

Научная статья

УДК 51-74

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17202>

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПО ДАННЫМ ВИБРАЦИОННЫХ ОБСЛЕДОВАНИЙ МЕТОДОМ FDD (ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ)

Е. А. Андрианова ✉

АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия

✉ elena-andrianova@bk.ru

Аннотация. В статье представлены алгоритм и теоретическое обоснование методики нахождения коэффициентов демпфирования по данным вибрационных обследований при использовании метода декомпозиции в частотной области (FDD). Этот метод применяется при динамическом тестировании сооружений (здания, мосты, плотины) для экспериментального определения их динамических характеристик в условиях нормальной эксплуатации без применения вибровозбудительного оборудования.

Ключевые слова: декомпозиция в частотной области, коэффициент демпфирования, спектральная плотность сигнала, собственные частоты, формы собственных колебаний

Для цитирования: Андрианова Е. А. Алгоритм нахождения коэффициентов демпфирования по данным вибрационных обследований методом FDD (декомпозиции в частотной области) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 2. С. 21–32. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17202>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17202>

AN ALGORITHM FOR FINDING THE DAMPING COEFFICIENTS BASED ON VIBRATION SURVEYS USING THE FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION (FDD) METHOD

E. A. Andrianova ✉

"B. E. Vedeneev VNIIG", JSC, St. Petersburg, Russia

✉ elena-andrianova@bk.ru

Abstract. The article presents an algorithm and a theoretical justification for the method of finding the damping coefficients on the base of vibration surveys using the frequency domain decomposition (FDD) method. This method is used for monitoring the structures such as buildings, bridges, dams, to determine experimentally their state (under operating conditions) without application of vibroexciters.

Keywords: frequency domain decomposition, damping coefficient, spectral density matrix, natural mode shape and frequency

For citation: Andrianova E. A., An algorithm for finding the damping coefficients based on vibration surveys using the frequency domain decomposition (FDD) method, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (2) (2024) 21–32. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17202>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Проблема натуральных динамических исследований строительных конструкций была и остается весьма актуальной, особенно для уникальных сооружений, например таких, как плотины. Экспериментальная оценка динамических характеристик (собственные частоты, формы собственных колебаний, коэффициенты относительного демпфирования) и мониторинг этих характеристик позволяет контролировать безопасность, прочность, целостность сооружения, а также выявлять значимые изменения в конструкциях без инструментального воздействия и визуального осмотра каждой конструкции.

В данной работе применяется операционный модальный анализ (*англ.* Operational Modal Analysis (OMA)); под этим названием объединена целая группа методов, позволяющих экспериментально определять динамические характеристики сооружений при нормальных условиях эксплуатации. Прогресс в развитии измерительного и регистрирующего оборудования позволил широко использовать эти методы при выполнении диагностики динамических характеристик различных сооружений. Среди методов группы OMA популярен метод, получивший международное название Frequency Domain Decomposition (FDD) (его дословный перевод – «декомпозиции в частотной области») [2 – 4]. В России метод FDD и его программное обеспечение (ПО) ARTeMIS Modal применяют с 2019 года сотрудники Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева (г. Санкт-Петербург, Россия) [10].

В методе EFDD, расширяющем возможности FDD, помимо определения собственных частот и форм собственных колебаний, также предлагается алгоритм для определения коэффициентов демпфирования [4 – 6], однако он сложен в применении и во многих случаях дает большую погрешность.

В данной работе предлагается более простой и в то же время более точный алгоритм для идентификации параметров демпфирования.

Таким образом, целью настоящей работы является представление и теоретическое обоснование нового метода нахождения коэффициентов демпфирования по данным вибрационных обследований.

Метод FDD подробно изложен в работах [2, 3, 7], а его теоретическое обоснование предложено в статье [1]. Алгоритм этого метода включает следующие обязательные действия.

Шаг 1. Для каждой частоты ω заданного диапазона вычисляется матрица $\mathbf{G}_y(\omega)$ взаимных спектральных плотностей (МВСП) одновременно измеренных вибрационных сигналов.

Шаг 2. На каждой частоте ω производится сингулярное разложение матриц (*англ.* Singular Value Decomposition (SVD)) $\mathbf{G}_y(\omega)$, определяется их первое сингулярное значение $\sigma_1(\omega)$ и строится функция первого сингулярного значения от частоты, усредненная по всем измерениям.

Отметим, что основная идея алгоритма FDD (см., например, работы [2, 3, 7]), заключается в том, что первое сингулярное число $\sigma_1(\omega)$ матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ имеет локальные максимумы вблизи модальных частот. Математическое обоснование этого факта было дано в статье [1]. Мы же будем использовать функцию $\sigma_1(\omega)$ для определения логарифмических декрементов затухания, соответствующих каждой собственной частоте.

Теоретическое обоснование методики определения декрементов затухания

Отклик $\mathbf{y}(t)$ системы раскладывается в их линейную комбинацию единственным образом (ввиду линейной независимости собственных форм колебаний):

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot q_2(t) + \dots = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t). \quad (1)$$

Как показано в работе [7], если внешнее воздействие считать белым шумом, а диссипацию – малой, то для матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП) $\mathbf{G}_y(\omega)$ справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H}{i\omega - \lambda_m} + \frac{c_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H}{-i\omega - \lambda_m^*} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \text{diag} \left[2 \text{Re} \left(\frac{c_m}{i\omega - \lambda_m} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\Phi}^H, \quad (2)$$

где λ_m – полюс, $\lambda_m = -\gamma_m + i\omega_{dm}$ (3)

$$(\gamma_m = \omega_{0m} \zeta_m); \quad (4)$$

$\boldsymbol{\varphi}_m$ – форма собственных колебаний; $\boldsymbol{\Phi}$ – матрица, в столбцах которой стоят векторы собственных форм, $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_M]$; M – количество учтенных форм в разложении (1); c_m – положительный коэффициент; i – мнимая единица; H – оператор эрмитова сопряжения.

В выражении (3) ω_{dm} – собственная частота с учетом демпфирования. В выражении (4) ω_{0m} – собственная частота без учета демпфирования; ζ_m – коэффициент диссипации. Далее, введем обозначение

$$\alpha_m(\omega) = 2 \text{Re} \left(\frac{c_m}{i\omega - \lambda_m} \right) = \frac{c_m \gamma_m}{(\omega - \omega_{dm})^2 + \gamma_m^2} \quad (5)$$

Отметим здесь, что в выражении (2) модальные векторы $\boldsymbol{\varphi}_m$ считаем нормированными, так как коэффициент α_m , согласно выражению (5), содержит константу c_m , в которую можно ввести нормировочный коэффициент.

Тогда выражение (2) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \boldsymbol{\Phi} \cdot \text{diag}(\alpha_m(\omega)) \cdot \boldsymbol{\Phi}^H, \quad (6)$$

или

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H. \quad (7)$$

По результатам проведенных динамических испытаний объекта можно построить МВСП измеренных сигналов на некотором диапазоне частот, а затем, используя SVD-разложение этих матриц, получить функцию первого сингулярного числа от частоты [11 – 12].

В нашей статье [1] было доказано, что собственные частоты исследуемого объекта расположены вблизи локальных максимумов этой функции. В данной статье предлагается и обосновывается метод определения коэффициентов диссипации по экспериментально построенной функции первого сингулярного числа.

Очевидной идеей является сопоставление аналитического выражения первого сингулярного числа и экспериментально построенной функции [14]. Хотя в общем случае аналитического выражения для первого сингулярного числа МВСП не существует, но, при определенных условиях, можно получить достаточно хорошее аналитическое приближение.

Рассмотрим два основных случая, когда возможно получить такое приближение.

Случай «одиночной» собственной частоты. Здесь в окрестности некоторой собственной частоты (назовем ее ω_{ds}) отклик $y(t)$ системы (см. формулу (1)) определяется преимущественно собственной формой с тем же номером. Тогда справедливо соотношение вида

$$y(t) \approx \boldsymbol{\varphi}_s \cdot q_s(t), \quad (8)$$

и выражение МВСП, задаваемое формулой (4), можно переписать так:

$$\mathbf{G}_y(\omega) \approx \alpha_s \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^H. \quad (9)$$

Очевидно, формула (9) справедлива, когда в окрестности частоты ω_{ds} значения функций $\alpha_s(\omega)$ существенно превосходят остальные значения $\alpha_m(\omega)$. Найдем теперь условия, при которых это требование выполняется.

Рассмотрим свойства функций $\alpha_m(\omega)$. Из выражения (5) видно, что эти функции зависят от соответствующих собственных частот и коэффициентов демпфирования. Они имеют по одному максимуму, который достигается на соответствующей собственной частоте.

Действительно (см. нашу работу [1]), в результате определения экстремальных значений функций $\alpha_m(\omega)$ получим, что при $\omega = \omega_{dm}$

$$\alpha_m(\omega_{dm}) = c_m / \gamma_m. \quad (10)$$

Введем обозначение минимального расстояния d_s на частотной шкале между частотой ω_{ds} и остальными собственными частотами ω_{dm} , а именно:

$$d_s = \min_{m \neq s} |\omega_{ds} - \omega_{dm}|. \quad (11)$$

Тогда для частоты ω_{dm} , при всех $m \neq s$, выполняется следующее соотношение:

$$\alpha_m(\omega_{ds}) \leq \frac{c_m \gamma_m}{d_s^2 + \gamma_m^2} = \frac{c_m / \gamma_m}{(d_s / \gamma_m)^2 + 1}. \quad (12)$$

Теперь введем обозначение

$$r_{sm} = d_s / \gamma_m = \frac{d_s}{\omega_{0m} \cdot \zeta_m}. \quad (13)$$

Сравнивая соотношения (12) и (10), видим, что условие

$$\alpha_s(\omega_{ds}) \gg \alpha_m(\omega_{ds}) \quad (14)$$

выполняется в том случае, если

$$r_{sm} \gg 1, \text{ для всех } s \neq m. \quad (15)$$

Таким образом, выполнение условия (15) дает право учитывать только одно слагаемое в выражении (7), т. е. использовать для вычисления МВСП формулу (9).

Для МВСП $\mathbf{G}_y(\omega)$, описываемой выражением (9), можно построить аналитическое выражение ее первого сингулярного значения. Матрица $\mathbf{G}_y(\omega)$, очевидно, является квадратной и симметричной (если формы колебаний комплексные, то эрмитовой). Ранг матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ равен единице (так как ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей), поэтому эта матрица имеет не более одного собственного значения, отличного от нуля.

Найдем его по определению собственных чисел. Пусть u – собственный вектор, а λ – собственное значение матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$; тогда по определению собственного вектора и собственного значения получаем следующее равенство:

$$\mathbf{G}_y(\omega)u = \lambda u, \quad (16)$$

откуда

$$\alpha_s \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^H u = \alpha_s \boldsymbol{\varphi}_s (\boldsymbol{\varphi}_s^H u) = \alpha_s (\boldsymbol{\varphi}_s^H u) \boldsymbol{\varphi}_s = \lambda u. \quad (17)$$

Непосредственным следствием равенства (17) является заключение, что единственный, отличный от нуля собственный вектор $u = \boldsymbol{\varphi}_s$, а собственное значение $\lambda = \alpha_s \|\boldsymbol{\varphi}_s\|^2$. Видим, что $\lambda \geq 0$, так как коэффициент $c_m \geq 0$. Следовательно, матрица $\mathbf{G}_y(\omega)$ является положительно-полуопределенной, а тогда (раз она еще и эрмитова), ее сингулярные значения совпадают с собственными. Если учесть, что $\|\boldsymbol{\varphi}_s\|^2 = 1$, то можно видеть, что σ_1 совпадает с α_s . Поэтому в окрестности собственных частот максимальное сингулярное значение МВСП можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 = \alpha_s = \frac{c_s \gamma_s}{(\omega - \omega_{ds})^2 + \gamma_s^2} = \frac{c_s \gamma_s}{(\omega - \omega_{ds})^2 + \omega_{0s}^2 \cdot \zeta_s^2}. \quad (18)$$

Отметим также, что при небольшом демпфировании собственные частоты с учетом демпфирования (ω_{dk}) и без его учета (ω_{0k}) практически совпадают.

Если сопоставить функцию первого сингулярного числа, полученную в результате обработки экспериментальных данных, с аналитической зависимостью (18), то можно оценить значения декрементов затухания. Представим формулу (18) в следующем виде:

$$\sigma_1 = \frac{A}{(\omega - \omega_{ds})^2 + \omega_{ds}^2 B^2}. \quad (19)$$

Тогда использование метода наименьших квадратов (например), дает возможность определить коэффициенты A и B , максимально приближающие аналитическую функцию σ_1 (см. формулу (19)) к экспериментально полученной зависимости в окрестности некоторой собственной частоты. Значение параметра B , очевидно, будет соответствовать декременту затухания.

Случай двух «сближенных» собственных частот. Рассмотрим теперь второй случай, когда значения двух собственных частот с номерами k и $k + 1$ (ω_{dk} и ω_{dk+1}) расположены близко друг к другу (в литературе такие частоты обычно называют «сближенными»), т. е. для частот с этими номерами не выполняется условие (15).

Однако, если для всех остальных собственных частот, кроме частот с номерами k и $k + 1$, условие (15) выполняется, то для вычисления МВСП по формуле (7) можно ограничиться двумя слагаемыми:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^H, \quad (20)$$

или в координатной форме матрица имеет вид

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m (\varphi_m^{(1)})^2 & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(N)} \\ \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m (\varphi_m^{(2)})^2 & \dots & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=k}^{k+1} \alpha_m (\varphi_m^{(N)})^2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Эта матрица имеет размерность $N \times N$, и найти ее сингулярные (или собственные) значения в аналитическом виде затруднительно.

Для облегчения задачи составим матрицу Грама (назовем ее \mathbf{K}) на базе векторов $\sqrt{\alpha_k} \boldsymbol{\varphi}_k$ и $\sqrt{\alpha_{k+1}} \boldsymbol{\varphi}_{k+1}$.

В координатной форме матрица \mathbf{K} будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_k & \sqrt{\alpha_k \alpha_{k+1}} (\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+1}) \\ \sqrt{\alpha_k \alpha_{k+1}} (\boldsymbol{\varphi}_{k+1}, \boldsymbol{\varphi}_k) & \alpha_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Эта матрица, как и матрица \mathbf{G}_y , является эрмитовой и положительно-полуопределенной (свойство матрицы Грама). В статье [1] было приведено доказательство того, что отличные от нуля собственные значения матрицы \mathbf{G}_y совпадают с собственными значениями матрицы \mathbf{K} (матрица Грама, построенная на соответствующих векторах), причем собственные значения матриц \mathbf{K} и \mathbf{G}_y совпадают с их сингулярными числами. Таким образом, первое сингулярное число матрицы \mathbf{G}_y равно спектральному радиусу матрицы \mathbf{K} .

В данном случае матрица \mathbf{K} имеет размерность 2×2 , и мы легко можем построить аналитическое выражение для значения ее спектрального радиуса [16]:

$$\rho = \frac{\text{tr}(\mathbf{K}) + \sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{K}) - 4 \det(\mathbf{K})}}{2}. \quad (23)$$

Поскольку из выражения для матрицы (22) следует, что

$$\det(\mathbf{K}) = \alpha_k \alpha_{k+1} - \alpha_k \alpha_{k+1} |(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+1})|^2, \quad (24)$$

$$\text{tr}(\mathbf{K}) = \alpha_k + \alpha_{k+1}, \quad (25)$$

мы получаем для спектрального радиуса матрицы \mathbf{K} (следовательно, и для первого сингулярного числа матрицы \mathbf{G}_y) следующее выражение:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1} + \sqrt{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2 + 4\alpha_k \alpha_{k+1} |(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+1})|^2}}{2}. \quad (26)$$

Из формулы (26) непосредственно следует, что если $\boldsymbol{\varphi}_k$ ортогонален $\boldsymbol{\varphi}_{k+1}$, то $\sigma_1 = \max_{i=k,k+1} \alpha_i$, независимо от выполнения условия (15).

На рис. 1 приведены графики функций σ_1 и α_i , вычисленных для системы с тремя степенями свободы. Видно, что в окрестности первой собственной частоты ω_1 функция первого сингулярного значения σ_1 хорошо совпадает с функцией α_1 в достаточно широком частотном диапазоне (в этом примере значение $r_{12} = 12,7$). А вот для второй и третьей собственных частот ($r_{23} = 0,85$, $r_{32} = 1,70$, соответственно) характер поведения функции σ_1 меняется, причем наибольшее отличие графика этой функции от соответствующих графиков функций α_i наблюдается в диапазоне частот, соответствующих интервалу между максимумами кривых, относящихся к функциям α_2 и α_3 .

Отметим, что в точке пересечения кривых для α_k и α_{k+1} (в примере это α_2 и α_3) выражение (26) упрощается:

$$\sigma_1 = \alpha_k (1 + |(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_{k+1})|). \quad (27)$$

В остальных случаях выражение (26) как функция декрементов затухания представляет собой достаточно сложное выражение, поэтому его использование для нахождения необходимых параметров оказывается трудной задачей.

Предлагаем для случая «сближенных» частот решить эту проблему иначе. Из линейной алгебры известно, что сумма собственных значений квадратной матрицы равна ее следу [15 – 17], а поскольку, как уже отмечалось выше, в данном случае собственные и сингулярные значения матрицы \mathbf{K} совпадают, то справедлива следующая формула:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \alpha_k + \alpha_{k+1}. \quad (28)$$

Введем обозначение

$$s(\omega) = \sigma_1(\omega) + \sigma_2(\omega). \quad (29)$$

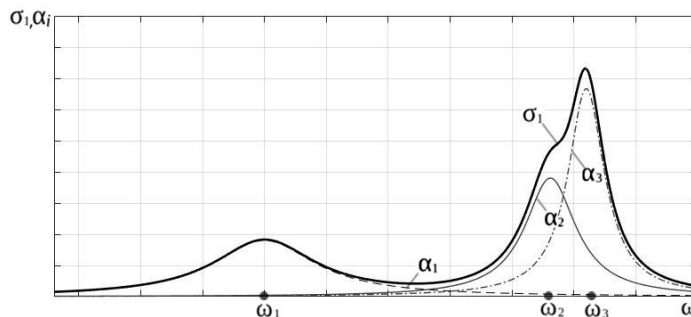


Рис. 1. Сопоставление поведения первого сингулярного числа σ_1 с графиками функций $\alpha_i(\omega)$ на примере системы с тремя степенями свободы ($\omega_1 - \omega_3$)

Тогда выражение (28) можно переписать в следующем виде:

$$s = \alpha_k + \alpha_{k+1} \quad (30)$$

(для краткости здесь опущен аргумент).

Если подставить выражения для α_k и α_{k+1} в формулу (30), то справедлива следующая запись:

$$s = \frac{c_k \gamma_k}{(\omega - \omega_{dk})^2 + \omega_{0k} \zeta_k^2} + \frac{c_{k+1} \gamma_{k+1}}{(\omega - \omega_{dk+1})^2 + \omega_{0k+1} \zeta_{k+1}^2}. \quad (31)$$

На рис. 2 представлено сопоставление суммы первых двух сингулярных чисел s и суммы $\alpha_k + \alpha_{k+1}$ для ранее рассмотренного случая (см. рис. 1) – системы с тремя степенями свободы (в примере $\alpha_2 + \alpha_3$).

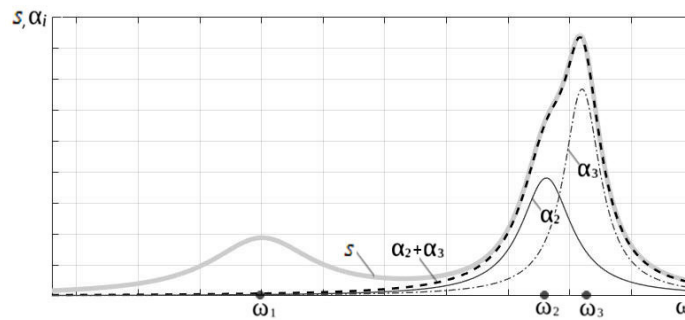


Рис. 2. Сопоставление графика суммы первых двух сингулярных чисел $s(\omega)$ с графиками функций $\alpha_i(\omega)$ и суммы $\alpha_k + \alpha_{k+1}$ на примере системы с тремя степенями свободы (см. рис. 1)

В ходе обработки экспериментальных данных, полученных при динамических измерениях, на каждой частоте ω заданного диапазона производится сингулярное разложение матрицы $G_y(\omega)$ и определяется не только первое сингулярное значение $\sigma_1(\omega)$, но и остальные сингулярные значения функции. Таким образом, сумма первых двух сингулярных значений нам известна.

Так же, как и в случае «одионой» собственной частоты, при небольшом демпфировании собственные частоты с учетом демпфирования (ω_{dk}) и без его учета (ω_{0k}) практически совпадают. Поэтому аналитическое выражение для суммы s первых двух сингулярных значений имеет вид

$$s = \frac{A}{(\omega - \omega_{dk})^2 + \omega_{dk}^2 B^2} + \frac{C}{(\omega - \omega_{dk+1})^2 + \omega_{dk+1}^2 D^2}, \quad (32)$$

где A, B, C, D – неизвестные параметры.

Для определения этих неизвестных параметров можно использовать метод наименьших квадратов. Очевидно, коэффициент B является оценкой коэффициента демпфирования ζ_k , а коэффициент D соответствует коэффициенту ζ_{k+1} .

Пример расчета коэффициентов демпфирования

Для тестирования метода определения декрементов затухания использовалась математическая модель системы с 8-ю степенями свободы (рис. 3).

В принятой модели были заданы инерционные и жесткостные параметры. Коэффициенты демпфирования были приняты одинаковыми и равными 0,01. Затем на каждой собственной частоте была вычислена матрица пропорционального демпфирования по заданным показателям затухания. К массам $M_1 - M_8$ были приложены воздействия со спектром «белого шума». Значения амплитуды воздействия и других параметров системы приведены в табл. 1. Моделировалось нагружение, неравномерное по степеням свободы: амплитуда воздействия на степенях свободы 7 и 8 была увеличена в 10 раз.

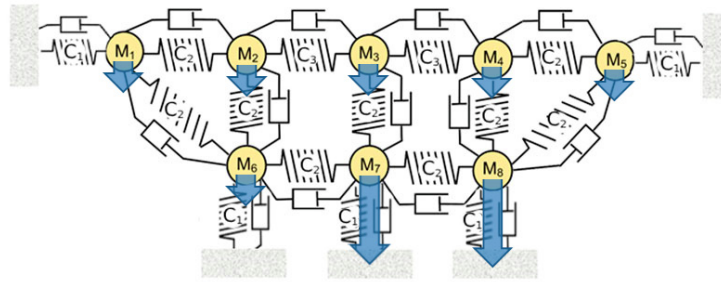


Рис. 3. Модель динамической системы с 8-ю степенями свободы

Таблица 1

Заданные параметры для модели динамической системы с 8-ю степенями свободы и их значения (см. рис. 3)

Масса, кг	Жесткость, Н/м	Амплитуда воздействия, Н (приложено к массе)
$M_1 = \dots = M_8 = 25,9$	$C_1 = 770, C_2 = 1000,$ $C_3 = 950$	$F_1 = \dots = F_6 = 1,$ $F_7 = F_8 = 10$

Примечание. При расчетах коэффициенты демпфирования (декременты затухания) были заданы одинаковыми и равными 0,01.

Далее по точному решению динамической задачи были определены вибрационные отклики на всех степенях свободы как временные ряды с заданной частотой.

Данные «измерений», полученные таким способом, применялись для тестирования метода FDD, а затем для идентификации параметров затухания с помощью предложенного метода. Результаты идентификации сравнивались с заданными в модели параметрами. Функция первого сингулярного значения от частоты представлена на рис. 4. Видно, что шесть пиков, относящихся к собственным частотам (1 – 5 и 8), можно считать «одиночными», т. е. задача определения коэффициентов демпфирования соответствует случаю «одиночной» собственной частоты. Для коэффициентов демпфирования, соответствующих частотам 1 – 5 и 8, были получены результаты с использованием формулы (19), по описанному выше алгоритму (табл. 2, верхние строки).

Для случая «сближенных» частот (в примере это частоты 6 и 7) на графике рис. 5 представлены точки, соответствующие сумме первого и второго сингулярных чисел (их значения получены по имитационной модели), а также функция, аппроксимирующая их по формуле (32).

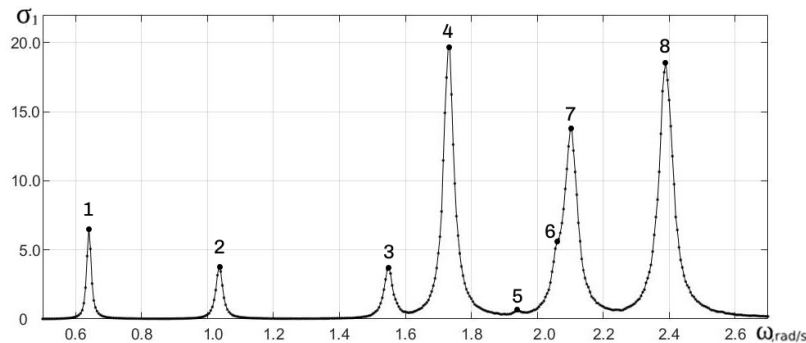


Рис. 4. Частотный спектр функции первого сингулярного значения МВСП для системы с 8-ю степенями свободы (см. рис. 3)

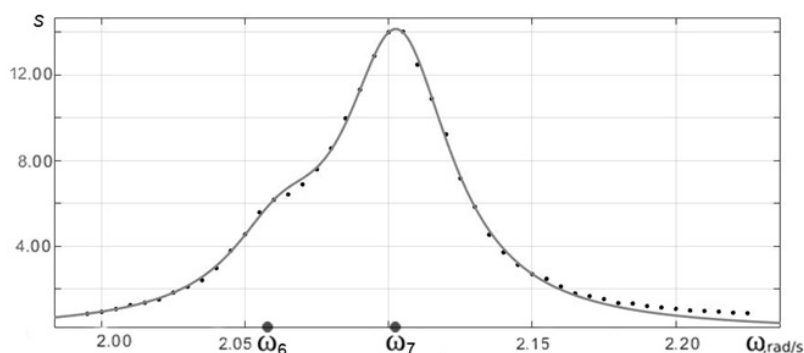


Рис. 5. Результаты вычисления суммы двух первых сингулярных значений (точки) и аппроксимация полученной зависимости по формуле (32) (сплошная линия)

Таблица 2

Расчетные значения коэффициентов демпфирования и соответствующих коэффициентов детерминации

Номер пика	Собственная частота	Коэффициент демпфирования	Коэффициент детерминации
<i>Случай «одиночной» собственной частоты</i>			
1	0,64	0,0107	0,9985
2	1,03	0,0109	0,9995
3	1,54	0,0104	0,9957
4	1,73	0,0104	0,9975
5	1,93	0,0140	0,9357
8	2,39	0,0106	0,9983
<i>Случай двух «сближенных» собственных частот</i>			
6	2,06	0,01014	0,9977
7	2,10	0,01070	0,9981

Примечание. Для нахождения значений коэффициента детерминации использовался метод наименьших квадратов.

Значения идентифицированных коэффициентов демпфирования и соответствующие коэффициенты детерминации, определенные по изложенной выше методике, также приведены в табл. 2.

Заключение

В работе предложен простой метод определения показателей затухания после идентификации частот собственных колебаний сооружения по экспериментальным данным с использованием метода FDD. В окрестностях собственных частот получены аналитические выражения для первого сингулярного числа, а также для суммы первых двух сингулярных значений как функций частоты. Метод определения коэффициентов демпфирования основан на аппроксимации значений, полученных в результате обработки экспериментальных данных, аналитическими выражениями с неизвестными параметрами. Использование метода наименьших квадратов позволяет определять коэффициенты демпфирования. В случае «одиночной» собственной частоты аппроксимируется первое сингулярное значение, в случае «сближенных» собственных частот – сумма первых двух сингулярных значений.

Проведена идентификация показателей затухания на модельной задаче. Предложенный метод обладает преимуществом перед известным методом EFDD, представленным в работе [4], благодаря своей меньшей сложности; и, кроме того, в отличие от метода EFDD, позволяет определять характеристики затухания в случае близких по значению собственных частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианова Е. А., Новицкий Д. В., Онищук В. С. Теоретическое обоснование идентификации собственных частот в методе FDD (декомпозиции в частотной области) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1. С. 82–96.
2. Brincker R., Zhang L., Andersen P. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition // Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference (IMAC 18). San Antonio, Texas, USA, February 7–10, 2000. Pp. 625–630.
3. Brincker R., Zhang L., Andersen P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10. No. 3. Pp. 441–445.
4. Brincker R., Ventura C. E., Andersen P. Damping estimation by frequency domain decomposition // Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference (IMAC 19), Kissimmee, Florida, USA. February 5–8, 2001. Pp. 698–703.
5. Zhang L., Tamura Y. Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements // Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference & Exposition (IMAC XXI) “A Conference & Exposition on Structural Dynamics”. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, February 3–6, 2003. Pp. 1023–1029.
6. Brincker R., Zhang L. Frequency domain decomposition revisited // Proceedings of the 3rd International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Portonovo (Ancona), Italy. May 4–6, 2009. Vol. 1. Pp. 615–626.
7. Brincker R., Ventura C. Introduction to Operational Modal Analysis. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley and Sons, Ltd., 2015. 360 p.
8. Rainieri C., Fabbrocino G. Operational Modal Analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications. New York: Springer, 2014. 322 p.
9. Amador S., Juul M., Friis T., Brincker R. Application of Frequency Domain Decomposition Identification technique to half spectral densities // Topics in Modal Analysis & Testing. Vol. 9. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics. Edited by M. Mains, B. J. Dilworth. Chapter 39. The Society for Experimental Mechanics, Inc. New York: Springer, Cham, 2019. Pp. 343–346.
10. ARTeMIS Modal. Software for operational modal analysis and experimental modal analysis. Режим доступа: <http://www.svibs.com/>. Дата последнего обращения: 10.12.2023.
11. Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M. Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates // Journal of Vibroengineering. 2018. Vol. 20. No. 5. Pp. 1919–1936.
12. Lang G. F. Matrix madness and complex confusion. Review of complex modes from multiple viewpoints // Sound & Vibrations. 2012. November – Structural Analysis. Pp. 8–12.
13. Tarpo P., Olsen P., Amador S., Juul M., Brincker R. On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis // Procedia Engineering. 2017. Vol. 199. Pp. 1038–1043.
14. Кравченко К. Ю., Кугаевский С. С., Журавлев М. П., Элькинд Д. М. Выявление собственных частот колебаний и коэффициентов относительного демпфирования динамической системы при фрезеровании методом операционного модального анализа // Вестник Брянского государственного технического университета. 2017. № 8 (61). С. 14–24.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 6-е изд., стер. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
16. Карчевский Е. М., Карчевский М. М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии. 2-е изд. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 424 с.
17. Фомин В. И. О нижних линейных оценках спектрального радиуса нормальной матрицы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2001. Т. 6. № 2. С. 145–146.

REFERENCES

1. **Andrianova E. A., Novitskii D. V., Onischuk V. S.**, Theoretical justification of natural frequency identification in the FDD (Frequency Domain Decomposition) method, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (1) (2023) 82–96 (in Russian).
2. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.**, Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition, In: *Proc. 18th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 18)*, San Antonio, Texas, USA, Febr. 7–10 (2000) 625–630.
3. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.**, Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition, *Smart Mater. Struct.* 10 (3) (2001) 441–445.
4. **Brincker R., Ventura C. E., Andersen P.**, Damping estimation by frequency domain decomposition, In: *Proc. 19th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 19)*, Kissimmee, Florida, USA, Febr. 5–8 (2001) 698–703.
5. **Zhang L., Tamura Y.**, Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements, In: *Proc. 21st Int. Modal Analysis Conf. & Expos. 2003 (IMAC XXI) “A Conf. & Expos. on Structural Dynamics”*. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, Febr. 3–6, 2003. (2003) 1023–1029.
6. **Brincker R., Zhang L.**, Frequency domain decomposition revisited, In: *Proc. 3rd Int. Operational Modal Analysis Conf. (IOMAC)*, Portonovo (Ancona), Italy, May 4–6, 2009. (2009) 615–626.
7. **Brincker R., Ventura C.**, *Introduction to operational modal analysis*, John Wiley and Sons, Ltd., Hoboken, New Jersey, USA, 2015.
8. **Rainieri C., Fabbrocino G.**, *Operational modal analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications*, Springer, New York, 2014.
9. **Amador S., Juul M., Friis T., Brincker R.**, Application of Frequency Domain Decomposition Identification technique to half spectral densities, In book: “*Topics in Modal Analysis & Testing*”. Vol. 9. Conf. Proc. of the Soc. for Experimental Mechanics. Ed. by M. Mains, B. J. Dilworth. Ch. 39. The Society for Experimental Mechanics, Inc. Springer, Cham, New York (2019) 343–346.
10. ARTeMIS Modal. Software for Operational Modal Analysis and Experimental Modal Analysis. URL: <http://www.svibs.com/>. Date of last access: 10.12.2023.
11. **Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M.**, Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates, *J. Vibroengineering*. 20 (5) (2018) 1919–1936.
12. **Lang G. F.**, Matrix madness and complex confusion. Review of complex modes from multiple viewpoints, *Sound Vib. (November – Structural Analysis)* (2012) 8–12.
13. **Tarpo P., Olsen P., Amador S., et al.**, On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis, *Proc. Eng.* 199 (2017) 1038–1043.
14. **Kravchenko K. I., Kugaevsky S. S., Zhuravlyov M. P., Elkind D. M.**, Detection of natural oscillation frequencies and coefficients of relative damping of dynamic system at milling by method of operation modal analysis, *Bulletin of the Bryansk State Technical University*. (8 (61)) (2017) 14–24 (in Russian).
15. **Пуйн В. А., Позняк Е. Г.**, *Linear algebra*, Victor Kamkin, 1987.
16. **Karchevskiy E. M., Karchevskiy M. M.**, *Lektsii po lineynoy algebre i analiticheskoy geometrii* [Lectures on linear algebra and analytical geometry], Lan’ Publishing, St. Petersburg, 2018 (in Russian).
17. **Fomin V. I.**, On the lower linear bound of the spectral radius for a normal matrix, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. 6 (2) (2001) 145–146 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АНДРИАНОВА Елена Александровна – научный сотрудник акционерного общества «Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия.

195220, Россия, г. Санкт-Петербург, Гжатская ул., 21

elena-andrianova@bk.ru

ORCID: 0000-0001-9199-6875

THE AUTHOR

ANDRIANOVA Elena E.A.

“B. E. Vedenev VNIIG”, JSC

21 Gzhatskaya St., Saint Petersburg, 195220, Russia

elena-andrianova@bk.ru

ORCID: 0000-0001-9199-6875

*Статья поступила в редакцию 07.12.2023. Одобрена после рецензирования 07.02.2024.
Принята 07.02.2024.*

Received 07.12.2023. Approved after reviewing 07.02.2024. Accepted 07.02.2024.