Научная статья
УДК 534.16
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17105

# КОЛЕБАНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ И КОМБИНАЦИИ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

**А. А. Алифов** ✉

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

✉ alishir@mail.ru, a.alifov@yandex.ru

**Аннотация.** В работе рассмотрены колебания при нелинейном параметрическом воздействии и комбинации запаздываний в упругости и демпфировании. Моделью является стержень с пружиной, приводимый в движение источником энергии ограниченной мощности. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений движения системы использован метод прямой линеаризации нелинейности. Получены уравнения для определения нестационарных и стационарных значений амплитуды и фазы колебаний, скорости источника энергии. На основе критериев Рауса — Гурвица выведены условия устойчивости стационарных режимов движения. Проведены расчеты амплитудно-частотных характеристик при различных значениях параметров, линейной и нелинейной силах упругости. Соответствующие графики наглядно представляют совместное влияние различных значений запаздываний на амплитудно-частотные кривые. Показано, что запаздывания изменяют амплитудные кривые, существенно влияя на устойчивость колебаний.

**Ключевые слова:** колебания, модель, нелинейность, метод, параметрическое воздействие, запаздывание, упругость, демпфирование

**Для цитирования:** Алифов А. А. Колебания при нелинейном параметрическом воздействии и комбинации запаздываний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 1. С 47—55. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17105



Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17105

# OSCILLATIONS UNDER A NONLINEAR PARAMETRIC ACTION AND COMBINATIONS OF DELAYS

**A. A. Alifov** ✉

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

✉ alishir@mail.ru, a.alifov@yandex.ru

**Abstract.** The paper considers oscillations under nonlinear parametric action and combinations of delays in elasticity and damping. The model for the study is a rod with a spring, which is driven by an energy source of limited power. To solve nonlinear differential equations of motion of the system, the method of direct linearization of nonlinearity has been used. Equations were obtained for determining the nonstationary and stationary values of the amplitude and phase of oscillations, the speed of the energy source. Based on the Routh — Hurwitz criteria, the conditions for the stability of stationary motion modes were derived. To obtain information about the combined effect of delays on the dynamics of oscillations, the calculations were carried out for their various values, linear and nonlinear elastic forces. The graphs constructed based on the calculation results clearly show the combined effect of various delay values on the amplitude-frequency curves. The delays measure the amplitude curve, shift it to the right-left, up-down, and affect the stability of the oscillations.

**Keywords:** oscillation, model, nonlinearity, method, parametric excitation, delay, elasticity, damping

**For citation:** Alifov A. A., Oscillations under a nonlinear parametric action and combinations of delays, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (1) (2024) 47–55. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17105



## Введение

Все явления в природе (Вселенной) цикличны, колебательное движение происходит во всех видах систем (физических, биологических, технических и т. д.) [1]. Возбуждение колебаний может быть обусловлено различными причинами, в том числе наличием запаздывания во многих системах [2, 3 и др.]. К появлению запаздывания в механических системах может привести упругость материалов и внутреннее трение в них. Исследованию систем с запаздыванием посвящено достаточно много работ [3 – 17 и др.], однако в них не учитываются свойства источника энергии, поддерживающего функционирование системы. В то же время функционирование реальных физических систем происходит благодаря некоторому источнику энергии, имеющему ограниченную мощность. Опубликовано немного работ, в которых это учитывается. Вопросы потребления энергии, а также связанные с этим проблемы экологии и изменения климата в настоящее время приобрели особую актуальность.

Изучение систем с запаздыванием проводится в большинстве случаев на основе нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. При решении этих уравнений используются различные методы нелинейной механики [18 – 20 и др.], для которых характерны большие затраты труда и времени. Методу же прямой линеаризации (МПЛ), изложенному в работах [21 – 23 и др.], не присущи эти затраты, что и определяет его преимущество перед известными методами нелинейной механики. Его существенными свойствами также являются простота и возможность получения конечных соотношений независимо от степени нелинейности, что позволяет легко его использовать при проведении практических расчетов.

Как известно, во многих системах (маятник с колеблющейся точкой подвеса, вал, карданная передача, зубчатая передача, железнодорожный мост и др.) возникают параметрические колебания, которые могут быть обусловлены возбуждением как линейного, так и нелинейного вида. Параметрические колебания при линейном и нелинейном (квадратичном) возбуждениях рассмотрены в монографии [24].

Целью настоящей работы является анализ параметрических колебаний, учитывающий свойства источника энергии, нелинейного параметрического воздействия (кубического) и наличие запаздываний в упругости и трении.

## Уравнения системы и решения

Возьмем за основу модель и уравнения (выведены на основе предположения, что колебания стержня имеют вид первой формы свободных изгибных колебаний), в которой динамика системы поддерживается двигателем ограниченной мощности (рис. 1) [25]. С учетом нелинейности параметрического возбуждения, а также запаздываний в упругости и трении имеем следующие уравнения движения:

$$\begin{gathered}\ddot{y}+\beta_1\dot{y}+\omega^2 y+by^3\sin\varphi=-m^{-1}f(y)-k_\eta\dot{y}_\eta-c_\tau y_\tau,\\ J\ddot{\varphi}=M(\dot{\varphi})-0{,}5c_2y^2\cos\varphi-0{,}5c_3\sin 2\varphi-c_4\cos\varphi,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\omega^2=\dfrac{c}{m},\ c=\dfrac{\pi^4 EI_x}{2l^3}\left(1-\dfrac{P_0}{P_1}\right),\ b=\dfrac{c_2}{m},\ c_2=-\dfrac{\pi^2 r_1 c_1}{2l},\ m=\dfrac{\rho l}{2},$

$$\beta_1=\frac{\beta}{m}, P_0=f_0c_1, P_1=\frac{\pi^2 EI_x}{l^2}, c_3=c_1r_1^2, c_4=f_0r_1c_1.$$

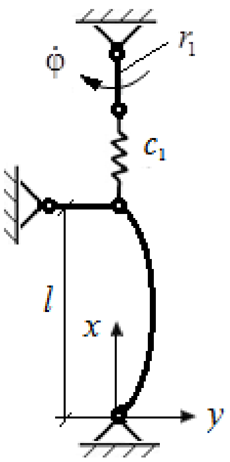


Рис. 1. Модель колебательной системы: $r_1$ – радиус кривошипа; $l$ – геометрический размер; $c_1$ – коэффициент жесткости пружины; $\dot{\varphi}$ – скорость вращения двигателя

В уравнениях (1) величины $\omega$, $c$, $m$, $\beta$, $b$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $P_0$, $P_1$, являются постоянными; $c_1$, $\beta$ – коэффициенты жесткости и сопротивления; $\rho$ – масса единицы длины стержня; $EI_x$ – жесткость стержня на изгиб в направлении оси $y$; $f_0$ – первоначальное поджатие пружины; $f(y)$ – нелинейная составляющая упругости; $c_\tau$ = const, $k_\eta$ = const, $y_\tau = y(t-\tau)$, $\dot{y}_\eta = \dot{y}(t-\eta)$, $\tau$ = const и $\eta$ = const – запаздывания; $J$ – момент инерции ротора двигателя, который вращает связанный с пружиной кривошип радиуса $r_1$; $M(\dot{\varphi})$ – движущий момент двигателя (с учетом сил сопротивления); $\dot{\varphi}$ – скорость вращения двигателя.

На практике широкое распространение получило представление нелинейности посредством полиномиальной функции. Примем ее для нелинейной составляющей силы упругости $f(y)$ в виде

$$f(y)=\sum_s \gamma_s y^s,$$

где $\gamma_s$ = const, $s$ = 2, 3, ... .

Используя МПЛ [21], заменим этот полином линейной функцией

$$f_*(y)=B_f+c_f y.$$

Здесь $B_f$, $c_f$ – коэффициенты линеаризации, определяемые выражениями

$$B_f=\sum_s N_s\gamma_s a^s,\ s = 2, 4, 6, \ldots\ (s \text{ – четное}),$$

$$c_f=\sum_s \bar{N}_s\gamma_s a^{s-1},\ s = 3, 5, 7, \ldots\ (s \text{ – нечетное}), \tag{2}$$

где $a=\max|y|$; $N_s=(2r+1)/(2r+1+s)$, $\bar{N}_s=(2r+3)/(2r+2+s)$; $r$ – параметр точности линеаризации, интервал выбора которого не ограничен, но достаточен в пределах 0 – 2.

Уравнения (1), с учетом выражений (2), примут вид

$$\ddot{y}+\beta_1\dot{y}+\omega^2 y+by^3\sin\varphi=-m^{-1}(B_f+c_f y)-k_\eta\dot{y}_\eta-c_\tau y_\tau, \tag{3}$$

$$J\ddot{\varphi}=M(\dot{\varphi})-0,5c_2y^2\cos\varphi-0,5c_3\sin 2\varphi-c_4\cos\varphi.$$

Для решения уравнений (3) применим МПЛ и процедуру, которые представлены в работах [23 и др.].

Используя функции

$$y=a\cos\psi,\ \ y_\tau=a\cos(\psi-p\tau),\ \ \dot{y}_\eta=-ap\sin(\psi-p\eta),\ \ \dot{\varphi}=\Omega,\ \ \psi=pt+\xi,\ \ p=\Omega/2,$$

получим для нестационарных движений следующие уравнения:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{a}{2}\left(\beta_1+k_\eta\cos p\eta-2c_\tau\Omega^{-1}\sin p\tau\right)+\frac{ba^3}{4\Omega}\cos 2\xi, \tag{4}$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{4\omega^2-\Omega^2}{4\Omega}+\frac{c_f}{m\Omega}+\frac{1}{2}k_\eta\sin p\eta+\frac{c_\tau}{\Omega}\cos p\tau-\frac{ba^2}{2\Omega}\sin 2\xi,$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{J}\left[M(\Omega)-\frac{c_2a^2}{8}\right]. \quad (4)$$

Условия $\dot{a}=0,\ \dot{\xi}=0,\ \dot{\Omega}=0$ доставляют для стационарных движений соотношения

$$4m^2A^2+D^2=4m^2b^2a^4,$$
$$\operatorname{tg}2\xi=-D/2mA, \quad (5)$$
$$M(\Omega)-S(a)=0,$$

где $A = 2\Omega(\beta_1 + k_\eta \cos p\eta) - 4c_\tau \sin p\tau$, $D = m(4\omega^2 - \Omega^2) + 4c_f + 2m\Omega k_\eta \sin p\eta + 4\, mc_\tau \cos p\tau$, $S(a) = c_2a^2/8$.

Выражение $S(a)$ представляет собой нагрузку на источник энергии со стороны колебательной системы. Точки пересечения кривых $M(\Omega)$ и $S(a)$ определяют значения скорости $\Omega$.

## Условия устойчивости

Стационарные движения необходимо исследовать на устойчивость. Составив уравнения в вариациях для уравнений (4) и используя критерии Рауса – Гурвица, получим условия устойчивости стационарных колебаний:

$$D_1>0,\ D_3>0,\ D_1D_2-D_3>0, \quad (6)$$

где $D_1=-(b_{11}+b_{22}+b_{33}),\ D_2=b_{11}b_{33}+b_{11}b_{22}+b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32}-b_{12}b_{21}-b_{13}b_{31},$

$$D_3=b_{11}b_{23}b_{32}+b_{12}b_{21}b_{33}-b_{11}b_{22}b_{33}-b_{12}b_{23}b_{31}-b_{13}b_{21}b_{32},$$

$$b_{11}=\frac{1}{J}Q,\ b_{12}=-\frac{c_2a}{4J},\ b_{13}=0,\ b_{21}=-\frac{a}{\Omega^2}c_\tau\sin p\tau-\frac{ba^3}{4\Omega^2}\cos 2\xi,$$

$$b_{22}=-\frac{1}{2}\left(\beta_1+k_\eta\cos p\eta-2c_\tau\Omega^{-1}\sin p\tau\right)+\frac{3ba^2}{4\Omega}\cos 2\xi,\ b_{23}=-\frac{ba^3}{2\Omega}\sin 2\xi,$$

$$b_{31}=-0,25-\frac{\omega^2}{\Omega^2}-\frac{c_f}{m\Omega^2}-\frac{c_\tau}{\Omega^2}\cos p\tau+\frac{ba^2}{2\Omega^2}\sin 2\xi,\ b_{32}=\frac{1}{m\Omega}\frac{\partial c_f}{\partial a}-\frac{ba}{\Omega}\sin 2\xi,$$

$$b_{33}=-\frac{ba^2}{\Omega}\cos 2\xi,\ Q=\frac{d}{d\Omega}M(\Omega).$$

Крутизна характеристики источника энергии $Q = dM/d\Omega$ позволяет определить ее области, в пределах которых колебания устойчивы или неустойчивы.

## Проведенные расчеты и их основные результаты

Расчеты проведены для получения информации о влиянии нелинейного параметрического воздействия и запаздываний на динамику колебаний. Нелинейная составляющая силы упругости была принята в виде

$$f(y)=\gamma_3y^3,\ \gamma_3=\pm 0{,}2 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-3},$$

а другие параметры имели следующие значения:

$$\omega = 1 \text{ с}^{-1},\ m = 1 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2\cdot\text{см}^{-1},\ c_2 = 0{,}07 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1},$$

$$\beta = 0{,}02 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1},\ k_\eta = 0{,}05 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1},\ c_\tau = 0{,}05 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1}.$$

Для запаздываний приняты следующие значения:

$$p\eta = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2;\ p\tau = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2.$$

Коэффициент линеаризации $\bar{N}_3 = 3/4$, что соответствует параметру точности линеаризации $r$ =1,5.

Имеет место совпадение всех расчетных результатов по МПЛ и широко применяемому асимптотическому методу усреднения Боголюбова – Митропольского [18], так как число 3/4 получается при использовании обоих методов.

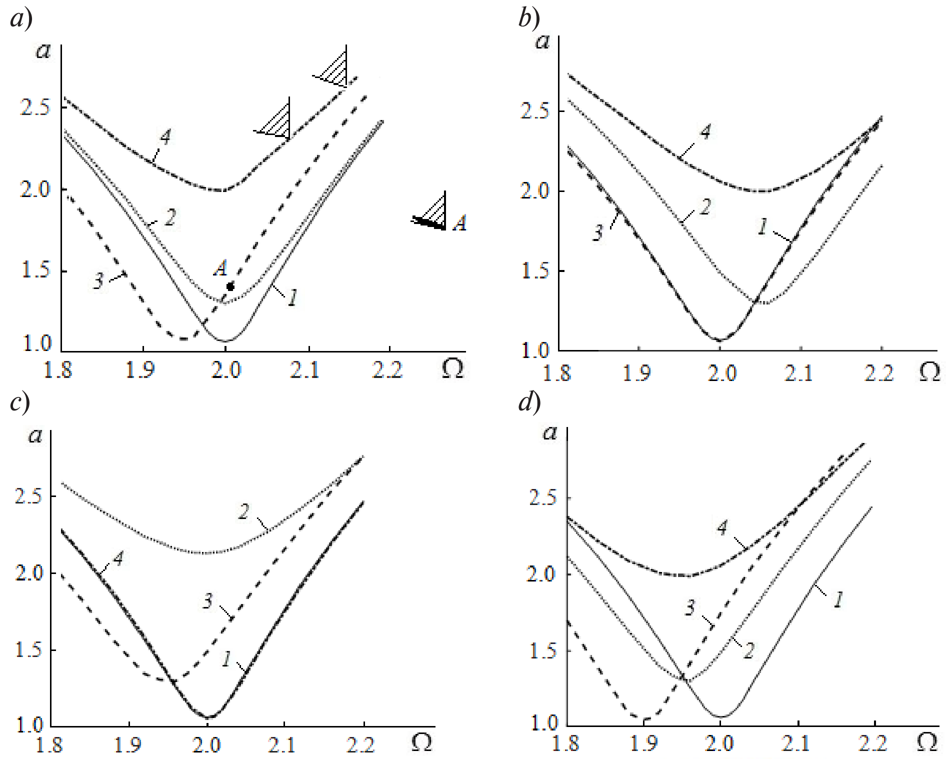


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые для случая линейной силы упругости; $\gamma_3 = 0$; варьируются значения параметров $p\eta$ и $p\tau$. На всех графиках для сравнения дан случай отсутствия запаздываний ($k_\eta = 0$, $c_\tau = 0$, кривые *1*).

Заштрихованные секторы для крутизны источника энергии $Q$ (в точке $A$ и других) соответствуют устойчивым колебаниям. Значения параметров: $p\eta = 0$ (*a*), $\pi/2$ (*b*), $\pi$ (*c*), $3\pi/2$ (*d*); $p\tau = \pi/2$ (кривые *2*), $\pi$ (кривые *3*), $3\pi/2$ (кривые *4*)

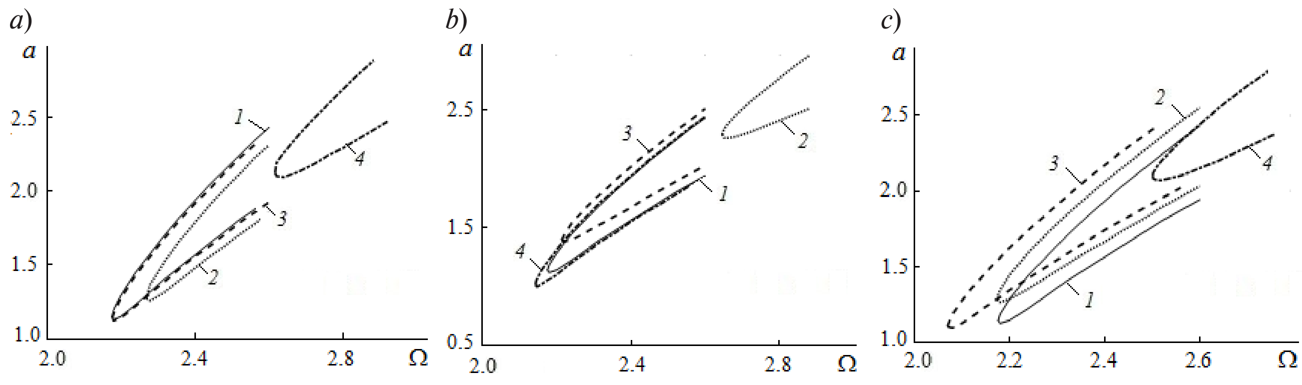


Рис. 3. Амплитудно-частотные кривые, аналогичные представленным на рис. 2, но при нелинейной силе упругости; $\gamma_3 = 0{,}2$. Значения параметров $p\eta$: $\pi/2$ (*a*), $\pi$ (*b*), $3\pi/2$ (*c*).

Нумерация кривых также соответствует таковой на рис. 2

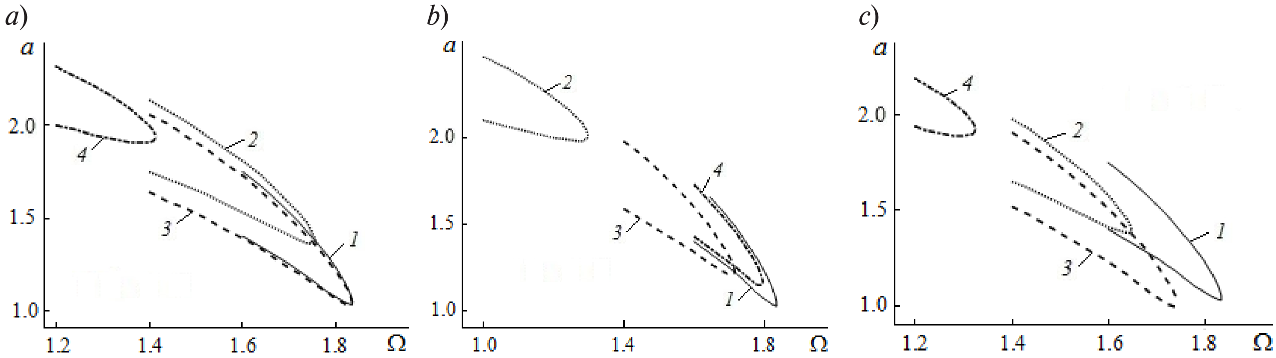


Рис. 4. Амплитудно-частотные кривые, аналогичные представленным на рис. 3, но $\gamma_3 = -0{,}2$. Значения параметров $p\eta$: $\pi/2$ ($a$), $\pi$ ($b$), $3\pi/2$ ($c$). Нумерация кривых соответствует таковой на рис. 2 и 3

На рис. 2 – 4 представлены амплитудно-частотные кривые $a(\Omega)$ при линейной и нелинейной силах упругости (величины на графиках нормализованы). На всех графиках представлены варианты разных значений параметров, и сплошная кривая *1*, которая приведена для сравнения, соответствует отсутствию запаздываний ($k_\eta = 0$, $c_\tau = 0$). Критерии (6) выполняются в пределах заштрихованных секторов (см. рис. 2) для крутизны $Q$ характеристики источника энергии, и устойчивые колебания имеют место лишь в достаточно узких диапазонах частот при

$$\gamma_3 = 0,\ k_\eta = 0,\ p\tau = \pi \text{ и } p\tau = 3\pi/2.$$

Эти секторы должны быть указаны на кривой нагрузки $S(a)$, но для краткости приведены на амплитудно-частотных кривых. А в случаях $\gamma_3 = \pm\, 0{,}2$ нет устойчивости во всем диапазоне резонансных частот при рассмотренных запаздываниях.

## Заключение

В работе рассмотрена динамика стержня с источником энергии ограниченной мощности при нелинейном параметрическом воздействии и комбинации запаздываний в упругости и демпфировании. Для получения информации о влиянии запаздываний на динамику системы проводились расчеты для стационарных колебаний. Полученные результаты наглядно показывают совместное влияние различных запаздываний на амплитудно-частотные кривые. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что запаздывания оказывают существенное влияние на картину взаимодействий:

изменяют амплитудную кривую в амплитудно-частотной плоскости, смещая ее вправо-влево, вверх-вниз;

влияют на устойчивость колебаний.

Результаты анализа взаимодействия колебательных систем с источниками энергии и возникающие при этом явления подробно описаны в монографиях [25, 26] и многих других работах, посвященных этому направлению в изучении теории колебаний. Поэтому не будем на них останавливаться и отметим лишь тот факт, что такие же эффекты обнаруживаются при наличии запаздываний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алифов А. А.** Фундаментальный принцип, управляющий Вселенной. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. 408 с.

2. **Третьякова Т. В., Вильдеман В. Э.** Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: Физматлит, 2017. 120 с.

3. **Рубаник В. П.** Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.

4. **Тхан В. З., Дементьев Ю. Н., Гончаров В. И.** Повышение точности расчета систем автоматического управления с запаздыванием // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 3. С. 521–526.

5. **Петров Н. Н.** Простое групповое преследование с фазовыми ограничениями и запаздыванием информации // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 39–44.

6. **Корнет М. Е., Шишкина А. В.** О непараметрической идентификации безынерционных систем с запаздыванием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2018. № 3 (59). С. 16–23.

7. **Гарькина И. А., Данилов А. М., Нашивочников В. В.** Имитационное моделирование динамических систем с запаздыванием // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1 (часть 1); URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=18849 (дата обращения: 25.01.2024).

8. **Кащенко С. А.** Динамика логистического уравнения с запаздыванием и диффузией и с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами // Доклады Академии наук. 2018. Т. 482. № 5. С. 508–512.

9. **Мулюков М. В.** Устойчивость одной линейной модели осциллятора с запаздывающей обратной связью // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 4 (27). С. 62–67.

10. **Gupta S. K., Wang J., Barry O. R.** Nonlinear vibration analysis in precision motion stage with PID and time-delayed feedback controls // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 101. No. 2. Pp. 439–464.

11. **Santos T. L. M., Araujo J. M., Franklin T. S.** Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Vol. 110. 15 September. Pp. 428–441.

12. **Otto A., Just W., Radons G.** Nonlinear dynamics of delay systems: an overview // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2019. Vol. 377. No. 2153. Article ID: 20180389.

13. **Coccolo M., Zhu B., Sanjuán M. A. F., Sanz-Serna J. M.** Bogdanov – Takens resonance in time-delayed systems // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. No. 3. Pp. 1939–1947.

14. **Sykora H.T., Sadeghpour M., Ge J. I., et al.** On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems // International Jounals Robust and Nonlinear Control. 2020. Vol. 30. No. 18. Pp. 8074–8097.

15. **Araujo J. M., Bettega J., Dantas N. J. B., Dórea C. E. T., Richiedei D., Tamellin I.** Vibration control of a two-link flexible robot arm with time delay through the robust receptance method // Applied Sciences. 2021. Vol. 11. No. 21. P. 9907.

16. **Liu C., Han M., Gong Z., Teo K. L.** Robust parameter estimation for constrained time-delay systems with inexact measurements // Journal of Industrial and Management Optimization. 2021. Vol. 17. No. 1. Pp. 317–337.

17. **Keller A. A.** Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control // International Journal of Mathematics and Computers in Simulation. 2018. Vol. 12. June. Pp. 64–73.

18. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

19. **Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.** Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

20. **Челомей В. Н.** (предс.). Вибрации в технике: Справочник. В 6 тт. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.

21. **Алифов А. А.** Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 74 с.

22. **Алифов А. А.** О расчете колебательных систем с ограниченным возбуждением методами прямой линеаризации // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2017. № 4. С. 92–97.

23. **Алифов А. А.** Взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний при ограниченном возбуждении и запаздываниях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 39–48.

24. **Шмидт Г.** Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978. 336 с.

25. **Кононенко В. О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.

26. **Alifov A. A., Frolov K. V.** Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York: Taylor & Francis Group, 1990. 352 p.

## REFERENCES

1. **Alifov A. A.,** The fundamental principle which operates the Universe, "Regular & Chaoitic Dynamics" Publishing, Moscow-Izhevsk, 2012 (in Russian).

2. **Tretyakova T. V., Wildemann V. E.,** Prostranstvenno-vremennaya neodnorodnost protsessov neuprugogo deformirovaniya metallov [Spatial-temporal inhomogeneity of the processes of inelastic deformation of metals], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2017 (in Russian).

3. **Rubanik V. P.,** Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniyem [Oscillations of quasilinear systems having delay], Nauka Publishing, Moscow, 1969 (in Russian).

4. **Than V. Z., Dement'ev Ju. N., Goncharov V. I.,** Improving the accuracy calculation of time delay automatic control, Software & Systems. (3(31)) (2018) 521–526 (in Russian).

5. **Petrov N. N.,** Simple group pursuit subject to phase constraints and data delay, J. Comput. Syst. Sci. 57 (1) (2018) 37–42.

6. **Kornet M. E., Shishkina A. V.,** About non-parametric identification of infinitely fast systems with delay, Modern Technologies. System Analysis. Modeling. (3(59)) (2018) 16–23 (in Russian).

7. **Garkina I. A., Danilov A. M., Nashivochnikov V. V.,** Imitatsionnoye modelirovaniye dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniyem [Imitative modeling of dynamic systems with delay], Modern Problems of Science and Education. (1-1) (2015) URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=18849 (date of application: 25.01.2024) (in Russian).

8. **Kashchenko S. A.,** Dynamics of a delay logistic equation with diffusion and coefficients rapidly oscillating in a space variable, Doklady Mathematics. 98 (2) (2018) 522–525.

9. **Mulyukov M. V.,** Asymptotic stability of a linear model of an oscillator with delayed feedback, Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. (4 (27)) (2014) 62–67 (in Russian).

10. **Gupta S. K., Wang J., Barry O. R.,** Nonlinear vibration analysis in precision motion stage with PID and time-delayed feedback controls, Nonlinear Dyn. 101 (2) (2020) 439–464.

11. **Santos T. L. M., Araujo J. M., Franklin T. S.,** Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay, Mech. Syst. Signal Process. 110 (15 Sept) (2018) 428–441.

12. **Otto A., Just W., Radons G.,** Nonlinear dynamics of delay systems: an overview, Phil. Trans. R. Soc. A. 377 (2153) (2019) 20180389.

13. **Coccolo M., Zhu B., Sanjuán M. A. F., Sanz-Serna J. M.,** Bogdanov – Takens resonance in time-delayed systems, Nonlinear Dyn. 2018. 91 (3) (2018) 1939–1947.

14. **Sykora H.T., Sadeghpour M., Ge J. I., et al.,** On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems, Int. J. Robust Nonlinear Control. 30 (18) (2020) 8074–8097.

15. **Araujo J. M., Bettega J., Dantas N. J. B., et al.,** Vibration control of a two-link flexible robot arm with time delay through the robust receptance method, Appl. Sci. 11 (21) (2021) 9907.

16. **Liu C., Han M., Gong Z., Teo K. L.,** Robust parameter estimation for constrained time-delay systems with inexact measurements, J. Ind. Manag. Optim. 17 (1) (2021) 317–337.

17. **Keller A. A.,** Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control, Int. J. Math. Comput. Simul. 12 (June) (2018) 64–73.

18. **Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A.,** Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, CRC Press, Florida, USA, 1961.

19. **Butenin N. V., Neymark Yu. I., Fufayev N. A.,** Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

20. **Chelomey V. N.** (Chairman), Vibratsii v technike: spravochnik [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 2; Edited by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).

21. **Alifov A. A.,** Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow, 2015 (in Russian).

22. **Alifov A. A.,** About calculation of oscillatory systems with limited excitement by methods of direct linearization, Engineering and Automation Problems. (4) (2017) 92–97 (in Russian).

23. **Alifov A. A.,** The interaction of mixed forced, parametric and self-excited oscillations at limited excitation and delays, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 39–48 (in Russian).

24. **Schmidt G., Schulz R.,** Parametererregte Schwingungen, Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, Berlin, 1975.

25. **Kononenko V. O.,** Vibrating systems with limited power-supply, Iliffe, London, 1969.

26. **Alifov A. A., Frolov K. V.,** Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources, Hemisphere Pub. Corp. Taylor & Francis Group, New York, 1990.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**АЛИФОВ Алишир Али оглы** – *доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.*

101000, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4

alishir@mail.ru, a.alifov@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-2327-068X

## THE AUTHOR

**ALIFOV Alishir Ali**

*Mechanical Engineering Research Institute of the RAS*

4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia

alishir@mail.ru, a.alifov@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-2327-068X

*Статья поступила в редакцию 08.11.2023. Одобрена после рецензирования 24.11.2023. Принята 24.11.2023.*

*Received 08.11.2023. Approved after reviewing 24.11.2023. Accepted 24.11.2023.*