Математика

Научная статья
УДК 537.213, 537.612, 517.5
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16213

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ, НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ С ЗАДАННЫМ ВЕСОМ

А. С. Бердников [1] ✉, К. В. Соловьев [2,1]

[1] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

✉ asberd@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются численные алгоритмы для определения коэффициентов многочленов с фиксированным старшим коэффициентом, которые обеспечивают на заданном интервале минимальное отклонение от нуля в минимаксной норме с заданной весовой функцией. Указанные многочлены служат полезным инструментом во многих численных методах, в частности в тау-методе Ланцоша, обеспечивающего нахождение приближенного численно-аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде многочленов от независимой переменной. Частным случаем таких многочленов являются хорошо известные многочлены Чебышева, определяемые аналитически, однако в большинстве случаев весовых функций такие многочлены можно определить и табулировать только численно.

Ключевые слова: минимаксная норма, многочлен Чебышева, оптимальная аппроксимация, интерполяция, численный алгоритм

Финансирование: Работа выполнена в Институте аналитического приборостроения РАН (г. Санкт-Петербург, Россия) в рамках темы FFZM-2022-0009 (номер гос. регистрации 122040600002-3) государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-01157-23-00 от 29.12.2022.

Для цитирования: Бердников А. С., Соловьев К. В. Численный алгоритм для конструирования многочленов, наименее отклоняющихся от нуля с заданным весом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 2. С. 146–160. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.16213

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16213

A NUMERICAL ALGORITHM FOR SYNTHESIZING THE POLYNOMIALS DEVIATING LEAST FROM ZERO WITH A GIVEN WEIGHT

A. S. Berdnikov [1] ✉, K. V. Solovyev [2,1]

[1] Institute for Analytical Instrumentation, RAS, St. Petersburg, Russia;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ asberd@yandex.ru

Abstract. The article considers numerical algorithms for determining the coefficients of polynomials with a fixed leading coefficient, the algorithms supplying a minimum deviation from zero in a minimax norm with a given weight function. The polynomials serve as a useful tool in many numerical methods, in particular, in the Lanczos' tau method which provides an approximate numerical analytic solution of ordinary differential equations with coefficients as polynomials in the independent variable. The well-known Chebyshev polynomials determined analytically are the special case of such polynomials, however, in most cases of weight functions, such polynomials can only be determined and tabulated numerically.

Keywords: minimax norm, Chebyshev polynomial, optimal approximation, interpolation, numerical algorithm

Funding: The reported study was carried out at Institute for Analytical Instrumentation, RAS (St. Petersburg, Russia) within the framework of the theme FFZM-2022-0009 (State registration No. 122040600002-3) of the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. 075-01157-23-00 dated 29.12.2022.

For citation: Berdnikov A. S., Solovyev K. V., A numerical algorithm for synthesizing the polynomials deviating least from zero with a given weight, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (2) (2023) 146–160. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.16213

Введение

Применение аппроксимаций функций, оптимальных по минимаксной (равномерной) норме, имеет существенные преимущества перед более простой аппроксимацией функций по методу наименьших квадратов [1]. Для приближенного конструирования подобных аппроксимаций часто используют разложение функции в усеченный ряд, состоящий из многочленов, наименее отклоняющихся от нуля [2, 3, 5 – 7]. Кроме того, многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, оказываются полезными при оптимальном выборе точек коллокации для интерполяции функций многочленами (эти точки есть нули соответствующих многочленов [1]), а также при построении приближенных решений для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде многочленов от независимой переменной [1, 2, 4].

К сожалению, набор многочленов, наименее отклоняющихся от нуля на заданном интервале, для которых имеется явное алгебраическое представление в аналитичекой форме, не слишком велик. В данной работе исследуется уточненный вариант быстро сходящегося численного алгоритма для вычисления коэффициентов многочленов, наименее отклоняющихся от нуля на заданном интервале с заданным весом, который частично был рассмотрен в докладе [8].

Многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля

Задача о построении многочлена заданной степени, наименее отклоняющегося от нуля на заданном интервале с заданным весом, выглядит следующим образом. Пусть имеется непрерывная функция $f(x)$ и конечный интервал $[a, b]$, для которого задана непрерывная весовая функция $q(x)$, строго положительная на этом интервале; однако исключениями могут быть концы интервала, где функция $q(x)$ может обращаться в нуль [1]. Требуется найти многочлен степени n вида

[1] Для весовой функции с нулями внутри интервала $[a, b]$ потребуется, чтобы максимумы и минимумы Чебышева (и пробные точки для численного алгоритма) не совпадали с нулями весовой функции, а знаки попеременных максимумов и минимумов изменялись в соответствии со знаком весовой функции. Также интервал $[a, b]$ может быть бесконечным справа и/или слева, но при этом весовая функция $q(x)$ должна стремиться к нулю на бесконечности не медленнее, чем степенная функция $1/x^k$ [5 – 7].

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad (1)$$

с заранее неопределенными коэффициентами a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} и старшим коэффициентом $a_n = 1$, который является решением оптимизационной задачи

$$\max |q(x)p(x)| \to \min. \qquad (2)$$

Здесь максимизация выполняется по переменной $x \in [a, b]$, а минимизация – по коэффициентам a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}. Такой многочлен называется многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на интервале $[a, b]$ с весом $q(x)$.

Наименьшее отклонение от нуля на интервале $[-1, +1]$ с весом $q(x) = 1$ обеспечивают многочлены Чебышева первого рода

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)],$$

которые масштабируются с помощью множителя 2^{-n} таким образом, чтобы старший коэффициент многочлена был равен единице. Наименьшее отклонение от нуля на интервале $[-1, +1]$ с весом $q(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ обеспечивают масштабированные многочлены Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \sin[(n+1)\arccos(x)]/(1 - x^2)^{1/2}.$$

Многочлены степени n, обеспечивающие наименьшее отклонение от нуля на интервале $[0, 1]$ с весом $q(x) = x$, получаются при выделении множителя в виде весовой функции из многочленов Чебышева первого рода степени $n + 1$, для которых надо выполнить такую замену аргумента $x \to ax + b$, чтобы интервал $[x_a + 1]$ значений аргумента отобразился на интервал $[0, 1]$, где

$$x_a = \cos[\pi(2n + 1)/(2n + 2)]$$

– это минимальный нуль функции $T_{n+1}(x)$.

Многочлены степени n, обеспечивающие наименьшее отклонение от нуля на интервале $[0, 1]$ с весом $q(x) = x(1 - x)$, получаются при выделении множителя в виде весовой функции из многочленов Чебышева первого рода степени $n + 2$, для которых надо выполнить такую замену аргумента $x \to ax + b$, чтобы интервал $[x_b, x_c]$ значений аргумента отобразился на интервал $[0, 1]$, где

$$x_b = \cos[\pi(2n + 3) / (2n + 4)] \text{ и } x_c = \cos[\pi / (2n + 4)]$$

– это минимальный и максимальный нули функции $T_{n+2}(x)$.

В книгах [6, 7] приведены и другие примеры многочленов, наименее отклоняющихся от нуля, но в целом таких многочленов, для которых имеются явные алгебраические выражения, известно крайне мало.

Критерий Чебышева

Фундаментальные свойства многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, определяются следующим утверждением.

Утверждение 1 (критерий Чебышева для многочленов, наименее отклоняющихся от нуля). *Для того чтобы многочлен $p(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, был решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой набор из $n + 1$ точек $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, принадлежащих интервалу $[a, b]$, и такое число ε (положительное либо отрицательное), чтобы были выполнены условия*

$$-|\varepsilon| \le q(x)p(x) \le |\varepsilon| \text{ при } x \in [a, b], \qquad (3)$$

$$q(x_k)p(x_k) = (-1)^k\varepsilon \text{ при } k = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Данный критерий является частным случаем более общего утверждения о равномерных аппроксимациях дробно-рациональными функциями, которые были исследованы П. Л. Чебышевым в его мемуарах [17] (см. также работы [6, 7]). Мемуары не были опубликованы, поэтому точную дату, когда был получен данный результат, установить достаточно сложно. Следует отметить, что задачей о наилучшем равномерном приближении многочленами П. Л. Чебышев активно интересовался и ранее (см., например, работу [16]), а к идеям, высказанным в [17], он неоднократно возвращался впоследствии (см., например, его труды [18]).

Далее приводится современное доказательство критерия Чебышева для многочленов, наименее отклоняющихся от нуля, которое для удобства изложения разбито на несколько вспомогательных утверждений 2 – 6: оценка нормы (2) сверху и снизу, существование оптимального решения, достаточность критерия Чебышева, необходимость критерия Чебышева, единственность решения.

Очевидно, что при выполнении условий (3), (4) справедиво равенство $\max |q(x)p(x)| = |\varepsilon|$. Точки $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ интервала $[a, b]$ с чередующимися положительными минимумами и отрицательными максимумами, равными по абсолютной величине максимуму модуля исследуемой функции, называются альтернансом Чебышева. Согласно теореме Чебышева об альтернансе [6, 7, 16 – 20], рассматриваемое условие является необходимым и достаточным, чтобы многочлен $p(x)$ был решением оптимизационной задачи (2), причем такое решение всегда существует и является единственным.

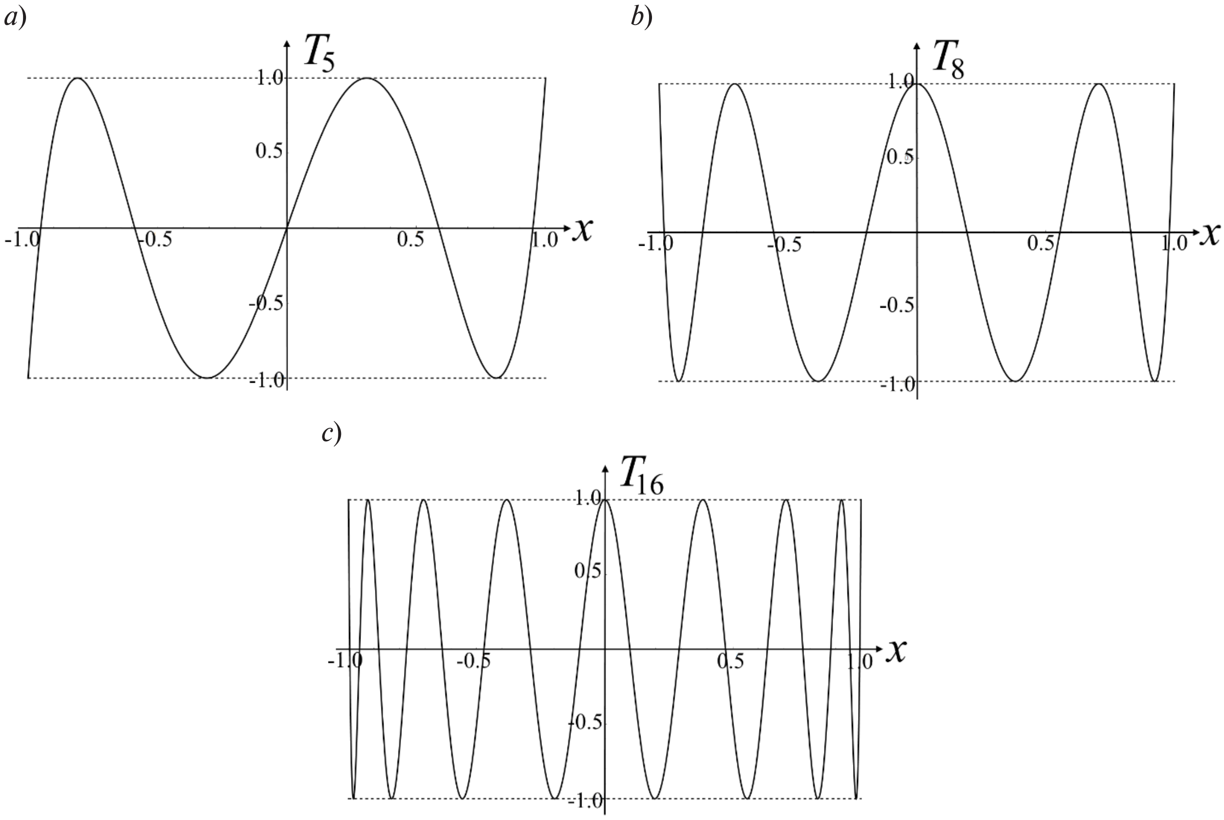

Рис. 1. Многочлены Чебышева T_n(x) при $n = 5$ (*a*), 8 (*b*) и 16 (*c*), которые наименее отклоняются от нуля на отрезке $[-1, +1]$

Графики многочленов Чебышева первого рода [1 – 3], демонстрирующие выполнение данного условия на интервале $[-1, +1]$ с весом $q(x) = 1$, приведены на рис. 1.

В соответствии с условиями (3), (4), для оптимального многочлена $p(x)$ с коэффициентом при старшей степени, равным единице, имеется набор из $n + 1$ пробных точек x_k, в которых отклонение от нуля $q(x)p(x)$ имеет локальные чередующиеся отрицательные минимумы и положительные максимумы, равные $\pm|\varepsilon|$, причем значения этих минимумов и максимумов являются глобальными на интервале $[a, b]$.

Данный критерий является частным случаем теории Чебышева о минимаксной аппроксимации функций с помощью дробно-рациональных функций [6, 7], однако в случае многочленов, наименее отклоняющихся от нуля, доказательство соответствующих утверждений упрощается.

Утверждение 2 (теорема Валле – Пуссена [6, 7, 21 – 23]). *Если функция $q(x)p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, принимает в N последовательных точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1}$ интервала $[a, b]$ отличные от нуля значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ с чередующимися знаками, где $N \geq n + 1$, то для любого другого многочлена $r(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, справедливо соотношение*

$$\max |q(x)r(x)| \geq \min \{|\lambda_0|, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{N-1}|\}.$$

Доказательство. Пусть имеется многочлен $r(x)$, для которого выполняется условие $\max |q(x)r(x)| < \min (|\lambda_0|, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{N-1}|)$. Будем считать, что в последовательности x_k для четных точек значения $q(x_k)p(x_k)$ строго положительные, а для нечетных – строго отрицательные. (Рассуждения аналогичны, когда для нечетных точек значения положительные, а для четных – отрицательные). Это означает, что в четных точках x_k выполнено условие

$$q(x_k)r(x_k) < |\lambda_k| = q(x_k)p(x_k),$$

а в нечетных точках x_k – условие

$$q(x_k)r(x_k) > -|\lambda_k| = q(x_k)p(x_k).$$

В результате величина $q(x)[p(x) - r(x)]$ – строго положительна в четных точках x_k и строго отрицательна в нечетных x_k. Значения $q(x_k)$ не обращаются в нуль и, следовательно, – строго положительны. Не равный тождественно нулю многочлен $p(x) - r(x)$ степени $n - 1$ попеременно принимает положительные и отрицательные значения как минимум в $n + 1$ точках и, в силу этого, имеет не менее n нулей. Следовательно, многочлен $r(x)$, для которого

$$\max |q(x)r(x)| < \min (|\lambda_0|, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{N-1}|),$$

не существует.

Утверждение 2 доказано.

Замечание. Теорема Валле – Пусена позволяет получить для решения оптимизационной задачи (2) оценку снизу. Если $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ – это локальные максимумы и минимумы функции $q(x)r(x)$ с чередующимися знаками, то такая конструкция называется альтернансом Валле – Пуссена, и для решения оптимизационной задачи (2) она дает не только оценку снизу, но и оценку сверху, равную $\max \{|\lambda_0|, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{N-1}|\}$.

Утверждение 3. *Существует многочлен $p(x)$, который обеспечивает решение оптимизационной задачи (2).*

Данное утверждение является важным, поскольку исключает из рассмотрения вариант, когда есть многочлены $p_k(x)$ со все более и более уменьшающимися значениями $P_k = \max |q(x)p_k(x)|$, в то время как минимум этой величины никогда не достигается на множестве многочленов фиксированной степени. В частности, не существует решения оптимизационной задачи (2) без априорного ограничения степени многочлена $p(x)$.

Доказательство. Значения величин $P_k = \max |q(x)p_k(x)|$ ограничены снизу нулем, поэтому для значений P_k на множестве многочленов существует точная нижняя грань P. В соответствии с определением точной нижней грани, существует последовательность многочленов $p_k(x)$ степени n:

$$p_k(x) = a_{0,k} + a_{1,k}x + a_{2,k}x^2 + \ldots + a_{n-1,k}x^{n-1} + x^n,$$

для которой $P \leq P_k \leq 2P$ и $\lim P_k = P$ при $k \to \infty$.

Следовательно, начиная с некоторого номера k, значения многочленов $p_k(x)$ на интервале $[a + \delta, b - \delta]$ (где δ достаточно мало) будут ограничены сверху и снизу (при этом от концов интервала пришлось сделать отступ, чтобы учесть случай, когда непрерывная весовая функция $q(x)$ на концах интервала может быть равна нулю). Из формулы Лагранжа [15] для многочлена $p(x)$ степени n, который в $n + 1$ заданных точках x_k принимает значения y_k и имеет вид

$$p(x) = \sum_{j=1,n+1} \left[y_j \prod_{i=1,n+1,i\neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \right],$$

следует, что, когда в $n + 1$ фиксированных точках x_k значения многочлена y_k ограничены сверху и снизу, каждый из коэффициентов многочлена по отдельности также ограничен сверху и снизу. В соответствии с теоремой Больцано – Вейерштрасса (лемма Больцано – Вейерштрасса) о предельной точке, для любой бесконечной ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить бесконечную подпоследовательность, которая будет иметь предельное значение. Поэтому в рассматриваемой последовательности многочленов $p_k(x)$ (представлены в виде векторов длины $n + 1$, состоящих из ограниченных сверху и снизу коэффициентов многочлена) можно выбрать такую подпоследовательность, в которой для каждого из коэффициентов многочлена имеется предел.

Другими словами, имеется такая последовательность многочленов $p_k(x)$, для которой $\lim P_k = P$ при $k \to \infty$, а у коэффициентов многочленов $p_k(x)$ имеются предельные значения $b_j = \lim a_{j,k}$ при $k \to \infty$. Очевидно, это условие выполняется в том числе и для старших коэффициентов многочленов $p_k(x)$, по определению равных единице.

Рассмотрим многочлен $r(x)$ с коэффициентами b_j:

$$r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Поскольку $b_j = \lim a_{jk}$, для любого фиксированного значения x выполнятся условие

$$\lim p_k(x) = r(x) \text{ при } k\to\infty,$$

причем стремление к пределу является равномерным на рассматриваемом конечном интервале значений x. Из неравенства

$$\max |q(x)r(x)| = \max |q(x)\{p_k(x) + [r(x) - p_k(x)]\}| \leq$$
$$\leq \max |q(x)p_k(x)| + \max |q(x)|\cdot\max |r(x)–p_k(x)|$$

следует, что $\max |q(x)r(x)| = P$.

Действительно, $\max |q(x)r(x)|$ не может быть меньше P; в то же время при $k \to \infty$ первое слагаемое в правой части неравенства стремится к P, а второе слагаемое – к нулю. Таким образом, для многочлена $r(x)$ величина (2) достигает своей нижней границы P.

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Если для многочлена p(x) выполнены условия (3), (4) критерия Чебышева, то оптимальное значение для правой части оптимизационной задачи (2) равно* $|\varepsilon|$*, а многочлен p(x) (возможно, один из многих) обеспечивает достижение этого оптимума.*

Доказательство. Для многочлена $p(x)$, удовлетворяющего критерию Чебышева, выполняется условие $\max|q(x)p(x)| = |\varepsilon|$, так что решение оптимизационной задачи (2) не превышает величины $|\varepsilon|$. Однако поскольку альтернанс Чебышева является специальным случаем альтернанса Вале – Пуссена, то, согласно теореме Валле – Пуссена (см. Утверждение 2), решение оптимизационной задачи (2) не может быть меньше $|\varepsilon|$. Следовательно, решение оптимизационной задачи (2) равно $|\varepsilon|$, а многочлен $p(x)$ обеспечивает достижение этого оптимума.

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Многочлен p(x), обеспечивающий решение оптимизационной задачи (2), обязан удовлетворять критерию Чебышева (см. Утверждение 1).*

Доказательство. Рассмотрим поведение функции $F(x) = q(x)p(x)$ на отрезке $[a, b]$. Функция $q(x)$ может обращаться в нуль только на концах интервала, поэтому число нулей функции $F(x)$ внутри интервала конечно, не превышает n, а все нули – это изолированные точки.

Пусть y_1, y_2, ..., y_m – это упорядоченный набор из нулей нечетной кратности для этой непрерывной функции (возможно, он не содержит ни одной точки). Точки y_1, y_2, ..., y_mразбивают отрезок $[a, b]$ на $m + 1$ интервалов, на каждом из которых функция $F(x)$ принимает попеременно то положительное, то отрицательное значение. Если же у функции $F(x)$ нет нулей, то весь отрезок $[a, b]$ представляет собой интервал, на котором функция $F(x)$ положительна или на котором она отрицательна.

Для интервалов с положительными значениями $F(x)$ выбираем точку с максимальным значением функции на этом интервале (возможно, она не единственная на этом интервале), а для интервалов с отрицательными значениями $F(x)$ выбираем точку с минимальным значением функции на этом интервале. Получаем набор точек $y_1, y_2, ..., y_m$, которые разбивают отрезок $[a, b]$ на $m + 1$ интервалов, на которых функция $F(x)$сохраняет свой знак, но изменяет его при переходе через границу интервала. Набор же принадлежащих этим интервалам точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}$, не совпадающих с концами интервалов, состоит из чередующихся положительных максимумов и отрицательных минимумов $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ функции $F(x)$.

Пусть $\lambda = \max|\lambda_k|$. Если на каком-либо интервале максимум равен λ, а на соседнем (последующем или предшествующем) интервале модуль минимума меньше λ, то этот интервал вместе с последующим интервалом с положительным максимумом, независимо от его значения, присоединяется к текущему интервалу (рис. 2, *a*). Полученный интервал обладает тем свойством, что из функции $F(x)$ можно вычесть такую положительную константу, чтобы положительный максимум функции на интервале уменьшился, но при этом модуль отрицательного минимума функции на интервале увеличился не настолько, чтобы превысить новый положительный максимум.

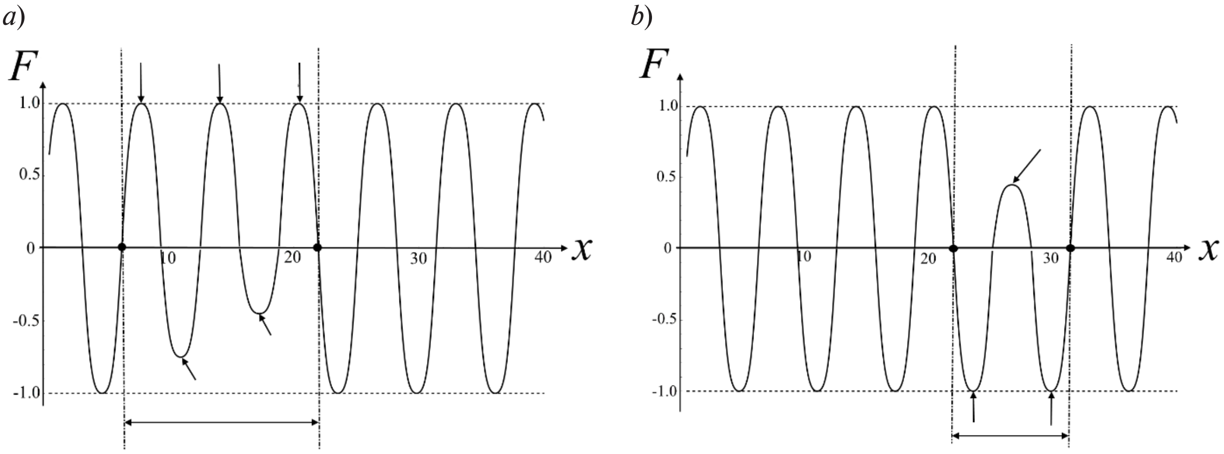

Рис. 2. Процедура объединения отрезков с чередующимися знакопеременными максимумами и минимумами при конструировании альтернанса Чебышева (длина объединенных отрезков показана между выносными линиями):

a – одиночный или несколько последовательно расположенных минимумов лежат выше минимального уровня функции $F(x)$; *b* – одиночный или несколько последовательно расположенных максимумов лежат ниже ее максимального уровня.

Экстремумы указаны стрелками

Точно так же, если на каком-то интервале минимум равен $-\lambda$, а на соседнем интервале максимум меньше λ, то этот интервал вместе с последующим интервалом, содержащим отрицательный минимум, присоединяется к текущему интервалу (см. рис. 2, *b*). Для этого интервала к функции $F(x)$ можно прибавить такую положительную константу, которая бы уменьшала абсолютное значение отрицательного минимума функции на интервале, но при этом положительный максимум функции на интервале увеличивала бы не настолько, чтобы превышалось абсолютное значение нового отрицательного минимума.

В конечном итоге на интервале $[a, b]$ для заданного многочлена $p(x)$ будет получен набор из N интервалов и принадлежащих им точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ с чередующимися положительными максимумами и отрицательными минимумами функции $F(x)$, равными $\pm\varepsilon$, где $\varepsilon = \max |q(x)p(x)|$. Если же N больше или равно $n + 1$, то такой многочлен $p(x)$ удовлетворяет критерию Чебышева и, в соответствии с утверждением 2, будет решением оптимизационной задачи (2).

Пусть N теперь меньше или равно n. На этапе объединения интервалов были определены границы новых интервалов – набор точек $y_1, y_2, ..., y_{N-1}$, в которых функция $F(x)$ обращается в нуль и меняет свой знак. Также имеются константы $\delta_k > 0$ и универсальная константа $\delta = \min \delta_k$. Эти константы можно вычитать из функции $F(x)$ на интервалах с положительными максимумами или прибавлять к функции $F(x)$ на интервалах с отрицательными минимумами, уменьшая при этом минимаксную норму на соответствующем интервале.

Пусть на первом интервале функция $F(x)$ принимает положительные значения (рассуждения аналогичны, если на первом интервале функция $F(x)$ принимает отрицательные значения). Рассмотрим функцию $Q(x)$, которая представляет собой произведение многочлена степени не выше $n - 1$ и весовой функции $q(x)$:

$$Q(x) = q(x)(y_1 - x)(y_2 - x) \cdots (y_{N-1} - x).$$

Функция $Q(x)$ строго положительна на тех интервалах, где имеется чебышевский максимум функции $F(x)$, и строго отрицательна на тех, где имеется чебышевский минимум этой функции.

Пусть $R = \max |Q(x)|$. Если вычесть из функции $F(x)$ функцию $sQ(x)$ с достаточно малым положительным множителем s (например, можно выбрать $s = (\delta/R)$), то это безопасным образом уменьшит положительные максимумы функции $F(x)$ и уменьшит ее отрицательные минимумы, и тем самым уменьшит величину $\max |F(x)|$. Следовательно, рассматриваемый многочлен $p(x)$ не может служить решением для оптимизационной задачи (2), так как можно получить еще меньшее значение для $\max |F(x)|$ при замене текущего многочлена $p(x)$ степени n (его старший коэффициент равен единице) новым многочленом $r(x)$ степени n, у которого старший коэффициент также будет равен единице:

$$G(x)= F(x) - (\delta/R)Q(x) = q(x)p(x) - (\delta/R)q(x)(y_1 - x) \cdots (y_{N-1} - x) =$$
$$= q(x)[p(x) - (\delta/R) (y_1 - x) \cdots (y_{N-1} - x)] = q(x)r(x),$$
$$\max |G(x)| < \max |F(x)|.$$

Таким образом, оптимальный многочлен степени n, рассмотренный в утверждении 3, обязан удовлетворять критерию Чебышева.

Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Многочлен p(x), удовлетворяющий критерию Чебышева и обеспечивающий решение оптимизационной задачи (2), является единственным.*

Доказательство. Пусть имеются два многочлена $p(x)$ и $r(x)$ степени n, у которых старшие коэффициенты равны единице и которые являются решением оптимизационной задачи (2). Поскольку многочлены $p(x)$ и $r(x)$ не равны тождественно нулю, у выражений $q(x)p(x)$ и $q(x)r(x)$ на интервале $[a, b]$ имеются не равные нулю максимумы и минимумы.

В соответствии с утверждением 5, каждый из многочленов $p(x)$ и $r(x)$ удовлетворяет критерию Чебышева, причем значение $\varepsilon \neq 0$ для них одно и то же. Многочлены вида

$$s(x, \alpha) = (1 - \alpha)p(x) + \alpha r(x)$$

будут многочленами степени n с единичным коэффициентом при старшей степени. При $0 < \alpha < 1$ эти многочлены также являются решениями оптимизационной задачи (2): из цепочки неравенств

$$|q(x)s(x,\alpha)| = |q(x)[(1 - \alpha)p(x) + \alpha r(x)]| \leq (1 - \alpha)|q(x)p(x)| + \alpha|q(x)r(x))| \leq |\varepsilon|$$

следует, что $\max |q(x)s(x,\alpha)| \leq |\varepsilon|$, а поскольку случай $\max |q(x)s(x,\alpha)| < |\varepsilon|$ невозможен в силу того, что $|\varepsilon|$ – это решение оптимизационной задачи (2), получаем, что $\max |q(x)s(x,\alpha)| = |\varepsilon|$.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ – это чебышевские точки уклонения с чередующимися максимумами и минимумами функции $q(x)s(x,\alpha)$, равными $\pm\varepsilon$. Если x_k – это точка отрицательного минимума функции $q(x)s(x,\alpha)$, равного $-|\varepsilon|$, то из условий

$$q(x_k)s(x_k,\alpha) = (1 - \alpha)q(x_k)p(x_k) + \alpha q(x_k)r(x_k) = -|\varepsilon|,$$

$$q(x_k)p(x_k) \geq -|\varepsilon|, \ q(x_k)r(x_k) \geq -|\varepsilon|, \ 0 < \alpha < 1$$

следует, что случай, когда

$$q(x_k)p(x_k) = -|\varepsilon| \text{ и } q(x_k)r(x_k) = -|\varepsilon|,$$

– единственно возможный.

Аналогичным образом, если x_k – это точка положительного максимума функции $q(x)s(x,\alpha)$, который равен $|\varepsilon|$, то из условий

$$q(x_k)s(x_k,\alpha) = (1 - \alpha)q(x_k)p(x_k) + \alpha q(x_k)r(x_k) = |\varepsilon|,$$

$$q(x_k)p(x_k) \le |\varepsilon|,\ q(x_k)r(x_k) \le |\varepsilon|,\ 0 < \alpha < 1,$$

следует, что

$$q(x_k)p(x_k) = |\varepsilon| \text{ и } q(x_k)r(x_k) = |\varepsilon|.$$

Поскольку значения многочленов $p(x)$ и $r(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, одинаковы в $n + 1$ различных точках $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, эти многочлены тождественно равны друг другу.

Алгоритм конструирования многочлена, наименее отклоняющегося от нуля

Из приведенного выше критерия Чебышева (утверждение 1) следует алгоритм численного построения многочленов, наименее отклоняющихся от нуля, который представляет собой измененный и оптимизированный алгоритм Ремеза [9 – 14].

Шаг 1. Произвольным образом выбирается начальный набор точек $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, принадлежащих интервалу $[a, b]$.

Шаг 2. Для текущего набора точек

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$$

конструируется многочлен $p(x)$ степени n, для которого выполнены условия

$$q(x_k)p(x_k) = (-1)^k \text{ при } k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Очевидно, что такой многочлен существует, определяется единственным образом и может быть вычислен в явном виде по формуле Лагранжа [15].

Шаг 3. Для многочлена $p(x)$ находятся корни, принадлежащие интервалу $[a, b]$. Поскольку на краях интервалов $[x_k, x_{k+1}]$ значения многочлена $p(x)$ имеют разные знаки, внутри каждого такого интервала существует по крайней мере один корень многочлена $p(x)$. Имеется ровно n таких интервалов, поэтому на каждом из интервалов $[x_k, x_{k+1}]$ имеется ровно один корень, а все корни многочлена $p(x)$ – вещественные, принадлежат интервалу $[a, b]$ и не являются кратными. Определение этих корней с помощью подходящего численного метода не представляет трудности.

Шаг 4. К списку корней

$$a < y_1 < y_2 < \ldots < y_\mathrm{n} < b,$$

принадлежащих интервалу $[a, b]$, которые были найдены на шаге 3, добавляются начало и конец интервала $y_0 = a$ и $y_{n+1} = b$. Поскольку на интервалах $[y_k, y_{k+1}]$ многочлен $p(x)$ степени n сохраняет знак, на каждом из интервалов $[y_k, y_{k+1}]$ существует либо глобальный максимум (при положительных значениях многочлена), либо глобальный минимум (при отрицательных значениях многочлена) для функции $q(x)p(x)$. Если функция $q(x)$ меняется достаточно медленно, чтобы на малом интервале $[y_k, y_{k+1}]$ ее можно было бы считать константой (типичный случай), то на каждом из интервалов $[y_k, y_{k+1}]$ существует ровно один локальный максимум либо минимум, совпадающий тем самым с глобальным максимумом либо минимумом на этом интервале, поскольку производная многочлена $p(x)$ имеет степень $n - 1$ и в силу этого не может иметь более, чем $n - 1$ нулей.

Шаг 5. Пусть $a \le z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n \le b$ – это список из чередующихся положительных максимумов и отрицательных минимумов функции $q(x)p(x)$, которые были найдены на шаге 4. Рассмотрим в этих точках значения

$$q(z_k)p(z_k) = (-1)^k\varepsilon_k \text{ при } k = 0, 1, 2, ..., n,$$

которые, в соответствии с шагом 4, должны быть то положительными, то отрицательными экстремумами для интервалов $[y_k, y_{k+1}]$ с чисто положительными или с чисто отрицательными значениями функции $q(x)p(x)$. Если в пределах заданной точности выполнено условие $\varepsilon_k \approx \mathrm{const}$, то получен многочлен $p(x)$, наименее уклоняющийся от нуля и удовлетворяющий критерию Чебышева. При этом из теоремы Валле – Пуссена о наилучшем приближении функции многочленами (см. утверждение 2) [6, 7] следует, что точный оптимум для задачи (2) лежит в диапазоне между $\min|\varepsilon_k|$ и $\max|\varepsilon_k|$ (с поправкой на текущий множитель перед старшим коэффициентом многочлена вместо единицы). Если же значения ε_k заметно отличаются друг от друга, то заменяем пробные точки

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$$

точками

$$a \le z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n \le b$$

и возвращаемся к шагу 2.

Шаг 6. Осталось нормировать многочлен $p(x)$ так, чтобы его старший коэффициент стал равным единице. Поскольку у многочлена $p(x)$ имеется n корней, а сам многочлен не является тождественным нулем, его старший коэффициент не может быть нулем и, следовательно, такая нормировка осуществима. Дополнительным полезным результатом является приложение к многочлену $p(x)$ списка из n вещественных корней многочлена, расположенных на интервале $[a, b]$ (найдены на шаге 3).

Алгоритм сходится со скоростью геометрической прогрессии в следующем смысле: для любой непрерывной весовой функции и для любой степени n найдутся такие числа $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$, для которых

$$\max |q(x)p_i(x)| \le 1 + C\lambda^i,$$

где i – номер итерации.

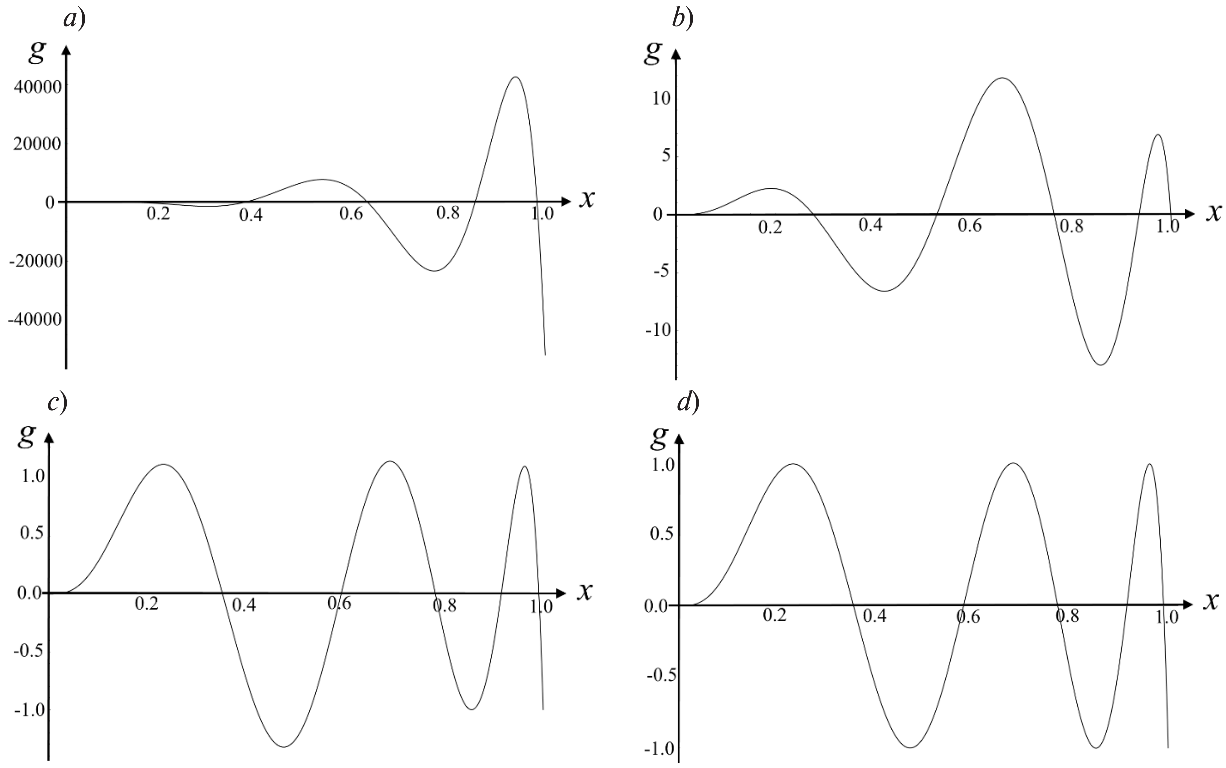

Рис. 3. Результаты итераций $g(x) = q(x)p(x)$ при вычислении многочлена $p(x)$ пятой степени, наименее уклоняющегося от нуля на интервале [0, 1] с весом $q(x) = x^3$: начальное состояние после шага 1 алгоритма (*a*), а также первая (*b*), вторая (*c*) и третья (*d*) итерации

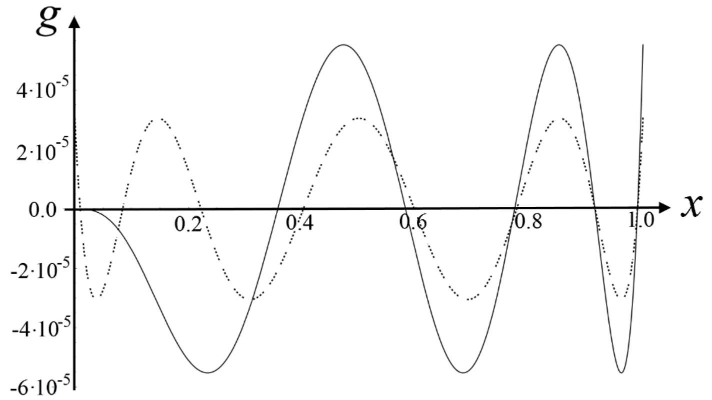

Рис. 4. Осцилляции функции $g(x) = q(x)p(x)$, наименее отклоняющейся от нуля на интервале [0, 1] при $n = 5$ и $q(x) = x^3$ (сплошная линия).
Масштабированный многочлен Чебышева степени 5 + 3 = 8, сдвинутый с интервала [−1, +1] на интервал [0, 1], имеющий 1 в качестве старшего коэффициента, показан штриховой линией

Доказательство сходимости представленного алгоритма аналогично таковому для алгоритма Ремеза в монографии [11]. Численные эксперименты показали, что во всех практически проверенных случаях наш алгоритм очень быстро сходился.

На рис. 3 показан результат проверки работоспособности алгоритма для случая

$$a = 0,\ b = 1,\ q(x) = x^3,\ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^5.$$

Видно, что уже третья итерация обеспечивает вполне приемлемое отклонение от нуля. Алгоритм окончательно сходится на пятой итерации.

Решением является многочлен с коэффициентами

$$a_0 = –0{,}018464,\ a_1 = 0{,}712942,\ a_2 = –2{,}851981,$$

$$a_3 = 4{,}650795,\ a_4 = –3{,}493237.$$

Отклонение от нуля равно $5{,}5·10^{–5}$. Сравнение между отклонениями от нуля многочлена $q(x)p(x)$ и многочлена Чебышева первого рода той же самой степени показано на рис. 4.

Поскольку весовая функция $q(x)$ на каком-то из концов интервала $[a, b]$ может обращаться в нуль, то для гарантированной возможности выполнения шага 2 потребуется, чтобы пробные точки, выбираемые на шаге 1, лежали строго внутри интервала $[a, b]$:

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b. \qquad (5)$$

Очевидно, что если $q(a) = 0$ либо $q(b) = 0$ и при этом сохраняется требование (5), то на шаге 5 точки z_k будут удовлетворять условию

$$a < z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < b,$$

в результате чего условие (5) сохранится как на следующей итерации, так и на всех последующих. Поэтому достаточно обеспечить выполнение условия (5) на первом шаге алгоритма.

Для улучшения работы алгоритма на шаге 1 рекомендуется выбирать в качестве начальных точек (5) нули многочлена Чебышева первого рода степени $n + 1$, либо минимумы и максимумы многочлена Чебышева второго рода степени n, смещенные и масштабированные с интервала [−1, +1] к интервалу $[a, b]$. На шаге 2 вместо условия $q(x_k)p(x_k) = (−1)^k$ рекомендуется использовать условие

$$q(x_k)p(x_k) = (–1)^k·[(b – a)/4]^n,$$

чтобы избежать неоправданно больших коэффициентов у многочлена $p(x)$. Такой выбор масштаба соответствует осцилляциям многочлена Чебышева первого рода степени n (минимально отклоняющегося от нуля на отрезке [−1, +1] с весом $q(x) \equiv 1$), пересчитанного от интервала [–1, +1] к интервалу $[a, b]$ и масштабированного так, чтобы старший коэффициент был равен единице[2].

Для нахождения на шаге 2 многочлена $p(x)$, который принимает в заданных точках заданные значения, не рекомендуется использовать прямое решение системы линейных уравнений $q(x_k)p(x_k) = (-1)^k$ относительно неизвестных коэффициентов a_j. Матрица таких линейных уравнений при больших n (матрица Вандермонда) характеризуется большим числом обусловленности, в силу чего результат решения уравнений весьма чувствителен к ошибкам округления чисел с плавающей точкой [15]. Формула Лагранжа [15] для многочлена степени n, принимающего в заданных $n + 1$ точках заданные значения, свободна от подобной неустойчивости. На практике вместо явной формулы Лагранжа при больших степенях многочлена можно применять итерационную схему Эйткена [15], позволяющую шаг за шагом прибавлять к уже существующему интерполяционному многочлену новую степень и новую интерполяционную точку. Однако, по всей видимости, лучше всего использовать на шаге 2 одну из схем конечных разностей Ньютона [15] вместо явной формулы Лагранжа. Поскольку все, что требует алгоритм, – это возможность вычислять значение многочлена $p(x)$ в заданной точке x, до окончания работы алгоритма нет необходимости пересчитывать форму конечных разностей Ньютона в многочлен, представленный в явной форме (1).

Следует также отметить, что все вычисления нужно по возможности выполнять с высокой точностью, поскольку ошибки округления, вносимые на промежуточных этапах, способны исказить результаты вычислений самым неприятным образом и привести к неустойчивости алгоритма.

При проведении вычислений использовалась программа Wolfram Mathematica версии 11 [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа. Пер. с англ. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 524 с.
2. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Пер. с польского. М.: Наука, 1983. 384 с.
3. **Данилов Ю. А.** Многочлены Чебышева. Минск: Вышэйшая школа, 1984. 157 с.
4. **Чаплыгин С. А.** Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1950. 102 с.
5. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. М.–Л.: Гос. технико-теоретическое изд-во, 1934. 316 с.
6. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.–Л.: Объединение государственных книжно-журнальных издательств, 1947. 324 с.
7. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. М.: Наука, 1965. 407 с.
8. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., Golovitski A., Syasko M.** Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight // Proceedings of 2022 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). 20–21 October 2022, St. Petersburg, Russia. Pp. 143–145.
9. **Remez E.** Sur un, Procédé convergent d'approximations successives pour determiner les polynomes d'appproximation // Comptes Rendus l' Académie des Sciences. Paris. 1934. Vol. 198. Pp. 2063–2065.
10. **Remez E. Ya.** Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tschebyscheff // Comptes Rendus l' Académie des Sciences. Paris. 1934. Vol. 199. Pp. 337–340.

[2] Строго говоря, эта оценка не совсем точна, поскольку не учитывает вида весовой функции $q(x)$. Так, для рассматриваемого примера $n = 5$ и $q(x) = x^3$, так что $q(x)p(x)$ – это многочлен восьмой степени, и надо рассматривать масштаб осцилляций для многочленов Чебышева степени $n = 8$ вместо $n = 5$. Уточненная оценка амплитуды осцилляций имеет вид $[4/(b - a)]^{-n-m}$, где m – «эффективная степень» весовой функции $q(x)$ (ее можно установить, аппроксимируя $q(x)$ многочленом по минимаксной норме с единичной весовой функцией).

11. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит-ры, 1977. 508 с.

12. **Ремез Е. Я.** Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 624 с.

13. **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.

14. **Грибкова В. П.** Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева. М.: Изд-во «Спутник», 2017. 193 с.

15. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. В 2 тт. Т. 1. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. 464 с.

16. **Чебышев П. Л.** Теория механизмов, известных под именем параллелограммов // П. Л. Чебышев. Избранные труды. Отв. редактор акад. И. М. Виноградов. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. С. 611–648.

17. **Чебышев П. Л.** Вопросы о наименьших приближениях, связанных с приближенным представлением функций // П. Л. Чебышев. Избранные труды. Отв. редактор акад. И. М. Виноградов. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. С. 462–578.

18. **Чебышев П. Л.** О функциях, наименее уклоняющихся от нуля // П. Л. Чебышев. Избранные труды. Отв. редактор акад. И. М. Виноградов. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. С. 579–608.

19. **Бернштейн С. Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщения Харьковского математического общества. 2-я серия. 1912. Т. XIII. Вып. 2–3. С. 49–144.

20. **Бернштейн С. Н.** О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм. Сб. статей. Посвящается академику И. М. Виноградову к его 60-летию. Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 1951. Т. 38. М.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 24–29.

21. **de la Vallée Poussin Ch. J.** Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle // Bulletin de la Classe des Sciences (Académie Royale de Belgique). 1910. No. 12. Pp. 808–844.

22. **de la Vallée Poussin Ch. J.** Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris: Gauthier-Villars, 1919. 150 p.

23. **Butzer P. L., Nessel R. J.** Aspects of de La Vallée Poussin's work in approximation and its influence // Archive for History of Exact Sciences. 1993. Vol. 46. No. 1. Pp. 67–95.

24. Wolfram Mathematica: наиболее полная система для математических и технических вычислений. URL: https://www.wolfram.com/mathematica/ (Обращение 21.03.2023).

REFERENCES

1. **Lántczos K.,** Prakticheskiye metody prikladnogo analiza [Practical methods of an applied analysis], GIFML Publishing, Moscow, 1961 (in Russian).

2. **Pashkovskii S.,** Vychislitelnyye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva [Chebyshev polynomials and series used for calculations], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).

3. **Danilov Yu. A.,** Mnogochleny Chebysheva [Chebyshev polynomials], Vysheyshaya shkola, Minsk, 1984 (in Russian).

4. **Chaplygin S. A.,** Novyy metod priblizhennogo integrirovaniya differentsialnykh uravneniy [A new method of approximate integration of differential equations], State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow, Leningrad, 1950 (in Russian).

5. **Goncharov V. L.,** Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [Theory of interpolation and approximation of functions], GTTI Publishing, Moscow, Leningrad, 1934 (in Russian).

6. **Akhiezer N. I.,** Lektsii po teorii approksimatsii [Lectures on approximation theory], OGIZ Publishing, Moscow, Leningrad, 1947 (in Russian).

7. **Akhiezer N. I.,** Lektsii po teorii approksimatsii, 2-ye izd. [Lectures on approximation theory, 2nd edition], Nauka Publishing, Moscow, 1965 (in Russian).

8. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., et al.,** Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight, Proc. 2022 Int. Conf. on Electrical Engin. & Photonics (EExPolytech), 20–21 Oct. 2022, St. Petersburg, Russia (2022) 143–145.

9. **Remez E.,** Sur un procédé convergent d'approximations successives pour determiner les polynomes d'appproximation, C. R. Acad. Sci. Paris. 198 (1934) 2063–2065.

10. **Remez E. Ya.,** Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tschebyscheff, C. R. Acad. Sci. Paris. 199 (1934) 337–340.

11. **Dzyadyk V. K.,** Vvedeniye v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).

12. **Remez E. Ya.,** Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniya [Fundamentals of numerical methods for Chebyshev approximation], Naukova Dumka Publishing, Kiev, 1969 (in Russian).

13. **Laurent P. J.,** Approximations et optimisation, Hermann, Paris, 1972.

14. **Gribkova V. P.,** Effektivnyye metody ravnomernykh priblizheniy, osnovannyye na polinomakh Chebysheva [Effective methods of uniform approximations based on Chebyshev polynomials]. Sputnik Publishing, 2017 (in Russian).

15. **Berezin I. S., Zhidkov N. P.,** Computing methods, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 2014.

16. **Chebyshev P. L.,** Teoriya mekhanizmov, izvestnykh pod imenem parallelogrammov [Theory of the mechanisms known as parallelograms], In book: P. L. Chebyshev. Izbrannyye Trudy [Selectas]. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow (1955) 611–648.

17. **Chebyshev P. L.,** Voprosy o naimenshikh priblizheniyakh, svyazannykh s priblizhennym predstavleniyem funktsiy [Issues on the least approximations related to the approximate representation of functions], In book: P. L. Chebyshev. Izbrannyye Trudy [Selectas]. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow (1955) 462–578.

18. **Chebyshev P. L.,** O funktsiyakh, naimeneye uklonyayushchikhsya ot nulya [About functions deviating least from zero], In book: P. L. Chebyshev. Izbrannyye Trudy [Selectas]. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow (1955) 579–608.

19. **Bernstein S. N.,** O nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsiy posredstvom mnogochlenov dannoy stepeni [On the best approximation of the continuous functions by means of polynomials of a given degree], Communications de la Société Mathematique de 2-име Série, Kharkow. XIII (2–3) (1912) 49–144.

20. **Bernstein S. N.,** On the best approximation of functions of several variables by means of polynomials or trigonometric sums, Collection of articles, To the 60-th birthday of academician Ivan Matveevich Vinogradov, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 38 (1951) 24–29.

21. **de la Vallée Poussin Ch. J.,** Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, Bull. Cl. Sci., Acad. R. (12) (1910) 808–844.

22. **de la Vallée Poussin Ch. J.,** Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

23. **Butzer P. L., Nessel R. J.,** Aspects of de La Vallée Poussin's work in approximation and its influence, Archi. Hist. Exact Sci. 46 (1) (1993) 67–95.

24. Wolfram Mathematica: Naiboleye polnaya sistema dlya matematicheskikh i tekhnicheskikh vychisleniy [The most complete system for mathematical and technical calculations], URL: https://www.wolfram.com/mathematica/ (Access on 21.03.2023).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.*

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.*
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
31–33, Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

Статья поступила в редакцию 30.03.2023. Одобрена после рецензирования 17.04.2023. Принята 17.04.2023.
Received 30.03.2023. Approved after reviewing 17.04.2023. Accepted 17.04.2023.