

Механика

Научная статья
УДК 531.391+681.5
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17112>

СРАВНЕНИЕ ПОДХОДОВ К ЗАДАНИЮ МОДАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРИ МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ УПРУГИМИ СИСТЕМАМИ С НАБЛЮДАТЕЛЯМИ И БЕЗ НИХ

А. В. Федотов ✉

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

✉ alvafed@yandex.ru

Аннотация. Реализация модального управления распределенными упругими объектами предполагает использование модальных матриц – анализатора и синтезатора форм, задающих линейные преобразования векторов измеренных и управляющих сигналов с целью разделения собственных форм объекта в системе управления. Стандартный способ задания модальных матриц заключается в обращении матриц влияния. В статье предлагается альтернативный способ: транспонирование данных матриц с нормированием воздействия на разные формы. На примере численного решения задачи гашения вынужденных колебаний тонкой металлической балки с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов тестируются разные комбинации названных методов и разные варианты нормирования. Рассмотрено управление как с наблюдателями, так и без них – на основе модальных и частотных фильтров. Показано, что наилучший результат управления достигается при комбинированном использовании рассмотренных методов в системах как с наблюдателями, так и без них.

Ключевые слова: модальное управление, модальные матрицы, анализатор форм, синтезатор форм, наблюдатель

Для цитирования: Федотов А. В. Сравнение подходов к заданию модальных матриц при модальном управлении упругими системами с наблюдателями и без них // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 1. С 114–129. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17112>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17112>

A COMPARISON OF APPROACHES TO SPECIFYING THE MODAL MATRICES IN THE MODAL CONTROL OF ELASTIC SYSTEMS WITH AND WITHOUT OBSERVERS

A. V. Fedotov ✉

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

✉ alvafed@yandex.ru

Abstract. The implementation of modal control of distributed elastic objects involves the use of modal matrices: a mode analyzer and a mode synthesizer specifying the linear transformation of vectors of measured and control signals in order to separate the eigenmodes of the object in the control system. The standard method for calculating the modal matrices is the inversion of the influence matrices. The article proposes an alternative method: transposing the influence



matrices with normalization of the action on different modes. As an example, the problem of suppression of forced vibrations of a thin metal beam using piezoelectric sensors and actuators has been solved numerically, and different combinations of the above methods and different variants of normalization have been tested. Two types of control systems were considered, the former being based on modal and frequency filters and the latter being based on modal observers. The best control result was shown to be achieved with the combined use of the above methods for both types of control systems considered.

Keywords: modal control, modal matrices, mode analyzer, mode synthesizer, observer

For citation: Fedotov A. V., A comparison of approaches to specifying the modal matrices in the modal control of elastic systems with and without observers, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (1) (2024) 114–129. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17112>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Модальное управление в последние десятилетия стало общепризнанным способом активного управления распределенными системами, в том числе упругими объектами [1 – 3]. Его основной принцип заключается в раздельном управлении различными формами колебаний объекта (модами), при этом его применение основывается на независимости различных форм колебаний объекта друг от друга. Эффективность применения этого метода зависит от того, насколько точно удастся разделить в системе управления (СУ) различные моды объекта. При управлении с обратной связью данная задача предполагает как точное измерение активизации отдельных мод, по которым ведется управление, так и адресное воздействие на данные моды.

При модальном управлении упругими объектами применяются, как правило, массивы дискретных датчиков (сенсоров) и приводов (актуаторов). И зачастую каждый актуатор оказывает действие сразу на несколько форм, и, аналогично, каждый сенсор реагирует также на несколько форм колебаний объекта. В таком случае для разделения информации о разных модах в системе управления используются модальные матрицы (или модальные фильтры), задающие линейные преобразования векторов измеренных и управляющих сигналов.

Модальный подход к управлению можно реализовать как на основе модальных и частотных фильтров [4 – 7], так и на основе использования наблюдателей [8 – 11]. Во втором случае система управления оказывается более сложной, поскольку в ней для определения вектора состояния упругого объекта используется известная модель объекта, за счет чего искомые величины определяются более точно.

Эффективность двух названных вариантов модального подхода в задаче гашения вынужденных колебаний тонкой металлической балки сравнивалась в нашей статье [12]. Было показано, что управление с наблюдателями является более эффективным, чем управление на основе модальных и частотных фильтров. Оба рассмотренных варианта предполагают использование модальных матриц для разделения форм колебаний объекта в системе управления.

Стандартный способ задания модальных матриц заключается в обращении матриц влияния [5, 13] (или же псевдообращении в более общем случае [14, 15]). Эти матрицы показывают, в каких пропорциях каждый сенсор и актуатор измеряет или возбуждает различные моды объекта.

Таким образом, в идеальном варианте обращение матриц влияния позволяет получить такую систему, в которой каждый контур управления работает только со своей конкретной модой и контуры не мешают работе друг друга. В более ранних работах автора настоящей статьи также неизменно использовался именно такой способ определения модальных матриц [12, 13, 16 – 18].

Однако рассмотренный способ нельзя считать универсальным решением проблемы разделения форм.

Во-первых, всегда присутствуют высшие формы, которые неизбежно возбуждаются системой управления, поскольку число форм распределенного упругого объекта бесконечно, в то время как число управляемых форм – конечно. Явление перетекания энергии на высшие моды носит название спилловер-эффекта (*англ.* spillover effect). Оно ограничивает эффективность модального управления и может приводить к неустойчивости замкнутой системы.

Во-вторых, число сенсоров и актуаторов в системе управления также ограничено. В случае, если предполагается управление по числу форм, превышающему число сенсоров и актуаторов, полностью разделить данные формы в системе управления обычно невозможно. Так или иначе, идеальное выделение нужных мод при управлении возможно только в достаточно редком случае использования распределенных модальных сенсоров и актуаторов [6] (при этом потребность в модальных матрицах пропадает); в более распространенном случае использования массивов дискретных элементов управления универсального решения данной задачи не существует, что создает предпосылки для поиска альтернативных решений.

Альтернативный вариант определения модальных матриц был предложен нами в работе [12]. Он заключается в том, чтобы вместо обращения матриц весовых коэффициентов транспонировать эти матрицы. При этом предлагается домножать их на дополнительные диагональные матрицы, нормирующие степень возбуждения и измерения отдельных форм.

Смысл данного алгоритма состоит в том, чтобы в первую очередь добиваться не разделения различных форм, подлежащих управлению, а наиболее эффективного воздействия на каждую форму, а для этого – аппроксимировать ее в соответствии с коэффициентами влияния для данной конкретной формы.

Во-первых, предлагаемый способ вычислительно проще стандартного, поскольку требует не обращения матриц, а всего лишь их транспонирования и умножения на диагональную матрицу. Во-вторых, в случае изменения числа управляемых форм модальные матрицы не надо полностью пересчитывать, достаточно лишь добавить к ним или убрать нужные столбцы или строки.

Цель настоящей работы – провести анализ эффективности различных способов задания модальных матриц при модальном управлении упругой системой.

Для этого численно решается задача, аналогичная рассмотренным нами ранее в статьях [12, 13, 16 – 18]: гашение вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Для каждого варианта определения матриц синтезируются оптимальные законы управления, после чего результаты гашения колебаний для всех полученных СУ сравниваются между собой.

Теоретические основы рассматриваемых методов управления

Модальное управление широко используется для управления колебаниями упругих систем в различных областях техники. В настоящей работе исследуются два наиболее распространенных варианта реализации модального подхода: более простой – на основе модальных и частотных фильтров, и более сложный – на основе наблюдателей.

В данном разделе приводится краткое теоретическое описание рассматриваемых методов (более подробно они описаны в нашей статье [12]), а также обосновываются различные варианты определения модальных матриц: как стандартный, так и альтернативный (предложен автором настоящей статьи).

Метод модальных и частотных фильтров. Рассмотрим задачу гашения вынужденных изгибных колебаний балки Бернулли – Эйлера с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Запишем в матричном виде уравнение колебаний упругого объекта в разложении по собственным формам, считая, что колебания по различным формам происходят независимо:

$$\ddot{q} + 2\xi\Omega\dot{q} + \Omega^2q = Q^c + Q^d, \quad (1)$$



где $q_{n \times 1}(t)$ – вектор обобщенных координат, его длина n соответствует количеству мод объекта, учитываемых в модели; $\Omega_{n \times n}$ – диагональная матрица собственных частот колебаний балки; ξ – скалярный коэффициент демпфирования (для простоты принимаем его одинаковым для всех форм); $Q_{n \times 1}^c(t), Q_{n \times 1}^d(t)$ – векторы обобщенных сил, соответствующие управлению и внешнему возмущению, соответственно.

Пусть число сенсоров и актуаторов одинаково и равно m ($m \leq n$). Их работа описывается следующими уравнениями:

$$y_{m \times 1} = \Theta_{m \times n}^s q_{n \times 1}, Q_{n \times 1}^c = \Theta_{n \times m}^a u_{m \times 1}, \quad (2)$$

где $y_{m \times 1}(t)$ – вектор сигналов сенсоров; $u_{m \times 1}(t)$ – вектор управляющих сигналов, подаваемых на актуаторы; $\Theta_{m \times n}^s, \Theta_{n \times m}^a$ – матрицы влияния для сенсоров и для актуаторов, соответственно.

В случае использования распределенных модальных сенсоров и актуаторов [6], моды объекта в системе управления уже разделены: каждый сенсор реагирует, а каждый актуатор воздействует только на одну определенную моду. Однако такие сенсоры и актуаторы используются в исключительных случаях; обычно их использование неудобно и слишком затратно, особенно если требуется осуществлять управление сразу по нескольким модам объекта. В связи с этим далее мы будем рассматривать случай дискретных сенсоров и актуаторов.

Будем считать, что управление ведется по k низшим формам ($k \leq n$), следовательно, система управления включает k контуров. Модальные матрицы T и F (анализатор и синтезатор форм) осуществляют в СУ линейные преобразования измеренных и управляющих сигналов. Данные преобразования обеспечивают соответствие каждого контура управления определенной моде объекта:

$$\hat{q}_{k \times 1} = T_{k \times m} y_{m \times 1}, u_{m \times 1} = F_{m \times k} \hat{Q}_{k \times 1}, \quad (3)$$

где $\hat{q}_{k \times 1}(t)$ – вектор оценок k низших обобщенных координат, $\hat{Q}_{k \times 1}(t)$ – вектор желаемых управляющих воздействий на k низших собственных форм.

В каждом контуре модальной системы желаемое воздействие на форму зависит от оценки соответствующей обобщенной координаты:

$$\hat{Q}_i = -R_i(s) \hat{q}_i, \quad (4)$$

где $R_i(s)$ – закон управления в i -м контуре, записанный в виде функции комплексной переменной s .

Законы управления в контурах также называются частотными фильтрами и задаются таким образом, чтобы система управления оказывала на объект нужное по амплитуде и фазе воздействие, причем именно вблизи резонансной частоты объекта, соответствующей данному контуру.

Очевидно, что в простейшем случае, когда $k = m = n$, модальные матрицы должны определяться следующим образом:

$$T = (\Theta^s)^{-1}, F = (\Theta^a)^{-1}. \quad (5)$$

В таком случае система уравнений (1) распадается на n независимых уравнений для каждой из собственных форм:

$$\ddot{q}_i + 2\xi\Omega_i\dot{q}_i + \Omega_i^2 q_i = -R_i(s)q_i + Q_i^d, \quad (6)$$

и за счет выбора законов управления $R_i(s)$ можно осуществить эффективное раздельное управление каждой собственной формой объекта.

Однако обычно при управлении распределенными системами число форм n , которые необходимо учитывать, превышает как число сенсоров и актуаторов m , так и число форм k , по которым ведется управление; при этом числа m и k также могут быть различными.

В таком случае матрицы влияния можно представить в следующем виде:

$$\Theta_{m \times n}^s = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{m \times k}^s & \tilde{\Theta}_{m \times (n-k)}^s \end{bmatrix}, \Theta_{n \times m}^a = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{k \times m}^a \\ \tilde{\Theta}_{(n-k) \times m}^a \end{bmatrix}, \quad (7)$$

а модальные фильтры будут определяться как псевдообратные соответствующим компонентам данных матриц:

$$T_{k \times m} = (\bar{\Theta}_{m \times k}^s)^+, F_{m \times k} = (\bar{\Theta}_{k \times m}^a)^+. \quad (8)$$

Приведенный метод определения модальных матриц можно назвать общепринятым [14, 15, 19]. Чуть ниже в данном разделе рассмотрим альтернативный метод, предложенный нами в статье [12].

Метод наблюдателей. Для изложения данного метода необходимо перейти к описанию системы (1), (2) в пространстве состояний:

$$\dot{q}^n = Aq^n + Bu + Dd, \quad (9)$$

$$y = Cq^n, \quad (10)$$

где d – вектор внешних воздействий; y, u – векторы измеренных сигналов и управляющих воздействий; q^n – вектор состояния системы, связанный с вектором обобщенных координат из уравнения (1) следующим образом:

$$q^n = (q_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_n)^T; \quad (11)$$

матрицы A, B и C можно выразить через матрицы, описывающие динамику объекта и работу сенсоров и актуаторов:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -\Omega_{n \times n}^2 & -2\xi\Omega_{n \times n} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \Theta_{n \times m}^a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \Theta_{m \times n}^s & 0_{m \times n} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Здесь $0_{n \times n}, 0_{n \times m}$ и $0_{m \times n}$ – матрицы, состоящие из нулей; $I_{n \times n}$ – единичная матрица.

Будем считать, что наблюдение и управление ведется по k низшим формам колебаний объекта ($k \leq n$). Задача наблюдателя состоит в том, чтобы оценивать вектор состояния q^k , соответствующий данным формам:

$$q^k = (q_1 \quad \dots \quad q_k \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_k)^T. \quad (13)$$

Наблюдатель формирует оценку данного вектора $\hat{q}_{2k \times 1}$ с использованием известных матриц $A_{2k \times 2k}^{(1)}, B_{2k \times m}^{(1)}$ и $C_{m \times 2k}^{(1)}$, описывающих динамику k низших мод объекта (их можно получить из матриц A, B и C , удалив лишние столбцы и строки):

$$\dot{\hat{q}} = A^{(1)}\hat{q} + B^{(1)}u + L(y - C^{(1)}\hat{q}), \quad (14)$$

где $L_{2k \times m}$ – матрица наблюдения, которую необходимо определить.

Управляющее воздействие зависит от оценок вектора состояния:

$$u = -R\hat{q}, \quad (15)$$

где $R_{m \times 2k}$ – матрица управления, которую также необходимо задать.

Принцип раздельного управления различными модами объекта диктует следующую структуру матрицы наблюдения L и управления R :

$$L_{2k \times k} = \begin{bmatrix} K_{k \times k}^L \\ K_{k \times k}^{Ld} \end{bmatrix} T_{k \times m}, R_{m \times 2k} = F_{m \times k} \begin{bmatrix} K_{k \times k}^R & K_{k \times k}^{Rd} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где K^L, K^{Ld}, K^R, K^{Rd} – диагональные матрицы размером $k \times k$; T, F – уже известные нам модальные матрицы (анализатор и синтезатор форм).

Модальные матрицы можно определять теми же способами, что и в случае управления без наблюдателей.

Альтернативный способ определения модальных матриц. Идея представленного ниже метода впервые предложена автором этой работы ранее в статье [12], однако теоретическое обоснование, а также первые результаты применения и исследование эффективности предложенного метода представлены именно в настоящей статье.

Итак, основная идея предлагаемого метода состоит в том, чтобы определять модальные матрицы не через обращение, а через транспонирование матриц влияния. При этом также производится дополнительная математическая операция – домножение получившихся матриц на диагональные матрицы, задающие степень возбуждения и реагирования системы управления на отдельные формы колебаний объекта. Предложенный способ описывается следующими уравнениями:

$$T_{k \times m} = M_{k \times k}^s \left(\bar{\Theta}_{m \times k}^s \right)^T, F_{m \times k} = \left(\bar{\Theta}_{k \times m}^a \right)^T M_{k \times k}^a, \quad (17)$$

где $M_{k \times k}^s, M_{k \times k}^a$ – диагональные матрицы, подлежащие определению.

Далее рассмотрим различные варианты задания данных матриц.

Теоретическое обоснование предлагаемого метода можно получить через развитие теории модальных фильтров, изложенной в одной из основополагающих статей по данной тематике [19]. Применим эту теорию к рассматриваемой нами задаче управления изгибными колебаниями балки Бернулли – Эйлера с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.

Рассмотрим балку длиной l , расположенную вдоль оси x и испытывающую изгибные колебания в плоскости XZ . Представим поперечное смещение точек балки $w(x, t)$ в виде разложения по собственным формам:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n X_i(x) q_i(t), \quad (18)$$

где сохранены все обозначения, введенные в предыдущих подразделах, а $X_i(x)$ – собственные формы изгибных колебаний балки.

Будем считать, что собственные формы нормированы следующим образом:

$$\int_0^l \rho_l(x) X_i(x) X_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (19)$$

где $\rho_l(x)$ – линейная плотность материала балки, δ_{ij} – символ Кронекера.

Справедливо также условие нормирования для вторых производных форм:

$$\int_0^l EI(x) X_i''(x) X_j''(x) dx = \Omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (20)$$

где $EI(x)$ – изгибная жесткость сечений балки.

Работа сенсоров и актуаторов описывается уравнением (2). Будем рассматривать их в виде прямоугольных пьезоэлектрических пластинок, наклеенных парами сенсор-актуатор по обеим сторонам балки.

В таком случае для коэффициентов влияния справедливы соотношения:

$$\Theta_{ij}^s = k^s \Theta_{ij}, \Theta_{ji}^a = k^a \Theta_{ij}, \quad (21)$$

$$\Theta_{ij} = X_j'(x_i^{(2)}) - X_j'(x_i^{(1)}) = \int_{x_i^{(1)}}^{x_i^{(2)}} X_j''(x) dx \approx X_j''(x_i) l_p, \quad (22)$$

где k^s, k^a – коэффициенты соответственно для сенсоров и актуаторов, зависящие от их геометрических параметров и свойств материалов; $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$, x_i – координаты соответственно левого и правого концов, а также центра i -й пары сенсор-актуатор; l_p – длина каждого пьезоэлемента.

Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$x_i = \frac{x_i^{(1)} + x_i^{(2)}}{2}, l_p = x_i^{(2)} - x_i^{(1)}. \quad (23)$$

В формуле (22) используется предположение о малости длины сенсоров и актуаторов, что позволяет приближенно заменить интеграл от второй производной собственных форм колебаний балки по длине пьезоэлемента значением данной функции в центральном сечении. Коэффициенты влияния фактически оказываются пропорциональными кривизне отдельных форм колебаний в заданных сечениях. Это объясняется тем, что продольная деформация сенсоров и актуаторов связана именно с изгибной деформацией (т. е. кривизной) соответствующих участков балки.

В статье [19] предлагается вычислять аппроксимацию функции поперечного смещения точек балки $\hat{w}(x, t)$ через оценки данной функции в отдельных сечениях, соответствующих расположению сенсоров, $\hat{w}(x_j, t)$:

$$\hat{w}(x, t) = \sum_{j=1}^m G(x, x_j) \hat{w}(x_j, t), \quad (24)$$

где $G(x, x_j)$ – функции интерполяции, заданные для каждого сенсора.

Идея альтернативного задания матриц, излагаемая в настоящей работе, предполагает несколько измененное определение для функции $\hat{w}(x, t)$:

$$\hat{w}(x, t) = \sum_{j=1}^m \bar{G}(x, x_j) y_j(t). \quad (25)$$

Здесь выполнена модификация: вместо оценки перемещения в местах крепления сенсоров $\hat{w}(x_j, t)$ использованы сигналы самих сенсоров $y_j(t)$. Эта замена объясняется тем, что сенсоры в рассматриваемой задаче измеряют не поперечное смещение сечений балки, как принимается в статье [19], а кривизну балки в этих сечениях, поэтому по их сигналам невозможно получить оценку смещения $\hat{w}(x_j, t)$. Следовательно, функция $\bar{G}(x, x_j)$ приобретает несколько иной смысл, чем функция $G(x, x_j)$ в исходной формуле.

Основное значение в разработке предлагаемого метода имеет формула для определения функций интерполяции $\bar{G}(x, x_j)$.

Нами предлагается следующее определение:

$$\bar{G}(x, x_j) = \sum_{i=1}^k \bar{M}_i^s X_i(x) X_i''(x_j). \quad (26)$$

Таким образом, функция интерполяции для каждого из сенсоров представляет собой комбинацию собственных форм колебаний балки, где вес каждой из форм пропорционален кривизне данной формы в сечении балки, соответствующем данному сенсору (т. е. фактически соответствующему коэффициенту влияния Θ_{ji}). Кроме того, вклад различных форм регулируется коэффициентами \bar{M}_i^s . Далее рассмотрим несколько вариантов их определения.

Из условия ортогональности и нормировки собственных форм (19) можно получить следующее выражение для оценки i -й обобщенной координаты:

$$\hat{q}_i(t) = \int_0^l \rho_l(x) X_i(x) \hat{w}(x, t) dx. \quad (27)$$

Подставив сюда выражения (25) и (26), а также учитывая условие (19) и определение анализатора форм (3), получим следующее выражение для компонент данной матрицы:

$$T_{ij} = \int_0^l \rho_l(x) X_i(x) \bar{G}(x, x_j) dx = \bar{M}_i^s X_i''(x_j) = \frac{\bar{M}_i^s}{l_p} \Theta_{ji} = \frac{\bar{M}_i^s}{l_p k^s} \Theta_{ji}^s. \quad (28)$$

Таким образом мы получили выражение для матрицы T , совпадающее с формулой (17). При этом коэффициенты связаны следующим образом:

$$\bar{M}_i^s = l_p k^s M_i^s. \quad (29)$$

Далее рассмотрим, как определять эти нормирующие коэффициенты. Для этого вспомним стандартное определение матрицы T – уравнение (5). Оно предполагает, что на диагонали матрицы, которая представляет собой произведение матриц T и Θ_s , стоят единицы, т. е. выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^m T_{ij} \Theta_{ji}^s = \frac{k^s}{l_p} \bar{M}_i^s \sum_{j=1}^m (\Theta_{ji})^2 = 1. \quad (30)$$

Отсюда следует первый вариант нормирования – подгоночный:

$$\bar{M}_i^s = \frac{l_p}{k^s} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^m (\Theta_{ji})^2} = \frac{l_p}{k^s} M_i, \quad M_i^s = \frac{\bar{M}_i^s}{l_p k^s} = \frac{1}{(k^s)^2} M_i, \quad (31)$$

где введены компоненты диагональной нормирующей матрицы M_i :

$$M_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^m (\Theta_{ji})^2}. \quad (32)$$

Для нахождения матрицы – синтезатора форм (F), нормирующая матрица M^a из уравнения (17) будет определяться аналогично выражению (31):

$$M_i^a = \frac{1}{(k^a)^2} M_i. \quad (33)$$

Второй вариант определения нормирующих матриц – асимптотический. При его выводе используется предположение, что сенсоров и актуаторов достаточно много и сумму квадратов вторых производных форм колебаний можно заменить средним значением данной функции по длине балки, умноженным на число пьезоэлементов:

$$\sum_{j=1}^m (\Theta_{ji})^2 = l_p^2 \sum_{j=1}^m (X_i''(x_j))^2 \approx \frac{l_p^2 m}{l} \int_0^l (X_i''(x))^2 dx = \frac{l_p^2 m \Omega_i^2}{lEI}. \quad (34)$$

В таком случае компоненты диагональной нормирующей матрицы примут следующий вид:

$$M_i = \frac{EI}{\Omega_i^2 l_p^2 m}. \quad (35)$$

Наконец, еще один вариант нормирования – тривиальный (фактически – отсутствие нормирования), где матрица M принимается единичной:

$$M = I_{k \times k}. \quad (36)$$

Предложенный метод определения модальных матриц, вне зависимости от способа определения нормирующей матрицы, значительно проще стандартного метода (8) с точки зрения вычислений. Он также обладает еще одним преимуществом: в случае изменения числа управляемых форм (при сохранении системы сенсоров и актуаторов) нет необходимости полностью пересчитывать модальные матрицы, как при использовании стандартного метода; следует лишь добавить к ним или убрать соответствующие столбцы или строки.

Может возникнуть естественный вопрос, различны ли фундаментально стандартный и альтернативный подходы к определению модальных матриц; а если ответ положительный, то как такое возможно, если оба подхода призваны решать одну и ту же задачу.

Данное кажущееся противоречие объясняется просто: при увеличении числа сенсоров и актуаторов и их равномерном распределении по всему объекту управления, результаты

применения данных подходов сходятся, поскольку в этом случае столбцы матрицы Θ становятся ортогональными друг другу и результаты обращения данной матрицы и ее транспонирования (при условии использования первого варианта нормирования (32)) становятся идентичными.

В связи с этим замечанием, наибольшая разница между рассматриваемыми подходами к определению модальных матриц проявляется в том случае, когда число используемых сенсоров и актуаторов оказывается малым. Именно такой случай и рассматривается далее: количество пар пьезоэлементов в поставленной задаче принимается равным двум.

Кроме самой формулировки предложенного подхода, новизна настоящего исследования заключается и в том, что в нем изучается случай, когда число форм, по которым ведется управление, превышает число пар сенсор-актуатор ($k > m$), в то время как традиционно в литературе о модальном управлении [14, 15] рассматривается обратный вариант ($k \leq m$). Это означает, что в рассмотренных ниже системах моды, по которым ведется управление, не могут быть строго отделены друг от друга, что еще усложняет задачу определения модальных матриц и повышает актуальность исследования альтернативных подходов к решению этой задачи.

Постановка задачи

Задача, решаемая в настоящей работе, предполагает гашение вынужденных изгибных колебаний тонкой алюминиевой балки, упруго зашпемленной в промежуточном сечении, с использованием пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов, наклеенных на балку на определенных участках. Эта задача уже рассматривалась ранее в ряде работ автора данной статьи с соавторами: сначала в экспериментальном исследовании [16], затем – в численных [12, 17, 18], где ставилась цель как можно точнее смоделировать процессы, происходящие в эксперименте.

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Балка 1 сечением 3×35 мм и длиной 70 см расположена вертикально и закреплена в одной точке на расстоянии 10 см от нижнего конца. Пьезоэлектрический стержень-толкатель 2 входит в конструкцию закрепления, соединяющую балку с неподвижным основанием 3. Продольные колебания толкателя, возникающие при подаче на него переменного электрического напряжения с некоторой частотой, вызывают вибрацию точки закрепления балки. Такая вибрация выступает в качестве внешнего возбуждения, с последствиями которого и должна бороться система управления.

В состав системы управления входят две пары сенсор-актуатор (4 – сенсоры, 5 – актуаторы) – тонкие прямоугольные пьезоэлектрические пластинки размером 50×30 мм, покрытые электродами с двух сторон.

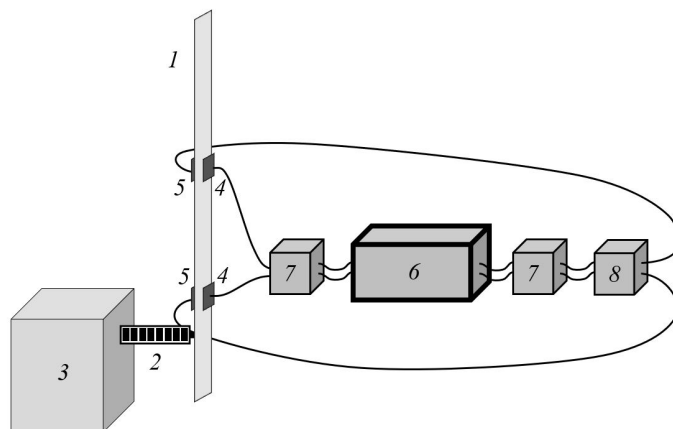


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

- 1 – алюминиевая балка; 2 – пьезоэлектрический стержень-толкатель;
- 3 – неподвижное основание; 4 – сенсоры; 5 – актуаторы;
- 6 – дискретный контроллер; 7 – фильтры нижних частот; 8 – усилитель



Помимо дискретного контроллера b , преобразующего измеренные сигналы в управляющие, в цепь управления входят дополнительные элементы – фильтры нижних частот γ , а также усилитель δ . Фильтры сглаживают высокочастотные составляющие сигнала, возникающие из-за его дискретизации в контроллере, и в целом повышают устойчивость замкнутой системы; усилитель повышает амплитуду управляющего сигнала перед подачей на актуаторы в 25 раз.

При численном моделировании замкнутой системы частотные характеристики фильтров и усилителя также учитываются [12], что отличает настоящее исследование от большинства численных исследований по данной тематике.

Изначально в эксперименте и последующих численных исследованиях, где синтезировались системы управления без наблюдателей, цель управления состояла в том, чтобы гасить вынужденные изгибные колебания балки только на первом и втором резонансах. В связи с этим и расположение сенсоров и актуаторов на балке выбиралось в соответствии с данной целью [16]. Однако в самых последних наших исследованиях, начиная со статьи [12], рассматриваются в том числе более эффективные модальные системы с наблюдателями, позволяющие увеличить количество форм колебаний балки, по которым ведется управление, при сохранении числа и расположения сенсоров и актуаторов. Поэтому для таких систем цель управления была сформулирована как гашение вынужденных колебаний балки на трех низших резонансах.

Мониторинг эффективности управления в эксперименте осуществлялся с помощью лазерного виброметра, измеряющего амплитуду колебаний точки на верхнем конце балки (поскольку именно эта точка при вынужденных колебаниях балки перемещается больше всего).

На первом этапе численного моделирования замкнутой системы создается конечно-элементная модель объекта управления (балки с пьезоэлементами и конструкцией закрепления), анализ которой позволяет получить частотные характеристики объекта [17]. Далее для каждого варианта тестируемой системы управления на основе частотных характеристик как объекта, так и самой СУ вычисляются частотные характеристики замкнутой системы [17]. Для определения эффективности управления анализируется амплитудно-частотная характеристика перемещения точки на верхнем конце балки.

Синтез систем управления

Задача настоящего исследования – синтезировать в рамках рассматриваемых подходов оптимальные СУ, т. е. наиболее эффективно выполняющие поставленную цель управления. Для этого при задании систем управления применяется процедура оптимизации [17, 18], которая позволяет варьировать параметры СУ и подбирать их оптимальные комбинации, соблюдая при этом условие устойчивости замкнутой системы.

В качестве критерия оптимизации выступает либо высота одного конкретного резонансного пика на амплитудно-частотной характеристике балки (которая соответствует перемещению точки на верхнем конце), либо сумма амплитуд колебаний (в децибелах) на соответствующих резонансных пиках в случае, когда система должна гасить колебания на нескольких резонансах.

Для анализа устойчивости замкнутой системы используется критерий Найквиста, модифицированный для случая нескольких контуров управления [17].

На первом этапе синтеза СУ как с наблюдателями, так и без них, задаются модальные матрицы – анализатор и синтезатор форм (T и F). Они определяются различными способами, рассмотренными выше в данной статье. Затем для каждой комбинации модальных матриц с использованием процедуры оптимизации синтезируются законы управления: для систем без наблюдателей это частотные фильтры $R_1(s)$ и $R_2(s)$ (см. формулу (4)), а для СУ с наблюдателями – диагональные матрицы K^L , K^{Ld} , K^R и K^{Rd} , входящие в определение матриц наблюдения L и управления R (см. выражения (16)). При этом задаются различные цели управления: как гашение колебаний балки на каждом резонансе по отдельности, так и их гашение сразу на нескольких резонансах.

Рассмотрим подробнее разные варианты задания модальных матриц, использованные в данном исследовании. Будем считать, что для матриц влияния справедливы равенства (21). В таком случае глобально возможны два варианта определения матриц.

Первый способ – обращение (или псевдообращение) (8):

$$T = (\Theta^s)^+ = k^s \Theta^+, F = (\Theta^a)^+ = k^a (\Theta^T)^+. \quad (37)$$

Второй способ – транспонирование с домножением на матрицу M (см. выражения (31, 33)):

$$T = \frac{1}{(k^s)^2} M (\Theta^s)^T = \frac{1}{k^s} M \Theta^T, F = \frac{1}{(k^a)^2} (\Theta^a)^T M = \frac{1}{k^a} \Theta M. \quad (38)$$

Из модели объекта получены следующие матрицы влияния для случаев управления по двум или трем формам:

$$\Theta_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3,659 & -17,07 \\ 1,187 & 17,76 \end{bmatrix}, \Theta_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3,659 & -17,07 & 21,48 \\ 1,187 & 17,76 & 10,09 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Нормирующая матрица M определялась одним из трех способов (см. формулы (32), (35), (36)) (при управлении по двум формам последние строка и столбец убираются):

$$\begin{cases} M^{triv} = I_{3 \times 3}, M^{asympt} = \text{diag}\{0,574 & 0,0159 & 0,00223\}, \\ M^{fit} = \text{diag}\{0,0676 & 0,00165 & 0,00178\}. \end{cases} \quad (40)$$

Здесь для анализа большой интерес представляют не сами модальные матрицы, а результат их умножения на соответствующие матрицы влияния; обозначим его как $\tilde{\Theta}$. Для наилучшего разделения форм матрица $\tilde{\Theta}$ должна иметь по возможности максимальное сходство с единичной.

В случае управления по двум формам ($k = 2$) и обращения матриц влияния это требование выполняется:

$$\tilde{\Theta}_{2 \times 2}^{inv} = T \Theta^s = (\Theta^a F)^T = I_{2 \times 2}. \quad (41)$$

Далее представлены матрицы, соответствующие псевдообращению и различным вариантам нормирования при транспонировании для $k = 3$: тривиальному, асимптотическому и подгоночному (матрицы для $k = 2$ можно получить, если убрать у данных матриц последние строку и столбец):

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}^{inv} = \begin{bmatrix} 0,0236 & -0,0201 & 0,150 \\ -0,0201 & 1,00 & 0,00310 \\ 0,150 & 0,00310 & 0,977 \end{bmatrix}, \tilde{\Theta}^{triv} = \begin{bmatrix} 14,8 & -41,4 & 90,6 \\ -41,4 & -607 & -187 \\ 90,6 & -187 & 563 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Theta}^{asympt} = \begin{bmatrix} 8,49 & -23,8 & 52,0 \\ -0,658 & 9,65 & -2,98 \\ 0,202 & -0,417 & 1,25 \end{bmatrix}, \tilde{\Theta}^{fit} = \begin{bmatrix} 1,00 & -2,80 & 6,12 \\ -0,0682 & 1,00 & -0,309 \\ 0,161 & -0,333 & 1,00 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (42)$$

Как видно из полученных формул, разные варианты определения модальных матриц приводят к существенно различающимся результатам разделения форм колебаний балки в системе управления. Далее будет сравниваться эффективность рассмотренных подходов.

Сравнение результатов работы различных систем управления

В данном разделе приводятся результаты работы синтезированных систем управления. Примеры законов управления для СУ, основанных на методе модальных и частотных фильтров, приведены в статье [18], а для СУ с наблюдателями – в статье [12].

Результаты гашения вынужденных колебаний балки на первом (I) и втором (II) резонансах для систем без наблюдателей представлены в табл. 1. Для таких СУ при определении модальных матриц методом транспонирования неважно, какой метод нормировки



использовать, поскольку различные варианты дают один и тот же результат при соответствующем выборе коэффициентов усиления в законах управления в каждом из контуров. Для каждого варианта определения модальных матриц (обращение или транспонирование) синтезировались СУ, эффективные только на первом или втором резонансах по отдельности либо на обоих резонансах вместе.

Таблица 1

**Снижение резонансных амплитуд колебаний балки
для различных систем управления (без наблюдателей)**

Определение модальных матриц			Гашение	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе	
Случай	T	F		I (Δy_1)	II (Δy_2)
1	Tr	Inv	отдельно	32,04	30,84
			вместе	32,00	31,05
2	Tr	Tr	отдельно	32,31	31,41
			вместе	32,32	29,9
3	Inv	Tr	отдельно	32,72	31,48
			вместе	32,72	31,48
4	Tr	Inv	отдельно	32,77	31,45
			вместе	32,77	31,50

Обозначения: T , F – анализатор и синтезатор форм, соответственно; Tr, Inv – транспонирование и обращение матриц влияния, соответственно.

Из представленных данных видно, что наиболее эффективное гашение колебаний на обоих резонансах достигается в том случае, когда одна из модальных матриц определяется обращением, а другая – транспонированием (случаи 3 и 4), последний случай немного более эффективен.

В табл. 2 представлены результаты работы различных СУ с наблюдателями на первых трех резонансах. Для каждой комбинации модальных матриц рассмотрено два случая: управление только по двум ($k = 2$) или по всем трем формам ($k = 3$). В каждом из этих случаев были рассмотрены различные варианты нормирования: при $k = 3$ – все три варианта, при $k = 2$ – только тривиальный и асимптотический, так как в этом случае разница между асимптотическим и подгоночным случаями практически отсутствует. В табл. 2 жирным шрифтом выделены наилучшие результаты гашения колебаний на каждом из резонансов для каждой комбинации модальных матриц.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы, где в качестве отслеживаемой величины выступает амплитуда колебаний точки на верхнем конце балки, вблизи каждого из трех низших резонансов. Сравнивается эффективность четырех СУ, соответствующих каждой из комбинаций модальных матриц в случае подгоночного нормирования при одновременном гашении колебаний на трех резонансах.

Необходимо отметить, что разница между всеми рассмотренными вариантами определения модальных матриц невелика – при управлении с наблюдателями она находится в пределах нескольких децибел, без наблюдателей – около децибела. Таким образом, в этом отношении у изученных подходов к управлению наблюдается робастность. Для систем с наблюдателями наиболее эффективные комбинации матриц – также 3 и 4, причем последняя опять предпочтительнее: она позволяет наиболее эффективно гасить первый и третий резонансы, в то время как комбинация 3 – гасить второй резонанс.

В среднем, результаты для случаев асимптотического и подгоночного нормирования – лучше, чем для тривиального: для комбинации 2 модальных матриц лучше

Таблица 2

Снижение резонансных амплитуд колебаний балки для различных систем управления (с наблюдателями)

Определение модальных матриц			k	Нормирование	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе		
Случай	T	F			I (Δy_1)	II (Δy_2)	III (Δy_3)
1	Inv	Inv	2	—	34,75	35,66	—
			3	—	36,50	36,52	22,85
2	Tr	Tr	2	<i>triv</i>	36,44	36,55	—
				<i>asymp</i>	36,68	36,53	—
			3	<i>triv</i>	35,48	37,02	23,91
				<i>asymp</i>	36,33	36,95	23,88
				<i>fit</i>	36,18	36,99	22,75
				<i>triv</i>	35,97	31,76	—
3	Inv	Tr	2	<i>asymp</i>	36,06	31,86	—
				<i>triv</i>	36,18	37,09	21,99
			3	<i>asymp</i>	36,78	38,23	21,69
<i>fit</i>	36,73	38,33		21,83			
4	Tr	Inv	2	<i>triv</i>	36,93	36,98	—
				<i>asymp</i>	36,94	37,18	—
			3	<i>triv</i>	37,68	37,65	24,28
				<i>asymp</i>	37,86	37,62	24,35
				<i>fit</i>	37,93	37,64	24,46
				<i>triv</i>	36,93	36,98	—

Обозначения: k – количество форм; *triv*, *asymp*, *fit* – тривиальный, асимптотический и подгоночный варианты нормирования при транспонировании.

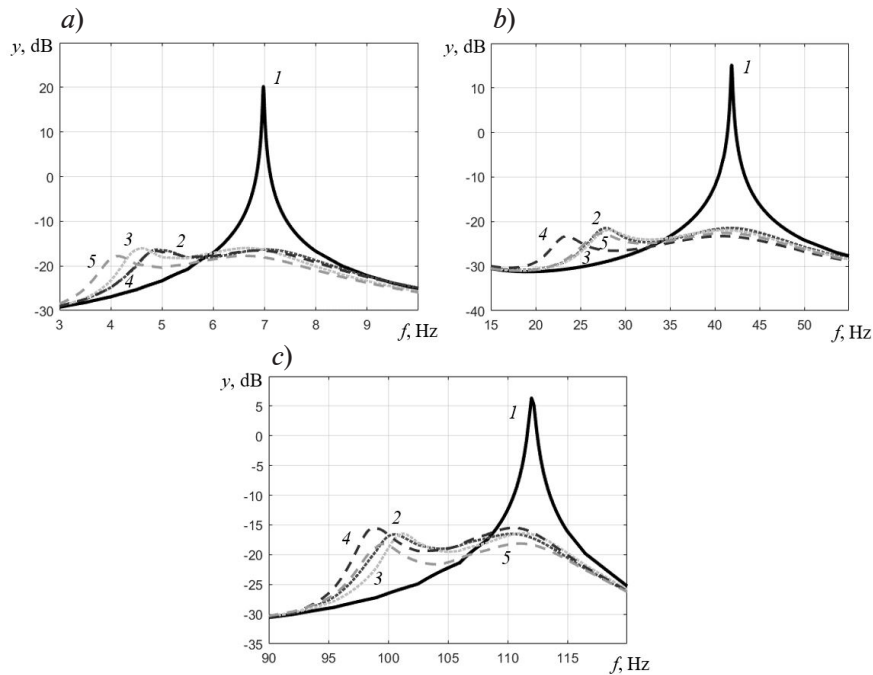


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики балки для разных систем управления (с наблюдателями) вблизи I (a), II (b) и III (c) резонансов: без управления (кривые 1) и для случаев определения модальных матриц 1 – 4 (кривые 2 – 5) (определения 1 – 4 матриц см. в табл. 2)



асимптотическое, для комбинаций 3 и 4 – подгоночное. Но в целом способ нормирования играет меньшую роль, чем способ определения матриц (обращение или транспонирование). Также стоит отметить, что в среднем первые два резонанса гасятся лучше при управлении по трем формам ($k = 3$), чем по двум ($k = 2$).

Кроме этого, проведенное исследование подтверждает вывод работы [12]: управление с наблюдателями остается существенно более эффективным, чем на основе модальных и частотных фильтров, для любых вариантов определения модальных матриц, к тому же оно позволяет гасить колебания на большем числе резонансов, превышающем количество сенсоров и актуаторов.

Заключение

В работе рассмотрены различные способы определения модальных матриц при реализации модального подхода к управлению распределенными системами. Наряду с традиционным способом, предполагающим обращение матриц влияния, был обоснован и исследован альтернативный способ, заключающийся в транспонировании данных матриц с последующим нормированием. На примере численного решения задачи о гашении вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки было показано, что наилучший результат управления достигается при комбинированном использовании рассмотренных методов, когда матрица «анализатор форм» вычисляется транспонированием, а матрица «синтезатор форм» – обращением. Полученный вывод справедлив для систем как с наблюдателями, так и на основе модальных и частотных фильтров. Кроме того, показано, что нормирование модальных матриц при их определении через транспонирование позволяет улучшить результат управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pusch M., Ossmann D., Luspay T. Structured control design for a highly flexible flutter demonstrator // *Aerospace*. 2019. Vol. 6. No. 3. Pp. 27–46.
2. Carvalhal R., Silva S., Lopes V. Modal control applications in intelligent truss structures // *ABCM Symposium Series in Mechatronics*. 2004. Vol. 1. January. Pp. 304–310.
3. Chomette B., Chesne S., Remond D., Gaudiller L. Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control – application to a printed circuit board // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2010. Vol. 24. No. 2. Pp. 352–364.
4. Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M. Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // *Smart Structures and Systems*. 2013. Vol. 12. No. 5. Pp. 547–577.
5. Peukert C., Pöhlmann P., Merx M., Müller J., Ihlenfeldt S. Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system // *Journal of Machine Engineering*. 2019. Vol. 19. No. 2. Pp. 32–45.
6. Lee C.-K., Moon F. C. Modal sensors/actuators // *Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57. No. 2. Pp. 434–441.
7. Donoso A., Bellido J. C. Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 38. No. 4. Pp. 347–356.
8. Guo X., Jiang J. Optimization of actuator placement in a truss-cored sandwich plate with independent modal space control // *Smart Materials and Structures*. 2011. Vol. 20. No. 11. 115011.
9. Sharma M., Singh S. P., Sachdeva B. L. Modal control of a plate using a fuzzy logic controller // *Smart Materials and Structures*. 2007. Vol. 16. No. 4. Pp. 1331–1341.
10. Lu J., Wang P., Zhan Z. Active vibration control of thin-plate structures with partial SCLD treatment // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 84. Part A. Pp. 531–550.
11. Katz R., Fridman E. Delayed finite-dimensional observer-based control of 1D parabolic PDEs via reduced-order LMIs // *Automatica*. 2022. Vol. 142. August. P. 110341.
12. Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А. Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16. № 3. С. 160–176.

13. **Беляев А. К., Полянский В. А., Смирнова Н. А., Федотов А. В.** Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 69–81.
14. **Gawronski W.** Modal actuators and sensors // *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 229. No. 4. Pp. 1013–1022.
15. **Friswell M. I.** On the design of modal actuators and sensors // *Journal of Sound and Vibration*. 2001. Vol. 241. No. 3. Pp. 361–372.
16. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A.** Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
17. **Федотов А. В.** Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155.
18. **Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A.** Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: Experiment and numerical simulation // V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). *Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structured Materials. Vol. 164)*. Cham, Switzerland: Springer, 2022. Pp. 151–169.
19. **Meirovitch L., Baruh H.** The implementation of modal filters for control of structures // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985. Vol. 8. No. 6. Pp. 707–716.

REFERENCES

1. **Pusch M., Ossmann D., Luspay T.**, Structured control design for a highly flexible flutter demonstrator, *Aerospace*. 6 (3) (2019) 27–46.
2. **Carvalho R., Silva S., Lopes V.**, Modal control applications in intelligent truss structures, *ABCM Symp. Ser. Mechatron.* 1 (Jan) (2004) 304–310.
3. **Chomette B., Chesne S., Remond D., Gaudiller L.**, Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control – application to a printed circuit board, *Mech. Syst. Signal Proc.* 24 (2) (2010) 352–364.
4. **Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., et al.**, Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates, *Smart Struct. Syst.* 12 (5) (2013) 547–577.
5. **Peukert C., Pöhlmann P., Merx M., et al.**, Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system, *J. Mach. Eng.* 19 (2) (2019) 32–45.
6. **Lee C.-K., Moon F. C.**, Modal sensors/actuators, *J. Appl. Mech.* 57 (2) (1990) 434–441.
7. **Donoso A., Bellido J. C.**, Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, *Struct. Multidisc. Optim.* 38 (4) (2009) 347–356.
8. **Guo X., Jiang J.**, Optimization of actuator placement in a truss-cored sandwich plate with independent modal space control, *Smart Mater. Struct.* 20 (11) (2011) 115011.
9. **Sharma M., Singh S. P., Sachdeva B. L.**, Modal control of a plate using a fuzzy logic controller, *Smart Mater. Struct.* 16 (4) (2007) 1331–1341.
10. **Lu J., Wang P., Zhan Z.**, Active vibration control of thin-plate structures with partial SCLD treatment, *Mech. Syst. Signal Process.* 84 (A) (2017) 531–550.
11. **Katz R., Fridman E.**, Delayed finite-dimensional observer-based control of 1D parabolic PDEs via reduced-order LMIs, *Autom.* 142 (August) (2022) 110341.
12. **Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A.**, Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (3) (2023) 160–176 (in Russian).
13. **Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A., Fedotov A. V.**, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 10 (2) (2017) 69–81.
14. **Gawronski W.**, Modal actuators and sensors, *J. Sound Vib.* 229 (4) (2000) 1013–1022.
15. **Friswell M. I.**, On the design of modal actuators and sensors, *J. Sound Vib.* 241 (3) (2001) 361–372.



16. Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., et al., Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, *Struct. Control Health Monit.* 25 (8) (2018) e2105.
17. Fedotov A. V., The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 12 (1) (2019) 142–155 (in Russian).
18. Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A., Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: experiment and numerical simulation, In book: V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). *Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structured Materials. Vol. 164).* Springer, Cham, Switzerland (2022) 151–169.
19. Meirovitch L., Baruh H., The implementation of modal filters for control of structures, *J. Guid. Control. Dynam.* 8 (6) (1985) 707–716.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ФЕДОТОВ Александр Васильевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

THE AUTHOR

FEDOTOV Aleksandr V.
Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS
61, Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

Статья поступила в редакцию 29.09.2023. Одобрена после рецензирования 24.11.2023. Принята 24.11.2023.
Received 29.09.2023. Approved after reviewing 24.11.2023. Accepted 24.11.2023.