и унитарную соответственно. Отметим, что эти множители являются простыми группами. Наличие коммутирующих унипотентных множителей, лежащих в одном классе, для группы Сузуки ${}^2B_2(q)$ и линейной $SL_2(q)$ доказано в работе [7]. Для унитарной группы коммутант силовской p-подгруппы лежит в ее центре. Если унипотент лежит в центре, то сопряжение его элементом из кар-

Таблица 4

Структура централизаторов полупростых элементов

t	Порядок централизатора	Структура
t_1	$(q-1)q^2(q-1)(q^2+1)$	$Z_{q-1}\,{}^2B_2(q)$
t_2	$(q-1)q(q-1)$	$Z_{q-1}SL_2(q)$
t_4	$3\frac{1}{3}q^3(q^2-1)(q^3+1)$	$Z_3U_3(q)$
t_5	$(q+1)q(q^2-1)$	$Z_{q+1}SL_2(q)$
t_7	$(q-\sqrt{2q}+1)q^2(q-1)(q+1)$	$Z_{q-\sqrt{2q}+1}\,{}^2B_2(q)$
t_9	$(q+\sqrt{2q}+1)q^2(q-1)(q+1)$	$Z_{q+\sqrt{2q}+1}\,{}^2B_2(q)$

тановской подгруппы дает коммутирующий элемент из того же класса сопряженности. Если же унипотент u не из центра силовской p-подгруппы, то найдется другой унипотент u', не коммутирующий с u. Элементы u и $u'' = u'\cdot u\cdot(u')^{-1}$ лежат в одном классе и коммутируют, так как их коммутатор лежит в центре силовской p-подгруппы. Элементы x и $u'\cdot x\cdot(u')^{-1}$, очевидно, коммутируют и лежат в одном классе, причем различны, поскольку $u \neq u''$. Таким образом, рассмотрение смешанных элементов закончено.

Заключение

Данная работа является очередным этапом проверки общей гипотезы, согласно которой неединичный класс сопряженности в конечной простой неабелевой группе содержит коммутирующие элементы. В настоящей статье излагаются методы проверки этой гипотезы для исключительной группы ${}^2F_4(q)$.

Методы исследования, которые здесь использовались, можно непосредственно применять для проверки общей гипотезы при рассмотрении других групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галкин В. М., Ерофеева Л. Н.** Леводистрибутивные алгебраические системы. Нижний Новгород: Нижегор. гос. техн. ун-т им. Р. Е. Алексеева, 2018. 158 с.

2. **Хелгасон С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Пер. с англ. А. Л. Онищика. М.: Мир, 1964. 534 с.

3. **Ильиных А. П.** Классификация конечных группоидов с 2-транзитивной группой автоморфизма // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 6. С. 51—78.

4. **Ерофеева Л. Н.** К проблеме транзитивности L-группоидов // Международный семинар по теории групп, посвященный 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина; 17 — 21 декабря. Екатеринбург: Изд. Института математики и механики Уральского отделения РАН, 2001.

5. **Ерофеева Л. Н.** Группа трансляций некоторых группоидов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Сер. Математика. 2004. № 2. С. 96—100.

6. **Ерофеева Л. Н.** Об одном классе группоидов // Записки научных семинаров ПОМИ. 2003. Т. 305. С. 136—143.

7. **Галкин В. М., Ерофеева Л. Н., Лещева С. В.** Коммутирующие элементы в классе сопряженности конечных групп // Известия вузов. Математика. 2016. № 8. С. 12—20.

8. **Ерофеева Л. Н., Лещева С. В., Мохнина Н. В., Юрова Н. В.** О простой группе Ри ${}^2G_2(q)$ // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2017. № 3 (118). С. 24—27.

9. **Мохнина Н. В., Юрова Н. В.** Коммутирующие элементы в классах сопряженности в группе Сузуки $^2B_2(q)$ // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2017. № 4 (119). С. 45–50.

10. **Лещева С. В., Юрова Н. В.** О классах сопряженности в группе $^3D_4(q)$ // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2019. № 2 (125). С. 53–60.

11. **Юрова Н. В.** О классах сопряженности в симплектической группе $SP_4(q)$ // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2018. № 4 (123). С. 56–60.

12. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. Пер. с англ. И. Н. Бернштейна и Н. Н. Яковлева. М.: Мир, 1975. 263 с.

13. **Shinoda K., Iwahori N.** The conjugacy classes of the finite Ree groups of type (F_4) // Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sec. 1A. Mathematics. 1975. Vol. 22. Pp. 1–15.

14. **Shinoda K., Iwahori N.** The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic p_{ne2} // Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sec. 1A. Mathematics. 1974. Vol. 21. No. 1. Pp. 133–159.

15. **Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д., Чао Х. П., Чен Г. Ю., Ши В. Д.** Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45. № 6. С. 1256–1262.

16. **Conway I. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

17. Семинар по алгебраическим группам. Сборник статей (А. Борель, Ч. Кэтрис, Т. Спрингер и др.). Пер. с англ. С. И. Гельфанда. Ред. А. А. Кириллов. М.: Мир, 1973. 317 с.

18. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Пер. с англ. В. И. Логинова. М.: Мир, 1985. 352 с.

REFERENCES

1. **Galkin V. M., Erofeeva L. N.,** Levodistributivnyye algebraicheskiye sistemy [Left-distribution algebraic systems], Publishing of Nizhni Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhni Novgorod, 2018 (in Russian).

2. **Helgason S.,** Differential geometry and symmetric spaces, 2nd edition, Amer. Mathematical Society, Providence, 2000.

3. **Il'inykh A. P.,** Classification of finite groupoids with 2-transitive automorphism group, Sb. Math. 82 (1) (1995) 175–197.

4. **Erofeeva L. N.,** K probleme tranzitivnosti L-gruppoidov [To the problem of groupoids' transitivity], Proceedings of the International Seminar on the Group Theory dedicated to 70-th anniversary of A. I. Starostin and 80-th anniversary of N. F. Sesekin; December 17–21, Ekaterinburg (2001) (in Russian).

5. **Erofeeva L. N.,** Gruppa translyatsiy nekotorykh gruppoidov [Translation group of some groupoids], Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod, Ser. Mathematics. (2) (2004) 96–100 (in Russian).

6. **Erofeeva L. N.,** A class of groupoids, J. Math. Sci. 130 (3) (2005) 4720–4723.

7. **Galkin V. M., Erofeeva L. N., Leshcheva S. V.,** Commuting elements in conjugacy class of finite groups, Russian Math. (Iz. VUZ). 60 (8) (2016) 9–16.

8. **Erofeeva L. N., Leshcheva S. V., Mokhnina N. V., Yurova N. V.,** About simple group $^2G_2(q)$, Transactions of Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R. Y. Alexeev. (3 (118)) (2017) 24–27 (in Russian).

9. **Mokhnina N. V., Yurova N. V.,** Commuting elements in conjugacy classes in the group Suzuki, Transactions of Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R. Y. Alexeev. (4 (119)) (2017) 45–50 (in Russian).

10. **Leshcheva S. V., Yurova N. V.,** On conjugacy classes of the group $^3D_4(q)$, Transactions of Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R. Y. Alexeev. (2 (125)) (2019) 53–60 (in Russian).

11. **Yurova N. V.,** On conjugacy classes in the sympletic group $SP_4(q)$, Transactions of Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R. Y. Alexeev. (4 (123)) (2018) 56–60 (in Russian).

12. **Steinberg R.,** Lectures on Chevalley groups, Notes prepared by J. Faulkner and R. Wilson, Yale University, Department of Mathematics, New Haven, USA, 1967.

13. **Shinoda K., Iwahori N.,** The conjugacy classes of the finite Ree groups of type (F_4), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A. Math. 22 (1975) 1–15.

14. **Shinoda K., Iwahori N.,** The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields

of characteristic p_{ne2}, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A. Math. 21 (1) (1974) 133–159.

15. **Cao H. P., Chen C., Grechkoseeva M. A., et al.,** Recognition of the finite simple groups $F_4(2^m)$ by spectrum, Siberian Mathematical Journal. 45 (6) (2004) 1031–1035.

16. **Conway I. H., Curtis R. T., Norton S. P., et al.,** Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

17. **Borel A., Carter R. W., Curtis Ch. W., et al.,** Seminar on algebraic groups and related finite groups: Held at the Institute for Advanced Study, Princeton, USA, 1968/1969 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131), Springer, USA, 1970.

18. **Gorenstein D.,** Finite simple groups, an introduction to their classification, Plenum Publishing Corporation, New York, London, 1982.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ЮРОВА Надежда Вячеславовна – *старший преподаватель Института транспортных систем Нижегородского государственного технического университета имени Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия.*

603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24
yurova1980@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-2355-2820

THE AUTHOR

YUROVA Nadezhda V.
Nizhni Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev
24, Minin St., Nizhni Novgorod, 603950, Russia
yurova1980@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-2355-2820

Статья поступила в редакцию 29.03.2021. Одобрена после рецензирования 19.03.2022. Принята 19.03.2022.

Received 29.03.2021. Approved after reviewing 19.03.2022. Accepted 19.03.2022.