

Научная статья

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15315>

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫЙ КЛИН, ОСЛАБЛЕННЫЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. В. Тихомиров ✉

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

✉ victikh@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о полубесконечной антиплоской интерфейсной трещине, находящейся между двумя функционально-градиентными клиновидными областями. Модули сдвига материалов областей являются квадратичными функциями полярного угла. Такой вид функциональной неоднородности позволяет выразить все компоненты упругого поля через одну гармоническую функцию. С помощью интегрального преобразования Меллина проблема сведена к скалярному уравнению Винера – Хопфа, для которого получено точное решение. Изучено влияние градиентов упругих свойств материалов на коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины и показатель сингулярности в угловой точке структуры.

Ключевые слова: функционально-градиентный клин, антиплоская интерфейсная трещина, сингулярность напряжений

Для цитирования: Тихомиров В. В. Функционально-градиентный клин, ослабленный полубесконечной трещиной // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 3. С. 201–213. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15315>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15315>

FUNCTIONALLY GRADED WEDGE WEAKENED BY A SEMI-INFINITE CRACK

V. V. Tikhomirov ✉

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ victikh@mail.ru

Abstract. In the paper, the problem of a semi-infinite antiplane interface crack located between two functionally graded wedge-shaped regions has been considered. The shear modules of the materials' regions are quadratic functions of the polar angle. This kind of functional inhomogeneity made it possible to express all the components of the elastic field through a single harmonic function. Using the Mellin integral transform, the problem was reduced to the Wiener – Hopf scalar equation, for which an exact solution was obtained. The influence of gradients of elastic properties of materials on the stress intensity coefficient at the crack tip and the singularity value at the angular point of the structure was studied.

Keywords: functionally graded wedge, antiplane interface crack, stress singularity

For citation: Tikhomirov V. V., Functionally graded wedge weakened by a semi-infinite crack, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (3) (2022) 201–213. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15315>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) представляют собой композиты, механические и физические свойства которых отражают характеристики их пространственно изменяющейся микроструктуры [1, 2]. Концепция ФГМ появилась в 1980-х годах в Японии, и с тех пор они находят широкое применение в аэрокосмической и ядерной отраслях промышленности, электронике, оптоэлектронике, строительстве и других областях как материалы для преобразования энергии и как биоматериалы [3]. При моделировании ФГМ рассматривают как неоднородные материалы, принимая изменение их свойств непрерывным, и при этом вообще не учитывают их микроструктуру.

Анализ сингулярности полей напряжений в таких материалах является одной из фундаментальных проблем линейной механики разрушения [4]. Вследствие градиента упругих свойств классическая природа сингулярности напряжений (корневая в случае трещин и простая степенная в случае острых вырезов) в ФГМ может модифицироваться [5, 6].

Исследованию разрушения ФГМ посвящено большое число работ в плоской и антиплоской постановках. Ограничиваясь только антиплоскими задачами, отметим, что одной из первых работ этого направления была статья [7], где было показано, что скачок производной модуля сдвига (при сохранении его непрерывности) не оказывает влияния на показатель сингулярности напряжений в вершине трещины.

Сингулярные поля в слоистых структурах с функционально-градиентными элементами, имеющих дефекты типа трещин, ориентированных вдоль или перпендикулярно градиенту модуля сдвига, рассматривались в работах [8 – 11]. Напряженно-деформированное состояние клиновидных областей с градиентными свойствами, включая многоматериальные клинья и острые вырезы, исследовались в статьях [5, 6, 12 – 14].

В аналитических моделях зависимость модуля сдвига ФГМ от координат выбирают из класса функций, для которых уравнения равновесия имеют аналитические решения. Как правило, для модуля сдвига используют линейную или экспоненциальную зависимость. При произвольном изменении упругого модуля можно применять кусочно-линейную и кусочно-экспоненциальную модели [15, 16]. В работе [13] для градиентного материала нами была предложена квадратичная зависимость модуля сдвига от полярного угла, которая в условиях антиплоской задачи позволяет выразить все компоненты упругого поля через одну гармоническую функцию. Данный подход был использован для анализа сингулярности в вершине многоматериального клина [14].

В настоящей работе на основе результатов статьи [13] исследовано напряженное состояние составного клина с градиентными свойствами, изменяющимися квадратичным образом в трансверсальном направлении, ослабленного полубесконечной антиплоской трещиной. Проанализированы эффекты увеличения и уменьшения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины, а также изменения показателя сингулярности в угловой точке клина, по сравнению с однородной структурой, вызванные наличием градиентов упругих свойств материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим полубесконечную интерфейсную трещину моды III, расположенную между двумя клиновидными областями Ω_1 и Ω_2 с углами α_1 и α_2 (рис. 1):

$$\Omega_1 = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \alpha_1\}, \quad \Omega_2 = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty, -\alpha_2 < \theta < 0\},$$

где r, θ – полярные координаты.

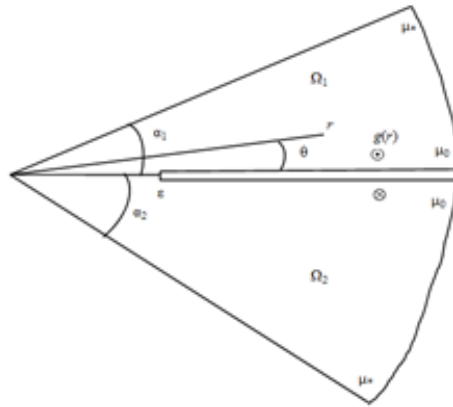


Рис. 1. Функционально-градиентный клин с полубесконечной интерфейсной трещиной продольного сдвига:

μ_1, μ_2 – модули сдвига на границах областей Ω_1 и Ω_2 с градиентными материалами; $\alpha_1, \alpha_2, \theta, r, \varepsilon$ – геометрические параметры; $g(r)$ – самоуравновешенная нагрузка, приложенная к берегам трещины

Материалы в этих областях будем считать функционально-градиентными, модули сдвига которых μ_1 и μ_2 являются функциями полярного угла. При этом функциональные зависимости $\mu_k(\theta)$ ($k = 1, 2$) таковы, что на луче $\theta = 0$ модули упругости одинаковы и равны μ_0 , а на границах $\theta = \alpha_1$ и $\theta = -\alpha_2$ принимают значения μ_* .

Будем считать, что вершина трещины находится на расстоянии ε от вершины композитного клина. К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка $g(r)$. Контакт материалов вне трещины предполагается идеальным.

В областях Ω_k с модулями сдвига, изменяющимися в трансверсальном направлении, уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} + \frac{1}{\mu_k(\theta)r^2} \frac{d\mu_k}{d\theta} \frac{\partial w_k}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

а напряжения выражаются через перемещения \tilde{w}_k по следующим формулам:

$$\tau_{\theta zk} = \frac{\mu_k}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \theta}, \quad \tau_{rzk} = \mu_k \frac{\partial w_k}{\partial r} \quad (k = 1, 2). \quad (2)$$

Рассмотрим квадратичный тип функциональной зависимости модуля сдвига ФГМ от полярного угла, предложенный и апробированный в работе [12]:

$$\mu_k(\theta) = (a_k \theta + b_k)^2, \quad (3)$$

где коэффициенты в данном случае имеют вид

$$a_k = (\sqrt{\mu_*} - \sqrt{\mu_0}) / \alpha_k, \quad b_1 = -b_2 = \sqrt{\mu_0}.$$

Таким образом, на интерфейсе $\theta = 0$ модуль сдвига композита является непрерывным, а его производная по углу θ имеет разрыв.

Разыскивая перемещения в областях Ω_k в виде

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{a_k \theta + b_k} \tilde{w}_k(r, \theta), \quad (4)$$

из уравнений (1) получим, что функции $\tilde{w}_k(r, \theta)$ являются гармоническими:

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Используя формулы (2), приходим к следующим представлениям для напряжений:

$$\begin{aligned}\tau_{\theta zk} &= -\frac{a_k}{r} \tilde{w}_k(r, \theta) + \frac{a_k \theta + b_k}{r} \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial \theta}, \\ \tau_{rzk} &= (a_k \theta + b_k) \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial r}.\end{aligned}\quad (6)$$

Решения уравнений (1) на интерфейсе $\theta = 0$ должны удовлетворять смешанным условиям

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z1}(r, +0) &= \tau_{\theta z2}(r, -0), \quad w_1(r, +0) = w_2(r, -0) \quad (0 \leq r \leq 1), \\ \tilde{\tau}_{\theta z1}(r, +0) &= \tilde{\tau}_{\theta z2}(r, -0) = g(r) \quad (1 \leq r < \infty),\end{aligned}\quad (7)$$

а также граничным условиям на гранях клина

$$\tau_{\theta z1}(r, \alpha_1) = 0, \quad \tau_{\theta z1}(r, -\alpha_2) = 0, \quad (0 \leq r < \infty).\quad (8)$$

Сведение задачи к уравнению Винера – Хопфа и его решение

Решение задачи (1) – (8) в областях Ω_k ищем в виде интегралов Меллина:

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp \quad (k = 1, 2),\quad (9)$$

$$W_k(p, \theta) = [A_k(p) \sin p\theta + B_k(p) \cos p\theta] / (a_k \theta + b_k).$$

Согласно формулам (6), напряжения определяются выражениями

$$\tau_{\theta zk}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta zk}(p, \theta) r^{-p-1} dp,\quad (10)$$

$$T_{\theta zk}(p, \theta) = -a_k [A_k(p) \sin p\theta + B_k(p) \cos p\theta] + (a_k \theta + b_k) p [A_k(p) \cos p\theta - B_k(p) \sin p\theta].$$

В соответствии с условиями регулярности, контур интегрирования L расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2 \quad (\delta_1, \delta_2 > 0).$$

Величины $A_k(p)$ и $B_k(p)$ находятся из граничных условий (7) и (8).

Следуя схеме, реализованной в работе [17], приходим к неоднородному уравнению Винера – Хопфа:

$$F(p) [T_+(p) + G_-(p)] + \mu_0 \varepsilon^{-1} W_-(p) = 0 \quad (p \in L),\quad (11)$$

где

$$T_+(p) = \int_0^1 \tau_{\theta z1}(\varepsilon \rho, +0) \rho^p d\rho, \quad G_-(p) = \int_1^\infty g(\varepsilon \rho) \rho^p d\rho,$$

$$W_-(p) = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} [w_1(\varepsilon \rho, +0) - w_2(\varepsilon \rho, -0)] \rho^p d\rho.$$

Функции $G_-(p)$ и $W_-(p)$ регулярны и не имеют нулей в левой от контура L полуплоскости Ω_- , а $T_+(p)$ – в правой полуплоскости Ω_+ [18]. В качестве контура L можно выбрать мнимую ось.



Коэффициент уравнения (11) имеет вид

$$F(p) = \operatorname{ctg}(\alpha_1 p) \frac{v(\alpha_1 p)}{u(\alpha_1 p)} + \operatorname{ctg}(\alpha_2 p) \frac{v(\alpha_2 p)}{u(\alpha_2 p)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + m^{-1}(m-1)^2 x^{-2} [1 - x \operatorname{ctg}(x)], \\ v(x) &= 1 + (m-1)x^{-1} \operatorname{tg}(x), \quad m = \sqrt{\mu_0/\mu_*}. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметр m характеризует относительную сдвиговую жесткость материала на линии трещины по отношению к материалу на сторонах клина. При $0 < m < 1$ трещина будет находиться в области локально мягкого материала композита, а при $1 < m < \infty$ – в области локально жесткого материала. Случай $m = 1$ отвечает однородному материалу в областях Ω_k . При этом из формул (12) и (13) для коэффициента задачи (11) получается выражение, приведенное в работе [17].

С целью факторизации функции (12), представим ее в следующей форме:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2}{p} K(p), \\ K(p) &= X(p)\Phi(p), \quad X(p) = p \operatorname{ctg}(\alpha_1 p), \\ \Phi(p) &= \frac{1}{2} F_1(p) F_2(p), \quad F_1(p) = \frac{v(\alpha_1 p)}{u(\alpha_1 p)}, \\ F_2(p) &= 1 + \operatorname{tg}(\alpha_1 p) \operatorname{ctg}(\alpha_2 p) \frac{u(\alpha_1 p)v(\alpha_2 p)}{u(\alpha_2 p)v(\alpha_1 p)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что при $\alpha_1 = \alpha_2$ функция $F_2(p) = 2$, а в случае однородной среды функция $F_1(p) = 1$.

Факторизация функции $X(p)$ осуществляется элементарно [18]:

$$\begin{aligned} X(p) &= X_+(p)X_-(p), \\ X_+(p) &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} \frac{\Gamma(1 + p\alpha_1/\pi)}{\Gamma(1/2 + p\alpha_1/\pi)}, \\ X_-(p) &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - \alpha_1 p/\pi)}{\Gamma(1 - \alpha_1 p/\pi)}. \end{aligned} \quad (15)$$

На мнимой оси функции, при $p = it$, функция $\Phi(it)$ непрерывна, не имеет нулей и полюсов, ее индекс равен нулю и при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально стремится к единице. Поэтому, в соответствии с данными работы [18],

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_+(p)}{\Phi_-(p)}, \quad \Phi_{\pm}(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi(t)}{t-p} dt \right] \quad (p \notin L). \quad (16)$$

С учетом четности функции $\Phi(p)$ аналитические функции (16) в областях Ω_+ и Ω_- могут быть представлены в форме

$$\Phi_{\pm}(p) = \exp \left[\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln \Phi(i\xi)}{\xi^2 + p^2} d\xi \right].$$

В результате использования формул (14) – (16), перегруппировки слагаемых в уравнении (11) и применения теоремы Лиувилля [18], получаем:

$$\Phi_+(p)X_+(p)T_+(p) + Q_+(p) = -\frac{\mu_1 p}{2\varepsilon} W_-(p)\Phi_-(p)X_-(p) - Q_-(p) = J(p), \quad (17)$$

где

$$Q_{\pm}(p) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-p} dt, \quad Q(t) = \frac{t}{2} \Phi_-(t)X_-(t)F(t)G_-(t). \quad (18)$$

Если оценить члены в равенстве (16) при $p \rightarrow \infty$, то можно заключить, что единая аналитическая функция $J(p) = const = C$. Эту постоянную определим из уравнения (17) при значении $p = 0$. С учетом формулы (18) находим, что

$$C = C_* G_-(0) - \frac{1}{4\pi i} \int_L \Phi_-(t)X_-(p)F(t)G_-(t)dt, \quad (19)$$

$$C_* = \Phi_+(0)X_+(0) = \sqrt{\frac{3m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{2\alpha_1\alpha_2(m^2 + m + 1)}}.$$

Для вычисления интеграла в формуле (19) воспользуемся теоремой Коши о вычетах. Полюсы подынтегральной функции в левой полуплоскости являются полюсами $F(t)$. Из представления (12) вытекает, что они определяются отрицательными корнями уравнения

$$mx^2 \sin x + (m - 1)^2 (\sin x - x \cos x) = 0,$$

расположенными в интервалах

$$-(n + 0,5)\pi < -x_n < -n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Существуют две группы полюсов: $t_{nj} = -x_n/\alpha_j$ ($j = 1, 2$).

Будем считать, что к берегам трещины приложены сосредоточенные силы величиной T_0 на расстоянии r_0 от вершины клина. В этом случае

$$g(r) = -T_0 \delta(r - r_0),$$

где $\delta(r - r_0)$ – дельта-функция Дирака, а

$$G_-(p) = -T_0/\varepsilon(r_0/\varepsilon)^p.$$

В результате из формулы (19) получаем, что

$$C = \frac{T_0}{\varepsilon} \left[C_* + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\pi}} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} \left(\frac{\varepsilon}{r_0} \right)^{x_n/\alpha_j} \right], \quad (20)$$

где

$$a_{nj} = \frac{1}{\alpha_j} \frac{\Gamma(1/2 - \alpha_1 t_{nj}/\pi)}{\Gamma(1 - \alpha_1 t_{nj}/\pi)} \Phi_-(t_{nj}) b(x_n),$$

$$b(x_n) = \frac{x_n \cos x_n + (m - 1) \sin x_n}{x_n \cos x_n + (m + m^{-1}) \sin x_n}.$$

Применяя методику, основанную на теореме абелева типа [18] (использована в работе [17]), заключаем, что асимптотика напряжений на линии трещины при $r \rightarrow \varepsilon - 0$ имеет вид

$$\tau_{\theta z1}(r) \sim C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - r}}. \quad (21)$$



Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины формулой

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \varepsilon - 0} \sqrt{2\pi(\varepsilon - r)} \tau_{\theta z_1}(r).$$

Тогда, используя асимптотику (21), получаем:

$$K_{III}(\alpha_1, \alpha_2, m, \varepsilon/r_0) = \sqrt{2\varepsilon} C. \quad (22)$$

С целью выявления эффекта, вносимого градиентом материала, введем в рассмотрение нормированный КИН вида

$$N = K_{III}/K_{III}^0,$$

где K_{III}^0 – КИН в вершине трещины, расположенной в однородном клине.

Такой КИН, согласно работе [17], в случае геометрической симметрии, т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, имеет вид

$$K_{III}^0 = T_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \frac{r_0^{\pi/(2\alpha)}}{\sqrt{r_0^{\pi/\alpha} - \varepsilon^{\pi/\alpha}}}. \quad (23)$$

Из формул (20) – (23) следует, что при малых расстояниях между вершиной трещины и угловой точкой клина трещина ведет себя нестабильно как в однородной, так и градиентной среде, поскольку $K_{III} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Зависимость нормированного КИН в вершине трещины, находящейся в составной функционально-градиентной полуплоскости при $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, от относительного расстояния ε/r_0 для различных значений относительной сдвиговой жесткости приведена на рис. 2. В случае $m < 1$ наличие градиента упругих свойств приводит к существенному снижению величины КИН, по сравнению с однородным материалом. При этом уменьшение параметра m приводит к все более заметной разнице в величинах КИН для неоднородного и однородного случаев. Напротив, ужесточение материала на луче $\theta = 0$ ($m > 1$) вызывает возрастание КИН в вершине трещины. Указанные тенденции поведения нормированного КИН имеют место при всех других углах раствора клина (рис. 3).

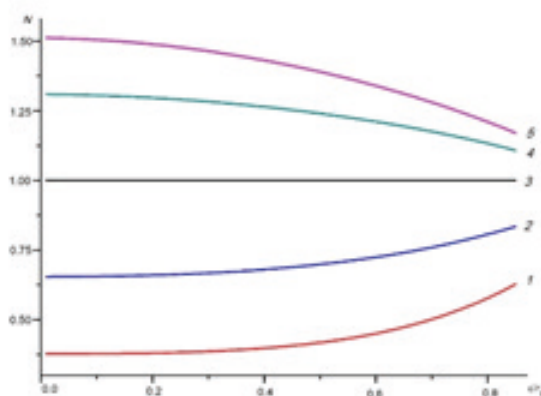


Рис. 2. Зависимости нормализованного КИН в вершине трещины, находящейся в градиентной полуплоскости при $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$, от параметра ε/r_0 для различных значений относительной сдвиговой жесткости m : 0,25 (1), 0,50 (2), 1,0 (3), 2,0 (4), 4,0 (5)

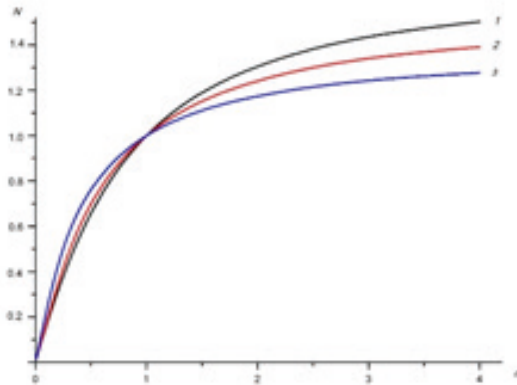


Рис. 3. Зависимости нормализованного КИН в вершине трещины от относительной сдвиговой жесткости m при $\varepsilon/r_0 = 0,5$ для различных значений угла $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$: 30° (1), 90° (2), 180° (3)

Сингулярность напряжений в вершине клина

Исследуем поля напряжений в вершине клина при $r \rightarrow 0$. На луче $\theta = 0$ касательные напряжения имеют вид

$$\tau_{\theta z_j}(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [T_+(p) + G_-(p)] \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp. \quad (24)$$

Из уравнения (11) и равенств (14), (17) для подынтегральной функции получаем следующее представление:

$$T_+(p) + G_-(p) = \frac{2[C + Q_-(p)]}{pK_-(p)F(p)}.$$

Исходя из данного представления и используя формулы (12), (13) и (24), для напряжений на отрезке $0 < r < \varepsilon$, при $\theta = 0$, приходим к выражению

$$\tau_{\theta z_j}(r, 0) = \frac{1}{m\pi i} \int_L Y(p) \frac{u_*(\alpha_1 p)u_*(\alpha_2 p)}{\Delta(p)} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp, \quad (25)$$

где

$$Y(p) = \frac{C + Q_-(p)}{p^2 X_-(p) \Phi_-(p)},$$

$$u_*(x) = mx^2 \sin x + (m-1)^2 (\sin x - x \cos x),$$

$$v_*(x) = x \cos x + (m-1) \sin x.$$

Полюсы подынтегральной функции в формуле (25), лежащие в левой от контура L полуплоскости, определяются корнями уравнения

$$\Delta(p) = \alpha_1 u_*(\alpha_2 p) v_*(\alpha_1 p) + \alpha_2 u_*(\alpha_1 p) v_*(\alpha_2 p) = 0. \quad (26)$$

Функция $\Delta(p)$ является целой функцией, имеющей в точке $p = 0$ нуль четвертого порядка. Однако при $m > 0$ эта точка является устранимой особой точкой и в качестве контура L в равенстве (25) может быть взята мнимая ось. В силу четности функции $\Delta(p)$, каждому положительному корню p_k уравнения (26) отвечает отрицательный корень $p_{-k} = -p_k$. Поскольку при замене α_1 на α_2 , а α_2 на α_1 эта функция не меняет своего вида, в дальнейшем достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha_1 \geq \alpha_2$.



Применяя к интегралу (25) теорему о вычетах в отрицательных полюсах подынтегральной функции, приходим к представлению напряжений при $r \rightarrow 0$ в виде

$$\tau_{0z}(r, 0) = D_1(p_1, \alpha_1, \alpha_2, m) \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\gamma_1} + D_2(p_2, \alpha_1, \alpha_2, m) \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\gamma_2} + \dots, \quad (27)$$

где $\gamma_k = -1 + p_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Отсюда видно, что напряжения в вершине клина будут сингулярными, если при данных значениях параметров α_1 , α_2 и m существуют корни $0 < p_k < 1$.

В случае геометрически симметричной структуры, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, из формул (25) и (26) следует, что числа p_k являются корнями уравнения

$$v_*(x) = x \cos x + (m - 1) \sin x = 0 \quad (x = \alpha p, \alpha \leq \pi). \quad (28)$$

Комплексных корней это уравнение не имеет, и при любом $0 < m < \infty$ существует единственный корень на промежутке $(0, \pi)$, причем $0 < x_1 \leq \pi/2$ для $m \leq 1$ и $\pi/2 < x_1 < \pi$ для $m > 1$. При уменьшении параметра относительной сдвиговой жесткости m от единицы до нуля первый корень $p_1 = x_1/\alpha$ тоже уменьшается от $\pi/(2\alpha)$ до нуля. С изменением величины m от единицы до бесконечности (т. е. при ужесточении срединной области клина) этот корень возрастает от $\pi/(2\alpha)$ до π/α . Зависимость показателя особенности $\gamma = \gamma_1$ от угла α приведена на рис. 4. Он показывает, что при $m \geq 1$ особенность в вершине клина может быть только слабой ($0 < |\gamma| < 1/2$) и возникает только для углов α , превышающих 90° , как и в однородном материале. С возрастанием параметра m этот показатель, по сравнению с однородным случаем, становится меньше, а диапазон углов, при которых имеет место особенность, сужается. В отличие от однородного случая, в градиентном материале при $m < 1$ половинные углы раствора клина, при которых возникает сингулярность, становятся острыми, а сама сингулярность может быть как слабой, так и сильной ($1/2 < |\gamma| < 1$).

Анализируя общую ситуацию, когда $\alpha_1 > \alpha_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi$, рассмотрим ряд предельных случаев.

В случае однородного клина ($m = 1$) из формул (25) и (26) следует, что характеристическое уравнение принимает вид $\sin(\alpha_1 + \alpha_2)p = 0$, первый корень которого определяет классическую особенность

$$\gamma_1 = -1 + \pi / (\alpha_1 + \alpha_2),$$

возникающую при условии $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$.

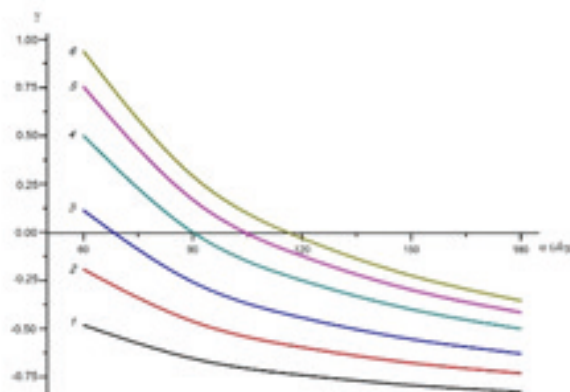


Рис. 4. Зависимости показателя особенности γ в вершине функционально-градиентного клина от угла $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ для различных значений параметра относительной жесткости m :

0,10 (1), 0,25 (2), 0,50 (3), 1,0 (4), 2,0 (5), 4,0 (6)

При больших значениях параметра m уравнение (26) можно записать в виде

$$\alpha_1 f(\alpha_2 p) \sin \alpha_1 p + \alpha_1 f(\alpha_1 p) \sin \alpha_2 p = 0, \quad (29)$$

$$f(x) = \sin x - x \cos x. \quad (30)$$

Первый положительный нуль x_* функции (30) лежит в интервале $(\pi, 3\pi/2)$, причем $f(x) > 0$ для $0 < x < x_*$ и $f(x) < 0$ для $x_* < x < 2\pi$. Отсюда следует, что при $m \gg 1$ и углах $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq \pi$ уравнение (29) на промежутке $(0, 1)$ корней не имеет и, следовательно, сингулярность в угловой точке отсутствует. Для углов $x_* \leq \alpha_1 < 2\pi$ и $0 < \alpha_2 < 2\pi - x_*$ ($x_* = 1,4302967\pi$) и больших значений m уравнение (29) имеет единственный корень $1/2 < p_1 < 1$, порождающий слабую особенность в угловой точке. Наличие корня $p_1 < 1$ при $\pi < \alpha_1 < x_*$ проверяется численно.

В случае, когда относительная жесткость $m \rightarrow 0$, уравнение (26) принимает вид

$$f(\alpha_1 p) f(\alpha_2 p) = 0, \quad (31)$$

а функция $u_*(\alpha_1 p) u_*(\alpha_2 p) / \Delta(p)$, входящая в интеграл (25), стремится к единице. Однако в действительности малые значения параметра $m = \sqrt{\mu_0 / \mu_*}$ должны превышать некую величину $m_* > 0$. Вместе с тем, предельное уравнение (31) показывает, что при достаточно малых m первый корень располагается вблизи нуля. Кроме того, в случае острых вырезов, у которых углы удовлетворяют условиям $x_* \leq \alpha_1 < 2\pi$, $0 < \alpha_2 < 2\pi - x_*$ существует еще второй корень уравнения (26), меньший единицы. Например, при $\alpha_1 = 3\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/6$ и $m = 0,10$ существуют два корня: $p_1 = 0,3379652$ и $p_2 = 0,9599646$. Асимптотика (27) будет содержать два сингулярных слагаемых. Следует отметить, что сингулярность, порождаемая вторым корнем, является весьма слабой. Как показывает численный анализ, это свойство сохраняется и при других значениях параметров структуры.

Далее рассмотрим более детально два частных случая. Во-первых, случай функционально-градиентной полуплоскости с полубесконечным разрезом, когда $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ ($\alpha_1 \geq \alpha_2$). Анализ показывает, что при $m \geq 1$ сингулярность напряжений отсутствует, а при $m < 1$ асимптотика напряжений в точке $r = 0$ имеет одно сингулярное слагаемое. На рис. 5 показана зависимость величины $\gamma_1 = \gamma$ от параметра относительной сдвиговой жесткости для различных значений углов α_1 и α_2 . Видно, что неоднородность материала при $m < 1$ приводит к возникновению на гладкой границе полуплоскости сингулярных напряжений в точке $r = 0$. При этом сингулярность может быть как слабой, так и сильной (для достаточно малых m). Асимметрия расположения трещины вызывает некоторое ослабление сингулярности.

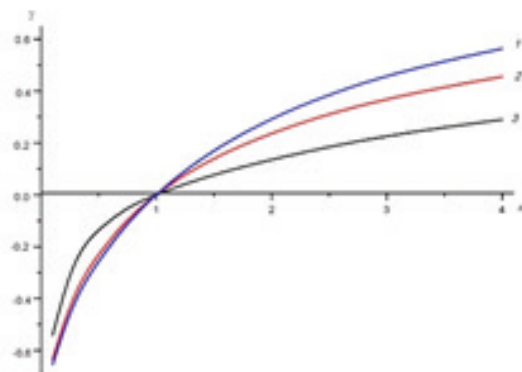


Рис. 5. Зависимости показателя особенности γ в точке $r = 0$ функционально-градиентной полуплоскости от относительной сдвиговой жесткости m для различных значений углов:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ \text{ (1); } \alpha_1 = 120^\circ, \alpha_2 = 60^\circ \text{ (2); } \alpha_1 = 150^\circ, \alpha_2 = 30^\circ \text{ (3)}$$



В случае функционально-градиентной плоскости с двумя трещинами-разрезами ($\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, $\alpha_1 \geq \alpha_2$) уравнение (26) на промежутке $(0, 1)$ может иметь один или два корня. Например, если трещины коллинеарны ($\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$), то на этом промежутке существует только один корень, порождающий сильную сингулярность напряжений в вершине ненагруженной трещины при $m < 1$ и слабую сингулярность при $m > 1$. В случае ортогональных трещин, когда $\alpha_1 = 3\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$, при $m > 1$ характеристическое уравнение имеет только один корень $1/2 < p_1 < 1$, а при $m < 1$ – два корня: $0 < p_1 < 1/2 < p_2 < 1$. При этом второй весьма близок к единице и определяет слабую сингулярность.

Заключение

В данной работе с помощью метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи о равновесии составного функционально-градиентного клина, ослабленного полубесконечной интерфейсной трещиной продольного сдвига, берега которой нагружены самоуравновешенными силами. Предполагалось, что градиентные свойства материалов квадратичным образом зависят от угловой координаты. Проведен анализ влияния параметров структуры на КИН в вершине трещины. Показано, что при стремлении к нулю расстояния от вершины трещины до угловой точки клина трещина становится нестабильной. Градиентные свойства материалов могут существенно влиять на величину КИН. В случае, когда срединная область клина, где расположена трещина, является относительно более мягкой, по сравнению с областями вблизи его кромок, КИН значительно снижается по отношению к его значению в однородном материале. Наоборот, ужесточение данной области вызывает повышение КИН, по сравнению с однородным случаем.

Проблема сингулярности напряжений в вершине функционально-градиентного клина имеет ряд особенностей, по сравнению со случаем однородной структуры. В отличие от однородного материала, при достаточно больших значениях относительной сдвиговой жесткости, даже в случаях острых вырезов не возникает сингулярности напряжений в их вершине. С другой стороны, в функционально-градиентных клиньях с острыми углами раствора и мягкой срединной частью, напряжения в вершине могут иметь неограниченный рост. Кроме того, при значениях параметра относительной жесткости, меньших единицы, существуют такие величины углов раствора клиновидной области, при которых асимптотика напряжений вблизи ее вершины будет иметь два сингулярных слагаемых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jin Z.-H., Batra R.C. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 1996. Vol. 44. No. 8. Pp. 1221–1235.
2. Abotula A., Kidane A., Chalivendra V. B., Shukla A. Dynamic curving cracks in functionally graded materials under thermomechanical loading // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. No. 4. Pp. 583–593.
3. Mostefa A. H., Merdai S., Mahmoudi N. An overview of functionally graded materials ‘FGM’ // Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development. Edited by Abdelbaki B., Safi B., Saidi M. Springer Cham, 2018. Pp. 267–278.
4. Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Westerhardt and Irwin until today // Engineering Fracture Mechanics. 2009. Vol. 76. No. 12. Pp. 1771–1784.
5. Carpinteri A., Paggi M. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // International Journal of Fracture. 2005. Vol. 135. No. 1–4. Pp. 267–283.
6. Cheng C. Z., Ge S. Y., Yao S. I., Niu Z. R., Recho N. Singularity analysis for a V-notch with angularly inhomogeneous elastic properties // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 78–79. No. 1. Pp. 138–148.
7. Erdogan F. Crack problems for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading // Journal of Applied Mechanics. 1985. Vol. 52. No. 4. Pp. 823–828.
8. Erdogan F., Ozturk M. Periodic cracking of functionally graded coatings // International Journal of Engineering Science. 1995. Vol. 33. No. 15. Pp. 2179–2195.
9. Jin Z.-H., Batra R. C. Interface cracking between functionally graded coatings and a substrate

under antiplane shear // *International Journal of Engineering Science*. 1996. Vol. 34. No. 15. Pp. 1705–1716.

10. **Li Y.-D., Lee K. Y.** An antiplane crack perpendicular to the weak/microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear nonhomogeneities // *International Journal of Fracture*. 2007. Vol. 146. No. 4. Pp. 203–211.

11. **Pan H., Song T., Wang Z.** An analytical model for collinear cracks in functionally graded materials with general mechanical properties // *Composite Structures*. 2015. Vol. 132. No. 15. Pp. 359–371.

12. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.** Evaluation of stress concentration in multiwedge systems with functionally graded wedges // *International Journal of Engineering Science*. 2012. Vol. 61. No. 1. Pp. 87–93.

13. **Тихомиров В. В.** Сингулярность напряжений в вершине композитного клина с внутренним функционально-градиентным материалом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2015. № 3 (225). С. 96–106.

14. **Makhorkin M. I., Skrypochka T. A., Torskyu A. R.** The stress singularity order in a composite wedge of functionally graded materials under antiplane deformation // *Mathematical Modelling and Computing*. 2020. Vol. 7. No. 1. Pp. 39–47.

15. **Wang Y.-S., Huang G.-Y., Dross D.** On the mechanical modeling of functionally graded interfacial zone with Griffith crack: antiplane deformation // *Journal of Applied Mechanics*. 2003. Vol. 70. No. 5. Pp. 676–680.

16. **Guo L.-C., Noda N.** Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties – piecewise-exponential model // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. No. 15. Pp. 6768–6790.

17. **Тихомиров В. В.** Полубесконечная трещина моды III в биматериальном клине // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2016. № 2 (242). С. 126–135.

18. **Noble B.** Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations. New York, London: Pergamon Press, 1958. 246 p.

REFERENCES

1. **Jin Z.-H., Batra R. C.**, Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials, *J. Mech. Phys. Sol.* 44 (8) (1996) 1221–1235.

2. **Abotula A., Kidane A., Chalivendra V. B., Shukla A.**, Dynamic curving cracks in functionally graded materials under thermomechanical loading, *Int. J. Solids Struct.* 49 (4) (2012) 583–593.

3. **Mostefa A. H., Merdai S., Mahmoudi N.**, An overview of functionally graded materials ‘FGM’, In book: *Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development*, Ed. by Abdelbaki B., Safi B., Saidi M. Springer Cham (2018) 267–278.

4. **Carpinteri A., Paggi M.**, Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Westerhardt and Irwin until today, *Eng. Fract. Mech.* 76 (12) (2009) 1771–1784.

5. **Carpinteri A., Paggi M.**, On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials, *Int. J. Fract.* 135 (1–4) (2005) 267–283.

6. **Cheng C. Z., Ge S. Y., Yao S. I., et al.**, Singularity analysis for a V-notch with angularly inhomogeneous elastic properties, *Int. J. Solids Struct.* 78–79 (1) (2016) 138–148.

7. **Erdogan F.**, Crack problems for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading, *J. Appl. Mech.* 52 (4) (1985) 823–828.

8. **Erdogan F., Ozturk M.**, Periodic cracking of functionally graded coatings, *Int. J. Eng. Sci.* 33 (15) (1995) 2179–2195.

9. **Jin Z.-H., Batra R. C.**, Interface cracking between functionally graded coatings and a substrate under antiplane shear, *Int. J. Eng. Sci.* 34 (15) (1996) 1705–1716.

10. **Li Y.-D., Lee K. Y.**, An antiplane crack perpendicular to the weak/microdiscontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear nonhomogeneities, *Int. J. Fract.* 146 (4) (2007) 203–211.

11. **Pan H., Song T., Wang Z.**, An analytical model for collinear cracks in functionally graded materials with general mechanical properties, *Compos. Struct.* 132 (15) (2015) 359–371.

12. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.**, Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges, *Int. J. Eng. Sci.* 61 (1) (2012) 87–93.



13. **Tikhomirov V. V.**, Stress singularity in a top of the composite wedge with internal functionally graded material, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3 (225)) (2015) 96–106.
14. **Makhorkin M. I., Skrypochka T. A., Torsky A. R.**, The stress singularity in a composite wedge of functionally graded materials under antiplane deformation, Math. Model. Comput. 7 (1) (2020) 39–47.
15. **Wang Y.-S., Huang G.-Y., Dross D.**, On the mechanical modeling of functionally graded interfacial zone with Griffith crack: antiplane deformation, J. Appl. Mech. 70 (5) (2003) 676–680.
16. **Guo L.-C., Noda N.**, Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties – piecewise-exponential model, Int. J. Solids Struct. 44 (15) (2007) 6768–6790.
17. **Tikhomirov V. V.**, A semi-infinite crack of mode III in the bimaterial wedge, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2 (242)) (2016) 126–135.
18. **Noble B.**, Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations, Pergamon Press, New York, London, 1958.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9655-5817

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
victikh@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9655-5817

Статья поступила в редакцию 29.04.2022. Одобрена после рецензирования 30.08.2022. Принята 30.08.2022.

Received 29.04.2022. Approved after reviewing 30.08.2022. Accepted 30.08.2022.