

Научная статья
УДК 531.391+681.5
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА МОДАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ И МЕТОДА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГИХ СИСТЕМ

А. В. Федотов¹ ✉, А. К. Беляев¹, В. А. Полянский²

¹ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

✉ alvafed@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена сравнению эффективности двух методов реализации модального управления для активного гашения колебаний распределенных упругих систем: метода модальных фильтров, предполагающего линейное преобразование измеренных и управляющих сигналов, и метода наблюдателей, использующих модель объекта для восстановления вектора состояния по результатам измерений. Для этого численно решается задача (в двух постановках) гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки на нескольких низших резонансах с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Полученные результаты показали бесспорное преимущество метода наблюдателей перед методом модальных фильтров. Проанализированы эффекты передачи сигнала в контуре управления, возникающие в реальных системах, но не принимаемые, как правило, во внимание в численных исследованиях. Установлено, что эти эффекты существенно влияют на эффективность синтезируемых систем управления, поэтому их необходимо учитывать при моделировании.

Ключевые слова: активное гашение колебаний, модальное управление, модальные фильтры, наблюдатели, упругие системы

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573).

Для цитирования: Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А. Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 160–176. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>

NUMERICAL STUDY OF THE EFFICIENCY OF MODAL FILTER METHOD AND OBSERVER METHOD FOR IMPLEMENTATION OF MODAL CONTROL OF VIBRATIONS OF ELASTIC SYSTEMS

A. V. Fedotov¹ ✉, A. K. Belyaev¹, V. A. Polyanskiy²

¹ Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ alvafed@yandex.ru

Abstract. The article compares the efficiency of two methods for implementing modal control for active vibration suppression of distributed elastic systems. The former is the modal filter method, which implies a linear transformation of measured and control signals; the latter is the method of modal observers, which uses the object model to reconstruct the state vector from the measurement signals. For this purpose, the problem of suppression of forced bending vibrations of a thin metal beam at several lower resonance frequencies has been solved numerically for two different objects. The simulation results showed an undeniable advantage of the observer method over the modal filter one. The inherent effects of signal transmission in the control loop, occurring in real systems but usually neglected in numerical studies were analyzed. It was established that these phenomena had a significant impact on the efficiency of the synthesized control systems. Therefore, they must be taken into account in numerical simulations.

Keywords: active vibration suppression, modal control, modal filters, observers, elastic systems

Funding. The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-15-2021-573).

For citation: Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 160–176. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В последние десятилетия динамично развивается такая область техники, как активное управление колебаниями распределенных упругих систем. Подобные задачи встречаются во многих сферах: строительстве, робототехнике, машиностроении, автомобилестроении, аэрокосмической отрасли и т. п. Зачастую проблема управления формулируется как задача гашения вынужденных колебаний объекта, поскольку такие колебания могут ухудшать эксплуатационные характеристики конструкции, вызывать нежелательный шум и даже служить причиной ее повреждения и выхода из строя. Рассмотрению указанной задачи и посвящена данная работа.

Активное управление с обратной связью механическими колебаниями упругих систем подразумевает наличие в системе управления (СУ) сенсоров (датчиков), сигнал которых служит входом для СУ, и актуаторов (приводов), прикладываемых к объекту управляющее воздействие, которое является выходом СУ. Для данных целей широкое распространение получили пьезоэлектрические элементы, способные выполнять функции сенсоров и актуаторов благодаря прямому и обратному пьезоэффектам. Такие элементы просты и удобны в использовании, легко принимают нужную форму и могут работать в широком диапазоне частот, что делает их очень привлекательными для задач активного управления колебаниями. Именно такие сенсоры и актуаторы в виде пьезопластин, покрытых электродами и наклеиваемых на объект управления (металлическую балку), рассматриваются в данной работе.

В предыдущих работах авторов проводилось экспериментальное [1] и численное [2, 3] сравнение различных методов активного управления на примере задачи гашения вынужденных изгибных колебаний тонкой металлической балки в диапазоне частот, включающем две низшие резонансные частоты. Рассматривались локальный подход (каждый контур управления содержит один сенсор и один актуатор, расположенные с двух сторон балки в одной и той же области), модальный подход (каждый контур управления соответствует определенной форме колебаний и использует все имеющиеся сенсоры и актуаторы), а также метод управления формой (используется только один контур управления, настроенный таким образом, чтобы компенсировать известную форму внешнего

возмущения). Результаты исследований свидетельствуют о том, что при необходимости гасить вынужденные колебания объекта на нескольких резонансных частотах наибольшей эффективностью среди перечисленных обладает модальный подход.

В упомянутых исследованиях, при реализации модального подхода, для разделения форм колебаний в СУ авторами был использован метод модальных фильтров, т. е. матриц, задающих линейное преобразование измеренных и управляющих сигналов. Данная процедура позволяет «отфильтровывать» ненужные формы, для того чтобы обеспечивать соответствие каждого контура управления одной определенной форме колебаний объекта. Такой способ прост в применении, однако его эффективность ограничена, особенно в случае использования малого количества сенсоров и актуаторов. Существует другой, более продвинутый метод разделения форм в контурах управления – метод наблюдателей. Он предполагает использование модели объекта для восстановления вектора состояния по результатам измерений, и за счет этого должен обеспечивать более эффективное разделение форм. Однако данный подход также не решает полностью основную проблему модального управления – спилловер-эффект, т. е. перетекание энергии на высшие неуправляемые формы [4], что может привести к дестабилизации замкнутой системы.

Основная задача данной работы состоит в том, чтобы сравнить в одинаковых условиях два описанных метода реализации модального управления: метод модальных фильтров и метод наблюдателей.

Особенностью данного численного исследования является максимальная приближенность постановки задачи к условиям эксперимента, а именно – учет эффектов передачи сигнала в контуре управления, неотъемлемых в реальных системах. Приняты во внимание такие эффекты, как сдвиг фазы и изменение амплитуды управляющего сигнала, которые возникают вследствие запаздывания и наличия дополнительных элементов в контуре управления.

Как правило, при численном моделировании указанные эффекты не учитываются [5, 6], однако настоящее исследование с убедительностью доказывает, что они существенно влияют на результат синтеза СУ и ее эффективность, и потому их непременно следует учитывать в численных исследованиях, если их конечной целью является экспериментальная реализация рассматриваемых систем.

Теоретические основы рассматриваемых подходов

Истоки модального подхода восходят к началу 1960-х годов, когда его основные принципы были впервые сформулированы в статье [7]. Затем предложенный метод был развит в работах [8, 9]. В настоящее время модальный подход уже можно назвать классическим: он хорошо изучен и используется в разных областях техники [10 – 12]. При реализации этого подхода используют как метод модальных фильтров (для распределенных сенсоров и актуаторов [13, 14] или их дискретных систем [15, 16]), так и метод наблюдателей [5, 17, 18].

В данном разделе дается общая формулировка указанных методов, а также разъясняются особенности их использования в рамках настоящего исследования.

Метод модальных фильтров. Рассмотрим задачу управления изгибными колебаниями балок с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Представим поперечное смещение точек балки $w(x, t)$ в виде разложения по собственным формам:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n X_i(x) q_i(t), \quad (1)$$

где n – число собственных форм колебаний балки, учитываемых в модели; $X_i(x)$ – собственные формы колебаний; $q_i(t)$ – обобщенные координаты.

Запишем в матричной форме уравнения колебаний балки для собственных форм:

$$\ddot{q} + 2\xi\Omega\dot{q} + \Omega^2q = Q^c + Q^d, \quad (2)$$

где $q_{n \times 1}(t)$ – вектор обобщенных координат длиной n ; $\Omega_{n \times n}$ – диагональная матрица собственных частот колебаний балки; ξ – скалярный коэффициент демпфирования (для простоты принимаем его одинаковым для всех форм); $Q_{n \times 1}^c(t)$, $Q_{n \times 1}^d(t)$ – векторы обобщенных сил, соответствующие управлению и внешнему возмущению.

Для простоты предположим, что число сенсоров и актуаторов одинаково и равно m ($m \leq n$). Их работа описывается следующими уравнениями:

$$y_{m \times 1} = \Theta_{m \times n}^s q_{n \times 1}, \quad (3)$$

$$Q_{n \times 1}^c = \Theta_{n \times m}^a u_{m \times 1}, \quad (4)$$

где $y_{m \times 1}(t)$ – вектор сигналов сенсоров; $u_{m \times 1}(t)$ – вектор управляющих сигналов, подаваемых на актуаторы; $\Theta_{m \times n}^s$, $\Theta_{n \times m}^a$ – матрицы влияния для сенсоров и для актуаторов (они показывают, насколько интенсивно каждый сенсор реагирует на каждую из форм колебаний, а каждый актуатор возбуждает каждую из форм).

В задачах, рассматриваемых в статье, сенсоры и актуаторы расположены согласованно: парами сенсор-актуатор по обеим сторонам балки. Это означает, что матрицы влияния также взаимосвязаны:

$$\Theta_{n \times m}^a = k^{as} \left(\Theta_{m \times n}^s \right)^T = \Theta, \quad (5)$$

где k^{as} – скалярный коэффициент, зависящий от физических и геометрических параметров сенсоров и актуаторов.

Числовые значения элементов матриц влияния зависят от того, как актуаторы и сенсоры расположены на объекте управления. Существуют критерии, позволяющие оптимизировать места установки данных элементов – эти критерии формулируются как раз для матрицы Θ . Например, в статьях [6, 17] предлагается максимизировать минимальное сингулярное число матрицы Θ , или же минимальное собственное число матрицы $\Theta^T \Theta$, что по сути означает то же самое.

В настоящем исследовании пьезоэлементы размещаются на балке таким образом, чтобы максимизировать их влияние на первую и вторую собственные формы колебаний балки, поскольку задача управления состоит в гашении колебаний именно по двум нижшим формам.

Наконец, мы подошли к определению модальных фильтров. Модальные фильтры – это матрицы, задающие линейные преобразования измеренных и управляющих сигналов и обеспечивающие соответствие каждого контура управления определенной форме колебаний объекта.

Будем считать, что управление ведется по k формам. За обработку измеренных сигналов отвечает матрица T – анализатор форм:

$$\hat{q}_{k \times 1} = T_{k \times m} y_{m \times 1}, \quad (6)$$

где $\hat{q}_{k \times 1}(t)$ – вектор оценок k нижних обобщенных координат $q_i(t)$.

Управляющие воздействия задаются в соответствии с матрицей F – синтезатором форм:

$$u_{m \times 1} = F_{m \times k} \hat{Q}_{k \times 1}, \quad (7)$$

где $\hat{Q}_{k \times 1}(t)$ – вектор желаемых управляющих воздействий на k нижних собственных форм.

Поскольку мы рассматриваем именно модальное управление, вектор желаемых воздействий зависит от вектора оценок обобщенных координат следующим образом:

$$\hat{Q}_{k \times 1} = -R_{k \times k} \hat{q}_{k \times 1}, \quad (8)$$

где $R_{k \times k}$ – диагональная матрица коэффициентов усиления.

Элементы данной матрицы в общем случае задают законы управления в каждом контуре, поэтому их можно записать как функции комплексной переменной s :

$$R_{ii} = R_i(s). \quad (9)$$

Очевидно, что в простейшем случае $k = m = n$ матрицы T и F должны определяться следующим образом:

$$T = (\Theta^s)^{-1}, F = (\Theta^a)^{-1}. \quad (10)$$

Это будет означать выполнение равенств

$$\hat{q} = q, Q^c = \hat{Q}.$$

Однако обычно при управлении распределенными системами число форм n , которые необходимо учитывать, превышает число сенсоров и актуаторов m , а число форм k , по которым ведется управление, также может отличаться от данных чисел.

В таком случае можно представить матрицы влияния в следующем виде:

$$\Theta_{m \times n}^s = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{m \times k}^s & \tilde{\Theta}_{m \times (n-k)}^s \end{bmatrix}, \Theta_{n \times m}^a = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{k \times m}^a \\ \tilde{\Theta}_{(n-k) \times m}^a \end{bmatrix}, \quad (11)$$

а анализатор и синтезатор форм при этом будут определяться как псевдообратные соответствующим компонентам матриц влияния:

$$T_{k \times m} = (\bar{\Theta}_{m \times k}^s)^+, F_{m \times k} = (\bar{\Theta}_{k \times m}^a)^+. \quad (12)$$

Именно такой метод определения модальных фильтров использован в данной работе. Например, в случае управления по двум нижшим формам колебаний с помощью двух пар сенсор-актуатор ($k = m = 2$), описанный метод гарантирует, что первая форма колебаний не возбуждается и не воздействует на первый контур управления, а вторая – на второй контур.

Однако более высокие формы колебаний будут как возбуждаться, так и воздействовать на оба контура управления. Это явление носит название спилловер-эффекта (перетекание энергии на высшие формы) и является основным препятствием, ограничивающим эффективность модального управления.

Необходимо отметить, что ранее авторами был предложен алгоритм, получивший название метода экспериментальной идентификации [19]: он позволяет экспериментально реализовать описанный способ определения модальных фильтров.

Между тем существуют и другие способы задания матриц T и F . Первый из них [20] близок к уже рассмотренному:

$$(\Theta_{m \times n}^s)^+ = \begin{bmatrix} T_{k \times m} \\ \tilde{T}_{(n-k) \times m} \end{bmatrix}, (\Theta_{n \times m}^a)^+ = \begin{bmatrix} F_{m \times k} & \tilde{F}_{m \times (n-k)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Можно также определять анализатор форм T через аппроксимацию функции смещения точек балки $w(x, t)$, применяя значения смещения, измеренные сенсорами [20] (при использовании пьезопластин, измеряющих и воздействующих на кривизну балки, правильнее аппроксимировать функцию кривизны $w''(x, t)$); аналогично можно определять и синтезатор форм F .

Предложенный метод можно приближенно описывать следующими формулами:

$$T_{k \times m} = M_{k \times k}^s (\bar{\Theta}_{m \times k}^s)^T, F_{m \times k} = (\bar{\Theta}_{k \times m}^a)^T M_{k \times k}^a, \quad (14)$$

где $M_{k \times k}^s, M_{k \times k}^a$ – некоторые диагональные матрицы, элементы которых задают степень возбуждения и реагирования системы управления на отдельные формы.

При увеличении числа сенсоров и актуаторов (если они стремятся покрыть всю поверхность объекта управления) рассмотренные методы приводят к одинаковым результатам, поскольку собственные формы колебаний упругого тела ортогональны.

К достоинствам метода модальных фильтров следует отнести простоту его реализации, а также отсутствие явления дестабилизации высших форм колебаний объекта вследствие спилловер-эффекта, в случае использования достаточно большого числа сенсоров и

актуаторов [20]. Но при малом числе сенсоров и актуаторов указанный эффект в такой системе все же опасен и может вызывать неустойчивость высших форм.

Метод наблюдателей. Для описания метода необходимо представить систему (2) в пространстве состояний:

$$\dot{q}^n = Aq^n + Bu + Dd, \quad (15)$$

где q^n – вектор состояния системы, связанный с вектором обобщенных координат из (2) следующим образом:

$$q^n = (q_1 \ \dots \ q_n \ \dot{q}_1 \ \dots \ \dot{q}_n)^T; \quad (16)$$

d – вектор внешних воздействий длиной \bar{m} , а матрица D имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} 0_{n \times \bar{m}} \\ \tilde{D}_{n \times \bar{m}} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

так что выполняется следующее равенство:

$$\tilde{D}_{n \times \bar{m}} d_{\bar{m} \times 1} = Q_{n \times 1}^d. \quad (18)$$

Остальные матрицы, использованные в уравнении (15), также можно выразить через матрицы из уравнений (2) и (4):

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -\Omega_{n \times n}^2 & -2\xi\Omega_{n \times n} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \Theta_{n \times m}^a \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $0_{n \times n}$ и $0_{n \times m}$ – матрицы, состоящие из нулей; $I_{n \times n}$ – единичная матрица.

Аналогичным образом записывается уравнение для сигналов сенсоров:

$$y = Cq^n = [\Theta_{m \times n}^s \ 0_{m \times n}] q^n. \quad (20)$$

Для того чтобы сформулировать законы работы наблюдателей, перепишем уравнения (15) и (20), разделив систему на две части. При этом будем считать, что наблюдение осуществляется по тем же k низшим формам колебаний, по которым ведется управление ($k < n$):

$$\dot{q}^k = A^{(1)} q^k + B^{(1)} u + D^{(1)} d, \quad (21)$$

$$\dot{q}^{n-k} = A^{(2)} q^{n-k} + B^{(2)} u + D^{(2)} d, \quad (22)$$

$$y = C^{(1)} q^k + C^{(2)} q^{n-k}. \quad (23)$$

Здесь вместо одного вектора состояния появляется два:

$$q^k = (q_1 \ \dots \ q_k \ \dot{q}_1 \ \dots \ \dot{q}_k)^T, \quad (24)$$

$$q^{n-k} = (q_{k+1} \ \dots \ q_n \ \dot{q}_{k+1} \ \dots \ \dot{q}_n)^T, \quad (25)$$

и соответствующим образом на две части разделяются матрицы из уравнений (15) и (20). Далее сформулируем закон работы наблюдателей в предположении, что матрицы $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ известны:

$$\dot{\hat{q}} = A^{(1)} \hat{q} + B^{(1)} u + L(y - C^{(1)} \hat{q}). \quad (26)$$

Здесь $\hat{q}_{2k \times 1}$ – оценка вектора состояния q^k , или вектор оценок k первых обобщенных координат и скоростей.

Предположим, что закон управления задан по аналогии с уравнениями (7), (8) с постоянной матрицей управления R :

$$u_{m \times 1} = F_{m \times k} \hat{Q}_{k \times 1} = -F_{m \times k} R_{k \times 2k} \hat{q}_{2k \times 1}. \quad (27)$$

Заметим, что здесь, в отличие от формулы (8), матрица R является не квадратной, а прямоугольной (размер $k \times 2k$), поскольку вектор \hat{q} содержит оценки не только обобщенных координат, но и скоростей.

Для записи общего уравнения для всей замкнутой системы введем вектор ошибок наблюдения $e_{2k \times 1}$ и перепишем уравнения (21), (22), (26) и (27):

$$e = \hat{q} - q^k, \quad (28)$$

$$u = -FR(q^k + e), \quad (29)$$

$$\dot{q}^k = (A^{(1)} - B^{(1)}FR)q^k - B^{(1)}FR e + D^{(1)}d, \quad (30)$$

$$\dot{q}^{n-k} = A^{(2)}q^{n-k} - B^{(2)}FR(q^k + e) + D^{(2)}d, \quad (31)$$

$$\dot{e} = (A^{(1)} - LC^{(1)})e + LC^{(2)}q^{n-k} - D^{(1)}d. \quad (32)$$

Таким образом, уравнение всей системы можно записать в следующем виде:

$$\dot{\bar{q}} = \bar{A}\bar{q} + \bar{D}d, \quad (33)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{q} = (q^k \quad q^{n-k} \quad e)^T, \quad (34)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A^{(1)} - B^{(1)}FR & 0_{2k \times 2(n-k)} & -B^{(1)}FR \\ -B^{(2)}FR & A^{(2)} & -B^{(2)}FR \\ 0_{2k \times 2k} & LC^{(2)} & A^{(1)} - LC^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D^{(1)} \\ D^{(2)} \\ -D^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Можно заметить, что в случае, если $k = n$, вторая строка и второй столбец матрицы замкнутой системы \bar{A} исчезают и полюса системы задаются двумя матрицами:

$$\bar{A}_{11} = A^{(1)} - B^{(1)}FR \quad \text{и} \quad \bar{A}_{33} = A^{(1)} - LC^{(1)}.$$

Таким образом, задачи наблюдения и управления разделяются, и можно независимо синтезировать матрицы L и R , исходя из требуемых свойств замкнутой системы. Наличие же высших неуправляемых форм (при $k < n$) сразу же усложняет задачу: появляется уже упомянутый ранее спилловер-эффект. Можно выделить у этого эффекта две части: первая – ошибка наблюдения (observation spillover), которая возникает из-за активизации высших форм, за нее отвечает компонент матрицы $\bar{A}_{32} = LC^{(2)}$; вторая – ошибка управления (control spillover), т. е. возбуждение системой управления высших форм, она выражается компонентами матрицы

$$\bar{A}_{21} = \bar{A}_{23} = -B^{(2)}FR.$$

Спилловер-эффект мешает работе системы управления и ограничивает ее эффективность, в том числе он способен привести к дестабилизации замкнутой системы.

Очевидно, что если динамика системы с управлением описывается уравнением (33) с матрицей (35), то данное описание позволяет явно находить решение во временной или частотной области, а также анализировать устойчивость системы по собственным числам



матрицы \bar{A} . Однако такой способ годится только в том случае, когда матрица управления R постоянна, т. е. ее компоненты не зависят от комплексной переменной s . В реальных же условиях, в отличие от теоретических моделей, в контуре управления всегда есть запаздывание, которое можно описать как раз заданием зависимости $R(s)$. Также в контуре управления могут присутствовать дополнительные элементы, такие как фильтры нижних частот и усилители, имеющие свои амплитудно- и фазочастотные характеристики, что также влияет на передаточные функции (ПФ) в контурах управления.

В таком случае для вычисления динамического отклика системы при использовании наблюдателей можно применять следующие формулы для отображений Лапласа переменных, введенных ранее:

$$\hat{q}(s) = (sI_{2k} - A^{(1)} + LC^{(1)} + B^{(1)}FR(s))^{-1} Ly(s), \quad (37)$$

$$u(s) = -FR(s)\hat{q}(s) = -K(s)y(s), \quad (38)$$

$$K(s) = FR(s)(sI_{2k} - A^{(1)} + LC^{(1)} + B^{(1)}FR(s))^{-1} L, \quad (39)$$

$$q(s) = (sI_{2n} - A + BK(s)C)^{-1} Dd(s). \quad (40)$$

В настоящей работе в моделях объекта, используемых в наблюдателях, матрица R считается постоянной. Это допущение необходимо, в том числе, для возможности анализа устойчивости наблюдения по матрице A_{obs} :

$$A_{obs} = A^{(1)} - LC^{(1)} - B^{(1)}FR. \quad (41)$$

Таким образом, в работе наблюдателя не учитываются перечисленные дополнительные эффекты, влияющие на передачу сигнала в контурах управления, в то время как в общей модели системы эти эффекты учтены. Одна из задач настоящего исследования как раз и состоит в том, чтобы проанализировать, как указанные эффекты влияют на эффективность управления с наблюдателями.

Рассмотрим подробнее структуру матрицы наблюдения L и матрицы управления R . Поскольку мы используем модальный подход, эти матрицы должны обеспечивать раздельное управление различными формами колебаний объекта. Для этого зададим матрицы следующим образом:

$$L_{2k \times k} = \begin{bmatrix} K_{k \times k}^L \\ K_{k \times k}^{Ld} \end{bmatrix} T_{k \times m}, R_{k \times 2k} = \begin{bmatrix} K_{k \times k}^R & K_{k \times k}^{Rd} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

где $T_{k \times m}$ – анализатор форм; $K_{k \times k}^L, K_{k \times k}^{Ld}, K_{k \times k}^R, K_{k \times k}^{Rd}$ – диагональные матрицы с элементами K_i^L, K_i^{Ld}, K_i^R и K_i^{Rd} , $i = 1, 2, \dots, k$.

Элементы K_i^R и K_i^{Rd} показывают, как управляющее воздействие на i -ю форму зависит от оценок i -й обобщенной координаты и скорости; элементы K_i^L и K_i^{Ld} отражают влияние ошибки оценивания i -й обобщенной координаты на динамику оценок i -й обобщенной координаты и скорости. Указанная ошибка получена из ошибок определения измеряемых сигналов $\hat{y} - y$ с помощью линейного преобразования, заданного матрицей T .

Стоит отметить, что в наблюдении и управлении участвуют матрицы, введенные ранее при рассмотрении метода модальных фильтров. Это матрица-анализатор и матрица-синтезатор форм T и F (см. уравнения (27) и (42)). Они осуществляют ту же самую функцию – разделение форм колебаний объекта в системе управления; их можно определить теми же способами, которые изложены в разделе «Метод модальных фильтров».

Подводя итог, необходимо отметить, что метод наблюдателей более сложен в применении, чем метод модальных фильтров, и можно ожидать, что он обеспечит более точную оценку обобщенных координат, поскольку для решения данной задачи метод наблюдателей предполагает использование модели объекта управления. Более того, метод наблюдателей в целях повышения эффективности можно дополнительно усложнить за счет расширения вектора оцениваемых переменных или использования распределенных

наблюдателей, а также нелинейных методов управления [21 – 24].

Шарнирно-опертая балка

Первая часть исследования посвящена созданию модальных СУ для гашения колебаний шарнирно-опертой балки. Для системы, рассмотренной в данном разделе, задача синтеза СУ с помощью модальных фильтров решена в статье [25] одного из авторов настоящего исследования.

Итак, рассматривается шарнирно-опертая алюминиевая балка сечением 3×35 мм и длиной 1 м, совершающая изгибные колебания в плоскости xz (рис. 1).

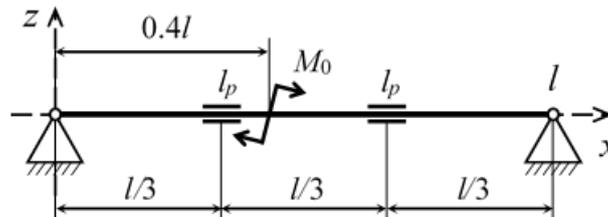


Рис. 1. Схематичное изображение шарнирно-опертой балки с сенсорами и актуаторами; l – длина балки, M_0 – внешний изгибающий момент

К балке в сечении с координатой $x_0 = 0,4$ м приложено внешнее гармоническое возмущающее воздействие – изгибающий момент величиной $M_0 = 0,1$ Н·м. Система управления включает в себя два сенсора и два актуатора, представляющих собой тонкие прямоугольные пьезоэлектрические пластинки размером 50×30 мм, покрытые электродами и приклеенные к балке парами сенсор-актуатор на двух участках.

Задача системы управления состоит в том, чтобы погасить вынужденные изгибные колебания балки в диапазоне частот, включающем две низшие резонансные частоты колебаний. В численной модели балки учитывается $n = 33$ низших формы колебаний.

В соответствии с целью управления выбираются координаты сенсоров и актуаторов на балке: они расположены симметрично относительно середины балки таким образом, чтобы эффективно реагировать и воздействовать на первую и вторую формы изгибных колебаний. Для этого было принято решение разместить их равномерно, на расстояниях $l/3 = 0,333$ м от концов балки.

Рассмотрим этапы синтеза модальной СУ методом модальных фильтров. Сперва необходимо задать эти модальные фильтры, т. е. матрицы T и F (анализатор и синтезатор форм). Они заданы через обращение компонент матриц влияния, в соответствии с формулой (12) для простейшего случая $k = m = 2$; результат приведен в статье [25]. Следующий этап – задание законов управления для каждого контура. На этом этапе варьировались коэффициенты ПФ в контурах управления с помощью процедуры оптимизации [3, 26] и определялись наиболее эффективные из них. При этом отслеживалось условие устойчивости замкнутой системы с помощью критерия Найквиста для случая двух контуров управления [2].

Синтез модальной системы управления с наблюдателями состоял из аналогичных этапов. Во-первых, необходимо было задать матрицы T и F – они были заданы точно таким же образом. Во-вторых, следовало задать матрицы наблюдения L и управления R : их структура выбиралась в соответствии с формулой (42), поэтому оставалось определить только диагональные элементы матриц $K_{2 \times 2}^L, K_{2 \times 2}^{Ld}, K_{2 \times 2}^R$ и $K_{2 \times 2}^{Rd}$, для чего опять же использовалась упомянутая выше процедура оптимизации.

Заметим, что для первой задачи – синтеза СУ методом модальных фильтров – в контурах управления учитывались особенности эксперимента, т. е. запаздывание по фазе и снижение амплитуды сигнала на высших частотах. Эти явления моделируются следующим звеном ПФ:

$$R^{del}(s) = \frac{1}{1 + 0,0005s}. \quad (43)$$

Данное звено входило в общие ПФ контуров управления, полученные методом оптимизации.

Вторая задача – синтез СУ с использованием наблюдателей – решается в двух вариантах: с учетом и без учета запаздывания (43). В случае, когда запаздывание не учитывается, замкнутая система допускает описание (33) с матрицей (35), в то время как при учете запаздывания задача описания системы становится более сложной, и для этого используются уравнения (37) – (40). При этом в модели системы, используемой в наблюдателе, матрица R , как было отмечено ранее, считается постоянной.

ПФ в контурах управления для метода модальных фильтров приведены в работе [25]. Далее приводятся оптимальные параметры СУ для метода наблюдателей. Для случая, когда запаздывание не учитывается, параметры имеют вид

$$\begin{cases} K^L = \text{diag}\{0,75 & 3,60\}, K^{Ld} = \text{diag}\{-155 & -2650\}, \\ K^R = 0_{2 \times 2}, K^{Rd} = \text{diag}\{195 & 640\}. \end{cases} \quad (44)$$

Если запаздывание учитывается, то

$$\begin{cases} K^L = \text{diag}\{0,015 & 2,000\}, K^{Ld} = \text{diag}\{-163 & -2600\}, \\ K^R = 0_{2 \times 2}, K^{Rd} = \text{diag}\{3600 & 1120\}. \end{cases} \quad (45)$$

Перейдем к сравнению результатов, полученных для различных систем управления. На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы с различными вариантами управления, в диапазоне частот от 0 до 40 Гц.

В качестве контролируемой величины используется интенсивность колебаний балки E в установившемся режиме, определяемая следующим образом:

$$E = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l |w(x,t)|^2 dx}. \quad (46)$$

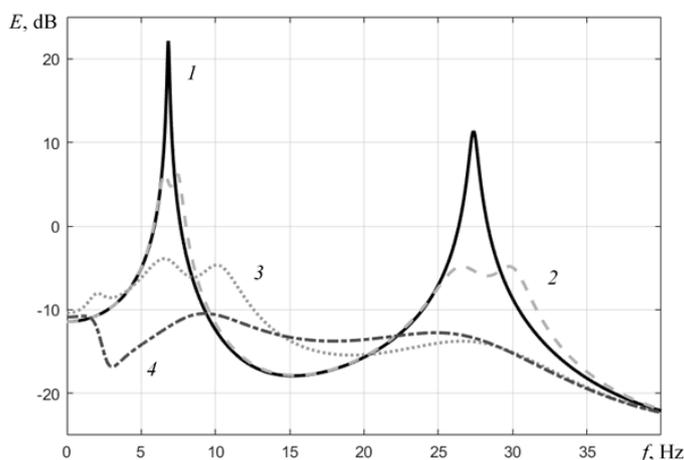


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика шарнирно-опертой балки без управления (кривая 1), с управлением методом модальных фильтров (2) и методом наблюдателей без учета (3) и с учетом (4) запаздывания в контуре управления

Результаты гашения вынужденных колебаний на первом (I) и втором (II) резонансах для различных систем управления представлены в табл. 1.

Таблица 1

Снижение резонансных амплитуд колебаний шарнирно-опертой балки для различных систем управления

Система управления	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе	
	I (ΔE_1)	II (ΔE_2)
С модальными фильтрами	-15,9	-16,2
С наблюдателями:		
без учета запаздывания	-26,0	-25,1
с его учетом	-32,6	-24,1

Анализ данных на рис. 2 и в табл. 1 приводит к заключению, что метод наблюдателей (кривые 3, 4) значительно эффективнее, чем метод модальных фильтров (кривая 2). При этом учет запаздывания в контуре управления оказывает существенное влияние на результат: если вблизи второго резонанса это влияние оказывается небольшим, то на первом оно приводит к сильному изменению амплитуды колебаний, повышая эффективность управления.

Упругозащемленная балка

Вторая часть исследования посвящена созданию модальных систем управления колебаниями другой упругой системы – балки, упруго защемленной в промежуточном сечении. Это численное исследование логически продолжает эксперимент, проведенный авторами ранее [1].

Постановка задачи повторяет использованную в эксперименте. Схема установки показана на рис. 3. Алюминиевая балка 1 сечением 3×35 мм и длиной 70 см расположена вертикально и закреплена в одной точке на расстоянии 10 см от нижнего конца. В конструкцию закрепления, соединяющую балку с неподвижным основанием 3, входит пьезоэлектрический стержень-толкатель 2, продольные колебания которого вызывают вибрацию опоры, выступающую в роли внешнего возбуждения.

В состав системы управления входят две пары сенсор-актуатор (4 – сенсоры, 5 – актуаторы), такие же, как в задаче, рассмотренной в разделе «Шарнирно-опертая балка».

Цель системы управления, как и ранее, – гашение изгибных колебаний балки на первом (I) и втором (II) резонансах. Расположение сенсоров и актуаторов на балке выбрано в соответствии с указанной целью [1].

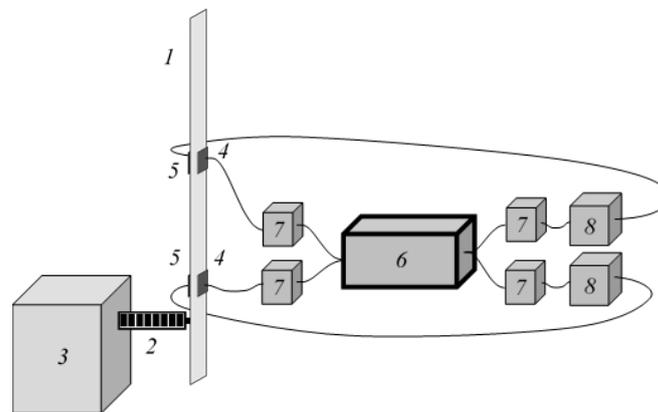


Рис. 3. Схема экспериментальной установки:

- 1 – алюминиевая балка; 2 – пьезоэлектрический стержень-толкатель;
- 3 – неподвижное основание; 4 – сенсоры; 5 – актуаторы;
- 6 – дискретный контроллер; 7 – фильтры нижних частот; 8 – усилители

Помимо дискретного контроллера δ , преобразующего измеренные сигналы в управляющие, в цепь управления входят дополнительные элементы – фильтры нижних частот γ и усилители ϵ . Фильтры сглаживают высокочастотные составляющие сигнала, возникающие из-за его дискретизации в контроллере, и в целом повышают устойчивость замкнутой системы; усилители увеличивают амплитуду управляющего сигнала перед подачей на актуаторы в 25 раз. Кроме этого, необходимо также учитывать изменения сигнала в цепи управления, возникающие из-за релаксации заряда пьезосенсоров при измерении напряжения на них и проявляющееся на низких частотах. Этот эффект был обнаружен экспериментально и затем учтен при моделировании.

На рис. 4 показаны логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики фильтров, усилителей и пьезосенсоров, поскольку все они влияют на передачу сигнала в цепи управления, а значит, их необходимо учитывать в модели системы.

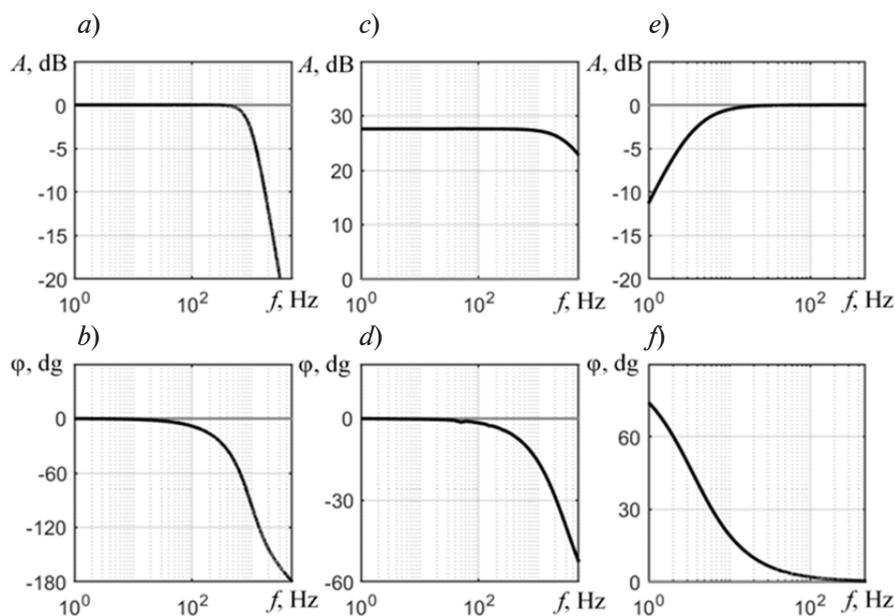


Рис. 4. Амплитудно-частотные (a , c , e) и фазочастотные (b , d , f) характеристики элементов цепи управления, влияющих на передачу сигнала: фильтров нижних частот (a , b), усилителей (c , d) и пьезосенсоров (e , f)

Численное моделирование замкнутой системы осуществляется в несколько этапов.

Во-первых, создается трехмерная модель балки с пьезоэлементами и конструкцией закрепления в пакете ANSYS, гармонический анализ которой позволяет получать различные амплитудно- и фазочастотные характеристики объекта. В настоящем исследовании используется конечно-элементная (КЭ) модель, содержащая 3 534 элемента и 21 088 узлов; коэффициент демпфирования в такой модели принят одинаковым для всех форм: $\xi = 0,002$.

Более подробно КЭ-модель описана в работах [2, 26]; там же приведено сравнение результатов КЭ-расчетов и эксперимента, показавшее высокую точность используемой модели.

На втором этапе моделирования для каждого варианта тестируемой системы управления задаются ее параметры и определяются амплитудно- и фазочастотные характеристики, после чего в результате комбинирования полученных характеристик [2] вычисляются частотные характеристики замкнутой системы. Для определения эффективности управления анализируется амплитуда колебаний точки на верхнем конце балки.

Результаты работы систем управления, синтезированных ранее с помощью процедуры оптимизации и основанных на методе модальных фильтров, приведены в работах [3, 26]. При создании СУ методом наблюдателей было принято решение управлять не по двум,

а по трем низшим формам ($k = 3$), при этом количество сенсоров и актуаторов и их расположение на балке остаются такими же, как и для метода модальных фильтров ($m = 2$). Это можно считать неоспоримым достоинством метода наблюдателей: модель системы в контуре наблюдения может быть сколь угодно сложной, даже при малом числе используемых сенсоров и актуаторов. В методе же модальных фильтров это число накладывает ограничение на количество форм колебаний, управляемых независимо: $k \leq m$.

Для СУ с наблюдателями, матрицы T и F задавались в соответствии с формулой (12):

$$T = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,28 \\ -1,32 & 2,84 \\ 2,29 & 2,21 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}, F = \begin{bmatrix} 8,16 & -28,48 & 49,17 \\ 6,06 & 61,12 & 47,54 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Матрицы наблюдения L и управления R , полученные с помощью процедуры оптимизации, имеют следующую структуру (с учетом вида обеих матриц (42)):

$$\begin{cases} K^L = \text{diag}\{90 & 5,08 & -2\}, K^{Ld} = \text{diag}\{-4280 & -4920 & -4660\}, \\ K^R = 0_{3 \times 3}, K^{Rd} = \text{diag}\{9800 & 610 & 3600\}. \end{cases} \quad (48)$$

На рис. 5 представлены результаты гашения колебаний балки с помощью различных систем управления, а именно – амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы, где в качестве отслеживаемой величины выступает амплитуда колебаний точки на верхнем конце балки, в диапазоне частот от 0 до 300 Гц.

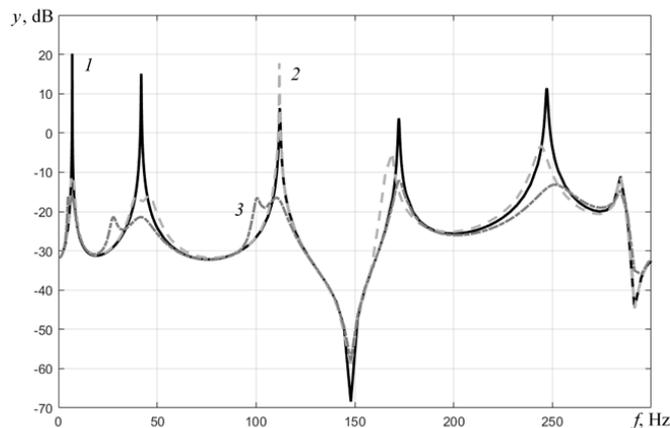


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики упрягозашемленной балки без использования системы управления (кривая 1), а также с управлением, основанном на методах модальных фильтров (2) и наблюдателей (3)

В табл. 2 приведены результаты гашения вынужденных колебаний балки для различных систем управления на резонансах с первого (I) по пятый (V). Следует отметить, что в задачу первой СУ входило управление только по двум низшим формам, а второй – по трем, однако, как оказалось, данные системы могут работать и на более высоких резонансах.

Из данных на рис. 5 и в табл. 2 видно, что метод наблюдателей, как и в случае шарнирно-опертой балки, оказывается эффективнее метода модальных фильтров: он приводит к большему снижению амплитуды вынужденных колебаний балки не только на первом (I) и втором (II), но также и на нескольких последующих резонансах.



Таблица 2

**Снижение резонансных амплитуд колебаний
упругозащемленной балки для различных систем управления**

Система управления	Снижение амплитуды, дБ, на резонансе				
	I (Δy_1)	II (Δy_2)	III (Δy_3)	IV (Δy_4)	V (Δy_5)
С модальными фильтрами	-31,96	-31,06	+11,42	-8,73	-14,72
С наблюдателями	-36,50	-36,52	-22,85	-15,94	-24,51

Заключение

В работе было проведено численное сравнение двух методов реализации модального управления колебаниями распределенных систем: метода модальных фильтров и метода наблюдателей. Показано, что второй метод позволяет создать более эффективные системы управления, чем первый, приводящие к большему снижению амплитуд вынужденных колебаний объекта на большем числе резонансных частот. При этом важным преимуществом метода наблюдателей является простота синтеза управления: вместо задания громоздких передаточных функций можно обойтись оптимизацией элементов нескольких диагональных матриц.

Кроме того, было исследовано влияние запаздывания в контуре управления, возникающего в реальных системах, в том числе ввиду наличия в цепи управления дополнительных элементов (таких как фильтры и усилители), на результат синтеза модальной системы управления с наблюдателями. Было показано, что такое влияние существенно, поэтому в численных моделях необходимо учитывать данные эффекты.

Для дальнейшего численного исследования интересными представляются несколько направлений: поиск оптимального способа задания матриц – синтезатора и анализатора форм, модификация наблюдателя путем расширения вектора наблюдений, а также использование нелинейных законов наблюдения и управления. Перспективной видится также задача экспериментального подтверждения результатов сравнения эффективности различных методов реализации модального управления, полученных в статье теоретическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
2. Федотов А. В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155.
3. Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A. Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: experiment and numerical simulation // V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). Mechanics and Control of Solids and Structures (Book Series: Advanced Structured Materials. Vol. 164). Cham, Switzerland: Springer, 2022. Pp. 151–169.
4. Meirovitch L., Baruh H. On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed-parameter systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1983. Vol. 30. No. 2. Pp. 269–291.
5. Lu J., Wang P., Zhan Z. Active vibration control of thin-plate structures with partial SCLD treatment // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. Vol. 84. Part A. Pp. 531–550.
6. Sun D., Wu H., Zhang H., Li Y. Vibration control of flexible plates using piezoelectric patches // IFAC Proceedings Volumes. 1999. Vol. 32. No. 2. Pp. 8078–8083.

7. **Gould L. A., Murray-Lasso M. A.** On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1966. Vol. 11. No. 4. Pp. 729–737.
8. **Porter B., Crossley T. R.** Modal control. London: Taylor and Francis, 1972. 246 p.
9. **Meirovitch L.** Dynamics and control of structures. New York: John Wiley & Sons, 1990. 425 p.
10. **Pusch M., Ossmann D., Luspay T.** Structured control design for a highly flexible flutter demonstrator // *Aerospace*. 2019. Vol. 6. No. 3. Pp. 27–46.
11. **Carvalho R., Silva S., Lopes V.** Modal control applications in intelligent truss structures // *ABCM Symposium Series in Mechatronics*. 2004. Vol. 1. January. Pp. 304–310.
12. **Chomette B., Chesne S., Remond D., Gaudiller L.** Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control – application to a printed circuit board // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2010. Vol. 24. No. 2. Pp. 352–364.
13. **Lee C.-K., Moon F. C.** Modal sensors/actuators // *Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57. No. 2. Pp. 434–441.
14. **Donoso A., Bellido J. C.** Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 38. No. 4. Pp. 347–356.
15. **Peukert C., Pöhlmann P., Merx M., Müller J., Ihlenfeldt S.** Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system // *Journal of Machine Engineering*. 2019. Vol. 19. No. 2. Pp. 32–45.
16. **Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M.** Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // *Smart Structures and Systems*. 2013. Vol. 12. No. 5. Pp. 547–577.
17. **Guo X., Jiang J.** Optimization of actuator placement in a truss-cored sandwich plate with independent modal space control // *Smart Materials and Structures*. 2011. Vol. 20. No. 11. 115011.
18. **Sharma M., Singh S. P., Sachdeva B. L.** Modal control of a plate using a fuzzy logic controller // *Smart Materials and Structures*. 2007. Vol. 16. No. 4. Pp. 1331–1341.
19. **Беляев А. К., Полянский В. А., Смирнова Н. А., Федотов А. В.** Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 2. С. 69–81.
20. **Meirovitch L., Baruh H.** The implementation of modal filters for control of structures // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985. Vol. 8. No. 6. Pp. 707–716.
21. **Bagordo G., Cazzulani G., Resta F., Ripamonti F.** A modal disturbance estimator for vibration suppression in nonlinear flexible structures // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. Vol. 330. No. 25. Pp. 6061–6069.
22. **Li S., Zhao R., Li J., Mo Y.** Piezoelectric multi-modal vibration control for all-clamped stiffened plate using multi-loop active disturbance rejection method // *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, 26–28 July, 2013, Xi'an, China. IEEE, 2013. Pp. 5351–5356.*
23. **Liu Y., Fu Y., He W., Hui Q.** Modeling and observer-based vibration control of a flexible spacecraft with external disturbances // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2018. Vol. 66. No. 11. Pp. 8648–8658.
24. **Nekhoroshikh A. N., Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Furtat I. B.** On simple design of a robust finite-time observer // *Proceedings of the 61st Conference on Decision and Control (CDC-2022), December 6–9, 2022. Cancun, Mexico. IEEE, 2022. Pp. 4746–4751.*
25. **Федотов А. В.** Применимость упрощенных моделей пьезоэлементов в задаче активного гашения колебаний // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2020. Т. 63. № 2. С. 126–132.
26. **Fedotov A. V.** Active vibration suppression of Bernoulli – Euler beam: experiment and numerical simulation // *Cybernetics and Physics*. 2019. Vol. 8. No. 4. Pp. 228–234.

REFERENCES

1. **Belyaev A. K., Fedotov A. V., Irschik H., et al.**, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, *Struct. Control Health Monit.* 25 (8) (2018) e2105.
2. **Fedotov A. V.**, The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 12 (1) (2019) 142–155 (in Russian).



3. **Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A.**, Local, modal and shape control strategies for active vibration suppression of elastic systems: experiment and numerical simulation, In book: V. A. Polyanskiy, A. K. Belyaev (Eds.). *Mechanics and Control of Solids and Structures* (Book Series: Advanced Structured Materials. Vol. 164). Springer, Cham, Switzerland (2022) 151–169.
4. **Meirovitch L., Baruh H.**, On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed-parameter systems, *J. Optim. Theory Appl.* 30 (2) (1983) 269–291.
5. **Lu J., Wang P., Zhan Z.**, Active vibration control of thin-plate structures with partial SCLD treatment, *Mech. Syst. Signal Process.* 84 (A) (2017) 531–550.
6. **Sun D., Wu H., Zhang H., Li Y.**, Vibration control of flexible plates using piezoelectric patches, *IFAC Proc. Vols.* 32 (2) (1999) 8078–8083.
7. **Gould L. A., Murray-Lasso M. A.**, On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback, *IEEE Trans. Automat.* 11 (4) (1966) 729–737.
8. **Porter B., Crossley T. R.**, *Modal control*, Taylor and Francis, London, 1972.
9. **Meirovitch L.**, *Dynamics and control of structures*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
10. **Pusch M., Ossmann D., Luspay T.**, Structured control design for a highly flexible flutter demonstrator, *Aerospace.* 6 (3) (2019) 27–46.
11. **Carvalho R., Silva S., Lopes V.**, Modal control applications in intelligent truss structures, *ABCM Symp. Ser. Mechatron.* 1 (January) (2004) 304–310.
12. **Chomette B., Chesne S., Remond D., Gaudiller L.**, Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control – application to a printed circuit board, *Mech. Syst. Signal Proc.* 24 (2) (2010) 352–364.
13. **Lee C.-K., Moon F. C.**, Modal sensors/actuators, *J. Appl. Mech.* 57 (2) (1990) 434–441.
14. **Donoso A., Bellido J. C.**, Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, *Struct. Multidisc. Optim.* 38 (4) (2009) 347–356.
15. **Peukert C., Pöhlmann P., Merx M., et al.**, Investigation of local and modal based active vibration control strategies on the example of an elastic system, *J. Mach. Eng.* 19 (2) (2019) 32–45.
16. **Zenz G., Berger W., Gerstmayer J., et al.**, Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates, *Smart Struct. Syst.* 12 (5) (2013) 547–577.
17. **Guo X., Jiang J.**, Optimization of actuator placement in a truss-cored sandwich plate with independent modal space control, *Smart Mater. Struct.* 20 (11) (2011) 115011.
18. **Sharma M., Singh S. P., Sachdeva B. L.**, Modal control of a plate using a fuzzy logic controller, *Smart Mater. Struct.* 16 (4) (2007) 1331–1341.
19. **Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Smirnova N. A., Fedotov A. V.**, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 10 (2) (2017) 69–81.
20. **Meirovitch L., Baruh H.**, The implementation of modal filters for control of structures, *J. Guid. Control. Dynam.* 8 (6) (1985) 707–716.
21. **Bagordo G., Cazzulani G., Resta F., Ripamonti F.**, A modal disturbance estimator for vibration suppression in nonlinear flexible structures, *J. Sound Vib.* 330 (25) (2011) 6061–6069.
22. **Li S., Zhao R., Li J., Mo Y.**, Piezoelectric multi-modal vibration control for all-clamped stiffened plate using multi-loop active disturbance rejection method, *Proc. 32nd Chinese Control Conf.*, 26–28 July, 2013, Xi'an, China, IEEE (2013) 5351–5356.
23. **Liu Y., Fu Y., He W., Hui Q.**, Modeling and observer-based vibration control of a flexible spacecraft with external disturbances, *IEEE Trans. Industr. Electron.* 66 (11) (2018) 8648–8658.
24. **Nekhoroshikh A. N., Efimov D., Polyakov A., et al.**, On simple design of a robust finite-time observer, *Proc. 61st Conf. on Decision and Control (CDC-2022)*, Dec. 6–9, 2022. Cancun, Mexico, IEEE (2022) 4746–4751.
25. **Fedotov A. V.**, Applicability of simplified models of piezoelectric elements in the problem of active vibration damping, *J. Instrum. Eng.* 63 (2) (2020) 126–132 (in Russian).
26. **Fedotov A. V.**, Active vibration suppression of Bernoulli – Euler beam: experiment and numerical simulation, *Cybern. Phys.* 8 (4) (2019) 228–234.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФЕДОТОВ Александр Васильевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

БЕЛЯЕВ Александр Константинович — член-корреспондент Российской академии наук, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией мехатроники Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61.
13augen@mail.ru
ORCID: 0000-0002-5934-8138

ПОЛЯНСКИЙ Владимир Анатольевич — доктор технических наук, профессор Высшей школы киберфизических систем и управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия. 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vapol@mail.ru
ORCID: 0000-0002-1199-1028

THE AUTHORS

FEDOTOV Aleksandr V.
Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS
61, Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia
alvafed@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6028-7566

BELYAEV Alexander K.
Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS
61, Bolshoi Ave. V. Isl., St. Petersburg, 199178, Russia
13augen@mail.ru
ORCID: 0000-0002-5934-8138

POLYANSKIY Vladimir A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
vapol@mail.ru
ORCID: 0000-0002-1199-1028

Статья поступила в редакцию 05.05.2023. Одобрена после рецензирования 29.06.2023. Принята 29.06.2023.
Received 05.05.2023. Approved after reviewing 29.06.2023. Accepted 29.06.2023.