


Научная статья  
УДК 517.947:534.414  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15212>

## ДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧЕЧНОЙ НАГРУЗКИ НА КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ И НАХОДЯЩИЙСЯ ПОД НЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ВОДОЗАПОЛНЕННЫЙ ОБЪЕМ

Ю. А. Лавров 

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия  
 [lyamm06@rambler.ru](mailto:lyamm06@rambler.ru)

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача определения стационарного поля вынужденных совместных гравитационных движений несжимаемой жидкости в цилиндрическом водоеме и круглой упругой пластины, покрывающей его поверхность. Указанные движения вызываются точечной нагрузкой, совершающей периодические перемещения по внешней поверхности пластины, и представляют собой вынужденные гармонические колебания. Предложена процедура построения аналитического представления для вибрационного поля изгибных смещений пластины. Сформулированы условия возникновения нежелательных механических резонансов. Полученные результаты позволяют находить величины изгибающих моментов и сдвиговых сил при необходимости оценки прочности пластины, а полезны, например, при организации безопасного регулярного движения автомобильного транспорта по слою льда, покрывающего водоем.

**Ключевые слова:** цилиндрический водоем, гравитационное движение жидкости, упругая пластина, движущаяся нагрузка, гармонические колебания


**Для цитирования:** Лавров Ю. А. Действие периодически движущейся точечной нагрузки на круглую пластину и находящийся под ней цилиндрический водозаполненный объем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 2. С 140–147. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15212>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15212>

## THE RESPONSE OF A ROUND PLATE AND A CYLINDRICAL WATER-FILLED VOLUME UNDERNEATH TO A POINT LOAD MOVING PERIODICALLY

Yu. A. Lavrov 

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia  
 [lyamm06@rambler.ru](mailto:lyamm06@rambler.ru)

**Abstract.** The two-dimensional problem of determining the steady-state field of enforced joint gravitational motions of incompressible fluid and a round elastic plate covering its surface has been considered. The motions are caused by a point load moving periodically along the



outer surface of the plate, and refer to enforced harmonic oscillations in the system. A procedure for constructing an exact analytical representation of the vibrational field of the plate's bending displacements was proposed. The unwanted mechanical resonance conditions were formulated. The results obtained make it possible to find bending moments and shear forces, if need be, in assessment of the strength of a plate. Moreover, they may be useful, for instance, in organizing safe regular movement of vehicles on a layer of ice covering a body of water.

**Keywords:** cylindrical reservoir, gravitational fluid motion, elastic plate, moving load, harmonic oscillations

**For citation:** Lavrov Yu. A., The response of a round plate and a cylindrical water-filled volume underneath to a point load moving periodically, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (2) (2022) 140–147. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15212>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Организация безопасного регулярного движения автомобильного транспорта по слою льда, покрывающего водоем, требует адекватной математической модели и предварительных численных экспериментов. В первой половине XX века расчеты, связанные с указанной проблемой, строились по упрощенной схеме, согласно которой слой льда опирается на винклеровское основание. Такой подход полностью оправдал себя при организации «Дороги жизни» по льду Ладожского озера. Вместе с тем, при действии больших вертикальных (под тяжестью транспорта) и горизонтальных (под воздействием ветров) нагрузок на лед модель локально упругой поверхности среды под слоем льда может значительно отклоняться от реального положения вещей.

Ледовая переправа, как правило, предполагает периодическое движение автотранспорта. Частота такого движения обычно существенно меньше низшей из собственных частот системы лед-вода и не может повлечь за собой вредные резонансы. Вместе с тем, ритм колебаний силовой установки транспортного средства может сблизиться с собственной частотой системы, а опасный околорезонансный рост амплитуд колебаний следует предотвращать.

В задачах о гравитационных колебаниях водной среды под слоем льда, которые рассматривались в литературе пятьдесят и более лет назад, имели место, как правило, две среды: идеальная несжимаемая жидкость и упругая ледовая пластина. В последние десятилетия все большее внимание в литературе стало уделяться системам, в которых учитывается влияние дополнительных структур, передвигающихся по поверхности пластины.

Пластина считалась бесконечной в работах [1 – 3], полубесконечной в [4, 5], ограниченной в размерах в [6, 7]. Пластина-полоса как ледовое покрытие бесконечно длинного, водонесущего канала рассматривается в статьях [8, 9]. Влияние трещины в пластине на механические процессы учитывается в работах [3, 10]. Возможность целенаправленного разрушения льда под движущейся нагрузкой, в частности, под аппаратом на воздушной подушке, изучена в публикациях [7, 11]. Дополнительные обстоятельства, усложняющие постановку задачи, учитываются в статьях [2] (неровная поверхность пластины) и [12] (слабонелинейная модель). Решение поставленных задач ведется численными методами в работах [1, 3, 7, 11]. Обширный обзор литературы, а также подходов к решению задачи и анализ достигнутых результатов на тему лед-вода-структура содержится в работе [13]. Обзор подтверждает, что задачам, в постановке которых объем водной среды считается конечным, не уделяется пока должного внимания.

Численные методы, при всей их универсальности, характеризуются двумя недостатками, а именно – высоким расходом вычислительных ресурсов и затруднениями при оценке погрешности получаемых результатов. Первый недостаток ослабляется только по мере совершенствования компьютерной техники, которое не зависит от предметного исследователя. Второй недостаток подконтролен исследователю, если погрешности универсаль-

ных численных методов оцениваются путем сравнения с результатами решения частных эталонных задач, допускающих применение аналитических методов.

В данной работе предлагается аналитическое решение задачи о колебаниях водоема ограниченных размеров, покрытого ледовой пластиной, под действием периодически движущейся, точечной нагрузки.

### Постановка задачи

Идеальная несжимаемая жидкость заполняет цилиндрический объем радиусом  $R$  и высотой  $H$ , где, разумеется, целесообразно использовать цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$0 \leq r < R, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad 0 < z < H.$$

Круглая упругая пластина, покрывающая поверхность жидкости, лежащей вдоль плоскости  $z = H$ , способна только к изгибным колебаниям.

В отрицательном направлении оси  $Oz$  на пластину действует сила  $p$ , гармонически изменяющаяся во времени, представленная в виде

$$p(r, \varphi, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_k t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \sum_{n=n_m}^{+\infty} p_{kmn} f_{mn}(r),$$

где  $t$  – время;  $\omega_k$  – круговая частота,  $\omega_k = 2\pi k / T$  ( $T$  – период действия нагрузки);  $p_{kmn}$  – заданные постоянные коэффициенты;  $f_{mn}(r) = J_m(q_{mn}r) / J_m(j_{mn})$  ( $J_m(x)$  – функция Бесселя,  $q_{mn} = j_{mn} / R$ ,  $j_{mn}$  – корень уравнения  $J'_m(j) = 0$ ;  $J_{00} = 0$ );  $n_0 = 0$ ,  $n_m = 1$  при  $m \neq 0$ .

Поле изгибных смещений пластины  $w(r, \varphi, t)$  и функция  $\psi(r, \varphi, z, t)$ , такая, что  $\frac{\partial \psi(r, \varphi, z, t)}{\partial t}$  есть потенциал скоростей в жидкости, разыскиваются в виде

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_k t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \cdot W_{km}(r),$$

$$\psi(r, \varphi, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_k t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \cdot \Psi_{km}(r, z).$$

Функция  $\Psi_{km}(r, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1 \Psi_{km}(r, z) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}.$$

Нижняя ( $z = 0$ ) и боковая ( $r = R$ ) границы объема являются идеально жесткими, т. е.

$$\left. \frac{\partial \Psi_{km}(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{km}(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \tag{3}$$

Функция  $W_{km}(r)$  подчиняется требованию

$$(\Delta_1^2 - \mu_k^4) W_{km}(r) = \nu_k \Psi_{km}(r, H) - \frac{1}{D_1} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{kmn} f_{mn}(r), \tag{4}$$

где  $\mu_k^4 = (\rho_1 h_1 \omega_k^2 - \rho_0 g) / D_1$  ( $\rho_1$  – плотность материала пластины,  $h_1$  – ее толщина,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения);  $D_1$  – цилиндрическая жесткость,  $D_1 = E_1 h_1^3 / (12(1 - \sigma_1^2))$  ( $E_1$ ,  $\sigma_1$  – соответственно, модуль Юнга и коэффициент Пуассона ма-



териала пластины);  $v_k = \rho_0 \omega_k^2 / D_1$ .

Условие безотрывности смещений пластины и волнений поверхности жидкости имеет вид

$$W_{km}(r) = \left. \frac{\partial \Psi_{km}(r, z)}{\partial z} \right|_{z=H}. \quad (5)$$

Края упругой пластины жестко закреплены, так что

$$\left. \frac{dW_{km}(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0, \quad (6)$$

$$W_{km}(R) = 0. \quad (7)$$

### Построение решения

Искомые функции следует представить в виде

$$\Psi_{km}(r, z) = \sum_{n=n_m}^{+\infty} \psi_{kmn} f_{mn}(r) \frac{\cosh(q_{mn}z)}{\cosh(q_{mn}H)}, \quad (8)$$

$$W_{km}(r) = W_{km0}(r) + W_{km1}(r), \quad (9)$$

$$W_{km1}(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_{km1n} f_{mn}(r), \quad (10)$$

$$W_{km0}(r) = C_{km} \frac{R}{4\mu_k^3} \left( \frac{J_m(\mu_k r)}{J'_m(\mu_k R)} - \frac{I_m(\mu_k r)}{I_m(\mu_k R)} \right), \quad (11)$$

$$W_{km0}(r) = C_{km} \sum_{n=n_m}^{+\infty} \frac{\eta_{mn}}{q_{mn}^4 - \mu_k^4} f_{mn}(r), \quad (12)$$

где  $\eta_{0n} = 1$ ,  $\eta_{mn} = j_{mn}^2 / (j_{mn}^2 - m^2)$  при  $m \neq 0$ ;  $\psi_{kmn}$ ,  $w_{km1n}$ ,  $C_{km}$  – неизвестные пока коэффициенты.

Функции  $W_{km1}(r)$  отводится роль частного решения неоднородного дифференциального уравнения (4), тогда как функция  $W_{km0}(r)$  есть общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего требованию (4).

Представления (8) – (12) удовлетворяют требованиям (1) – (3), (6).

Правая часть выражения (12) построена разложением правой части (11) в ряд по функциям  $f_{mn}(r)$ , и равноценна ей,  $\forall r \in [0, R]$ .

В силу единственности разложения по базису из функций  $f_{mn}(r)$ , требования (4), (5) означают систему уравнений относительно коэффициентов  $\psi_{kmn}$  и  $w_{km1n}$ . При этом в уравнение (4) следует подставить выражение (11), тогда как в (5) подставляется выражение (12).

Решение системы позволяет получить следующие формулы:

$$\psi_{kmn} = C_{km} \frac{\eta_{mn}}{\xi_{kmn}} - \frac{p_{kmn}}{\xi_{kmn} D_1}, \quad (13)$$

$$w_{kmn} = C_{km} \eta_{mn} \left( \frac{1}{\xi_{kmn}} - \frac{1}{q_{mn}^4 - \mu_k^4} \right) - \frac{p_{kmn}}{\xi_{kmn} D_1}, \quad (14)$$

$$\xi_{kmn} = q_{mn} \tanh(q_{mn}H) (q_{mn}^4 - \mu_k^4) - v_k.$$

Из выражения (14) следует, что

$$W_{km}(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_{km} \eta_{mn} - \frac{p_{kmn}}{D_1} \right) \frac{q_{mn} \tanh(q_{mn}H)}{\xi_{kmn}} f_{mn}(r). \quad (15)$$

Слагаемое с  $n = 0$  отсутствует в формуле (15) ввиду несжимаемости жидкости в водоеме. Условие (7) постановки задачи позволяет выразить последний из искомых коэффициентов:

$$C_{km} = \frac{1}{D_1} \cdot \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{mn} \frac{q_{mn} \tanh(q_{mn} H)}{\xi_{kmn}} \right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p_{kmn} \frac{q_{mn} \tanh(q_{mn} H)}{\xi_{kmn}}. \quad (16)$$

Уравнение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{mn} \frac{q_{mn} \tanh(q_{mn} H)}{\xi_{kmn}} = 0 \quad (17)$$

служит для поиска собственных частот колебательной системы водоем – ледовая пластина [14, 15].

При возбуждении процессов на собственных частотах амплитуды колебаний с течением времени неограниченно возрастают, что может повлечь разрушение пластины.

### Численный эксперимент

Путь односточечной нагрузки, движущейся против часовой стрелки относительно центра пластины, задается соотношениями

$$\begin{cases} r = \alpha(t) \\ \varphi = \beta(t) \end{cases},$$

где  $\alpha(t), \beta(t)$  – периодические функции, с периодом  $T$ , непрерывные при  $t \in (-T/2, T/2)$ , такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -T/2+0} \alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow T/2-0} \alpha(t) = R, \\ -\lim_{t \rightarrow -T/2+0} \beta(t) &= \lim_{t \rightarrow T/2-0} \beta(t) = \varphi_0, \\ 0 &< \varphi_0 < \pi, \end{aligned}$$

при этом  $-\varphi_0$  есть полярный угол точки входа нагрузки на пластину, а  $\varphi_0$  есть полярный угол точки схода с нее.

Давление, оказываемое на пластину движущейся точечной нагрузкой, имеет вид

$$p(r, \varphi, t) = F \cdot \delta(r - \alpha(t)) \cdot \delta(\varphi - \beta(t)),$$

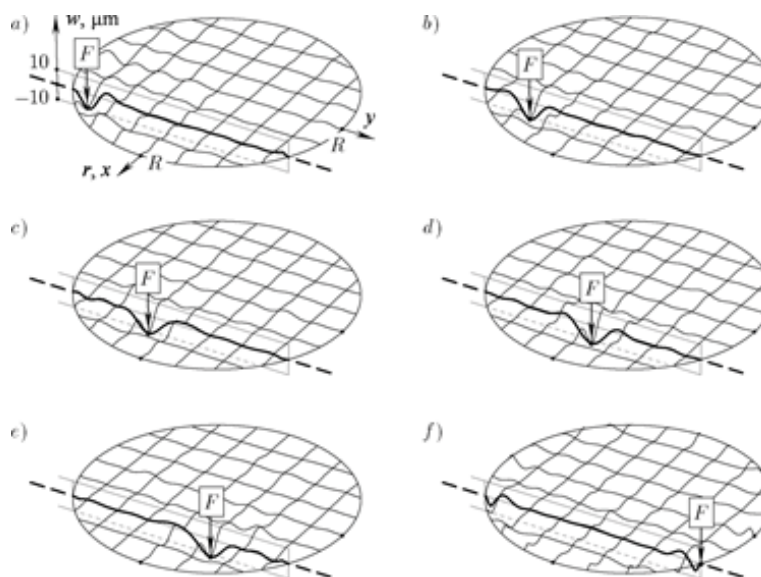
где  $F$  – сила, с которой действует нагрузка;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, следовательно

$$p_{kmn} = F \cdot \left( 2\pi TR \int_0^R j_{mn} J_m^2(j_{mn}) \cdot dr \right)^{-1} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_k t} \cdot e^{-im\beta(t)} \cdot \alpha(t) J_m(q_{mn} \alpha(t)) \cdot dt.$$

Давление, оказываемое на пластину несколькими точечными движущимися нагрузками, количество которых равно  $S$ , может рассматриваться как сумма односточечных давлений, например, в виде

$$p(r, \varphi, t) = \sum_{s=0}^{S-1} F \cdot \delta(r - \alpha(t - sT/S)) \cdot \delta(\varphi - \beta(t - sT/S)).$$

Расчет проводится для случая равномерного движения нагрузки вдоль хорды пластины, перпендикулярной направлению  $\varphi = 0$ , на расстоянии  $r = A$  от ее центра,



Динамика формы изгибных смещений  $w$  пластины радиусом  $R$  в моменты времени  $t = -3\Delta t$  (a),  $-2\Delta t$  (b),  $-\Delta t$  (c),  $0$  (d),  $\Delta t$  (e),  $T/2$  (f), где  $\Delta t = T / (4\sqrt{3})$

$$\alpha(t) = \sqrt{A^2 + (2Bt/T)^2}, \quad \beta(t) = \arctan(2Bt/(AT)), \quad B = \sqrt{R^2 - A^2}.$$

Выбранные значения геометрических и физических параметров таковы:

$$R = 1000 \text{ м}, H = 10 \text{ м}, A = 500 \text{ м}, h_1 = 0,2 \text{ м};$$

$$T = 1000 \text{ с}, F = 1 \text{ Н}, E_1 = 3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_1 = 0,3, \rho_1 = 919,4 \text{ кг/м}^3, \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

На рисунке показаны формы изгибных смещений пластины. Декартова система координат  $Oxy$  стандартным образом совмещена с полярной системой координат  $Or\varphi$ . Стрелками, направленными вертикально вниз, отмечены точки приложения движущейся нагрузки.

### Выводы

Построено аналитическое решение задачи об определении вибрационного поля изгибных смещений пластины  $w(r, \varphi, t)$  под действием точечной нагрузки, периодически движущейся по пластине. Полученное представление для поля позволяет (при необходимости оценки прочности пластины) находить величины изгибающих моментов и сдвиговых сил.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chen K., Tong X. F.** Numerical solution of dynamic responses of moving load on ice sheet // Applied Mechanics and Materials. 2011. Vol. 138–139. November. Pp. 44–49.
2. **Chatterjee M., Chattopadhyay A.** Effect of moving load due to irregularity in ice sheet floating on water // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. No. 5. Pp. 1749–1765.
3. **Xue Y. Z., Zeng L. D., Ni B. Y., Korobkin A. A., Khabakhpasheva T. I.** Hydroelastic response of an ice sheet with a lead to a moving load // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. No. 3. P. 037109.
4. **Коузов Д. П.** Рассеяние гравитационной волны на кромке плавающей пластины // Труды XXV–XXVI летних школ «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем». Т. 2. 1998. СПб.: Ин-т проблем машиноведения РАН. С. 356–364.

5. Стурова И. В. Действие периодического поверхностного давления на ледовый покров в окрестности вертикальной стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 92–101.
6. Стурова И. В. Влияние периодического поверхностного давления на прямоугольную упругую пластину, плавающую на мелководье // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 3. С. 417–426.
7. Жесткая В. Д., Джабраилов М. Р. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3 (289). С. 473–477.
8. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. 2016. Vol. 59. September. Pp. 313–326.
9. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. 2019. Vol. 86. May. Pp. 154–165.
10. Марченко А. В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 2. С. 93–102.
11. Li Y., Liu J., Hu M., Zhang Z. Numerical modeling of ice-water system response based on Rankine source method and finite difference method // Ocean Engineering. 2017. Vol. 138. 1 July. 1. Pp. 1–8.
12. Dinvay E, Kalisch H., Părău E. I. Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 876. 10 October. Pp. 122–149.
13. Ni B., Han, D., Di, S., Xue Y. On the development of ice-water-structure interaction // Journal of Hydrodynamics. 2020. Vol. 32. No. 4. Pp. 629–652.
14. Лавров Ю. А. О свободных гравитационных колебаниях жидкости, заполняющей прямоугольный контейнер с жесткими стенками и упругой крышкой // Труды XXV–XXVI летних школ «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем». Т. 2. 1998. СПб.: Ин-т проблем машиноведения РАН. С. 348–355.
15. Лавров Ю. А. О гравитационных колебаниях жидкости, заполняющей цилиндрический контейнер с упругой крышкой // Труды международной конференции «Численные и аналитические методы расчета конструкций». Самара: Самарская государственная академия строительства и архитектуры, 1998. С. 104–108.

## REFERENCES

1. Chen K., Tong X. F., Numerical solution of dynamic responses of moving load on ice sheet, Appl. Mech. Mater. 138–139 (2011) 44–49.
2. Chatterjee M., Chattopadhyay A., Effect of moving load due to irregularity in ice sheet floating on water, Acta Mech. 228 (5) (2017) 1749–1765.
3. Xue Y. Z., Zeng L. D., Ni B. Y., et al., Hydroelastic response of an ice sheet with a lead to a moving load, Phys. Fluids. 33 (3) (2021) 037109.
4. Kouzov D. P., Rasseyaniye gravitatsionnoy volny na kromke plavayushchey plastiny [Scattering of a gravitational wave at the edge of a floating plate], Transactions of the 25-th – 26-th Summer Schools "Analysis and Synthesis of Nonlinear Mechanical Oscillatory Systems", 1998. Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, St. Petersburg; Vol. 2 (1998) 356–364 (in Russian).
5. Sturova I. V., Action of periodic surface pressure on an ice cover in the vicinity of a vertical wall, J. Appl. Mech. Techn. Phys. 58 (1) (2017) 80–88.
6. Sturova I. V., The effect of periodic surface pressure on a rectangular elastic plate floating on shallow water, J. Appl. Math. Mech. 70 (3) (2006) 378–386.
7. Zhestkaya V. D., Dzhabrailov M. R., Numerical solution of the problem of motion of a load on a cracked ice sheet, J. Appl. Mech. Techn. Phys. 49 (3) (2008) 473–477.
8. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A., The response of ice cover to a load moving along a frozen channel, Appl. Ocean Res. 59 (September) (2016) 313–326.
9. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A., Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel, Appl. Ocean Res. 86 (May) (2019) 154–165.
10. Marchenko A. V., Surface wave diffraction at a crack in sheet ice, Fluid Dynamics. 28 (2) (1993) 230–237.



11. Li Y., Liu J., Hu M., Zhang Z., Numerical modeling of ice-water system response based on Rankine source method and finite difference method, *Ocean Engineering*. 138 (1 July) (2017) 1–8.
12. Dinvay E., Kalisch H., Părău E. I., Fully dispersive models for moving loads on ice sheets, *J. Fluid Mechanics*. 876 (10 October) (2019) 122–149.
13. Ni B., Han D., Di S., Xue Y., On the development of ice-water-structure interaction, *J. Hydrodyn.* 32 (4) (2020) 629–652.
14. Lavrov Yu. A., О свободных гравитационных колебаниях жидкости, заполняющей прямоугольный контейнер с жесткими стенками и упругой крышкой [On free gravitational vibrations of liquid filling a rectangular container with rigid walls and an elastic cover], *Transactions of the 25- th – 26-th Summer Schools "Analysis and Synthesis of Nonlinear Mechanical Oscillatory Systems"*, 1998, Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, St. Petersburg; Vol. 2 (1998) 348–355 (in Russian).
15. Lavrov Yu. A., О гравитационных колебаниях жидкости, заполняющей цилиндрический контейнер с упругой крышкой [On gravitational oscillations of liquid filling a cylindrical container with an elastic cover], *Transactions of the International Conference "Numerical and Analytical Methods for Structures Design"*, Samara State Academy of Architecture and Civil Engineering, Samara (1998) 104–108 (in Russian).

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ЛАВРОВ Юрий Аркадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
lyamm06@rambler.ru  
ORCID: 0000-0001-9626-0461

### THE AUTHOR

**LAVROV Yury A.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
lyamm06@rambler.ru  
ORCID: 0000-0001-9626-0461

*Статья поступила в редакцию 20.03.2022. Одобрена после рецензирования 12.04.2022. Принята 12.04.2022.*

*Received 20.03.2022. Approved after reviewing 12.04.2022. Accepted 12.04.2022.*