

Научная статья

УДК 531.332

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15211>

ДВУХФАКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ О БРАХИСТОХРОНЕ

А. С. Смирнов^{1,2} ✉, С. В. Суворов³

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург, Россия;

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
г. Санкт-Петербург, Россия;

³ Центральное конструкторское бюро транспортного машиностроения,
г. Тверь, Россия

✉ smirnov.alexey.1994@gmail.com

Аннотация. В статье предлагается новая модификация известной задачи о брахистохроме. Введен совместный учет минимизаций времени движения и длины траектории в их функциональной взаимосвязи. Построен двухфакторный критерий оптимизации (ДКО) в виде произведения двух частных критериев, который позволил найти наилучший компромисс между ними; на основе ДКО получено решение задачи о двухфакторной брахистохроме с предварительным рассмотрением вспомогательной задачи о брахистохроме заданной длины. Предложено рациональное практическое решение задачи, обладающее более простой геометрией, чем строго оптимальное: принять дугу окружности с центральным углом, который подбирается на основе взятого ДКО.

Ключевые слова: брахистохрона, оптимизация, время движения, длина траектории, двухфакторный критерий, рациональное решение

Для цитирования: Смирнов А. С., Суворов С. В. Двухфакторная оптимизация в задаче о брахистохроме // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 2. С. 124–139. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15211>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15211>

TWO-FACTOR OPTIMIZATION IN THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM

A. S. Smirnov^{1,2} ✉, S. V. Suvorov³

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

² Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russia;

³ Central Design Bureau of Transport Engineering, Tver, Russia

✉ smirnov.alexey.1994@gmail.com

Abstract. The paper puts forward a new modification of the well-known brachistochrone problem. The joint account of minimizing the motion time and the trajectory length in their functional relationship has been introduced. A two-factor optimization criterion (TOC) was constructed in the form of a product of two particular criteria, which made it possible to find



the best compromise between them. On the TOC basis a solution to the problem of a two-factor brachistochrone was obtained using a preliminary consideration of the auxiliary problem on a brachistochrone with a given length. A rational practical solution of the problem was proposed. It was characterized by a simpler geometry than the strictly optimal one: to adopt a circular arc with a central angle selected on the basis of the taken TOC.

Keywords: brachistochrone, optimization, motion time, trajectory length, two-factor criterion, rational solution

For citation: Smirnov A. S., Suvorov S. V., Two-factor optimization in the brachistochrone problem, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (2) (2022) 124–139. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15211>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Известно, что задача о брахистохроне была сформулирована швейцарским ученым И. Бернулли, который опубликовал ее постановку в 1696 году в журнале «Acta Eruditorum» под заглавием «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики».

Формулировка этой задачи была следующей:

«В вертикальной плоскости даны две точки A и B . Определить путь AMB , спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело M , начав двигаться из точки A , дойдет до другой точки B в кратчайшее время».

Поставленную задачу смогли решить такие великие ученые, как Г. Лейбниц, Я. Бернулли, Г. Лопиталь и И. Ньютон [1]. Несмотря на то, что они представили разные решения, конечные ответы у всех них оказались одинаковыми: искомой траекторией является дуга циклоиды. Стоит подчеркнуть, что решение Я. Бернулли стало первым шагом к появлению новой научной дисциплины, которая получила название «вариационное исчисление». Именно с задачи о брахистохроне начинается изложение этой дисциплины и в наше время. Интересно также отметить, что полученное решение на практике было издавна хорошо известно строителям в тропических странах, где в условиях затяжных дождей наискорейший скат воды с крыши существенно влияет на ее долговечность. В частности, крыши буддийских пагод по своей форме отчетливо напоминают дугу циклоиды.

В настоящее время классическая задача о брахистохроне представляет как учебный, так и научный интерес, и она имеет множество различных обобщений, которые полезны для более широкого применения на практике. Первым (и далеко не единственным) ее обобщением можно считать рассмотренную Л. Эйлером задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде. Это направление исследований продолжается целым рядом современных работ [2 – 5], в которых принимается модель как вязкого, так и кулонова трения. Представляют интерес также задача о брахистохроне для катящегося диска [6 – 8] и различные ее пространственные варианты [9, 10], а также некоторые другие обобщения, детальный перечень которых дан в статье [11].

Постановка задачи

Предположим, что начальная и конечная точки A и B лежат на одном горизонтальном уровне и расположены на расстоянии l друг от друга (рис. 1).

Тогда задача о брахистохроне может трактоваться как задача об оптимальном проектировании тоннеля под землей, которая учитывает в классической постановке минимизацию лишь одного фактора – времени движения T материальной точки по кривой $y(x)$. В то же время, длина этой кривой оказывается достаточно большой, что может создавать неудобства для практической реализации такой траектории. Более того, при наличии подземных рек зачастую невозможно проложить тоннель именно по циклоиде, вследствие чего приходится отказываться от данного варианта в пользу каких-либо других. Наконец, минимизация длины пути прямо связана с такими экономическими показа-

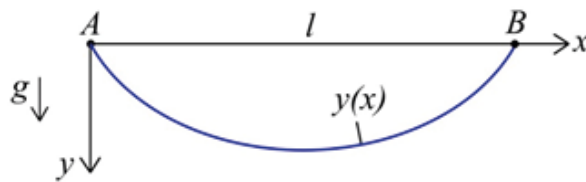


Рис. 1. Постановка классической задачи о брахистохроне: тело M под влиянием собственной тяжести должно пройти траекторию $y(x)$ от точки A до точки B в кратчайшее время (g – ускорение свободного падения)

телями, как расходы на построение и последующее содержание тоннеля, путь которого имитирует искомая траектория.

Из вышеизложенного вытекает, что минимизация длины траектории L приобретает важный практический смысл и является крайне желательной. Однако ясно, что одновременная минимизация двух величин T и L лишена смысла, поскольку они определяются известными выражениями

$$T = \int_0^l \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx, \quad L = \int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx \quad (1)$$

(штрихом обозначена производная по координате x) и, очевидно, принимают свои минимальные значения на различных экстремалях $y(x)$ (циклоиде и прямой соответственно).

Тем не менее, задача о поиске наилучшего компромисса между этими двумя факторами, который можно определить путем конструирования и анализа адекватного двухфакторного критерия оптимизации, оказывается вполне осмысленной. Ясно, что для максимальной эффективности траектории разумно потребовать достижения наилучшего относительного компромисса между величинами T и L , принимая во внимание их функциональную взаимосвязь. Нетрудно понять, что для этого целесообразно синтезировать мультипликативный критерий оптимизации в виде следующей композиции частных критериев T и L :

$$J = T \cdot L = \min. \quad (2)$$

Подобный критерий был успешно применен в других многокритериальных задачах механики [12, 13], где он показал свою эффективность и приобрел важное практическое значение. Критерий (2) позволяет оценить, во сколько раз необходимо увеличить время движения T , для того чтобы добиться при этом уменьшения длины траектории L в наибольшей степени по отношению к увеличению времени. Именно это и подразумевается под наилучшим относительным компромиссом между названными факторами.

Основной целью настоящей работы является анализ двухфакторного критерия оптимизации (2) и поиск оптимальной траектории по данному критерию.

Определение брахистохроны заданной длины

Прежде, чем обращаться непосредственно к критерию (2), рассмотрим подробно вспомогательную задачу о нахождении брахистохроны заданной длины, которая математически формулируется следующим образом [14]:

$$T = \min, \quad L = \text{fix}, \quad (3)$$

где необходимо принять во внимание выражения (1).

Задача (3) представляет собой изопериметрическую задачу вариационного исчисления, для решения которой, как известно, необходимо составить функцию

$$H = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} + \lambda \sqrt{1+y'^2} = H(y, y'), \quad (4)$$



где λ – постоянная величина.

Далее следует рассматривать задачу об экстремалиях функционала с подынтегральной функцией $H(y', y)$. Как и в классической задаче о брахистохроне, эта функция не зависит явно от x , поэтому для ее решения воспользуемся первым интегралом уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$H - y' \frac{\partial H}{\partial y'} = \left(\frac{1}{\sqrt{2gy}} + \lambda \right) \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C, \quad (5)$$

где C – константа.

Сделаем в этом уравнении стандартную подстановку $y' = \operatorname{ctg} \varphi$, в результате чего после некоторых упрощений получим:

$$y = \frac{a \sin^2 \varphi}{2(1 - b \sin \varphi)^2}, \quad a = \frac{1}{gC^2}, \quad b = \frac{\lambda}{C}, \quad (6)$$

где a, b – новые постоянные величины, связанные с C и λ .

Вычисляя теперь y' согласно выражению (6) и учитывая, что $y' = \operatorname{ctg} \varphi$, получим следующее уравнение:

$$y' = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - b \sin \varphi)^3} \varphi' = \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7)$$

Разделяя в нем переменные, будем иметь:

$$\frac{a \sin^2 \varphi}{(1 - b \sin \varphi)^3} d\varphi = dx, \quad x = a \int \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - b \sin \varphi)^3} d\varphi. \quad (8)$$

Для вычисления получившегося интеграла будем использовать следующую тригонометрическую подстановку:

$$z = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} z, \quad d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2z}{1+z^2}. \quad (9)$$

В результате после преобразований приходим к вычислению интеграла от дробно-рациональной функции:

$$\int \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - b \sin \varphi)^3} d\varphi = 8 \int \frac{z^2}{(z^2 - 2bz + 1)^3} dz. \quad (10)$$

С этой целью воспользуемся таблицами интегралов [15]. Из них видно, что при $|b| < 1$ и $|b| > 1$ этот интеграл будет иметь различные представления. Это связано с тем, что в первом случае корни квадратного трехчлена $z^2 - 2bz + 1$ являются комплексно-сопряженными, а во втором случае – вещественными.

Случай представления интеграла (10). Рассмотрим первый случай, когда $|b| < 1$. Интеграл от дробно-рациональной функции (10) в этом случае есть

$$\int \frac{z^2}{(z^2 - 2bz + 1)^3} dz = \frac{1}{4(1-b^2)} \left[\frac{(2b^2 - 1)z - b}{(z^2 - 2bz + 1)^2} + \frac{2b^2 + 1}{2(1-b^2)} \left(\frac{z - b}{z^2 - 2bz + 1} + \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{z - b}{\sqrt{1-b^2}} \right) \right]. \quad (11)$$

Возвращаясь к исходной переменной φ , получаем, согласно равенству (10), для $x(\varphi)$:

$$x = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left[\frac{2b^2+1}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{\cos \varphi ((4b^2-1) \sin \varphi - 3b)}{2(1-b \sin \varphi)^2} \right] + x_0, \quad (12)$$

где x_0 – константа интегрирования.

Поскольку по условию задачи точки A и B лежат на одной горизонтали на расстоянии l , то $y(0) = 0$, $y(l) = 0$. Из выражения (6) ясно, что этим точкам отвечают значения параметра $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Константа x_0 определяется из условия $x = 0$ при $\varphi = 0$:

$$x_0 = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left(\frac{2b^2+1}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{3b}{2} \right). \quad (13)$$

В свою очередь, константа a находится из условия $x = l$ при $\varphi = \pi$:

$$a = \frac{l(1-b^2)^2}{\frac{2b^2+1}{\sqrt{1-b^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \right) + 3b}. \quad (14)$$

В результате решение задачи (3) для случая $|b| < 1$ имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{(1-b^2)^2} \left[\frac{2b^2+1}{\sqrt{1-b^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b}{\sqrt{1-b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\cos \varphi ((4b^2-1) \sin \varphi - 3b)}{2(1-b \sin \varphi)^2} + \frac{3b}{2} \right], \\ y &= \frac{a \sin^2 \varphi}{2(1-b \sin \varphi)^2}, \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где величина a определяется формулой (14).

Таким образом, посредством параметрического решения (15) можно построить семейство брахистохрон, отвечающих различным значениям параметра b при условии $|b| < 1$. На рис. 2 приведены эти траектории, причем для удобства по осям откладываются безразмерные координаты x/l и y/l .

Отметим, что значению $b = 0$ соответствует циклоидальная траектория. В самом деле, из выражений (15) непосредственно вытекает уравнение циклоиды:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{4} (2\varphi - \sin 2\varphi) = r(\psi - \sin \psi), \\ y &= \frac{a}{4} (1 - \cos 2\varphi) = r(1 - \cos \psi), \end{aligned} \right. \quad (16)$$

где $r = a/4$ – радиус производящего круга; $\psi = 2\varphi$ – его угол поворота, изменяющийся от 0 до 2π .

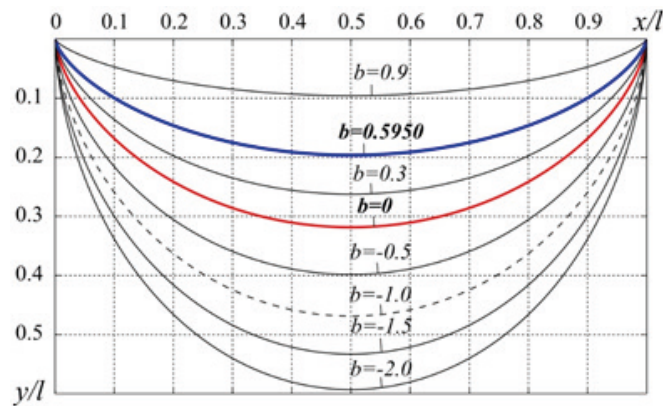


Рис. 2. Семейство брахистохрон различной длины (построены в безразмерных координатах). См. формулы (15), случай $0 < |b| < 1$; (16), случай $b = 0$ (кривая выделена красным цветом); (26), случай $b < -1$, и (32), случай $b = -1$ (кривая выделена пунктиром). Траектория, оптимальная по двухфакторному критерию (2), выделена синим цветом

Значениям $0 < b < 1$ отвечают траектории, лежащие выше циклоиды, а значениям $-1 < b < 0$ – ниже нее. Ясно, что безразмерный параметр b однозначно связан с длиной L кривой, которая определяется второй формулой (1).

Для установления этой связи подставим в указанную формулу выражение $y' = \text{ctg } \varphi$, вследствие чего получим:

$$L = a \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{(1 - b \sin \varphi)^3} d\varphi = 4a \int_0^\infty \frac{z(1 + z^2)}{(z^2 - 2bz + 1)^3} dz, \quad (17)$$

где сделана та же самая замена переменной (9), что и выше.

Пользуясь вновь таблицами интегралов [15], находим:

$$L = \frac{a}{(1 - b^2)^2} \left[\frac{3b}{\sqrt{1 - b^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \right) + 2 + b^2 \right]. \quad (18)$$

Подставляя сюда значение a , согласно формуле (14), и вводя в рассмотрение безразмерную величину $\delta = l / L$, которая из физического смысла задачи лежит в пределах $0 < \delta < 1$, получим:

$$\delta = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \right) \frac{2b^2 + 1}{\sqrt{1 - b^2}} + 3b}{\left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} \right) \frac{3b}{\sqrt{1 - b^2}} + 2 + b^2}. \quad (19)$$

Посредством этой формулы можно построить график зависимости $\delta(b)$ на интервале $-1 < b < 1$ (рис. 3). Отметим, что значению $b = 1$ отвечает прямая, когда $\delta = 1$, а значению $b = 0$ – циклоида, когда $\delta = \pi / 4 \approx 0,7854$.

Наконец, выразим время движения по оптимальной траектории по первой формуле (1), выполняя в ней подстановку $y' = \text{ctg } \varphi$ и пользуясь выражениями (6) и (8):

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - b \sin \varphi)^2} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\infty \frac{1 + z^2}{(z^2 - 2bz + 1)^2} dz. \quad (20)$$

Пользуясь таблицами интегралов [15], находим:

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{1}{1-b^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \right) + b \right], \quad (21)$$

где следует помнить, что величина a определяется по формуле (14).

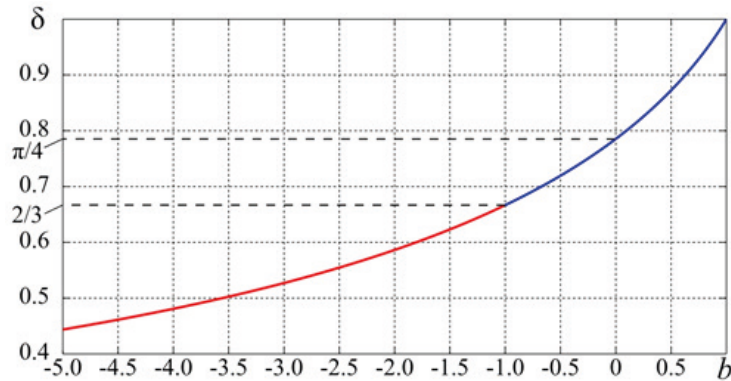


Рис. 3. График зависимостей величины δ от параметра b на интервале $-1 < b < 1$ (кривая выделена синим цветом) и при $b \leq -1$ (кривая выделена красным цветом)

Рассмотрим теперь второй случай, когда $|b| > 1$. Устанавливаем при помощи таблиц интегралов [15], что интеграл (10) будет иметь вид:

$$\int \frac{z^2}{(z^2 - 2bz + 1)^3} dz = \frac{1}{4(1-b^2)} \left[\frac{(2b^2 - 1)z - b}{(z^2 - 2bz + 1)^2} + \frac{2b^2 + 1}{2(1-b^2)} \left(\frac{z - b}{z^2 - 2bz + 1} + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 1}} \ln \left| \frac{z - b - \sqrt{b^2 - 1}}{z - b + \sqrt{b^2 - 1}} \right| \right) \right]. \quad (22)$$

Возвращаясь к исходной переменной φ , получаем, согласно выражению (10), функцию $x(\varphi)$:

$$x = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left[\frac{2b^2 + 1}{2\sqrt{b^2 - 1}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b - \sqrt{b^2 - 1}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b + \sqrt{b^2 - 1}} \right| + \frac{\cos \varphi ((4b^2 - 1) \sin \varphi - 3b)}{2(1 - b \sin \varphi)^2} \right] + x_0. \quad (23)$$

Как и прежде, определим константу x_0 из условия $x = 0$ при $\varphi = 0$:

$$x_0 = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left(\frac{3b}{2} - \frac{2b^2 + 1}{2\sqrt{b^2 - 1}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{b - \sqrt{b^2 - 1}} \right| \right). \quad (24)$$

Затем найдем константу a из условия $x = l$ при $\varphi = \pi$:

$$a = \frac{l(1-b^2)^2}{\frac{2b^2 + 1}{2\sqrt{b^2 - 1}} \ln \left| \frac{b - \sqrt{b^2 - 1}}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right| + 3b}. \quad (25)$$

В результате решение задачи для случая $|b| > 1$ примет окончательный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left[\frac{2b^2+1}{2\sqrt{b^2-1}} \ln \left| \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b - \sqrt{b^2-1}\right)(b - \sqrt{b^2+1})}{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - b + \sqrt{b^2-1}\right)(b + \sqrt{b^2+1})} \right| + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi \left((4b^2 - 1) \sin \varphi - 3b \right)}{2(1 - b \sin \varphi)^2} + \frac{3b}{2} \right], \\ y = \frac{a \sin^2 \varphi}{2(1 - b \sin \varphi)^2}, \end{array} \right. \quad (26)$$

где a определяется по формуле (25).

Посредством параметрического решения (26) можно построить оптимальные траектории, отвечающие значениям параметра b из интервала $b < -1$, которые (см. рис. 2), продолжают семейство траекторий, построенных ранее для значений $-1 < b < 1$. Что же касается значений $b > 1$, то они физически невозможны, т. е. им не отвечают оптимальные траектории. Это можно увидеть более четко, если выразить длину кривой L по второй формуле (1):

$$L = \frac{a}{(1-b^2)^2} \left(-\frac{3b}{2\sqrt{b^2-1}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2-1}}{b - \sqrt{b^2-1}} \right| + 2 + b^2 \right). \quad (27)$$

Подставляя сюда выражение (25), выразим значение безразмерной величины $\delta = l/L$:

$$\delta = \frac{\frac{2b^2+1}{2\sqrt{b^2-1}} \ln \left| \frac{b - \sqrt{b^2-1}}{b + \sqrt{b^2-1}} \right| + 3b}{-\frac{3b}{2\sqrt{b^2-1}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2-1}}{b - \sqrt{b^2-1}} \right| + 2 + b^2}, \quad (28)$$

которому при $b > 1$ отвечают отрицательные значения величины δ , что не может соответствовать действительности, если исходить из ее представления как отношение длин. Зависимость (28) для значений $b < -1$ также приведена на рис. 3.

Остается выразить время движения по оптимальной траектории по первой формуле (1) для рассматриваемого случая:

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{1}{1-b^2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{1-b^2}} \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2-1}}{b - \sqrt{b^2-1}} \right| + b \right], \quad (29)$$

где следует помнить, что величина a определяется по формуле (25).

Отметим, что при $b \rightarrow 1$, согласно формуле (28), получаем, что $\delta \rightarrow 1$ (т. е. $L \rightarrow l$), а по формуле (29) будем иметь $T \rightarrow \infty$, так что случай $b = 1$ является предельным.

Рассмотрим для полноты картины отдельно случай, когда $b = -1$. Это промежуточный вариант между исследованными выше вариантами $-1 < b < 1$ и $b < -1$. Имеем для него следующее:

$$\int \frac{z^2}{(z^2 - 2bz + 1)^3} dz = \int \frac{z^2}{(z+1)^6} dz = -\frac{10z^2 + 5z + 1}{30(z+1)^5}. \quad (30)$$

Возвращаемся к исходной переменной φ и, согласно (10), получаем:

$$x = -\frac{4a \left(10 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + 5 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + 1 \right)}{15 \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + 1 \right)^5} + x_0. \quad (31)$$

Учитывая, что $x = 0$ при $\varphi = 0$, а $x = l$ при $\varphi = \pi$, находим, согласно выражению (31), что $x_0 = 4a / 15$, а $a = 15l / 4$, так что в этом случае имеем $x_0 = l$.

Таким образом, решение для случая $b = -1$ может быть записано в виде

$$\begin{cases} x = \frac{4a}{15} \left[1 - \frac{10 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + 5 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + 1}{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + 1 \right)^5} \right], \\ y = \frac{a \sin^2 \varphi}{2(1 - b \sin \varphi)^2}. \end{cases} \quad (32)$$

Эта траектория приведена на рис. 2 пунктирной линией. Наконец, выразим отвечающие ей величины L и T :

$$L = 4a \int_0^{\infty} \frac{z(1+z^2)}{(z+1)^6} dz = \frac{2a}{5}, \quad T = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\infty} \frac{1+z^2}{(z+1)^4} dz = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (33)$$

Отсюда вытекает, что при $b = -1$ будем иметь значение $\delta = l / L = 2 / 3 \approx 0,6667$, что полностью согласуется с графиком, приведенным на рис. 3.

Таким образом, задачу об определении брахистохроны заданной длины можно считать решенной.

Определение оптимального решения по двухфакторному критерию

Перейдем теперь непосредственно к поиску оптимального решения по мультипликативному критерию (2). Ясно, что для этого вполне достаточно использовать решение рассмотренной выше задачи о брахистохроне заданной длины, где при заданной величине L была найдена кривая с минимально возможным временем движения T по ней. Это связано с тем, что все другие кривые, которые при заданном L дают по времени больший результат, чем в оптимальном варианте, будут явно хуже и по критерию (2), в связи с чем их можно не принимать во внимание при проведении процедуры двухфакторной оптимизации.

Тем самым можно заключить, что ранее мы выполнили первую стадию оптимизации, а теперь будем рассматривать критерий (2) лишь на тех кривых, которые обладают минимальным временем движения по ним при заданной длине. Поэтому здесь мы имеем уже не вариационную, а обычную алгебраическую задачу о поиске точки минимума функции от одной переменной.

Рассматривая предельные варианты, легко понять, что критерий (2) действительно позволит определить конкретную оптимальную траекторию. В самом деле, в первом предельном случае, когда профиль траектории близок к прямолинейному ($b \rightarrow 1$), будем иметь: $T \rightarrow \infty$, $L \rightarrow l$, т. е. $J \rightarrow \infty$. Напротив, если траектория имеет очень глубокий



профиль ($b \rightarrow -\infty$), то $T \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, так что вновь будет $J \rightarrow \infty$. Это означает, что критерий J , который удобно рассматривать как функцию параметра b , на интервале $b < 1$ должен иметь внутренний экстремум – минимум. Напомним, что время T задается формулами (21) и (29) для случаев $-1 < b < 1$ и $b < -1$ соответственно, длина L определяется при этом выражениями (18) и (27), а входящий в эти выражения параметр a находится из соотношений (14) и (25).

Введем в рассмотрение безразмерную величину I , пропорциональную критерию J и связанную с ним по следующей формуле:

$$I = \frac{J}{l} \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{34}$$

Для определения точки минимума функции (34), в силу достаточно громоздких представлений для T и L , проще всего построить график ее зависимости от параметра b (рис. 4).

По графику на рис. 4 можно определить, что искомым минимумом отвечает значению $b_* = 0,5950$. Отметим, что его расположение на интервале $0 < b < 1$ можно выявить и из общих соображений. В самом деле, значение $b = 0$ отвечает циклоидальному профилю, а достигнуть относительного компромисса по критерию (2) можно лишь путем ухода от циклоиды вверх, увеличивая время движения T и понижая при этом длину траектории L . Теперь можно понять, чему равны значения T и L при движении по траектории, оптимальной по двухфакторному критерию, а также значение самого критерия J . Если подставить найденное значение b_* в формулы (21) и (18) с учетом (14), а также принять во внимание, что $I_* = 2,9430$ (см. рис. 4), и использовать формулу (34), то получим:

$$T_* = 2,6265 \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad L_* = 1,1205l, \quad J_* = I_* l \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,9430l \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{35}$$

В то же время, для циклоидальной траектории при $b = 0$ имеем:

$$T_c = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2,5066 \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad L_c = \frac{4l}{\pi} \approx 1,2732l. \tag{36}$$

Сопоставляя соответствующие значения (35) и (36), можно видеть, что для траектории, оптимальной по критерию (2), время движения на 4,8 % больше, чем для циклоиды, а длина этой траектории оказывается меньше длины циклоиды на 12 %.

Полученные результаты наглядно демонстрируют искомым наилучший относительный

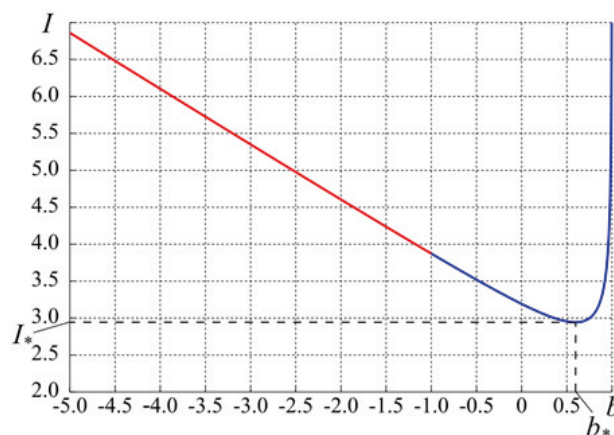


Рис. 4. График зависимостей двухфакторного критерия I от параметра b на интервале $-1 < b < 1$ (кривая выделена синим цветом) и при $b \leq -1$ (кривая выделена красным цветом).

Показан минимум кривой $I_* = 2,9430$ при $b_* = 0,5950$

компромисс между двумя критериями T и L и доказывают, что посредством достаточно небольшого увеличения времени движения можно добиться гораздо более значительного снижения длины траектории. Полученные значения позволяют лишний раз рекомендовать критерии вида (2) для решения многокритериальных задач в различных областях механики. Отметим, что найденная оптимальная траектория также приведена на рис. 2 ($b = 0,5950$).

Построение рационального решения

Как известно, решения большинства оптимизационных задач механики являются оптимальными лишь в формальном (т. е. чисто математическом) смысле, что связано с их достаточно сложной геометрией. Естественно, это приводит к определенным трудностям при их практической реализации. В этой связи возникает вопрос о построении решения, которое будет не строго оптимальным, но обладающим более простой геометрией и более удобным для конкретных практических целей. Такое решение можно назвать квазиоптимальным, или рациональным, и оно будет оптимальным не в целом, а лишь на классе некоторых функций, характеризующих упрощенную геометрию задачи [16].

В рассматриваемой задаче о брахистохроне целесообразно в качестве такого профиля принять круговой, т. е. рассматривать траектории в виде дуги окружности. Интересно отметить, что Г. Галилей, доказывая, что кратчайший путь не всегда оказывается самым быстрым, сравнивал время движения по прямой именно с временем движения по дуге окружности [11]. Таким образом, задача о нахождении рационального решения ставится следующим образом:

Необходимо из всех окружностей, проходящих через две заданные точки A и B , лежащие на одной горизонтали (в нашем изложении), выбрать такую, движение по которой будет доставлять заданному критерию оптимизации экстремальное значение.

Сформулированная постановка задачи показана графически на рис. 5.

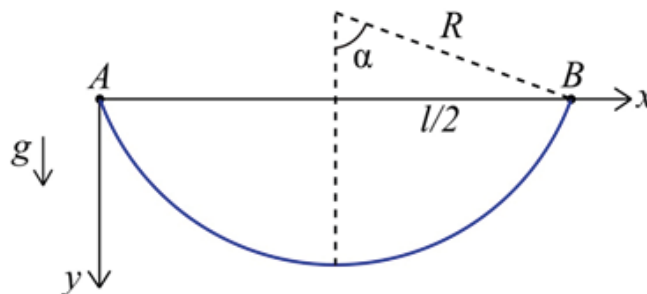


Рис. 5. Постановка задачи для рационального решения на основе кругового профиля радиусом R (2α – центральный угол)

Рассмотрим при этом как минимизацию только времени движения, так и двухфакторный критерий (2). Если при сопоставлении параметров этих круговых траекторий с характеристиками рассмотренных выше решений их различие будет достаточно малым, то это позволит рекомендовать данные рациональные решения для использования на практике взамен исходных, строго оптимальных решений.

Хорошо известно, что половина периода колебаний математического маятника, равная времени движения по окружности от точки A до точки B , определяется формулой [17]:

$$T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right), \quad (37)$$

где R – радиус окружности, α – амплитуда колебаний, $K(\kappa)$ – полный эллиптический интеграл I рода с модулем κ .

Нетрудно понять, что имеет место следующая связь между величинами R , α и l (см. рис. 5):



$$R = \frac{l}{2 \sin \alpha}. \quad (38)$$

Подставляя выражение (38) в формулу (37), получим окончательное выражение для времени движения по дуге окружности с центральным углом 2α :

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = T(\alpha). \quad (39)$$

Сначала рассмотрим задачу о минимизации времени движения. С этой целью продифференцируем функцию (39) по переменной α , учитывая правила вычисления производных эллиптических интегралов, и приравняем нулю полученное выражение. В результате после преобразований можно прийти к следующему уравнению:

$$(1 + 2 \cos \alpha) K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = 2E\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right), \quad (40)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл II рода с модулем k .

Единственный корень уравнения (40), отвечающий смыслу задачи, есть $\alpha_{*1} = 1,2433$, а отвечающее ему время движения, согласно выражению (39), и длина траектории, определяемая формулой $L = 2\alpha R = \alpha l / \sin \alpha$ и необходимая для дальнейших сопоставлений, будут равны соответственно:

$$T_{*1} = 2,5233 \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad L_{*1} = 1,3131l. \quad (41)$$

Видно, что время T_{*1} превышает время движения по циклоиде, определяемое первой формулой (36), всего на 0,7 %. Это означает, что найденная дуга окружности с центральным углом $2\alpha_{*1} = 2,4866$ (или $142,47^\circ$) почти не уступает циклоиде в отношении временного фактора, вследствие чего ее можно рекомендовать для практических приложений.

Обращаясь теперь к определению наилучшего параметра круговой траектории по двухфакторному критерию (2), составим для него выражение с учетом формулы (39) и примем во внимание, что $L = \alpha l / \sin \alpha$:

$$J = l \sqrt{\frac{2l}{g}} \frac{\alpha}{\sin^{3/2} \alpha} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = J(\alpha). \quad (42)$$

Дифференцируя эту функцию по α и приравнявая нулю получившееся при этом выражение, получим после упрощений следующее уравнение:

$$[\alpha(1 + 4 \cos \alpha) - 2 \sin \alpha] K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = 2\alpha E\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right), \quad (43)$$

единственный корень которого, отвечающий смыслу задачи, есть $\alpha_{*2} = 0,8720$. Соответствующие ему время движения, длина траектории и значение двухфакторного критерия тогда будут иметь следующий вид:

$$T_{*2} = 2,6650 \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad L_{*2} = 1,1390l, \quad J_{*2} = 3,0354l \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (44)$$

Нетрудно видеть, что по сравнению с формулами (41) время движения увеличилось на 5,6 %, тогда как длина траектории уменьшилась на 13,3 %. Эти значения также иллюстрируют достигнутый наилучший компромисс между указанными факторами для случая, когда оптимизация осуществляется на классе дуг окружности. Остается сопоставить найденные выражения (44) с аналогичными величинами для полученного ранее, строго оптимального решения по двухфакторному критерию, которые даются формулами (35).

Так, время T_{*2} больше значения T_* всего на 1,5 %, длина L_{*2} оказывается больше L_*

всего на 1,7 %, и, наконец, значение двухфакторного критерия J_{*2} превышает J_* лишь на 3,1 %, что можно считать очень хорошими результатами. Поэтому, если необходимо использовать двухфакторный критерий оптимизации, то найденную выше оптимальную по этому критерию траекторию можно с приемлемой точностью заменить дугой окружности с центральным углом $2\alpha_{*2} = 1,7440$ (или $99,92^\circ$), которая имеет намного более простую геометрию. Найденные круговые профили, оптимальные по рассмотренным выше критериям $T = \min$ и $J = \min$, представлены на рис. 6 пунктирными линиями вместе с соответствующими траекториями, которые являются оптимальными по тем же критериям в целом и изображены сплошными линиями.

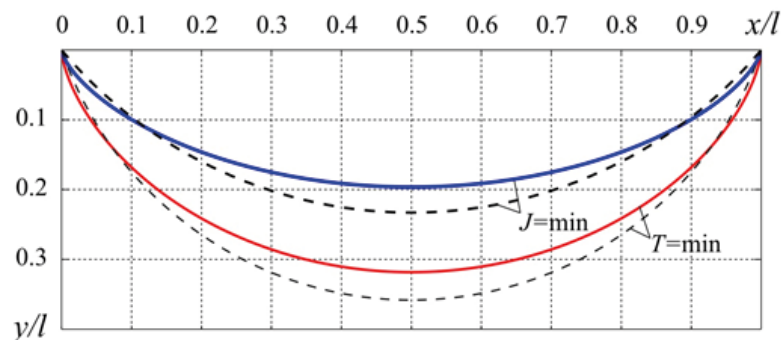


Рис. 6. Сравнение оптимальных профилей (сплошные линии) с рациональными (пунктиры); T, J – критерии оптимизации (время движения материальной точки по кривой и мультипликативный, соответственно)

Заключение

В настоящей работе была рассмотрена модификация классической задачи о брахистохроне, которая помимо минимизации времени движения предусматривает также минимизацию длины траектории. Для ее решения был синтезирован двухфакторный мультипликативный критерий оптимизации. В процессе исследования поставленной проблемы была детально изучена задача о брахистохроне заданной длины, результаты решения которой позволили определить простейшим образом оптимальную траекторию по принятому двухфакторному критерию. Представленные в статье численные значения и проведенные сопоставления позволяют сделать вывод, что подобные мультипликативные критерии являются адекватными и их целесообразно использовать и при решении прочих задач оптимизации механических систем, где требуется определять наилучший относительный компромисс между несколькими факторами.

Кроме того, был рассмотрен вопрос о построении рационального решения, для которого характерны упрощенная геометрия и удобство при практическом использовании. Показано, что круговой профиль при надлежащем подборе его параметров на основе принятого критерия оптимизации практически не уступает строго оптимальному решению. Поэтому можно рекомендовать построение аналогичных рациональных решений и для многих других задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яковлев В. И. Начала аналитической механики. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 352 с.
2. Голубев Ю. Ф. Брахиохрона с трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 5. С. 41–52.
3. Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю. К задаче о брахистохроне с линейным вязким трением // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2015. № 3. С. 65–69.
4. Sumbatov A. S. Brachistochrone with Coulomb friction as the solution of an isoperimetrical variational problem // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 88. January. Pp. 135–141.



5. **Wensrich C. M.** Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction // *Mechanics Research Communications*. 2004. Vol. 31. No. 2. Pp. 151–159.
6. **Лереза В. П.** Брахистохрона для катящегося цилиндра // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2010. № 1. С. 34–41.
7. **Акуленко Л. Д.** Аналог классической брахистохроны для диска // *Доклады Академии наук*. 2008. Т. 419. № 2. С. 193–196.
8. **Sumbatov A. S.** Problem of the brachistochronic motion of a heavy disk with dry friction // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 99. March. Pp. 295–301.
9. **Legeza V. P.** Brachistochronic motion of a material point on a transcendental surface // *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 3. Pp. 358–366.
10. **Гладков С. О., Богданова С. Б.** К теории пространственной брахистохроны // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 53–60.
11. **Сумбатов А. С.** Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые новые результаты) // *Труды МФТИ*. 2017. Т. 9. № 3. С. 66–75.
12. **Смольников Б. А., Смирнов А. С.** Новый критерий оптимизации в задаче Гомана // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 19–24 августа 2019 г., г. Уфа, Республика Башкортостан, Россия. Сборник трудов в 4-х тт. Т. 1. Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 266–268.
13. **Смирнов А. С., Смольников Б. А.** Оптимизация цепной линии // *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2019–2020*. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2020. С. 35–50.
14. **Гладков С. О., Богданова С. Б.** Аналитическое и численное решение задачи о брахистохроне в некоторых общих случаях // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения». Тематические обзоры*. 2018. Т. 145. С. 114–122.
15. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, рядов и произведений. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 1232 с.
16. **Суворов С. В., Смирнов А. С.** Оценка эффективности оптимальных балочных конструкций // *Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики*. 18 – 23 ноября 2019 г., Санкт-Петербургский политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2019. С. 102–104.
17. **Сикорский Ю. С.** Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.: КомКнига, 2006. 366 с.

REFERENCES

1. **Yakovlev V. I.** The beginnings of analytical mechanics, Institute of Computer Sciences, Moscow, Izhevsk, 2002 (in Russian).
2. **Golubev Yu. F.**, Brachistochrone with friction, *Journal of Computer and Systems Sciences*. 49 (5) (2010) 719–730.
3. **Zarodnyuk A. V., Cherkasov O. Yu.**, Brachistochrone with linear viscous friction, *Moscow University Mechanics Bulletin*. 70 (3) (2015) 70–74.
4. **Sumbatov A. S.**, Brachistochrone with Coulomb friction as the solution of an isoperimetrical variational problem, *Intern. J. Non-Linear Mech.* 88 (January) (2017) 135–141.
5. **Wensrich C. M.**, Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction, *Mech. Res. Commun.* 31 (2) (2004) 151–159.
6. **Legeza V. P.**, Brachistochrone for a rolling cylinder. *Mechanics of Solids*. 45 (1) (2010) 27–33.
7. **Akulenko L. D.**, An analog of the classical brachistochrone for a disk, *Doklady Physics*. 53 (3) (2008) 156–159.
8. **Sumbatov A. S.**, Problem of the brachistochronic motion of a heavy disk with dry friction, *Intern. J. Non-Linear Mech.* 99 (March) (2018) 295–301.
9. **Legeza V. P.**, Brachistochronic motion of a material point on a transcendental surface, *Intern. Appl. Mech.* 56 (3) (2020) 358–366.
10. **Gladkov S. O., Bogdanova S. B.**, The theory of a space brachistochrone, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68 (2020) 53–60 (in Russian).

11. **Sumbatov A. S.**, The problem on a brachistochrone (classification of generalizations and some recent results), Trudy MFTI [Transactions of Moscow Institute of Physics and Technology]. 9 (3) (2017) 66–75 (in Russian).

12. **Smolnikov B. A., Smirnov A. S.**, Novyy kriteriy optimizatsii v zadache Gomana [A new optimization criterion in the Hohmann problem], In book: XII Vserossiyskiy Syezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Sbornik trudov. V 4-kh tomakh. T. 1. Obshchaya i prikladnaya mekhanika [Transactions of “The 12-th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics”, Aug. 19–24, 2019, Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia. The collection of works in 4 Vols., Vol. 1: General and Applied Mechanics, Bash. State Univ. Reg. Inf. Center, Ufa (2019) 266–268 (in Russian).

13. **Smirnov A. S., Smolnikov B. A.**, Catenary optimization, In book: Trudy seminarov «Kompyuternyye metody v mekhanike sploshnoy sredy» [Transactions of the seminar “Computer Methods in Continuum Mechanics”], 2019–2020, Saint-Petersburg University Publishing, St. Petersburg (2020) 35–50 (in Russian).

14. **Gladkov S. O., Bogdanova S. B.**, Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases, J. Math. Sci. 245 (4) (2020) 528–537.

15. **Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.**, Table of integrals, series and products, Translated from Russian, Seventh Edition, Eds. Jeffrey A., Zwillinger D., Elsevier Inc., Amsterdam, Boston, Heidelberg, etc., 2007.

16. **Suvorov S. V., Smirnov A. S.**, Otsenka effektivnosti optimalnykh balochnykh konstruksiy [Performance evaluation of the optimal beam structures], Nedelya nauki SPbPU: materialy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem. Institut prikladnoy matematiki i mekhaniki [Proceedings of the scientific conference “Science Week at SPbPU” with international participation. The Institute of Applied Mathematics and Mechanics], November 18–23, 2019, St. Petersburg Polytechnic University Publishing, St. Petersburg (2019) 102–104 (in Russian).

17. **Sikorskiy Yu. S.**, Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy s prilozheniyami k mekhanike [Elements of the theory of elliptic functions with applications to mechanics]. KomKniga, Moscow, 2006 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СМИРНОВ Алексей Сергеевич – ассистент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия; стажер-исследователь Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
smirnov.alexey.1994@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6148-0322

СУВОРОВ Сергей Викторович – инженер по испытаниям 3-й категории Центрального конструкторского бюро транспортного машиностроения, г. Тверь, Россия.

170003, Россия, г. Тверь, Петербургское шоссе, 45в
suvorovsv96@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7461-2742

THE AUTHORS

SMIRNOV Alexey S.

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
smirnov.alexey.1994@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6148-0322*



SUVOROV Sergei V.

Central Design Bureau of Transport Engineering
45v, Peterburgskoe HWY, Tver, 170003, Russia
suvorovsv96@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7461-2742

*Статья поступила в редакцию 25.01.2022. Одобрена после рецензирования 23.03.2022.
Принята 23.03.2022.*

Received 25.01.2022. Approved after reviewing 23.03.2022. Accepted 23.03.2022.