

Металлургия. Материаловедение Metallurgy. Material Science

Научная статья

УДК 669.2:538.945:543.123

DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.30205>



В.В. Рогожкин¹, В.И. Горынин² ✉, М.А. Житомирский³

¹ АО «Атомпроект», Санкт-Петербург, Россия;

² Центральный научно-исследовательский институт
конструкционных материалов «Прометей», Санкт-Петербург, Россия;

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

✉ z1dehy97@mail.wplus.net

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ ДЛЯ ВИХРЯ АБРИКОСОВА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ $\kappa > 0,707$

Аннотация. До настоящего времени отсутствует точное аналитическое решение уравнений теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау–Абрикосова–Горькова (ГЛАГ-теории, теории Гинзбурга–Ландау) для любого значения параметра $\kappa > 0,707$, удовлетворяющее граничным условиям для вихря Абрикосова и условию квантованию магнитного потока, а также классическим асимптотикам (при значении $\kappa \gg 1$) формул Лондонов и Абрикосова. В связи с этим целью расчетно-аналитической исследовательской работы являлось нахождение удовлетворительно точного аналитического решения уравнения теории ГЛАГ-теории для вихря Абрикосова в сверхпроводниках с произвольным значением $\kappa > 0,707$. Аналитическим решением уравнений феноменологической теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау для одиночного вихря Абрикосова в массивном сверхпроводнике второго рода с произвольным значением параметра κ найдены: напряженность магнитного поля $h(\rho)$, плотность тока $j(\rho)$ и параметр порядка $f(\rho)$, удовлетворяющие граничным условиям, условию квантования и классическим асимптотикам Лондонов и Абрикосова. Определены первое критическое магнитное поле H_{c1} и отношение абсолютных значений H_{c1}/H_{c2} в сверхпроводниках с $\kappa > 0,707$.

Ключевые слова: сверхпроводимость, сверхпроводимые материалы, электромагнитные свойства, теория Гинзбурга–Ландау, теория вихрей.

Для цитирования:

Рогожкин В.В., Горынин В.И., Житомирский М.А. Аналитическое решение уравнений теории Гинзбурга–Ландау для вихря Абрикосова в сверхпроводниках с произвольным значением $\kappa > 0,707$ // Глобальная энергия. 2024. Т. 30, № 2. С. 88–95. DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.30205>

Research article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.30205>

V.V. Rogozhkin¹, V.I. Gorynin² ✉, M.A. Zhitomirskiy³

¹ JSC “Atomproekt”, St. Petersburg, Russia;

² Central Research Institute of Structural Materials “Prometey”,
St. Petersburg, Russia;

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russia

✉ z1dehy97@mail.wplus.net

ANALYTICAL SOLUTION OF THE GINZBURG–LANDAU EQUATIONS FOR THE ABRIKOSOV VORTEX IN SUPERCONDUCTORS WITH AN ARBITRARY VALUE OF THE PARAMETER $\kappa > 0.707$

Abstract. Until now, there is no exact analytical solution to the equations of the Ginzburg–Landau theory of superconductivity for any value of the parameter $\kappa > 0.707$, satisfying the boundary conditions for the Abrikosov vortex and the magnetic flux quantization condition, as well as the classical asymptotics (for the value $\kappa \gg 1$) of the London and Abrikosov formulas. In this regard, the goal of this computational and analytical research was to find a satisfactorily accurate analytical solution to the equation of the Ginzburg–Landau theory for the Abrikosov vortex in superconductors with an arbitrary value $\kappa > 0.707$. By analytically solving the equations of the phenomenological theory of Ginzburg–Landau superconductivity for a single Abrikosov vortex in a massive type II superconductor with an arbitrary value of the parameter κ , we found: magnetic field strength $h(\rho)$, current density $j(\rho)$ and order parameter $f(\rho)$, satisfying the boundary conditions, the quantization condition and the classical asymptotics of London and Abrikosov. The first critical magnetic field H_{c1} and the ratio of absolute values H_{c1}/H_{c2} in superconductors with $\kappa > 0.707$ are determined.

Keywords: superconductivity, superconducting materials, electromagnetic properties, Ginzburg–Landau theory, vortex theory.

Citation:

V.V. Rogozhkin, V.I. Gorynin, M.A. Zhitomirskiy, Analytical solution of the Ginzburg–Landau equations for the Abrikosov vortex in superconductors with an arbitrary value of the parameter $\kappa > 0.707$, *Global Energy*, 30 (02) (2024) 88–95, DOI: <https://doi.org/10.18721/JEST.30205>

Введение. Сверхпроводимость металлических материалов получила свое теоретическое развитие на феноменологическом уровне согласно теории Гинзбурга–Ландау–Абрикосова–Горькова (ГЛАГ-теории, теории Гинзбурга–Ландау). Феноменологическая ГЛАГ-теория основывалась на общей теории Л.Д. Ландау фазовых переходов II рода и гипотезе о комплексности сверхпроводящего параметра порядка [1–6]. Открытие сверхтекучести жидкого гелия и объяснение этого явления Ландау на основе сформулированного им критерия для систем Бозе-частиц позволило трактовать сверхпроводимость металлических материалов как сверхтекучесть электронной жидкости. Оно также позволило сформулировать феноменологические ГЛАГ-уравнения, описывающие термодинамику и электромагнитные свойства сверхпроводников [3, 7–13]. Вместе с тем до настоящего времени отсутствует точное аналитическое решение уравнений ГЛАГ-теории для любого значения параметра $\kappa > 0,707$, удовлетворяющее граничным условиям для вихря Абрикосова и условию квантованию магнитного потока, а также классическим асимптотикам (при значении $\kappa \gg 1$) формул Лондонов и Абрикосова.

В связи с этим целью расчетно-аналитической исследовательской работы являлось нахождение удовлетворительно точного аналитического решения уравнения ГЛАГ-теории для вихря Абрикосова в сверхпроводниках с произвольным значением $\varkappa > 0,707$.

Методологический подход к решению уравнения

Уравнения феноменологической теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау–Абрикосова–Горькова (ГЛАГ-теории, теории Гинзбурга–Ландау) для одиночного вихря Абрикосова*) с одним квантом магнитного потока в массивном сверхпроводнике с параметром $\varkappa > 0,707$ для безразмерных значений аргумента ρ , напряженности магнитного поля $h = h(\rho)$ и параметра порядка $f = f(\rho)$ [1, с. 63, 64] известны:

$$(h')^2 / f^3 = (\rho * f')' / (\varkappa^2 * \rho) + f * (1 - f^2); \quad (1)$$

$$(\rho * h' / f^2)' / \rho = h. \quad (2)$$

Граничные условия для функций h и f следующие:

$$\rho \rightarrow 0: h' / f^2 \rightarrow -1 / (\varkappa * \rho); \quad f \rightarrow 0, \quad h(0) \text{ – ограничено,} \quad (3)$$

$$\rho \rightarrow \infty: f \rightarrow 1; \quad h \rightarrow 0; \quad h' \rightarrow 0. \quad (4)$$

Принципиальной трудностью для аналитических решений дифференциальных уравнений (1), (2) является их сугубо нелинейный характер. Решение уравнения (2) при $f = 1$ известно как «решение Лондонов» [1]: $h = h_L(\rho) = K_0(\rho) / \varkappa$, где K_0 – функция Макдональда [2]. Очевидные аномалии функции $K_0(\rho) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$ затрудняют ее применение в феноменологической теории Гинзбурга–Ландау.

Для решения уравнения (2) расширим использование функций Макдональда для описания вихря Абрикосова путем поиска напряженности магнитного поля h в виде $h \sim K_0(\varphi)$, где при $\rho \gg 1$ функция $\varphi(\rho) \rightarrow \rho$, $h \rightarrow h_L(\rho)$, а при $\rho \rightarrow 0$ функция $\varphi(\rho) \rightarrow \beta$, где постоянная $\beta(\varkappa) > 0$.

Анализ аналитических решений

Нами получены аналитические решения системы уравнений феноменологической теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау (1–4) с произвольным значением $\varkappa > 2^{-1/2}$, удовлетворяющие граничным условиям, условию квантования и классическим асимптотикам Лондонов и Абрикосова:

$$f = f_R = \rho / (\rho^2 + \beta^2)^{1/2} = \rho / \varphi; \quad (5)$$

$$h = h_R = K_0(\varphi) / [K_1(\beta) * \kappa]; \quad (6)$$

$$j = |h'_R| = j_R = \rho * K_1(\varphi) / [K_1(\beta) * \kappa * \varphi], \quad (7)$$

здесь K_0 и K_1 – функция Макдональда [2]; $\varphi = (\rho^2 + \beta^2)^{1/2}$ [3]; величина $\beta = \kappa / \varkappa$, где κ – постоянная величина (≈ 1). Решения (5), (6), (7) аналитически точно удовлетворяют дифференциальному уравнению (2) и граничным условиям (3), (4) для любых значений параметров $\varkappa > 0,707$ и $\kappa \geq 1$.

Величина $\kappa = 2^{1/2}$ может быть определена из условия очевидного соответствия найденных решений f_R (5) и h_R (6) при $\rho \rightarrow 0$, также и дифференциальному уравнению (1) системы Гинзбурга–

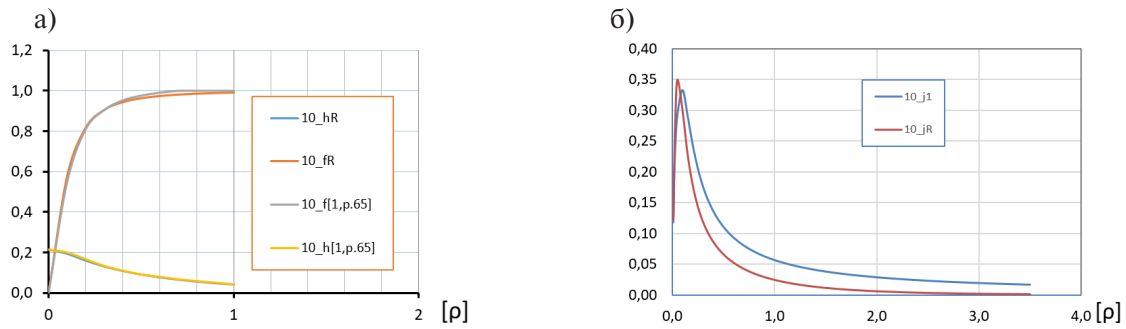


Рис. 1. Сравнение аналитических решений f_R и h_R при значении параметра $\kappa = 2^{1/2}$ с известными численными решениями $f(\rho)$ и $h(\rho)$ [1]

Fig. 1. Comparison of analytical solutions f_R and h_R at parameter $\kappa = 2^{1/2}$ with known numerical solutions $f(\rho)$ and $h(\rho)$ [1]

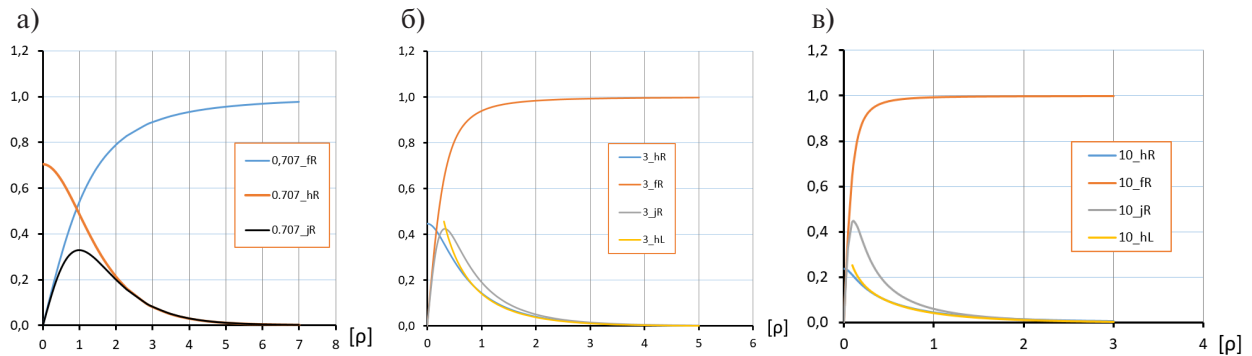


Рис. 2. Зависимости параметра порядка $f_R(\rho)$, напряженности магнитного поля $h_R(\rho)$ и $h_L(\rho) = K_0(\rho) / \alpha$, а также плотности сверхпроводящего тока $j_R(\rho)$ для сверхпроводников с параметрами α : 0,707 (а); 3 (б); 10 (в)

Fig. 2. Dependences of the order parameter $f_R(\rho)$, magnetic field strength $h_R(\rho)$ and $h_L(\rho) = K_0(\rho) / \alpha$, as well as the superconducting current density $j_R(\rho)$ for superconductors with parameters α : 0.707 (a); 3 (b); 10 (v)

Ландау [1, с. 63]. На рис. 1а и 1б приведено сравнение аналитических решений f_R и h_R при значении параметра $\kappa = 2^{1/2}$ с известными численными решениями $f(\rho)$ и $h(\rho)$ [1, с. 65] уравнений Гинзбурга–Ландау для вихря Абрикосова (при $\alpha = 10$), а также показаны плотности тока $j_R(\rho) = |h_R'|$ (7) и $j_1(\rho) = |h'|$ из уравнения (1) для $f = f_R = \rho / (\rho^2 + \beta^2)^{1/2}$.

На рис. 2 представлены графики параметра порядка $f_R(\rho)$, напряженности магнитного поля $h_R(\rho)$ и $h_L(\rho) = K_0(\rho) / \alpha$, а также плотности сверхпроводящего тока $j_R(\rho)$ для сверхпроводников с параметрами $\alpha = 0,707$; 3 и 10.

Максимальное значение плотности тока $j_{Rm} \approx 0,32 \div 0,47$, следующее из условия $(j_{Rm})' = 0$, соответствует расстоянию от оси вихря $\rho_m \approx \beta = 2^{1/2} / \alpha$.

Сопутствующие результаты:

$$h_R(0) = K_0(\beta) / [K_1(\beta) * 2]; \quad (8)$$

$$h_{Rc1} = [\alpha * h_R(0) + 3/4] / (2 * \alpha). \quad (9)$$

В свете современных сугубо дискретных моделей вихря Абрикосова (типа «кern», «th($\alpha * \rho$)» и т.п.) требование обязательного соответствия найденных решений f_R (5) и h_R (6) еще и дифференциальному уравнению (1), связывающему величину плотности сверхпроводящего тока $j_R(\rho)$ с

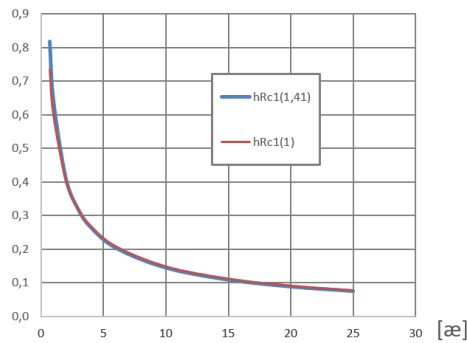


Рис. 3. Аналитические зависимости первого критического магнитного поля $h_{Rc1}(\alpha\epsilon)$ для значений $\kappa = 1$ и $\kappa = 2^{1/2} \approx 1,41$

Fig. 3. Analytical dependences of the first critical magnetic field $h_{Rc1}(\alpha\epsilon)$ for values $\kappa = 1$ and $\kappa = 2^{1/2} \approx 1.41$

производными первого и второго порядка (!) от плавно меняющегося параметра порядка $f(\rho)$, представляется избыточным и допускает использование других критериев для определения величины κ .

Критерием для определения величин κ и β может быть также выполнение точных принципиальных равенств в теории Гинзбурга–Ландау [1, р. 82] при значении $\alpha\epsilon = 1/2^{1/2}$:

$$h_{c1} = h(0) = 1/2^{1/2}. \quad (10)$$

Равенства (8) и (9) точно удовлетворяют критерию (10) при значении $\kappa = 1,1$.

Для лаконичности формул примем значение именно $\kappa = 1$, т.е. $\beta = \alpha\epsilon^{-1}$.

На рис. 3 изображены визуально совпадающие аналитические зависимости первого критического магнитного поля $h_{Rc1}(\alpha\epsilon)$ для значений $\kappa = 1$ и $\kappa = 2^{1/2} \approx 1,41$, что подтверждает приемлемость предложения «лаконичности» ($\kappa = 1$ или $\beta = \alpha\epsilon^{-1}$) для описания свойств вихря Абрикосова в реальных сверхпроводниках второго рода.

Таким образом, для значений $\beta = \alpha\epsilon^{-1}$ величина первого критического магнитного поля h_{Rc1} равна:

$$h_{Rc1} = [\alpha\epsilon * h_R(0) + 0,5] / (2 * \alpha\epsilon), \quad (11)$$

где

$$h_R(0) = K_0(\alpha\epsilon^{-1}) / K_1(\alpha\epsilon^{-1}). \quad (12)$$

На рис. 4. показана найденная нами зависимость (11) первого критического поля $h_{Rc1}(\alpha\epsilon)$, которая соответствует зависимости $h_{c1}(\alpha\epsilon)$ согласно численным расчетам Хардена и Арпа [1, с. 68, рис. 13], а также приведены значения первого критического поля при $\alpha\epsilon \gg 01$ по формуле Абрикосова $h_{Ac1}(\alpha\epsilon) = [\ln \alpha\epsilon + 0,08] / (2 * \alpha\epsilon)$ [1, с. 68, 3.41].

При значении $\kappa = 1$ нами также аналитически подтверждено следующее из (9) классическое [1, с. 69] соотношение между величинами $h(0)$ и «двукратным h_{c1} »:

$$h_R(0) = 2 * h_{Rc1} - 1 / (2 * \alpha\epsilon), \quad (13)$$

справедливое для любых значений параметра $\alpha\epsilon > 0,707$.

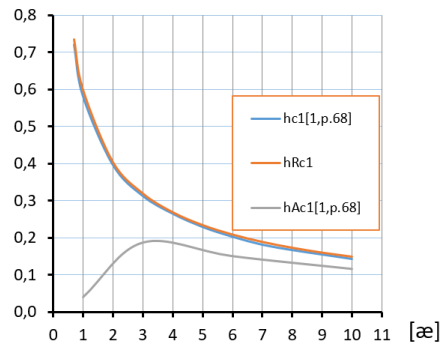


Рис. 4. Зависимость (11) первого критического поля $h_{Rc1}(\text{æ})$
 Fig. 4. Dependence (11) of the first critical field $h_{Rc1}(\text{æ})$

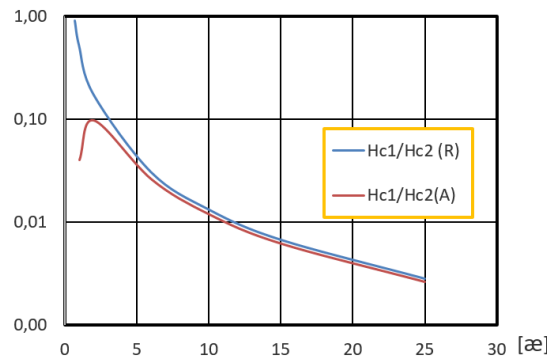


Рис. 5. Отношения абсолютных значений нижнего и верхнего критических магнитных полей
 $H_{c1}/H_{c2}(R) = h_{Rc1}/\text{æ}$ и $H_{c1}/H_{c2}(A) = h_{Rc1}/\text{æ}$ [1, с. 68]
 Fig. 5. Ratios of the absolute values of the lower and upper critical magnetic fields
 $H_{c1}/H_{c2}(R) = h_{Rc1}/\text{æ}$ and $H_{c1}/H_{c2}(A) = h_{Rc1}/\text{æ}$ [1, p. 68]

Отношения абсолютных значений нижнего и верхнего критических магнитных полей $H_{c1}/H_{c2}(R) = h_{Rc1}/\text{æ}$ и $H_{c1}/H_{c2}(A) = h_{Rc1}/\text{æ}$ [1, с. 68] представлены на рис. 5.

Очевидно преимущество нашего R -подхода к оценке $H_{c1}/H_{c2}(R)$ для сверхпроводников второго рода с любым значением параметра $\text{æ} > 0,707$.

Для сверхпроводников с параметром $\text{æ} \gg 1$ отметим совпадение результатов теории Гинзбурга–Ландау для вихря Абрикосова и нашего подхода.

При значениях $\text{æ} \gg 1$, с учетом свойств функций Макдональда [2] $K_0(\beta) \approx \ln \text{æ}$ и $K_1(\beta) \approx \text{æ}$, полученные нами функции $f_R(\rho)$, $h_R(\rho)$ и $h_R(0)$ (формулы (5), (6), (8), (9)) переходят в классические асимптотики формул Лондонов и Абрикосова [1, с. 64, 69]:

$$h_R(\rho) \approx K_0(\rho)/\text{æ} = h_L(\rho); \quad (14)$$

$$h_R(0) \approx \ln \text{æ}/\text{æ} = h_A(0); \quad (15)$$

$$f_R(\rho \ll 1) \approx \text{æ} * \rho = f_A(\rho \ll 1). \quad (16)$$

Выводы

В настоящей работе найдена следующая R -структура (f_R, h_R, j_R) вихря Абрикосова:

$$f_R = \rho / (\rho^2 + \alpha^{-2})^{1/2}; \quad (17)$$

$$h_R = K_0 \left[(\rho^2 + \alpha^{-2})^{1/2} \right] / K_1(\alpha^{-1}); \quad (18)$$

$$h_R(0) = K_0(\alpha^{-1}) / K_1(\alpha^{-1}); \quad (19)$$

$$j_R = \left| h_R' \right| = \rho * K_1 \left[(\rho^2 + \alpha^{-2})^{1/2} \right] / \left[(\rho^2 + \alpha^{-2})^{1/2} * K_1(\alpha^{-1}) \right]. \quad (20)$$

Эта структура представляет собой аналитическое решение теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау и является справедливой для любого значения параметра $\alpha > 0,707$, удовлетворяющее граничным условиям для вихря Абрикосова и условию квантованию магнитного потока.

Аналитическая зависимость первого критического магнитного поля h_{Rc1} от параметра α и абсолютных значений нижнего и верхнего критических магнитных полей имеет следующий вид:

$$h_{Rc1} = \left[\alpha * K_0(\alpha^{-1}) / K_1(\alpha^{-1}) + 1/2 \right] / (2 * \alpha) = \alpha * H_{c1} / H_{c2}. \quad (21)$$

Следует отметить, что для определения структуры вихря Абрикосова нами не использованы «модельные» представления, рядные приближения и математические аппроксимации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970. 286 с.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
- [3] Рогожкин В.В., Васильев Л.И. Критические магнитные поля в сверхпроводниках в широком диапазоне параметра α // Физика твердого тела. 1982. Т. 24, № 6. С. 1908–1910.
- [4] Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир. 1968, 279 с.
- [5] Гинзбург В.Л., Киржница Д.А. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости. М: Наука, 1977. 400 с.
- [6] Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 145 с.
- [7] Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука. 1987. 520 с.
- [8] Винтайкин Б.Е. Физика твердого тела. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 360 с.
- [9] Бардин Д. Новое в изучении сверхпроводимости. М.: Физматгиз, 1982. 729 с.
- [10] Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2000. 397с.
- [11] Корпін N.B. Theory of Nonequilibrium Superconductivity. Oxford: Clarendon Press, 2001. 342 p. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507888.001.0001>
- [12] Черноплеков Н.А. Сверхпроводниковые технологии. Современное состояние и перспективы практического применения // Вестник РАН. 2001. Т. 71, № 4. С. 303–319.
- [13] Лыков С.В. Сверхпроводимость полупроводников. СПб.: Наука, 2001. 104 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

РОГОЖКИН Владимир Владимирович – главный специалист, АО «Атомпроект», канд. физ.-мат. наук.

E-mail: vvrogzhkin@atomproekt.com

ГОРЫНИН Владимир Игоревич – начальник лаборатории, Центральный научно-исследовательский институт конструкционных материалов «Прометей», д-р техн. наук.
E-mail: z1dehy97@mail.wplus.net

ЖИТОМИРСКИЙ Максим Алексеевич – студент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
E-mail: maxzhitom@yandex.ru

REFERENCES

- [1] **D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas**, Type II superconductivity. Mir, Moscow, 1970.
- [2] **H. Bateman, A. Erdelyi**, Higher transcendental functions. Vol. 2. Nauka, Moscow, 1974.
- [3] **V.V. Rogozhkin, L.I. Vasiliev**, Kriticheskie magnitnye polia v sverkhprovodnikakh v shirokom diapazone parametra α [Critical magnetic fields in superconductors in a wide range of the parameter α], Fizika tverdogo tela [Solid state physics], 24 (6) (1982) 1908–1910.
- [4] **P.-G. de Gennes**, Superconductivity of metals and alloys. Mir, Moscow, 1968.
- [5] **V.L. Ginzburg, D.A. Kirzhnitsa**, Problema vysokotemperaturnoi sverkhprovodimosti [The problem of high temperature superconductivity]. Nauka, Moscow, 1977.
- [6] **V.V. Schmidt**, Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov [Introduction to Superconductor Physics]. Nauka, Moscow, 1982.
- [7] **A.A. Abrikosov**, Osnovy teorii metallov [Basics of metal theory]. Nauka, Moscow, 1987.
- [8] **B.E. Vintaikin**, Fizika tverdogo tela [Solid state physics]. Bauman MSTU Publ., Moscow, 2008.
- [9] **D. Bardin**, Novoe v izuchenii sverkhprovodimosti [New in the study of superconductivity]. Fizmatgiz, Moscow, 1982.
- [10] **V.V. Schmidt**, Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov [Introduction to Superconductor Physics]. 2nd ed. MCCME, Moscow, 1982.
- [11] **N. Kopnin**, Theory of Nonequilibrium Superconductivity. Clarendon Press, Oxford, 2001. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507888.001.0001>
- [12] **N.A. Chernoplekov**, Sverkhprovodnikovye tekhnologii: sovremennoe sostoianie i perspektivy prakticheskogo primeneniia [Superconductor technologies: current state and prospects for practical application]. Herald of the Russian Academy of Sciences, 71 (4) (2001) 303–319.
- [13] **S.V. Lykov**, Sverkhprovodimost' poluprovodnikov. Nauka, St. Petersburg, 2001.

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Vladimir V. ROGOZHKIN – JSC “Atomproekt”.
E-mail: vvrogzhkin@atomproekt.com

Vladimir I. GORYNIN – Central Research Institute of Structural Materials “Prometey”.
E-mail: z1dehy97@mail.wplus.net

Maxim A. ZHITOMIRSKIY – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.
E-mail: maxzhitom@yandex.ru

Поступила: 21.05.2024; Одобрена: 20.06.2024; Принята: 22.06.2024.
Submitted: 21.05.2024; Approved: 20.06.2024; Accepted: 22.06.2024.